Solutions des exercices du livre “Mécanique des milieux continus : une introduction”

John Botsis
Michel Deville

27 février 2019

Avant-propos

Nous avons enseigné la mécanique des milieux continus pendant deux décennies à l'EPFL et nous avons pu tester de nombreux exercises pour illustrer cette matière. Cependant leur résolution est restée dans nos tiroirs.

Nous avons décidé de publier ces solutions afin d'aider au maximum la compréhension du cours et la maîtrise des concepts. On constatera que ces solutions sont parfois simples à mettre en oeuvre. D'autres plus élaborées nécessitent un développement plus long et plus ardu.

Nous nous réfèrerons aux équations du livre “Mécanique des milieux continus : une introduction” publié aux PPUR, en faisant précéder leur numéro par le caractère gras **L** pour **L**ivre. Le solutionnaire a sa propre numérotation.

Remerciements

Nos remerciements vont à Georgios Pappas pour l'élaboration des figures et l'écriture de nombreuses solutions. Nos remerciements s'adressent également à Sotiris Catsoulis qui a relu soigneusement toutes les solutions et fait de nombreux commentaires pertinents.

John Botsis
Michel Deville
Lausanne
27 février 2019

Table des matières

Chapitre 1

Tenseurs cartésiens

Solution 1.1

Par les relations (**L**1.52) et (**L**1.15), on a

$$\delta'_{pq} = c_{pi}c_{qj}\delta_{ij} = c_{pj}c_{qj} = \delta_{pq} \ .$$

Solution 1.2

Par les propriétés du symbole de Kronecker, il vient

$$\begin{aligned}\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk} &= \delta_{11}\delta_{11}\delta_{11} + \delta_{22}\delta_{22}\delta_{22} + \delta_{33}\delta_{33}\delta_{33} = \\ &= 1+1+1 \\ &= 3 \ .\end{aligned}$$

On peut aussi démontrer la relation comme ceci

$$\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{ii}^2 = 3 \ .$$

Solution 1.3

Pour la première relation, on a

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}u_iu_j = \varepsilon_{123}u_1u_2 + \varepsilon_{231}u_2u_3 + \varepsilon_{312}u_3u_1 \\ + \varepsilon_{132}u_1u_3 + \varepsilon_{321}u_3u_2 + \varepsilon_{213}u_2u_1 = 0 \ .\end{aligned}$$

Pour la seconde relation, comme

$$\begin{cases}\delta_{ij} \neq 0 & \text{si } i = j \\ \varepsilon_{ijk} = 0 & \text{si } i = j,\end{cases}$$

il en résulte que

$$\delta_{ij}\varepsilon_{ijk} = 0 \ .$$

Solution 1.4

Soit à démontrer la relation

$$\boldsymbol{t} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{v} \ . \tag{1.1}$$

Par la définition du produit vectoriel (**L**1.31), on a

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})_k = \varepsilon_{klm} u_l v_m \ .$$

Donc le premier membre de (1.1) donne

$$(\boldsymbol{t} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}))_i = \varepsilon_{ijk} t_j (\varepsilon_{klm} u_l v_m) = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} t_j u_l v_m \ . \tag{1.2}$$

Par (**L**1.30), on sait que

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \ .$$

Combinant (1.2) et (**L**1.30), on obtient successivement

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} t_j u_l v_m &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) t_j u_l v_m \\ &= \delta_{il} \delta_{jm} t_j u_l v_m - \delta_{im} \delta_{jl} t_j u_l v_m \\ &= u_i t_m v_m - v_i t_j u_j \\ &= (\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{v} \ . \end{aligned}$$

Solution 1.5

Notons que

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \quad \text{et} \quad (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d})_l = \varepsilon_{lmn} c_m d_n \ .$$

Donc on écrit

$$((\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}))_r = \varepsilon_{ril} (\varepsilon_{ijk} a_j b_k)(\varepsilon_{lmn} c_m d_n) \ .$$

Notons que $\varepsilon_{ril} = \varepsilon_{ilr} = \varepsilon_{lri}$. En conséquence

$$\varepsilon_{lri} (\varepsilon_{ijk} a_j b_k)(\varepsilon_{lmn} c_m d_n) = \varepsilon_{lri} \varepsilon_{lmn} \varepsilon_{ijk} a_j b_k c_m d_n \ .$$

Utilisant l'identité (**L**1.30), $\varepsilon_{lri} \varepsilon_{lmn} = \delta_{rm} \delta_{in} - \delta_{rn} \delta_{im}$, on obtient

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ril} (\varepsilon_{ijk} a_j b_k)(\varepsilon_{lmn} c_m d_n) &= (\delta_{rm} \delta_{in} - \delta_{rn} \delta_{im}) \varepsilon_{ijk} a_j b_k c_m d_n \\ &= \varepsilon_{ijk} \delta_{rm} \delta_{in} a_j b_k c_m d_n - \varepsilon_{ijk} \delta_{rn} \delta_{im} a_j b_k c_m d_n \\ &= \varepsilon_{ijk} a_j b_k c_r d_i - \varepsilon_{ijk} a_j b_k c_i d_r \\ &= \varepsilon_{jki} b_k d_i a_j c_r - \varepsilon_{jki} b_k c_i a_j d_r \\ &= (\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{d}))\, c_r - (\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}))\, d_r \ . \end{aligned}$$

Finalement

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{d}))\, \boldsymbol{c} - (\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}))\, \boldsymbol{d} \ .$$

Solution 1.6

Identité (**L**1.230)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) &= \frac{\partial}{\partial x_j}(\varepsilon_{jkl}a_k b_l)\\ &= \varepsilon_{jkl}a_k\frac{\partial b_l}{\partial x_j}+\varepsilon_{jkl}b_l\frac{\partial a_k}{\partial x_j}\\ &= -\varepsilon_{kjl}a_k\frac{\partial b_l}{\partial x_j}+\varepsilon_{ljk}b_l\frac{\partial a_k}{\partial x_j}\\ &= -\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}\ .\end{aligned}$$

Identité (**L**1.231)

Par définition, l'expression $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{b}$ sous forme indicée s'écrit

$$((\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{b})_i = a_j\frac{\partial b_i}{\partial x_j}\ .$$

Avec la définition (**L**1.177) du rotationnel, on a

$$(\nabla\times\boldsymbol{b})_i = (\mathbf{rot}\ \boldsymbol{b})_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial b_k}{\partial x_j}\ .$$

Par conséquent,

$$(\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b}))_m = \varepsilon_{mni}\varepsilon_{ijk}a_n\frac{\partial b_k}{\partial x_j}\ .$$

Avec (**L**1.30), on a

$$\varepsilon_{mni}\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{imn}\varepsilon_{ijk} = \delta_{mj}\delta_{nk}-\delta_{mk}\delta_{nj}\ .$$

Le troisième terme du membre de droite de (**L**1.231) devient

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b}))_m &= (\delta_{mj}\delta_{nk}-\delta_{mk}\delta_{nj})a_n\frac{\partial b_k}{\partial x_j}\\ &= \delta_{mj}\delta_{nk}a_n\frac{\partial b_k}{\partial x_j}-\delta_{mk}\delta_{nj}a_n\frac{\partial b_k}{\partial x_j}\\ &= a_k\frac{\partial b_k}{\partial x_m}-a_j\frac{\partial b_m}{\partial x_j}\ .\end{aligned}$$

En conséquence, il vient

$$\begin{aligned}a_j\frac{\partial b_i}{\partial x_j}+b_j\frac{\partial a_i}{\partial x_j}+a_n\frac{\partial b_n}{\partial x_i}-a_j\frac{\partial b_i}{\partial x_j}+b_n\frac{\partial a_n}{\partial x_i}-b_j\frac{\partial a_i}{\partial x_j} &= a_n\frac{\partial b_n}{\partial x_i}+b_n\frac{\partial a_n}{\partial x_i}\\ &= \frac{\partial(a_n b_n)}{\partial x_i} = (\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}))_i\ .\end{aligned}$$

Identité (**L**1.232)

Le membre de droite de (**L**1.232) s'écrit

$$b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} - a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} + a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_j} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_j} = \frac{\partial (a_i b_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial (a_j b_i)}{\partial x_j} \ .$$

Celui de gauche donne

$$\varepsilon_{mni} \frac{\partial (\varepsilon_{ijk} a_j b_k)}{\partial x_n} = \varepsilon_{mni} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial (a_j b_k)}{\partial x_n} \ . \tag{1.3}$$

Par (**L**1.30), on a

$$\varepsilon_{mni} \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{imn} \varepsilon_{ijk} = \delta_{mj} \delta_{nk} - \delta_{mk} \delta_{nj} \ .$$

La relation (1.3) devient

$$(\delta_{mj} \delta_{nk} - \delta_{mk} \delta_{nj}) \frac{\partial (a_j b_k)}{\partial x_n} = \frac{\partial (a_m b_n)}{\partial x_n} - \frac{\partial (a_n b_m)}{\partial x_n} \ .$$

Identité (**L**1.233)

Il vient successivement

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_i b_j) &= a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \\ &= \boldsymbol{a} \operatorname{div} \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{a}) \boldsymbol{b} \ . \end{aligned}$$

Solution 1.7

Identité (**L**1.234)

On écrit successivement

$$\begin{aligned} (\mathbf{rot}(\Phi \boldsymbol{a}))_i &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial (\Phi a_k)}{\partial x_j} \\ &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} a_k + \varepsilon_{ijk} \Phi \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \\ &= \boldsymbol{\nabla} \Phi \times \boldsymbol{a} + \Phi \, \mathbf{rot} \, \boldsymbol{a} \\ &= -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{\nabla} \Phi + \Phi \, \mathbf{rot} \, \boldsymbol{a} \ . \end{aligned}$$

Identité (**L**1.235)

On a

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\nabla}(\Phi \boldsymbol{a})))_i &= \frac{\partial \Phi a_i}{\partial x_j} \\ &= \Phi \frac{\partial a_i}{\partial x_j} + a_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \\ &= \Phi \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{\nabla} \Phi \ . \end{aligned}$$

Identité (**L**1.236)

La composante j du gradient de Φ donne

$$(\boldsymbol{\nabla}\Phi)_j = \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \ .$$

Dès lors

$$\left(\left(\nabla^2\left(\boldsymbol{\nabla}\Phi\right)\right)_j = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_i}\right) = \left(\boldsymbol{\nabla}(\nabla^2\Phi)\right)_j \ .$$

Donc

$$\nabla^2\left(\boldsymbol{\nabla}\Phi\right) = \boldsymbol{\nabla}\left(\nabla^2\Phi\right) \ .$$

Identité (**L**1.237)

La composante l du vecteur formé par le premier membre est telle que

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{\nabla}\times\left(\nabla^2\boldsymbol{a}\right)\right)_l &= \left(\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^2 a_k}{\partial x_m \partial x_m}\right)\right)_l = \left(\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_m}\left(\frac{\partial a_k}{\partial x_j}\right)\right)_l \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_m}\left(\varepsilon_{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x_j}\right)\right)_l = \left(\nabla^2\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}\right)\right)_l \ .\end{aligned}$$

Identité (**L**1.238)

Première égalité sous forme indicielle

$$(\Delta\boldsymbol{a})_k = \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_m \partial x_m} = \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial a_k}{\partial x_m}\right) = \left(\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{a})\right)_k \ .$$

Seconde égalité

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})_i &= \varepsilon_{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x_j} \\ (\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}))_l &= \varepsilon_{lmi}\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\varepsilon_{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x_j}\right) = \varepsilon_{lmi}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 a_k}{\partial x_m \partial x_j} \ .\end{aligned}$$

Notons que par (**L**1.30), on a

$$\varepsilon_{lmi}\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ilm}\varepsilon_{ijk} = \delta_{lj}\delta_{mk} - \delta_{lk}\delta_{mj} \ .$$

En conséquence, il vient

$$\begin{aligned}\varepsilon_{lmi}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 a_k}{\partial x_m \partial x_j} &= \left(\delta_{lj}\delta_{mk} - \delta_{lk}\delta_{mj}\right)\frac{\partial^2 a_k}{\partial x_m \partial x_j} \\ &= \delta_{lj}\delta_{mk}\frac{\partial^2 a_k}{\partial x_m \partial x_j} - \delta_{lk}\delta_{mj}\frac{\partial^2 a_k}{\partial x_m \partial x_j}\end{aligned}$$

et donc

$$
\begin{aligned}
(\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{a}))_l &= \frac{\partial^2 a_m}{\partial x_m \partial x_l} - \frac{\partial^2 a_l}{\partial x_j \partial x_j} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial a_m}{\partial x_m}\right) - \frac{\partial^2 a_l}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_l}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{a}) - \Delta a_l \\
&= \left(\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{a}) - \nabla^2 \boldsymbol{a}\right)_l \ .
\end{aligned}
$$

Cette dernière relation est valable pour chaque composante de la fonction vectorielle $\boldsymbol{a}$

$$
\Delta \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{a}) - \textbf{rot rot } \boldsymbol{a} \ .
$$

Solution 1.8

Identité (**L**1.239)

La composante i du vecteur du premier membre est telle que

$$
\begin{aligned}
(\nabla(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}))_i &= \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} x_j + a_j \delta_{ij}\right) \\
&= \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} x_j + a_i\right) = \left(\boldsymbol{a} + (\nabla \boldsymbol{a})^T \boldsymbol{x}\right)_i \ .
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\nabla(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} + (\nabla \boldsymbol{a})^T \boldsymbol{x} \ .
$$

Identité (**L**1.240)

Le laplacien s'écrit

$$
\nabla^2(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 (a_i x_i)}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial (a_i x_i)}{\partial x_j}\right) \ .
$$

En développant, on a

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial (a_i x_i)}{\partial x_j}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} x_i + a_i \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} x_i + a_i \delta_{ij}\right) \\
&= \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_j} x_i + \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_i}{\partial x_j} + \delta_{ij}\frac{\partial a_i}{\partial x_j} \\
&= \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_j} x_i + \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\delta_{ij} + \delta_{ij}\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_j} x_i + 2\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\delta_{ij} \\
&= (\nabla^2 \boldsymbol{a})_i + 2(\text{div } \boldsymbol{a})_i \ .
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\nabla^2(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}) = 2 \,\text{div } \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} \cdot \left(\nabla^2 \boldsymbol{a}\right) \ .
$$

Identité (**L**1.241)
Le laplacien s'écrit

$$\left(\nabla^2\left(\Phi \boldsymbol{x}\right)\right)_i = \frac{\partial^2(\Phi x_i)}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial(\Phi x_i)}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} x_i + \Phi \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right)$$
$$= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_j} x_i + \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\delta_{ij} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\delta_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_j} x_i + 2\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \ .$$

Donc

$$\left(\nabla^2\left(\Phi \boldsymbol{x}\right)\right)_i = (\boldsymbol{x}\nabla^2\Phi)_i + 2(\nabla\phi)_i$$
$$\nabla^2\left(\Phi \boldsymbol{x}\right) = 2\nabla\Phi + \boldsymbol{x}\nabla^2\Phi \ .$$

Solution 1.9

On écrit par (**L**1.52)

$$\begin{aligned} L'_{ij} &= \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{L}\boldsymbol{e}'_j = \\ &= (c_{ik}\boldsymbol{e}_k) \cdot \boldsymbol{L}(c_{jl}\boldsymbol{e}_l) = \\ &= c_{ik}c_{jl}\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{L}\boldsymbol{e}_l = \\ &= c_{ik}c_{jl}L_{kl} \ . \end{aligned}$$

De plus, par (**L**1.15)

$$c_{ik}c_{il} = \delta_{kl} \ .$$

Il vient

$$\begin{aligned} tr(\boldsymbol{L}') &= L'_{ii} \\ &= c_{ik}c_{il}L_{kl} \\ &= \delta_{kl}L_{kl} \\ &= L_{kk} \\ &= tr(\boldsymbol{L}) \ . \end{aligned}$$

Solution (1.10)

Identité (**L**1.69)

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{v} = u_i\left(\boldsymbol{L}^T\right)_{im} v_m = u_i L_{mi} v_m = L_{mi} u_i v_m = (\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})$$
$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{v} = u_i\left(\boldsymbol{L}^T\right)_{im} v_m = u_i L_{mi} v_m = v_m L_{mi} u_i = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}) \ .$$

Identité (**L**1.71)

Par la définition du produit intérieur de deux tenseurs, on obtient

$$\left(\left(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\right)\boldsymbol{L}\right)_{ij} = \left(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\right)_{ik} L_{kj} = a_i b_k L_{kj} = a_i\left(\boldsymbol{L}^T\right)_{jk} b_k = \left(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{b}\right)_{ij} \ .$$

Solution 1.11

$$I_1(\boldsymbol{L}) = L_{11} + L_{22} + L_{33} = tr\boldsymbol{L} \ .$$

$$\begin{aligned}
I_2(\boldsymbol{L}) &= L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12} + L_{22}L_{33} - L_{23}L_{32} + L_{11}L_{33} - L_{13}L_{31} = \\
&= (L_{11}L_{22} + L_{22}L_{33} + L_{11}L_{33}) - (L_{21}L_{12} + L_{23}L_{32} + L_{13}L_{31}) = \\
&= \frac{1}{2}(L_{11} + L_{22} + L_{33})^2 - \frac{1}{2}(L_{11}^2 + L_{22}^2 + L_{33}^2)] \\
&- (L_{21}L_{12} + L_{23}L_{32} + L_{13}L_{31}) = \\
&= \frac{1}{2}(L_{11} + L_{22} + L_{33})^2 \\
&- \frac{1}{2}(L_{11}^2 + L_{22}^2 + L_{33}^2 + 2L_{21}L_{12} + 2L_{23}L_{32} + 2L_{13}L_{31}) = \\
&= \frac{1}{2}(tr\boldsymbol{L})^2 - \frac{1}{2}(tr(\boldsymbol{L}\boldsymbol{L})) \\
&= \frac{1}{2}((tr\boldsymbol{L})^2 - (tr(\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}))) \\
&= \frac{1}{2}(L_{ii}L_{jj} - L_{ij}L_{ji}) \ .
\end{aligned}$$

$$I_3(\boldsymbol{L}) = det \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} = \varepsilon_{ijk} L_{i1} L_{j2} L_{k3} = \det \boldsymbol{L} \ .$$

Solution 1.12

Avec la définition (**L**1.159), on trouve

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}(A_{jk}x_jx_k) &= A_{jk}\boldsymbol{\nabla}(x_jx_k) \\
&= A_{jk}(x_k\boldsymbol{\nabla}x_j + x_j\boldsymbol{\nabla}x_k) \\
&= A_{jk}(x_k\delta_{ij} + x_j\delta_{ik}) \\
&= A_{ik}x_k + A_{ji}x_j \\
&= (A_{ij} + A_{ji})x_j\boldsymbol{e}_i \ .
\end{aligned}$$

Solution 1.13

On décompose le tenseur D_{ij} en la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique. Soit

$$D_{ij} = D_{ij}^S + D_{ij}^A \ ,$$

avec les relations

$$D_{ij}^S = D_{ji}^S$$

et

$$D^A_{ij} = -D^A_{ji} \ .$$

Dès lors, on calcule

$$\begin{aligned} D_{ij} x_i x_j &= (D^S_{ij} + D^A_{ij}) x_i x_j \\ &= D^S_{ij} x_i x_j + D^A_{ij} x_i x_j \ . \end{aligned}$$

On utilise le fait que le produit scalaire du tenseur antisymétrique D^A_{ij} et du tenseur symétrique $x_i x_j$ est nul (cfr. exemple **L**1.7) pour obtenir

$$D_{ij} x_i x_j = D^S_{ij} x_i x_j \ .$$

Solution 1.14

Puisque $\boldsymbol{Q}$ est orthogonal, la relation (**L**1.92) donne

$$\boldsymbol{Qu} \cdot \boldsymbol{Qv} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \ .$$

Par (**L**1.69), on a

$$\boldsymbol{Lu} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{Lu} \ .$$

En combinant ces deux dernières relations, il vient

$$\boldsymbol{Qu} \cdot \boldsymbol{Qv} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{Qv} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$$

et donc

$$\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} \ .$$

Comme

$$\boldsymbol{Q}^{-T} \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q}^{-T} \boldsymbol{I} \boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q}^{-T} \boldsymbol{Q}^T$$

on conclut

$$\boldsymbol{Q} \boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{I} \ .$$

Multipliant à gauche et à droite cette équation par $\boldsymbol{Q}^{-1}$, on écrit

$$\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{I} \boldsymbol{Q}^{-1}$$

et conséquemment

$$\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q}^{-1} \ .$$

Solution 1.15

Le tenseur antisymétrique $\boldsymbol{L}^A$ a pour matrice la forme suivante

$$[L^A] = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le premier invariant est la somme des éléments diagonaux (cf. (**L**1.121))

$$I_1 = 0 \ .$$

On obtient facilement

$$I_2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$$

et

$$I_3 = 0 \ .$$

L'équation caractéristique (**L**1.120) donne

$$\lambda^3 + (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)\lambda = 0$$

ou encore

$$(\lambda^2 + (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2))\lambda = 0 \ .$$

Les valeurs propres en sont les racines. On a

$$\lambda_1 = 0$$

et

$$\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} \ .$$

Le système (**L**1.111) produit les équations

$$\begin{aligned} 0 - \omega_3 n_2 + \omega_2 n_3 &= 0 \\ \omega_3 n_1 + 0 - \omega_1 n_3 &= 0 \ . \end{aligned}$$

On en tire

$$\begin{aligned} \frac{n_2}{n_3} &= \frac{\omega_2}{\omega_3} \\ \frac{n_1}{n_3} &= \frac{\omega_1}{\omega_3} \ . \end{aligned}$$

Le vecteur $\boldsymbol{n}$ est unitaire

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \ .$$

On trouve

$$n_3^2\left(\left(\frac{\omega_1}{\omega_3}\right)^2+\left(\frac{\omega_2}{\omega_3}\right)^2+1\right)=1\ .$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} n_1 &= \omega_1 \\ n_2 &= \omega_2 \\ n_3 &= \omega_3\ . \end{aligned}$$

Solution 1.16

Avec (**L**1.123), on calcule

$$\boldsymbol{T}^3\boldsymbol{T}^{-1}-I_1\boldsymbol{T}^2\boldsymbol{T}^{-1}+I_2\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}-I_3\boldsymbol{I}\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{T}^2-I_1\boldsymbol{T}+I_2\boldsymbol{I}-I_3\boldsymbol{T}^{-1}=\mathbf{0}$$

Avec (**L**1.139) et (**L**1.140), on a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{T}) &= \varphi_0\boldsymbol{I}+\varphi_1\boldsymbol{T}+\varphi_2(I_1\boldsymbol{T}-I_2\boldsymbol{I}+I_3\boldsymbol{T}^{-1})= \\ &=(\varphi_0-\varphi_2 I_2)\boldsymbol{I}+(\varphi_1+\varphi_2 I_1)\boldsymbol{T}+\varphi_2 I_3\boldsymbol{T}^{-1} \end{aligned}$$

Posant

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \varphi_0-\varphi_2 I_2 \\ \alpha_1 &= \varphi_1+\varphi_2 I_1 \\ \alpha_2 &= \varphi_2 I_3\ , \end{aligned}$$

on obtient la relation (**L**1.245).

Solution 1.17

Par (**L**1.109) et (**L**1.59), on a successivement

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}\boldsymbol{n}_i=\lambda_i\boldsymbol{L}\boldsymbol{n}_i$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}^2\boldsymbol{n}_i &= \lambda_i\lambda_i\boldsymbol{n}_i=\lambda_i^2\boldsymbol{n}_i \\ \boldsymbol{L}^3\boldsymbol{n}_i &= \lambda_i^2\boldsymbol{L}\boldsymbol{n}_i=\lambda_i^3\boldsymbol{n}_i\ . \end{aligned}$$

Chaque terme de l'équation caractéristique peut être récrit en utilisant les relations précédentes

$$\begin{aligned} \lambda_i^3\boldsymbol{n}_i &= \boldsymbol{L}^3\boldsymbol{n}_i \\ -I_1\lambda_i^2\boldsymbol{n}_i &= -I_1\boldsymbol{L}^2\boldsymbol{n}_i \\ I_2\lambda_i\boldsymbol{n}_i &= I_2\boldsymbol{L}\boldsymbol{n}_i \\ -I_3\boldsymbol{n}_i &= -I_3\boldsymbol{I}\boldsymbol{n}_i\ . \end{aligned}$$

Il vient consécutivement

$$\lambda_i^3 \boldsymbol{n}_i - I_1\lambda_i^2\boldsymbol{n}_i + I_2\lambda_i\boldsymbol{n}_i - I_3\boldsymbol{n}_i = \boldsymbol{L}^3\boldsymbol{n}_i - I_1\boldsymbol{L}^2\boldsymbol{n}_i + I_2\boldsymbol{L}\boldsymbol{n}_i - I_3\boldsymbol{I}\boldsymbol{n}_i$$

$$(\lambda_i^3 - I_1\lambda_i^2 + I_2\lambda_i - I_3)\boldsymbol{n}_i = (\boldsymbol{L}^3 - I_1\boldsymbol{L}^2 + I_2\boldsymbol{L} - I_3\boldsymbol{I})\boldsymbol{n}_i \ .$$

Donc on a

$$\boldsymbol{L}^3 - I_1\boldsymbol{L}^2 + I_2\boldsymbol{L} - I_3\boldsymbol{I} = 0 \ .$$

Solution 1.18

Soit la matrice $[A]$ d'ordre 3 telle que

$$[A] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \ . \tag{1.4}$$

Son déterminant est le scalaire donné par la relation

$$\begin{aligned} \det[A] = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

1) Le produit $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}a_{il}a_{jm}a_{kn}$ engendre 36 termes non nuls (parmi les 81 possibles) qu'on peut grouper en six expressions indépendantes comme celles ci-avant. Donc l'équation

$$\det[A] = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}a_{il}a_{jm}a_{kn}$$

est le déterminant de $[A]$.

2) Par définition, la matrice inverse de $[A]$ est

$$[A]^{-1} = \frac{[M]^T}{\det[A]} \ , \tag{1.5}$$

où $[M]^T$ est la transposée de la matrice cofacteur de $[A]$ avec $\det[A] \neq 0$. Pour la matrice $[A]$ donnée par (1.4) la matrice cofacteur a les éléments suivants

$$\begin{aligned}
M_{11} &= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & M_{12} &= (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\
M_{13} &= (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & M_{21} &= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
M_{22} &= (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & M_{23} &= (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
M_{31} &= (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & M_{32} &= (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\
M_{33} &= (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \ .
\end{aligned}$$

On peut écrire

$$[M] = \begin{bmatrix} (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) & -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) & (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ -(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) & (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) & -(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) \\ (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) & -(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \end{bmatrix}$$

Ces éléments s'expriment en notation indicée en utilisant le symbole de permutation

$$M_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}a_{km}a_{ln} \ .$$

On peut vérifier facilement que l'expression $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}$ produit seulement quatre termes non nuls ou deux termes qui apparaissent deux fois. Ceci rend nécessaire le facteur un demi dans la relation. Par exemple

$$\begin{aligned} M_{13} &= \varepsilon_{123}\varepsilon_{312}a_{21}a_{32} + \varepsilon_{123}\varepsilon_{321}a_{22}a_{31} \\ &+ \varepsilon_{132}\varepsilon_{312}a_{31}a_{22} + \varepsilon_{132}\varepsilon_{321}a_{32}a_{21} \\ &= 2(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \ . \end{aligned}$$

La transposée de la matrice cofacteur $[M]$ s'appelle l'adjointe de $[A]$. On l'exprime ainsi

$$\left([M]^T\right)_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{imn}a_{km}a_{ln} \ . \tag{1.6}$$

En utilisant (1.6) dans (1.5), on obtient sous forme indicée les éléments de la matrice inverse

$$\left([A]^{-1}\right)_{ij} = \frac{1}{2\det[A]}\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{imn}a_{km}a_{ln} \ .$$

Solution 1.19

Une suite de manipulations algébriques conduit au résultat

$$
\begin{aligned}
\nabla^2(fg) &= \frac{\partial^2(fg)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(fg)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2(fg)}{\partial x_3^2} = \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial(fg)}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial(fg)}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial(fg)}{\partial x_3}\right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}g + f\frac{\partial g}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}g + f\frac{\partial g}{\partial x_2}\right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}g + f\frac{\partial g}{\partial x_3}\right) = \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}g + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}f + \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}g + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial g}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial g}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}f + \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}g + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial g}{\partial x_3} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial g}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_3^2}f = \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}\right)g + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_3^2}\right)f \\
&+ 2\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_1} + 2\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial g}{\partial x_2} + 2\frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial g}{\partial x_3} = \\
&= f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2\boldsymbol{\nabla} f \cdot \boldsymbol{\nabla} g \ .
\end{aligned}
$$

Chapitre 2

Cinématique des milieux continus

Solution 2.1

Avec la relation (**L**2.8), on écrit

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},t) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X} = -\frac{1}{2}X_1\boldsymbol{e}_1$$

et par (**L**2.9), on a

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = -x_1\boldsymbol{e}_1 \ .$$

Solution 2.2

Par (**L**2.133), on a

$$x_1 = X_1 + kX_2 \qquad x_2 = X_2 \qquad x_3 = X_3 \ .$$

Se rappelant la définition du tenseur du gradient de déformation (**L**2.67)

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \ ,$$

on calcule successivement

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le tenseur de déformation de Cauchy-Green droit

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & k^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le tenseur de déformation de Cauchy-Green gauche

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+k^2 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le tenseur de déformation de Green-Lagrange

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ k & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

le tenseur de déformation d'Euler-Almansi

$$\boldsymbol{e} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{c}^{-1})$$

$$\boldsymbol{c}^{-1} = \boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{F}^{-1}$$

$$\boldsymbol{F}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}^{-1} = \boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{F}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ -k & k^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ k & -k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

On détaille ci-après le calcul de $\boldsymbol{F}^{-1}$ par la méthode de l'adjointe et des cofacteurs

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -k$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} k & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{M}| = \begin{vmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\boldsymbol{F}^{-1} = \frac{\boldsymbol{A}^T}{|\boldsymbol{M}|} = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -k+k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}$$

Solution 2.3

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}^{-1} = \begin{pmatrix} m^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & m^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & m^{-1} \end{pmatrix}$$

Comme

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

on obtient avec (**L**2.130)

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

le tenseur de déformation de Cauchy-Green droit

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 & 0 & 0 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 0 & 0 & m^2 \end{pmatrix} .$$

On remarque que $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{c}$ puisque les tenseurs $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{F}^T$ sont diagonaux.

le tenseur de déformation de Green-Lagrange

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} m^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & m^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & m^2-1 \end{pmatrix}$$

l'inverse du tenseur de déformation de Cauchy-Green gauche

$$\boldsymbol{c}^{-1} = \boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{F}^{-1} = \begin{pmatrix} m^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & m^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & m^{-2} \end{pmatrix}$$

le tenseur de déformation d'Euler-Almansi

$$\boldsymbol{e} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}^{-1}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-m^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1-m^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-m^{-2} \end{pmatrix} .$$

Solution 2.4

1) La trajectoire s'obtient comme la courbe dans l'espace qui décrit les positions successives $\boldsymbol{x}$ d'une particule $\boldsymbol{X}$ avec le temps t. On élimine la variable t dans la relation $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X}, t)$ de manière à obtenir un système d'équations implicites liant les positions x_i. On trouve facilement

$$\begin{aligned}\left(\frac{x_1 - X_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - X_2}{b}\right)^2 &= \cos^2 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{X_1}{L}) \\ &+ \sin^2 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{X_1}{L}) = 1 \\ x_3 &= X_3 .\end{aligned}$$

La trajectoire d'une particule de coordonnées matérielles X_1, X_2, X_3 données est située dans le plan $x_3 = X_3$. Dans ce plan, la trajectoire est une ellipse dont le centre est au point de coordonnées X_1, X_2, X_3 et dont les axes principaux sont orientés dans les directions $\boldsymbol{e}_1$ et $\boldsymbol{e}_2$ et ont $2a$ et $2b$ pour longueur respective.

2) Comme le mouvement est en description lagrangienne, on trouve les composantes de vitesse et d'accélération par la dérivée partielle par rapport au temps avec les X_j constants, fixés. Il vient

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{\partial x_1}{\partial t} \mid_{X_j} = -\frac{2\pi a}{T} \sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{X_1}{L}) \\ V_2 &= \frac{\partial x_2}{\partial t} \mid_{X_j} = \frac{2\pi b}{T} \cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{X_1}{L}) \\ V_3 &= \frac{\partial x_3}{\partial t} \mid_{X_j} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\partial V_1}{\partial t} \mid_{X_j} = -\frac{4\pi^2 a}{T^2} \cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{X_1}{L}) \\ A_2 &= \frac{\partial V_2}{\partial t} \mid_{X_j} = -\frac{4\pi^2 b}{T^2} \sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{X_1}{L}) \\ A_3 &= \frac{\partial V_3}{\partial t} \mid_{X_j} = 0 \ . \end{aligned}$$

3) Le tenseur du gradient de déformation est obtenu par la relation $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$. On a

$$[F] = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2\pi a}{L} \sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{X_1}{L}) & 0 & 0 \\ -\frac{2\pi b}{L} \cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{X_1}{L}) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

En représentation lagrangienne, on écrit $\frac{D\boldsymbol{F}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} F_{ij} \mid_{X_k}$. La matrice $[\dot{F}]$ donne

$$[\dot{F}] = \begin{pmatrix} \frac{4\pi^2 a}{LT} \cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{X_1}{L}) & 0 & 0 \\ \frac{4\pi^2 b}{LT} \sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{X_1}{L}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

4) En utilisant la relation (**L**2.179), $\dot{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{F}$, on a $\boldsymbol{L} = \dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1}$. Comme d'une part, $det(\boldsymbol{F}) = 1 + \frac{2\pi a}{L} \sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{X_1}{L})$ et que d'autre part, l'adjointe de $[F]$ s'écrit en posant $2\pi(\frac{t}{T} - \frac{X_1}{L}) = arg$

$$adj[F] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2\pi b}{L} \cos arg & 1 + \frac{2\pi a}{L} \sin arg & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{2\pi a}{L} \sin arg \end{pmatrix} ,$$

on obtient

$$[F^{-1}] = \frac{1}{det(\boldsymbol{F})} adj[F] = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\frac{2\pi a}{L}\sin 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{X_1}{L})} & 0 & 0 \\ \frac{\frac{2\pi b}{L}\cos 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{X_1}{L})}{1+\frac{2\pi a}{L}\sin 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{X_1}{L})} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

On trouve donc

$$[L] = \begin{pmatrix} \frac{4\pi^2 a \cos 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{X_1}{L})}{LT+2\pi aT\sin 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{X_1}{L})} & 0 & 0 \\ \frac{4\pi^2 b \sin 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{X_1}{L})}{LT+2\pi aT\sin 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{X_1}{L})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

5) Les tenseurs $\boldsymbol{d}$ et $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ sont respectivement les parties symétrique et antisymétrique de $\boldsymbol{L}$, cf. (**L**2.184). Il vient

$$[d] = \begin{pmatrix} \frac{4\pi^2 a \cos 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{X_1}{L})}{LT+2\pi aT\sin 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{X_1}{L})} & \frac{2\pi^2 b \sin 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{X_1}{L})}{LT+2\pi aT\sin 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{X_1}{L})} & 0 \\ \frac{2\pi^2 b \sin 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{X_1}{L})}{LT+2\pi aT\sin 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{X_1}{L})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$[\dot{\boldsymbol{\omega}}] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-2\pi^2 b \sin 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{X_1}{L})}{LT+2\pi aT\sin 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{X_1}{L})} & 0 \\ \frac{2\pi^2 b \sin 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{X_1}{L})}{LT+2\pi aT\sin 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{X_1}{L})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Pour calculer les composantes du vecteur tourbillon, on fait appel à la relation (**L**2.187).

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_1 &= 0 \\ \dot{\Omega}_2 &= 0 \\ \dot{\Omega}_3 = \dot{\omega}_{21} &= \frac{2\pi^2 b \sin 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{X_1}{L})}{LT+2\pi aT\sin 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{X_1}{L})} . \end{aligned}$$

Solution 2.5

1) Avec la définition de tenseur du gradient de déformation (**L**2.67), on calcule

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Comme le tenseur $\boldsymbol{F}$ est indépendant de $\boldsymbol{X}$, la déformation est homogène. Puisque $\det \boldsymbol{F} \neq 1$, cette déformation n'est pas isochore, comme on le verra au chapitre 3, (cf. (**L**3.38)). Pour que la transformation soit inversible, il faut respecter les inégalités (**L**2.69). Ceci implique que $-1 < a < +1$.

2) On calcule successivement :
le tenseur de déformation de Cauchy-Green droit

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 1+a^2 & 2a & 0 \\ 2a & 1+a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le tenseur de déformation de Green-Lagrange

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I}) = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{2} & a & 0 \\ a & \frac{a^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

le gradient du vecteur déplacement

$$\boldsymbol{\nabla u} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

le tenseur de déformation infinitésimale

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla u} + \boldsymbol{\nabla u}^T) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Avec l'hypothèse

$$a << 1$$

les tenseurs $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{\varepsilon}$ deviennent

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1+a^2 & 2a & 0 \\ 2a & 1+a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 2a & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I}) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon} \ .$$

3) Les vecteurs propres unitaires de $\boldsymbol{C}$ sont donnés par la relation (**L**2.110). Exprimons les vecteurs orientés suivant la direction x_3 et les diagonales AH et DE. On a

$$\boldsymbol{A}_1 = \alpha(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)$$
$$\boldsymbol{A}_2 = \beta(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)$$
$$\boldsymbol{A}_3 = \gamma\boldsymbol{x}_3 \ .$$

Par (**L**2.120), on a

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_i = \lambda_i^2 \boldsymbol{A}_i \qquad \text{(sans sommation sur } i\text{)}$$

et donc, on évalue successivement

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_1 &= \begin{pmatrix} 1+a^2 & 2a & 0 \\ 2a & 1+a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = (1+a)^2 \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= (1+a)^2 \boldsymbol{A}_1 \\
\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_2 &= \begin{pmatrix} 1+a^2 & 2a & 0 \\ 2a & 1+a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \\ 0 \end{pmatrix} = (1-a)^2 \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= (1-a)^2 \boldsymbol{A}_2 \\
\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_3 &= \begin{pmatrix} 1+a^2 & 2a & 0 \\ 2a & 1+a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}_3 \ .
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de $\boldsymbol{C}$ sont

$$\begin{aligned}
\lambda_1^2 &= (1+a)^2 \\
\lambda_2^2 &= (1-a)^2 \\
\lambda_3^2 &= 1
\end{aligned}$$

Par la représentation spectrale de $\boldsymbol{C}$, on écrit

$$\boldsymbol{C} = \lambda_i^2 (\boldsymbol{A}_i \otimes \boldsymbol{A}_i) = \lambda_1^2 (\boldsymbol{A}_1 \otimes \boldsymbol{A}_1) + \lambda_2^2 (\boldsymbol{A}_2 \otimes \boldsymbol{A}_2) + \lambda_3^2 (\boldsymbol{A}_3 \otimes \boldsymbol{A}_3) \ .$$

On a

$$\boldsymbol{A}_1 \otimes \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha^2 & 0 \\ \alpha^2 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_2 \otimes \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^2 & -\beta^2 & 0 \\ -\beta^2 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_3 \otimes \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

On vérifie

$$[C] = (1+a)^2 \times \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha^2 & 0 \\ \alpha^2 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (1-a)^2 \times \begin{pmatrix} \beta^2 & -\beta^2 & 0 \\ -\beta^2 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+1 \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix} =$$

$$= (1+a)^2 \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (1-a)^2 \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+1 \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a^2 & 2a & 0 \\ 2a & 1+a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Par (**L**.2.109), on calcule facilement

$$[U] = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [F] .$$

4)

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{-1} = \boldsymbol{I} .$$

Solution 2.6

Pour le tenseur de Cauchy-Green droite, on calcule

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F};\ \boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{F}^{*T}\boldsymbol{F}^*;\ \boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{F};\ \boldsymbol{F}^{*T} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{Q}^{-1}$$

$$\boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{I}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} = \boldsymbol{C} .$$

Pour le tenseur de Green-Lagrange, il vient

$$2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{C} - \boldsymbol{I};\ \boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{C}$$

$$2\boldsymbol{E}^* = 2\boldsymbol{E} \Rightarrow \boldsymbol{E}^* = \boldsymbol{E} .$$

Pour le tenseur de Cauchy-Green gauche, on obtient

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T;\ \boldsymbol{c}^* = \boldsymbol{F}^*\boldsymbol{F}^{*T};\ \boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{F};\ \boldsymbol{F}^{*T} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{Q}^{-1}$$

$$\boldsymbol{c}^* = \boldsymbol{F}^*\boldsymbol{F}^{*T} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{c}\boldsymbol{Q}^T .$$

En conséquence, $\boldsymbol{c}$ est spatialement objectif. Pour le tenseur d'Euler-Almansi, on vérifie

$$2\boldsymbol{e}^* = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{c}^{*-1};\ \boldsymbol{Q}^{-T} = \boldsymbol{Q};\ \boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^T$$

$$2\boldsymbol{e}^* = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{c}^{*-1} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{I}\boldsymbol{Q}^T - \boldsymbol{Q}^{-T}\boldsymbol{c}^{-1}\boldsymbol{Q}^{-1} = 2\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}\boldsymbol{Q}^T .$$

Solution 2.7

Par (**L**2.205) et l'orthogonalité de $\boldsymbol{R}$, on a

$$\boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{QF} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I} \ .$$

Par le théorème de décomposition polaire (**L**1.132), on écrit

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{RU} = \boldsymbol{VR}; \ \boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{R}^*\boldsymbol{U}^* = \boldsymbol{V}^*\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{QF}$$

$$\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{U}^* = \boldsymbol{QRU}$$

$$\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{QRUU}^{*-1} \ .$$

Cette relation est trivialement vérifiée si on pose $\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{QR}$ et $\boldsymbol{U}^* = \boldsymbol{U}$. Similairement, on a successivement

$$\boldsymbol{V}^*\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{QVR}$$

et donc,

$$\boldsymbol{V}^* = \boldsymbol{QVRR}^{*-1} = \boldsymbol{QV}(\boldsymbol{RR}^T\boldsymbol{Q}^T) = \boldsymbol{QVQ}^T \ .$$

Solution 2.8

A l'aide de (**L**2.88), (**L**2.91), (**L**2.179) et (**L**2.180), on a

$$2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{C} - \boldsymbol{I}; \ \boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}; \ \dot{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{LF}; \ 2\boldsymbol{d} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T \ .$$

Donc, il vient successivement

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \frac{\dot{\boldsymbol{C}}}{2}$$

$$\dot{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{F}^T\dot{\boldsymbol{F}} + \dot{\boldsymbol{F}}^T\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{LF} + \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^T(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T)\boldsymbol{F} = 2\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{dF}$$

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{dF} \ .$$

Solution 2.9

Le mouvement décrit par les relations

$$x_1 = \lambda_1 X_1, \quad x_2 = \lambda_2 X_2, \quad x_3 = \lambda_3 X_3 \ ,$$

conduit à écrire le tenseur du gradient de déformation défini par (**L**2.67)

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

comme le tenseur diagonal

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} .$$

La matrice du tenseur de déformation de Cauchy-Green droite est

$$\begin{aligned} [C] = [F]^T[F] &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et celle du tenseur de déformation de Green-Lagrange est donnée par

$$[E] = \frac{1}{2}([C] - [I]) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 - 1 \end{pmatrix} .$$

Par (**L**2.88)

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}^2$$

il vient

$$[U] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

et donc,

$$\begin{cases} [F] = [U] \\ [F] = [RU] \end{cases}$$

et

$$[R] = [I] .$$

Solution 2.10

Avec (**L**2.91) et (**L**2.92), on a

$$2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I} \quad \text{et} \quad 2\boldsymbol{e} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{F}^{-1} .$$

On multiplie la dernière relation à gauche par $\boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{F}^T(= \boldsymbol{I})$ et à droite par $\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{-1}$ pour obtenir successivement

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{e} &= \boldsymbol{F}^{-T}(\boldsymbol{F}^T(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{F}^{-1})\boldsymbol{F})\boldsymbol{F}^{-1} \\ &= \boldsymbol{F}^{-T}(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{F})\boldsymbol{F}^{-1} \\ &= \boldsymbol{F}^{-T}(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{F}^{-1} \\ &= 2\boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{E}\boldsymbol{F}^{-1} . \end{aligned}$$

Par le théorème de décomposition polaire, on a

$$\boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{U} \boldsymbol{R}^T \ .$$

Par la définition (**L**2.89), on calcule

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^2\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{R}\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}^T \ .$$

Solution 2.11

On se rappelle la relation (**L**2.108)

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}_i = \lambda_i \boldsymbol{A}_i \ .$$

Avec (**L**2.112) il vient

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}_i = \lambda_i \boldsymbol{R}\boldsymbol{A}_i; \ \ \boldsymbol{F}\boldsymbol{A}_i = \lambda_i \boldsymbol{b}_i \ .$$

Avec (**L**2.109)

$$\boldsymbol{U} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \boldsymbol{A}_i \otimes \boldsymbol{A}_i \ ,$$

on calcule

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{U} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i (\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}_i) \otimes \boldsymbol{A}_i \quad \text{et} \quad \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{A}_i \ .$$

Solution 2.12

La relation (**L**2.157) est donnée par $\cos\gamma_{12} \cong 2\varepsilon_{12}$, où γ_{12} est l'angle entre deux vecteurs initialement (avant déformation) orthogonaux. Les variables ε_{ij} sont les composantes du tenseur de déformation infinitésimale. Les composantes des vecteurs avant et après le mouvement (ou déformation) sont données par les relations suivantes en se référant à la figure 2.1

$$d\boldsymbol{X} : (dX_1, 0, 0) \rightarrow d\boldsymbol{x} : (dx_1, dx_2, dx_3) \tag{2.1}$$

$$d\boldsymbol{Y} : (0, dY_2, 0) \rightarrow d\boldsymbol{y} : (dy_1, dy_2, dy_3) \ . \tag{2.2}$$

Selon le mouvement du corps, on a d'après (**L**2.8)

$$dx_i = dU_i + dX_i \ . \tag{2.3}$$

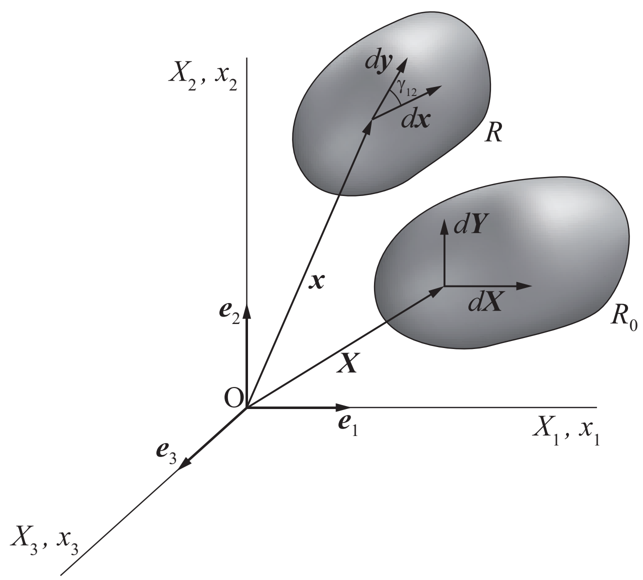

Figure 2.1 Modification des angles entre deux vecteurs.

On remplace dU_i par l'expression suivante (voir p. 90 du livre)

$$dU_i = \varepsilon_{ij} dX_j + \omega_{ij} dX_j \ .$$

Pour simplifier les calculs, on fait l'hypothèse que les rotations infinitésimales sont nulles. Donc

$$\omega_{ij} = 0 \Rightarrow dU_i = \varepsilon_{ij} dX_j \ .$$

La relation (2.3) devient en tenant compte de (2.1)

$$dx_i = dX_i + \varepsilon_{ij} dX_j = (\delta_{ij} + \varepsilon_{ij})\, dX_j = (\delta_{i1} + \varepsilon_{i1})\, dX_1$$

et donc

$$dx_1 = (1 + \varepsilon_{11}) dX_1, \quad dx_2 = \varepsilon_{21} dX_1, \quad dx_3 = \varepsilon_{31} dX_1 \ .$$

De même, on a pour le segment $d\boldsymbol{y}$

$$dy_i = dY_i + \varepsilon_{ij} dY_j = (\delta_{ij} + \varepsilon_{ij})\, dY_j = (\delta_{i2} + \varepsilon_{i2})\, dY_2$$

et donc

$$dy_1 = \varepsilon_{12} dY_2, \quad dy_2 = (1 + \varepsilon_{22}) dY_2, \quad dy_3 = \varepsilon_{32} dY_2 \ .$$

Par (**L**2.157), on écrit

$$\begin{aligned}
\cos\gamma_{12} &= \frac{d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{y}}{\|d\boldsymbol{x}\|\,\|d\boldsymbol{y}\|} \\
&= \frac{(1+\varepsilon_{11})\varepsilon_{12}+(1+\varepsilon_{22})\varepsilon_{21}+\varepsilon_{31}\varepsilon_{32}}{\left[(1+\varepsilon_{11})^2+\varepsilon_{21}^2+\varepsilon_{31}^2\right]^{1/2}\left[\varepsilon_{12}^2+(1+\varepsilon_{22})^2+\varepsilon_{32}^2\right]^{1/2}} \\
&= \frac{\varepsilon_{12}+\varepsilon_{11}\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21}+\varepsilon_{21}\varepsilon_{22}+\varepsilon_{31}\varepsilon_{32}}{\left[1+\varepsilon_{11}^2+2\varepsilon_{11}+\varepsilon_{21}^2+\varepsilon_{31}^2\right]^{1/2}\left[\varepsilon_{12}^2+1+\varepsilon_{22}^2+2\varepsilon_{22}+\varepsilon_{32}^2\right]^{1/2}} \ .
\end{aligned}$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur à 1 (produits des composantes ε_{ij}) et en tenant compte de la symétrie $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}$, on obtient (**L**2.157)

$$\begin{aligned}
\cos\gamma_{12} &= \frac{d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{y}}{\|d\boldsymbol{x}\|\,\|d\boldsymbol{y}\|} \approx \frac{2\varepsilon_{12}}{\left[1+2\varepsilon_{11}\right]^{1/2}\left[1+2\varepsilon_{22}\right]^{1/2}} \approx \frac{2\varepsilon_{12}}{(1+\varepsilon_{11})\,(1+\varepsilon_{22})} \\
&\approx 2\varepsilon_{12}\,(1-\varepsilon_{11})\,(1-\varepsilon_{22}) = 2\varepsilon_{12}\,(1-\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}-\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}) \approx 2\varepsilon_{12} \ .
\end{aligned}$$

On a donc

$$\cos\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$$

et en conséquence

$$\cos\gamma_{12} = \sin\varphi_{12} \approx \varphi_{12} = 2\varepsilon_{12} \ ,$$

puisque $\gamma_{12}+\varphi_{12}=\pi/2$.

Solution 2.13

Soit un élément infinitésimal $ABCD$ de côtés $dx_1\,dx_2$ donné à la figure 2.2 (**L**2.23 dans le livre).

Comme l'angle θ_1 est petit, on peut faire l'approximation

$$\tan\theta_1 \approx \theta_1$$

Via la figure 2.2, on trouve

$$\theta_1 = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}dx_1}{dx_1+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1}$$

et donc

$$\theta_1 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \ .$$

Par un raisonnement similaire, on a

$$\theta_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \ .$$

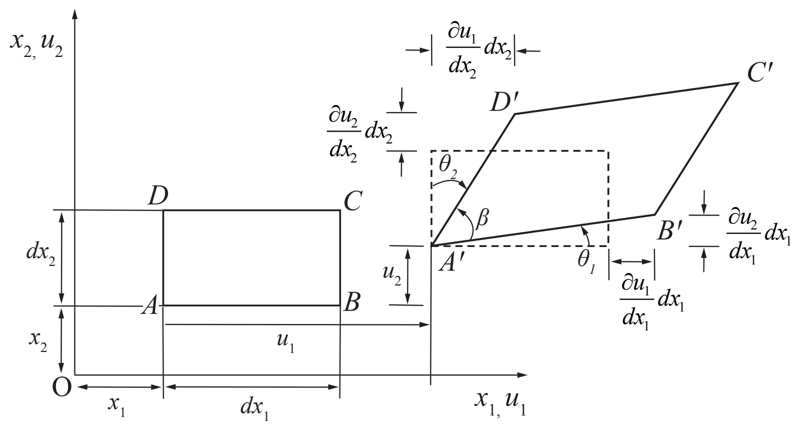

Figure 2.2 Déformation d'un élément infinitésimal.

On sait que

$$\theta_1 + \theta_2 = \phi_{12} = \frac{\pi}{2} - \gamma_{12} \ .$$

Par conséquent, il vient

$$\cos\gamma_{12} = \sin\phi_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2) \approx \theta_1 + \theta_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 2\varepsilon_{12} \ .$$

Par définition de l'extension relative (**L**2.153), on peut écrire

$$\varepsilon_{11} = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{A'B' - dx_1}{dx_1}$$

et

$$\varepsilon_{22} = \frac{A'D' - AD}{AD} = \frac{A'D' - dx_2}{dx_2} \ .$$

On tire les relations

$$(A'B')^2 = (dx_1(1+\varepsilon_{11}))^2 = \left(dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}dx_1\right)^2$$

$$dx_1^2(\varepsilon_{11}^2 + 2\varepsilon_{11} + 1) = dx_1^2(1 + 2\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2)$$

$$2\varepsilon_{11} \approx 2\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \ .$$

On trouve

$$\varepsilon_{11} \approx \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

et pour $(A'D')$ on a

$$\varepsilon_{22} \approx \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \ .$$

Solution 2.14

Par la relation (**L**2.80), dans le cadre des petites déformations, on a

$$ds^2 - dS^2 = 2E_{ij}dX_i dX_j \approx 2\varepsilon_{ij}dx_i dx_j \ .$$

1)

$$dx_1 = 1, dx_2 = dx_3 = 0$$

$$ds^2 - dS^2 = 2\varepsilon_{11}dx_1^2 = 4.10^{-3}$$

$$dS = dx_1 = 1 \Rightarrow ds^2 = 1 + 4.10^{-3} \Rightarrow ds = 1.002$$

$$\Rightarrow ds - dS = 1.002 - 1 = 0.002$$

2)

$$dx_2 = 1, dx_1 = dx_3 = 0$$

$$ds^2 - dS^2 = 2\varepsilon_{22}dx_2^2 = 4.10^{-3}$$

$$dS = dx_2 = 1 \Rightarrow ds^2 = 1 + 4.10^{-3} \Rightarrow ds = 1.002$$

$$\Rightarrow ds - dS = 1.002 - 1 = 0.002$$

3)

$$dx_1 = dx_2 = 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, dx_3 = 0$$

$$\begin{aligned} ds^2 - dS^2 &= 2\varepsilon_{11}dx_1^2 + 2\varepsilon_{22}dx_2^2 + 2 \cdot 2\varepsilon_{12}dx_1 dx+_2 \\ &= (2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 1) \cdot 10^{-3}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 6 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

$$dS = 1 \Rightarrow ds^2 = 1 + 6 \cdot 10^{-3} \Rightarrow ds = 1.003$$

$$\Rightarrow ds - dS = 1.003 - 1 = 0.003$$

On peut aussi utiliser (**L**2.153) pour obtenir

$$\varepsilon_N = \frac{ds - dS}{dS} = 0.003 \Rightarrow ds - dS = 0.003 \cdot dS = 0.003$$

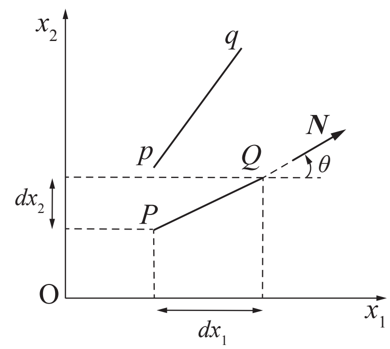

Figure 2.3 Déformation d'un élément linéaire.

Solution 2.15

Soient les longueurs $PQ = dS$ et $pq = ds$ à la figure 2.3. Par (**L**2.151), on a

$$ds^2 = dS^2 + 2\varepsilon_{ij} dx_i dx_j \ .$$

En deux dimensions, on écrit

$$ds^2 = dS^2 + 2\varepsilon_{11} dx_1^2 + 2\varepsilon_{22} dx_2^2 + 4\varepsilon_{12} dx_1 dx_2 \ .$$

Cette dernière relation donne

$$\frac{ds^2 - dS^2}{dS^2} = 2\varepsilon_{11} \frac{dx_1^2}{dS^2} + 2\varepsilon_{22} \frac{dx_2^2}{dS^2} + 4\varepsilon_{12} \frac{dx_1 dx_2}{dS^2} \ . \tag{2.4}$$

Notons

$$\varepsilon_N = \frac{ds - dS}{dS} \ .$$

Le premier membre de (2.4) devient

$$\begin{aligned} \frac{ds^2 - dS^2}{dS^2} &= \frac{ds^2}{dS^2} - 1 = \left(\frac{ds}{dS} - 1 + 1 \right)^2 - 1 = \left(\frac{ds - dS}{dS} + 1 \right)^2 - 1 \\ &= (\varepsilon_N + 1)^2 - 1 = \varepsilon_N^2 + 2\varepsilon_N \ . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Pour le cas de petite déformation, on admet que

$$\varepsilon_N^2 \to 0 \ . \tag{2.6}$$

En se basant sur la figure 2.3, on définit

$$\cos\theta = \frac{dx_1}{dS} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{dx_2}{dS} \ . \tag{2.7}$$

En combinant (2.4) et (2.5) et en utilisant (2.6) et (2.7), on arrive à

$$\varepsilon_N = \varepsilon_{11}\cos^2\theta + \varepsilon_{22}\sin^2\theta + 2\varepsilon_{12}\cos\theta\sin\theta \ .$$

En utilisant des identités trigonométriques

$$\varepsilon_N = \frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}{2}\cos 2\theta + 2\varepsilon_{12}\sin 2\theta \ .$$

Dans une direction normale à $\boldsymbol{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{N+\pi/2} &= \frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}{2}\cos 2(\pi/2+\theta) + 2\varepsilon_{12}\sin 2(\pi/2+\theta) \\
\varepsilon_{N+\pi/2} &= \frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}}{2} - \frac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}{2}\cos 2\theta - 2\varepsilon_{12}\sin 2\theta \ .
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Dynamique des milieux continus

Solution 3.1

L'incompressibilité (**L**3.45) exige $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = 0$. Appliquant $\partial/\partial x_i$ au champ de vitesse, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} &= \frac{Ar^3\delta_{ii} - 3Ar^2 x_i \frac{\partial r}{\partial x_i}}{r^6} \\ &= \frac{Ar^3\delta_{ii} - 3Ar^2 x_i \frac{x_i}{r}}{r^6} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On peut aussi résoudre l'exercice en calculant

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{v} &= \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = A \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_i (x_j x_j)^{-3/2} \right) \\ &= A \left(\delta_{ii} (x_j x_j)^{-3/2} - \frac{3}{2} x_i \cdot 2 (x_j x_j)^{-5/2} x_j \delta_{ji} \right) \\ &= A \left(\delta_{ii} (x_j x_j)^{-3/2} - \frac{3}{2} x_j \cdot 2 (x_j x_j)^{-5/2} x_j \right) = 0 \ , \end{aligned}$$

car $\delta_{ii} = 3$.

Solution 3.2

L'équation de conservation de la masse (**L**3.53) donne

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = -\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = -\rho \left(\frac{3}{1+t} \right) \ .$$

En intégrant depuis l'instant initial $t = 0$ à l'instant présent, on obtient

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho'} = -3 \int_0^t \frac{dt'}{1+t'} \ ,$$

ce qui donne

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{(1+t)^3} \ . \tag{3.1}$$

On calcule les trajectoires liées au champ de vitesse par (**L**2.35). On a

$$dx_i = v_i dt = \frac{x_i}{(1+t)} dt \ .$$

On intègre cette relation depuis le temps initial $t = 0$ jusqu'au temps actuel

$$\int_{X_i}^{x_i} \frac{dx_i'}{x_i'} = \int_0^t \frac{dt'}{1+t'} \ .$$

Ce qui donne

$$\ln \frac{x_i}{X_i} = \ln(1+t)$$

et donc

$$\begin{aligned} x_1 = X_1(1+t),\ x_2 &= X_2(1+t),\ x_3 = X_3(1+t) \\ x_1 x_2 x_3 &= X_1 X_2 X_3 (1+t)^3 \ . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Par combinaison de (3.1) et de (3.2), on obtient $\rho\, x_1 x_2 x_3 = \rho_0 X_1 X_2 X_3$.

Solution 3.3

L'équation d'incompressibilité en coordonnées cylindriques (**L**A.2) peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \ .$$

On déduit facilement que le champ de vitesse donné est incompressible.

Solution 3.4

1) Avec la matrice $[\sigma]$

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} 0 & C x_1 & 0 \\ C x_1 & 0 & -C x_2 \\ 0 & -C x_2 & 0 \end{pmatrix}$$

l'équation d'équilibre statique (**L**3.126) donne

$$\begin{aligned} f_1 &= -\sigma_{1j,j} = 0 \\ f_2 &= -\sigma_{2j,j} = -C \\ f_3 &= -\sigma_{3j,j} = C \ . \end{aligned}$$

2) Le vecteur normal à la sphère, donnée par la surface $f(x_i) = 0$, au point P de coordonnées $\boldsymbol{x}_P = (4, -4, 7)$ est défini par son gradient

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_P) &= \frac{\nabla f(\boldsymbol{x}_P)}{\|\nabla f(\boldsymbol{x}_P)\|} \\
&= (2x_1, 2x_2, 2x_3)^T \frac{1}{((2x_1)^2 + (2x_2)^2 + (2x_3)^2)^{\frac{1}{2}}} = \\
&= (x_1, x_2, x_3)^T \frac{1}{((x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2)^{\frac{1}{2}}} = \\
&= (4, -4, 7)^T \frac{1}{(16 + 16 + 49)^{\frac{1}{2}}} = \\
&= \frac{1}{9}(4, -4, 7)^T \ .
\end{aligned}$$

La normale au plan se calcule comme suit

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_P) &= \frac{\nabla f(\boldsymbol{x}_P)}{\|\nabla f(\boldsymbol{x}_P)\|} \\
&= (2, 2, -1)^T \frac{1}{(2^2 + 2^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} = \\
&= \frac{1}{3}(2, 2, -1)^T \ .
\end{aligned}$$

Le vecteur de contrainte sur la sphère au point P est

$$\begin{aligned}
[t]_S &= [\sigma][n] = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & 4C & 0 \\ 4C & 0 & 4C \\ 0 & 4C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -16C \\ 16C + 28C \\ -16C \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -16C \\ 44C \\ -16C \end{pmatrix} \ .
\end{aligned}$$

Pour le plan, le vecteur de contrainte devient

$$\begin{aligned}
[t]_{plan} &= [\sigma][n] = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 4C & 0 \\ 4C & 0 & 4C \\ 0 & 4C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8C \\ 8C - 4C \\ 8C \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8C \\ 4C \\ 8C \end{pmatrix} \ .
\end{aligned}$$

3) Les contraintes principales au point P sont les valeurs propres du tenseur $\boldsymbol{\sigma}(P)$ obtenues en résolvant (**L**3.111) :

$$\det(\boldsymbol{\sigma}(P) - \lambda \boldsymbol{I}) = 0 \ .$$

Avec la définition des invariants (**L**1.121), on obtient

$$\begin{pmatrix} 0 & 4C & 0 \\ 4C & 0 & 4C \\ 0 & 4C & 0 \end{pmatrix}, \ I_1 = 0, \ I_2 = -32C^2, \ I_3 = 0$$

avec

$$I_2 = -4 \cdot 4C^2 - 4 \cdot 4C^2 = -32C^2 \ .$$

L'équation caractéristique (**L**1.123) écrite pour la matrice $[\sigma]$ devient

$$\lambda^3 - 32C^2\lambda = 0 \ ,$$

ou encore

$$\lambda\left(\lambda^2 - 32C^2\right) = 0 \ .$$

La première solution est $\sigma_2 = 0$. Les autres solutions s'obtiennent en résolvant

$$\lambda^2 = 32C^2 \ ,$$

ou encore

$$\sigma_{1,3} = \pm\,|C|\,\sqrt{32} \ .$$

Le maximum de la contrainte de cisaillement est : $[\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\sigma n}]_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = C\sqrt{32}$, où $\boldsymbol{\tau}$ est le vecteur tangent en P.
La partie déviatoire de $\boldsymbol{\sigma}$ est par définition $\sigma^d_{ij} = \sigma_{ij} - (\sigma_{kk}/3)\delta_{ij}$. Comme dans notre cas, la trace de σ est nulle, le tenseur initial est identique au tenseur déviatoire et les contraintes déviatoires principales sont égales aux contraintes principales.

Solution 3.5

En absence des forces de volume, l'équation d'équilibre s'écrit

$$\sigma_{ij,j} = 0 \ .$$

Appliquée à (**L**3.166), on a

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} = 8x_1 + 8x_2 - 8x_1 - 8x_2 = 0$$

$$\sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} = -\frac{x_1}{2} - 8x_2 + \frac{x_1}{2} + 8x_2 = 0$$

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} = 0 \ .$$

Le champ de contrainte donné satisfait l'équilibre.

Solution 3.6

Le corps $\mathcal{C}$ est en équilibre si la force totale et le moment total sont tous deux égaux à zéro.

Equilibre des forces

On peut écrire l'équation pour la pression P dans la composante de la force F_1, et utiliser le théorème de la divergence pour obtenir (puisque $P = cste$)

$$F_1 = -\int_{\partial\omega} (Pn_1 + 0n_2 + 0n_3)ds = -\int_{\omega} \frac{\partial P}{\partial x_1} dv = 0 \ .$$

De même, on obtient $F_2 = F_3 = 0$. Donc, l'équilibre des forces est satisfait.

Equilibre des moments

Le moment par rapport à l'origine O de la force due à la pression, au point $\boldsymbol{x}$ est

$$\boldsymbol{M}(O) = \int_{\partial\omega} \boldsymbol{OM} \times (-P\boldsymbol{n})ds = -P\int_{\partial\omega} \boldsymbol{OM} \times \boldsymbol{n} ds$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{OM} \times \boldsymbol{n} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} \\ &= \boldsymbol{e}_1(x_2n_3 - x_3n_2) - \boldsymbol{e}_2(x_1n_3 - x_3n_1) + \boldsymbol{e}_3(x_1n_2 - x_2n_1) \ .\end{aligned}$$

La première composante du moment s'exprime sous la forme

$$\begin{aligned} M_1(O) &= -P\boldsymbol{e}_1 \int_{\partial\omega} (x_2n_3 - x_3n_2)ds \\ &= -P\boldsymbol{e}_1 \int_{\partial\omega} \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} ds \ . \end{aligned}$$

Appliquant le théorème de la divergence à cette dernière expression, on obtient

$$\begin{aligned} M_1(O) &= -P\boldsymbol{e}_1 \int_{\partial\omega} \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} ds \\ &= -P\boldsymbol{e}_1 \int_{\omega} \left(\frac{\partial 0}{\partial x_1} - \frac{\partial x_3}{\partial x_2} + \frac{\partial x_2}{\partial x_3} \right) ds = 0 \ . \end{aligned}$$

De même, on obtient $M_2(O) = M_3(O) = 0$.

Donc le moment est aussi égal à zéro. Le solide est en équilibre.

Solution 3.7

L'équation (**L**3.111) donne

$$\det([\sigma] - \lambda[I]) = 0$$

Appliquée à (**L**3.167), on obtient

$$\left| \begin{pmatrix} p-\lambda & p & p \\ p & p-\lambda & p \\ p & p & p-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

ou encore via (**L**1.120)

$$-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0 \tag{3.3}$$

Les invariants (**L**1.121) sont

$$I_1 = 3p$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} p & p \\ p & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & p \\ p & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & p \\ p & p \end{vmatrix} = 0$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} p & p & p \\ p & p & p \\ p & p & p \end{vmatrix} = 0$$

L'équation (3.3) devient

$$-\lambda^3 + 3p\lambda^2 = 0$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \sigma_1 = 3p \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = 0 \end{cases}$$

L'état de contrainte résultant est celui d'une traction uniforme (p est supposé tel que $p > 0$).

Appliquant (**L**3.111) à (**L**3.168), on a

$$\begin{vmatrix} p-\lambda & p & p \\ p & p-\lambda & p \\ p & p & -2p-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Les invariants sont $I_1 = 0, I_2 = -6p^2, I_3 = 0$. L'équation (3.3) donne

$$\lambda(6p^2 - \lambda^2) = 0$$

Il vient

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sqrt{6}p \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = -\sqrt{6}p \end{cases}$$

Il en résulte un état de contrainte de cisaillement.

Appliquant (**L**3.111) à (**L**3.169), on a

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & p & p \\ p & 0-\lambda & p \\ p & p & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Les invariants sont

$$I_1 = 0$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 0 & p \\ p & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & p \\ p & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & p \\ p & 0 \end{vmatrix} = -3p^2$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 0 & p & p \\ p & 0 & p \\ p & p & 0 \end{vmatrix} = 2p^3$$

L'équation (3.3) devient

$$-\lambda^3 + 3p^2\lambda + 2p^3 = 0$$

qui se factorise sous la forme

$$(\lambda - 2p)(\lambda + p)^2 = 0$$

Les contraintes principales sont

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2p \\ \sigma_2 = \sigma_3 = -p \end{cases}$$

L'état de contrainte résultant est un état de contrainte tridimensionnel.

Solution 3.8

Par la définition du tenseur déviateur (**L**3.123), on a

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}I_1(\boldsymbol{\sigma}) \ . \tag{3.4}$$

L'équation caractéristique est donnée par (**L**1.123)

$$\boldsymbol{s}^3 - I_1(\boldsymbol{s})\boldsymbol{s}^2 + I_2(\boldsymbol{s})\boldsymbol{s} - I_3(\boldsymbol{s}) = 0 \ .$$

Avec (3.4), on a pour le premier invariant

$$I_1(\boldsymbol{s}) = s_{ii} = \sigma_{ii} - \frac{1}{3}\delta_{ii}\sigma_{kk} = \sigma_{ii} - \frac{1}{3}3\sigma_{kk} = 0 \ .$$

Donc

$$\boldsymbol{s}^3 + I_2(\boldsymbol{s})\boldsymbol{s} - I_3(\boldsymbol{s}) = 0 \ .$$

Dans la littérature, la forme suivante est utilisée

$$\boldsymbol{s}^3 - I_2(\boldsymbol{s})\boldsymbol{s} - I_3(\boldsymbol{s}) = 0$$

avec

$$I_2(\boldsymbol{s}) = -\frac{1}{2}\left(s_{ii}s_{jj} - s_{ij}s_{ji}\right), \quad I_3(\boldsymbol{s}) = \det \boldsymbol{s} \ .$$

La première relation n'est autre que (**L**3.171).

On écrit successivement

$$\begin{aligned}
I_2(\boldsymbol{s}) &= \frac{1}{2}s_{ij}s_{ji} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}\right)\left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{ij}\sigma_{kk} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{ij}\sigma_{kk} + \frac{1}{9}\delta_{ij}\delta_{ij}\sigma_{nn}\sigma_{kk}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{jj}\sigma_{kk} - \frac{1}{3}\sigma_{jj}\sigma_{kk} + \frac{1}{3}\sigma_{nn}\sigma_{kk}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{jj}\sigma_{kk}\right) \ .
\end{aligned}$$

On utilise (**L**3.116) pour remplacer $\sigma_{ij}\sigma_{ij}$ et obtenir

$$\begin{aligned}
I_2(\boldsymbol{s}) &= \frac{1}{2}\left(-2I_2(\boldsymbol{\sigma}) + I_1^2(\boldsymbol{\sigma}) - \frac{1}{3}I_1^2(\boldsymbol{\sigma})\right) = +\frac{1}{2}\left(-2I_2(\boldsymbol{\sigma}) + \frac{2}{3}I_1^2(\boldsymbol{\sigma})\right) \\
&= \frac{1}{3}I_1^2(\boldsymbol{\sigma}) - I_2(\boldsymbol{\sigma}) \ . \qquad (\mathbf{L}3.171)
\end{aligned}$$

Pour le troisième invariant, on calcule comme suit (cf. (**L**3.118))

$$\begin{aligned}
I_3(\boldsymbol{s}) &= s_1s_2s_3 = \left(\sigma_1 - \frac{1}{3}I_1(\boldsymbol{\sigma})\right)\left(\sigma_2 - \frac{1}{3}I_1(\boldsymbol{\sigma})\right)\left(\sigma_3 - \frac{1}{3}I_1(\boldsymbol{\sigma})\right) \\
&= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \frac{1}{3}I_1(\boldsymbol{\sigma})\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right) \\
&+ \frac{1}{9}I_1^2(\boldsymbol{\sigma})\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right) - \frac{1}{27}I_1^3(\boldsymbol{\sigma}) \\
&= I_3(\boldsymbol{\sigma}) - \frac{1}{3}I_1(\boldsymbol{\sigma})I_2(\boldsymbol{\sigma}) + \frac{1}{9}I_1^3(\boldsymbol{\sigma}) - \frac{1}{27}I_1^3(\boldsymbol{\sigma}) \\
&= \frac{2}{27}I_1^3(\boldsymbol{\sigma}) - \frac{1}{3}I_1(\boldsymbol{\sigma})I_2(\boldsymbol{\sigma}) + I_3(\boldsymbol{\sigma}) \ . \qquad (\mathbf{L}3.172)
\end{aligned}$$

Solution 3.9

Par le théorème de la divergence, l'intégrale de surface s'écrit comme une intégrale de volume

$$\begin{aligned}\int_{\partial\omega} P_{ij\ldots}\sigma_{pq}n_q \, ds &= \int_{\omega} \frac{\partial(P_{ij\ldots}\sigma_{pq})}{\partial x_q} dv \\ &= \int_{\omega} [\sigma_{pq}P_{ij\ldots,q} + P_{ij\ldots}\sigma_{pq,q}] dv \ .\end{aligned}$$

En remplaçant $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ dans cette dernière relation par son expression tirée de la conservation de la quantité de mouvement (**L**3.96), on obtient l'équation (**L**3.173).

Solution 3.10

Le premier tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff est défini par la relation (**L**3.141) :

$$\boldsymbol{P} = J\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{F}^{-T} \ .$$

Multipliant (**L**3.141) à droite par $\boldsymbol{F}^T$, on a

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^T = J\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{F}^T = J\boldsymbol{\sigma} \ .$$

La transposée de (**L**3.141) donne

$$\boldsymbol{P}^T = J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}^T \ .$$

Multipliant à gauche cette dernière équation par $\boldsymbol{F}$, il vient

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{P}^T = J\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}^T = J\boldsymbol{\sigma}^T = J\boldsymbol{\sigma}$$

et donc

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{F}\boldsymbol{P}^T \ . \qquad (\mathbf{L}3.144)$$

Solution 3.11

Les équations (**L**3.149) et (**L**2.205) donnent

$$\boldsymbol{P}^* = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}; \ \boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{F} \ .$$

L'équation (**L**3.152) donne

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{S} \ .$$

Donc, on a

$$\boldsymbol{P}^* = \boldsymbol{F}^*\boldsymbol{S}^* \Rightarrow \boldsymbol{QP} = \boldsymbol{QFS}^* \Rightarrow \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{QP} = \boldsymbol{P} = \boldsymbol{FS}^* \ .$$

Or, par définition,

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{FS} \ .$$

En conséquence,

$$\boldsymbol{FS} = \boldsymbol{FS}^* \ ,$$

qui conduit au résultat

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^* \ .$$

Pour la symétrie, on a successivement

$$\boldsymbol{S} = J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{F}^{-T} \Rightarrow \boldsymbol{S}^T = J(\boldsymbol{F}^{-T})^T\boldsymbol{\sigma}^T(\boldsymbol{F}^{-1})^T = J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{F}^{-T}$$

et en conséquence,

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \Rightarrow \boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^T \ .$$

Chapitre 4

Energétique

Solution 4.1

Avec le théorème du transport de Reynolds (**L**3.23) et l'équation de continuité (**L**3.41), on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_w \rho Q dv &= \int_w \left(\frac{D(\rho Q)}{Dt} + \rho Q \frac{\partial v_m}{\partial x_m}\right) dv \\
&= \int_w \left(\frac{D\rho}{Dt} Q + \rho \frac{DQ}{Dt} + \rho Q \frac{\partial v_m}{\partial x_m}\right) dv \\
&= \int_w \left(\rho \frac{DQ}{Dt} + Q\left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_m}{\partial x_m}\right)\right) dv \\
&= \int_w \rho \frac{dQ}{Dt} dv \ .
\end{aligned}$$

Calculons la dérivée matérielle de l'énergie cinétique E_c

$$\frac{DE_c}{Dt} = \frac{d}{dt}\int_\omega \rho \left(\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{2}\right) dv = \int_\omega \rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{2}\right) dv = \int_\omega \rho\, \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}\, dv \ .$$

On remplace $\rho\boldsymbol{a}$ par l'expression tirée de (**L**3.96) et on obtient l'équation (**L**4.26).

Solution 4.2

Par la définition de l'énergie cinétique (**L**4.1) et de l'énergie interne (**L**4.2), on a

$$\frac{D}{Dt}(E_c(t) + E_{int}(t)) = \frac{D}{Dt}\int_\omega \rho \left(\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{2} + u\right) dv \ .$$

L'application du théorème de Reynolds (**L**3.23) conduit au calcul suivant

$$\begin{aligned}
&\frac{D}{Dt}\int_\omega \rho\Big(\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{2}+u\Big)\,dv = \\
&\int_\omega [\frac{D}{Dt}\left(\rho\Big(\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{2}+u\Big)\right) + \rho\Big(\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{2}+u\Big)\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}]dv \\
= &\int_\omega [\Big(\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{2}+u\Big)\left(\frac{D\rho}{Dt}+\rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right) + \rho\frac{D}{Dt}\Big(\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{2}+u\Big)]dv\ .
\end{aligned}$$

L'expression dans le second terme entre parenthèses de la dernière relation n'est rien d'autre que la conservation de la masse (**L**3.41). Par conséquent, elle est nulle. Il vient

$$\frac{D}{Dt}\int_\omega \rho\Big(\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{2}+u\Big)\,dv = \int_\omega \rho\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}+\frac{Du}{Dt}\right)dv\ .$$

Comme $D\boldsymbol{v}/Dt$ est égal à $\boldsymbol{a}$, le problème est résolu.

Si on laisse la dérivée matérielle de $\boldsymbol{v}$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\int_\omega \rho\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}+\frac{Du}{Dt}\right)dv &= \int_\omega \rho\left(\frac{D(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{2\,Dt}+\frac{Du}{Dt}\right)dv \\
&= \int_\omega \rho\frac{D}{Dt}(\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{2}+u)dv\ .
\end{aligned}$$

Ceci montre que la dérivée matérielle de l'intégrale sur un volume matériel d'une quantité égale à ρ fois une expression se met sous la forme générale de l'intégrale sur un volume matériel de ρ fois la dérivée matérielle de cette expression. Cette constatation constitue un théorème général.

Solution 4.3

1) L'inéquation (**L**4.81) est donnée par

$$\frac{d}{dt}\int_\omega \rho s dv \geq \int_\omega \frac{r}{T}dv - \int_{\partial\omega}\frac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}}{T}ds\ .$$

En utilisant le résultat de l'exercice précédent, le premier membre devient

$$\frac{d}{dt}\int_\omega \rho s dv = \int_\omega \rho\frac{Ds}{Dt}dv\ .$$

Par le théorème de la divergence (**L**1.228), l'intégrale de surface de (**L**4.81) devient

$$\int_{\partial\omega}\frac{q_k n_k}{T}ds = \int_\omega \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{q_k}{T}\right)dv\ .$$

Par application du principe de localisation, on aura

$$\rho \frac{Ds}{Dt} \geq \frac{r}{T} - \text{div}\left(\frac{\boldsymbol{q}}{T}\right) . \tag{4.1}$$

2) Par les équations (**L**4.23) et (**L**4.25), on a

$$\rho \frac{Du}{Dt} - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} + \text{div}\, \boldsymbol{q} = r . \tag{4.2}$$

En passant à la notation indicée, on démontre facilement que

$$\text{div}\left(\frac{\boldsymbol{q}}{T}\right) = \frac{1}{T}\text{div}\, \boldsymbol{q} - \frac{\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{\nabla} T}{T^2} . \tag{4.3}$$

En portant (4.2) et (4.3) dans (4.1), on trouve l'inégalité de Clausius-Duhem

$$\rho \frac{Ds}{Dt} \geq \frac{1}{T}\left(\rho \frac{Du}{Dt} - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d}\right) + \frac{1}{T^2} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{\nabla} T . \tag{\textbf{L}4.83}$$

3) Si on introduit l'énergie libre spécifique de Helmholtz,

$$f = u - Ts , \tag{\textbf{L}4.84}$$

l'inégalité de Clausius-Duhem (**L**4.83) prend la forme

$$\rho \frac{Df}{Dt} \leq tr(\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{L}) - \rho s \frac{DT}{Dt} - \frac{\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{\nabla} T}{T} . \tag{\textbf{L}4.85}$$

Solution 4.4

1) Le principe de conservation de l'énergie interne est donné par les relations (**L**4.23) et (**L**4.25)

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} - \text{div}\, \boldsymbol{q} + r . \tag{4.4}$$

Pour un fluide parfait, le terme $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d}$ devient $-p\, tr \boldsymbol{d} = -p \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}$.

2) En substituant la définition de l'enthalpie dans (4.4), on a

$$\rho \frac{Dh}{Dt} - \rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{p}{\rho}\right) = -p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + r . \tag{4.5}$$

Le développement du terme $\frac{D}{Dt}\left(\frac{p}{\rho}\right)$ donne

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{p}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt} .$$

En substituant ce résultat dans (4.5), il vient

$$\begin{aligned}\rho\frac{Dh}{Dt} &= \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} - p\frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + r\\ &= \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho}\left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + r\\ &= \frac{Dp}{Dt} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + r\ ,\end{aligned}$$

où on a utilisé le principe de conservation de la masse (**L**3.41).

3) Si de plus, l'écoulement est adiabatique, c.-à-d. $\boldsymbol{q} = \mathbf{0}$ et $r = 0$, on a

$$\rho\,\frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt}\ .$$

Solution 4.5

Puisque la rotation de corps rigide implique par (**L**4.61) $\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$, il s'ensuit que $\dot{\boldsymbol{c}} = \mathbf{0}$. Par (**L**2.211), on a en tenant compte de (**L**4.63)

$$\boldsymbol{v}^* = \dot{\boldsymbol{c}} + \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{x}\ .$$

Avec (**L**2.60), on trouve

$$\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}\ . \tag{4.6}$$

Le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ est le vecteur dual de $\boldsymbol{\Omega}$, qui exprime la vitesse angulaire de rotation de corps rigide. On réécrit (**L**4.48)

$$\begin{aligned}\rho\dot{u} - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} + \operatorname{div}\boldsymbol{q} - r\ +\ \boldsymbol{v}\cdot(\rho\boldsymbol{a} - \boldsymbol{div}\,\boldsymbol{\sigma} - \rho\boldsymbol{b})&\\ +\ \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} + u\right)(\dot{\rho} + \rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}) = 0\ ,&\end{aligned} \tag{4.7}$$

(où la notation $\dot{\rho}$ désigne la dérivée particulaire exprimée en description lagrangienne), avec des quantités étoilées. On y remplace $\boldsymbol{v}^*$ par sa valeur (4.6) et de l'équation résultante, on retranche (4.7). En utilisant les relations (**L**4.49)-(**L**4.53), (**L**2.212), (**L**2.213), on obtient

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\Omega}\ +\ \frac{(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x})}{2}(\dot{\rho} + \rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\dot{\rho} + \rho\operatorname{div}\boldsymbol{v})&\\ +\ (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x})\cdot(\rho\boldsymbol{a} - \boldsymbol{div}\,\boldsymbol{\sigma} - \rho\boldsymbol{b}) = 0\ .&\end{aligned}$$

Ceci doit être vrai pour n'importe quelle rotation rigide. On en tire les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Le terme restant $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\Omega}$ doit s'annuler. Par le caractère antisymétrique de $\boldsymbol{\Omega}$, ceci impose la symétrie de $\boldsymbol{\sigma}$.

Chapitre 5

Lois de comportement : principes de base

Solution 5.1

Le champ vectoriel $\boldsymbol{u}$ est spatialement objectif et satisfait la relation (**L**2.197)

$$\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{u} \ .$$

On a d'autre part que

$$(\nabla \boldsymbol{u})^*_{ij} = \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} = \frac{\partial u_i^*}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x_j^*} \ .$$

Par (**L**2.195), il vient

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial x_k} = Q_{jk}$$

et son inverse $\partial x_k / \partial x_j^*$ est $Q_{kj}^{-1} = Q_{kj}^T$. Donc on a

$$(\nabla \boldsymbol{u})^*_{ij} = \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} = Q_{il}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}Q_{kj}^T$$

ou encore

$$(\nabla \boldsymbol{u})^* = \boldsymbol{Q}\,\nabla \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{Q}^T \ . \qquad (\mathbf{L}5.61)$$

Solution 5.2

Par la relation (**L**2.213) et les définitions (**L**2.181) et (**L**2.183) de $\boldsymbol{d}$ et $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, respectivement, et en tenant compte de l'équation (**L**2.56)

$$\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^T + \boldsymbol{Q}\dot{\boldsymbol{Q}}^T = 0 \ ,$$

on écrit successivement

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{L}^*)^T &= \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{Q}^T + \dot{\boldsymbol{Q}}^T),\\
\boldsymbol{d}^* &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{L}^* + (\boldsymbol{L}^*)^T) = \boldsymbol{Q}\frac{1}{2}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^T)\boldsymbol{Q}^T + \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^T + \boldsymbol{Q}\dot{\boldsymbol{Q}}^T)\\
&= \boldsymbol{Q}\boldsymbol{d}\boldsymbol{Q}^T,\\
\dot{\boldsymbol{\omega}}^* &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{L}^* - (\boldsymbol{L}^*)^T) = \boldsymbol{Q}\frac{1}{2}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}^T)\boldsymbol{Q}^T + \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^T - \boldsymbol{Q}\dot{\boldsymbol{Q}}^T)\\
&= \boldsymbol{Q}\dot{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{Q}^T + \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^T\ .
\end{aligned}$$

Le tenseur $\boldsymbol{d}$ est spatialement objectif et le tenseur $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ ne l'est pas. En effet, si deux observateurs enregistrent le taux de rotation d'un milieu continu, leurs observations diffèrent d'une quantité égale à leur taux de rotation relatif.

Solution 5.3

Notons d'abord que $D/Dt^* = D/Dt$. Le tenseur $\boldsymbol{T}$ étant spatialement objectif, si on lui applique la dérivée matérielle, on obtient successivement

$$\frac{D\boldsymbol{T}^*}{Dt} = \frac{D(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^T)}{Dt} = \frac{D\boldsymbol{Q}}{Dt}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^T + \boldsymbol{Q}\frac{D\boldsymbol{T}}{Dt}\boldsymbol{Q}^T + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}\frac{D\boldsymbol{Q}^T}{Dt}\ .$$

Ceci démontre que la dérivée matérielle d'un tenseur d'ordre deux n'est pas spatialement objective.

Solution 5.4

A l'aide des résultats des problèmes 5.2 et 5.3, et de la relation (**L**2.56), on peut écrire

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{T}}^* + \boldsymbol{T}^*\dot{\boldsymbol{\omega}}^* - \dot{\boldsymbol{\omega}}^*\boldsymbol{T}^* &= \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^T + \boldsymbol{Q}\dot{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Q}^T + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{Q}}^T\\
+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^T(\boldsymbol{Q}\dot{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{Q}^T + \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^T) &- (\boldsymbol{Q}\dot{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{Q}^T + \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^T)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^T\\
&= \boldsymbol{Q}\dot{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Q}^T + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{Q}^T - \boldsymbol{Q}\dot{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^T\\
&= \boldsymbol{Q}(\dot{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{\omega}} - \dot{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{T})\boldsymbol{Q}^T\ .
\end{aligned}$$

Ceci démontre que la relation (**L**5.62) est spatialement objective.

Solution 5.5

L'équation (**L**5.64) n'est autre que le problème 5.3 résolu pour $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{d}$. Dès lors, en tenant compte de (**L**2.56), de (**L**2.213) et de son transposé, on a au facteur 2 près

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{d}}^* + \boldsymbol{d}^* \boldsymbol{L}^* + \boldsymbol{L}^{T*} \boldsymbol{d}^* &= \dot{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{d} \boldsymbol{Q}^T + \boldsymbol{Q} \dot{\boldsymbol{d}} \boldsymbol{Q}^T + \boldsymbol{Q} \boldsymbol{d} \dot{\boldsymbol{Q}}^T \\
&+ \boldsymbol{Q} \boldsymbol{d} \boldsymbol{Q}^T (\boldsymbol{Q} \boldsymbol{L} + \dot{\boldsymbol{Q}}) \boldsymbol{Q}^T + \boldsymbol{Q} (\boldsymbol{L}^T \boldsymbol{Q}^T + \dot{\boldsymbol{Q}}^T) \boldsymbol{Q} \boldsymbol{d} \boldsymbol{Q}^T \\
&= \boldsymbol{Q} \dot{\boldsymbol{d}} \boldsymbol{Q}^T + \boldsymbol{Q} \boldsymbol{d} \boldsymbol{L} \boldsymbol{Q}^T + \boldsymbol{Q} \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{d} \boldsymbol{Q}^T \ .
\end{aligned}
$$

Chapitre 6

Lois de comportement classiques

Solution 6.1

L'équation (**L**2.88) donne

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F} \ ,$$

dont on tire grâce à (**L**2.179)

$$\dot{\boldsymbol{C}} = \dot{\boldsymbol{F}}^T \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^T \dot{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{L} \boldsymbol{F} \ .$$

Comme pour le fluide simple $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}$, il vient

$$\dot{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{L}^T + \boldsymbol{L} = 2\boldsymbol{d} \ .$$

Solution 6.2

L'équation (**L**4.23) est

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}) - \operatorname{div} \boldsymbol{q} + r \ .$$

Le terme $\boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v})$ avec l'équation de comportement (**L**6.14) devient à l'aide de (**L**4.25)

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{L} = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} = -p \, tr \, \boldsymbol{d} + \lambda (tr \, \boldsymbol{d})^2 + 2\mu (\boldsymbol{d} : \boldsymbol{d}) \ .$$

Donc, pour le fluide visqueux newtonien, on obtient

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -p \, tr \, \boldsymbol{d} + \lambda (tr \, \boldsymbol{d})^2 + 2\mu (\boldsymbol{d} : \boldsymbol{d}) - \operatorname{div} \boldsymbol{q} + r \ . \tag{6.1}$$

Le fluide parfait est non visqueux, i.e. $\lambda = \mu = 0$. Il vient

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -p \, tr \, \boldsymbol{d} - \operatorname{div} \boldsymbol{q} + r \ .$$

Si le fluide parfait est un gaz idéal, alors son énergie interne est donnée par la relation (**L**6.143) et l'équation précédente devient

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = -p \, tr \, \boldsymbol{d} - \operatorname{div} \boldsymbol{q} + r \ .$$

Solution 6.3

Le fluide visqueux newtonien incompressible satisfait la contrainte div $\boldsymbol{v} = tr\,\boldsymbol{d} = 0$. Dans ce cas, la relation (6.1) nous fournit

$$\rho \frac{Du}{Dt} = 2\mu(\boldsymbol{d} : \boldsymbol{d}) - \operatorname{div} \boldsymbol{q} + r \ .$$

Pour le fluide parfait, il vient

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\operatorname{div} \boldsymbol{q} + r \ .$$

Solution 6.4

1) La relation (**L**2.108) montre que $\boldsymbol{U}$ a $\boldsymbol{A}_i$ comme vecteurs propres. Par (**L**2.109), on écrit la décomposition spectrale

$$\boldsymbol{U} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \boldsymbol{A}_i \otimes \boldsymbol{A}_i \ .$$

Avec (**L**2.88), on a successivement

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{U} &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \lambda_i (\boldsymbol{A}_i \otimes \boldsymbol{A}_i) \lambda_j (\boldsymbol{A}_j \otimes \boldsymbol{A}_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \lambda_i \lambda_j (\boldsymbol{A}_i \otimes \boldsymbol{A}_i)(\boldsymbol{A}_j \otimes \boldsymbol{A}_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \lambda_i \lambda_j \delta_{ij} (\boldsymbol{A}_i \otimes \boldsymbol{A}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2 (\boldsymbol{A}_i \otimes \boldsymbol{A}_i) \ . \end{aligned}$$

Les matériaux hyperélastiques isotropes ont pour équation de constitution (**L**6.51)

$$\boldsymbol{S} = 2 \frac{\partial \widehat{\mathcal{W}}(\boldsymbol{C})}{\partial \boldsymbol{C}} \ .$$

Avec (**L**6.64), on obtient la relation (**L**6.67) pour $\partial \widehat{\mathcal{W}}(\boldsymbol{C}) / \partial \boldsymbol{C}$ et finalement, on a pour (**L**6.68)

$$\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i} \boldsymbol{A}_i \otimes \boldsymbol{A}_i \, ,$$

ce qui démontre que $\boldsymbol{S}$ a $\boldsymbol{A}_i$ comme vecteurs propres.

2) La relation (**L**2.111) montre que $\boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{R}\boldsymbol{A}_i$ comme vecteurs propres. Par (**L**2.113), on écrit la décomposition spectrale

$$\boldsymbol{V} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_i \ .$$

Avec (**L**2.89), on a successivement

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{V} &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \lambda_i(\boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_i)\lambda_j(\boldsymbol{b}_j \otimes \boldsymbol{b}_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \lambda_i\lambda_j(\boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_i)(\boldsymbol{b}_j \otimes \boldsymbol{b}_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \lambda_i\lambda_j\delta_{ij}(\boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2(\boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_i) \ .\end{aligned}$$

Ceci prouve que $\boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{b}_i$ comme vecteurs propres.
À la section **L**6.5.1, après de longs développements, on obtient la relation (**L**6.72)

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i}\, \boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_i\right) \ ,$$

qui montre que $\boldsymbol{\sigma}$ a $\boldsymbol{b}_i$ comme vecteurs propres.

Solution 6.5

La relation (**L**6.61) multipliée à gauche par $\boldsymbol{F}$ et à droite par $\boldsymbol{F}^T$ donne

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{F}\boldsymbol{S}\boldsymbol{F}^T = I_3\frac{\partial \Phi}{\partial I_3}\boldsymbol{F}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{F}^T + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial \Phi}{\partial I_2}\right)\boldsymbol{F}\boldsymbol{I}\boldsymbol{F}^T - \frac{\partial \Phi}{\partial I_2}\boldsymbol{F}\boldsymbol{C}\boldsymbol{F}^T \ . \tag{6.2}$$

A l'aide de (**L**2.88) et (**L**2.89), on a

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{I}$$

et

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{C}\boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{c}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}^2 \ .$$

L'équation (6.2) en tenant compte de (**L**3.152) devient (**L**6.63)

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1}\left(I_3(\boldsymbol{c})\frac{\partial \Phi}{\partial I_3(\boldsymbol{c})}\boldsymbol{I} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial I_1(\boldsymbol{c})} + I_1(\boldsymbol{c})\frac{\partial \Phi}{\partial I_2(\boldsymbol{c})}\right)\boldsymbol{c} - \frac{\partial \Phi}{\partial I_2(\boldsymbol{c})}\boldsymbol{c}^2\right) \ .$$

Solution 6.6

La relation (**L**6.61) est

$$\boldsymbol{S} = 2\left(I_3 \frac{\partial \Phi}{\partial I_3} \boldsymbol{C}^{-1} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \right) \boldsymbol{I} - \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \boldsymbol{C} \right) \ .$$

L'équation de Cayley-Hamilton (**L**1.123) appliquée à $\boldsymbol{C}$ donne

$$\boldsymbol{C}^3 - I_1 \boldsymbol{C}^2 + I_2 \boldsymbol{C} - I_3 \boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$$

et donc

$$I_3 \boldsymbol{C}^{-1} = \boldsymbol{C}^2 - I_1 \boldsymbol{C} + I_2 \boldsymbol{I} \ .$$

Il vient

$$\begin{aligned} \frac{\boldsymbol{S}}{2} &= \frac{\partial \Phi}{\partial I_3} \left(\boldsymbol{C}^2 - I_1 \boldsymbol{C} + I_2 \boldsymbol{I} \right) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \right) \boldsymbol{I} - \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \boldsymbol{C} \\ &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} + I_2 \frac{\partial \Phi}{\partial I_3} \right) \boldsymbol{I} - \left(I_1 \frac{\partial \Phi}{\partial I_3} + \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \right) \boldsymbol{C} + \frac{\partial \Phi}{\partial I_3} \boldsymbol{C}^2 \ . \end{aligned}$$

La relation (**L**6.63) est donnée par

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \left(I_3 \frac{\partial \Phi}{\partial I_3} \boldsymbol{I} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \right) \boldsymbol{c} - \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \boldsymbol{c}^2 \right) \ .$$

L'équation de Cayley-Hamilton (**L**1.123) appliquée à $\boldsymbol{c}$ donne

$$\boldsymbol{c}^3 - I_1 \boldsymbol{c}^2 + I_2 \boldsymbol{c} - I_3 \boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$$

et donc

$$\boldsymbol{c}^2 = I_1 \boldsymbol{c} - I_2 \boldsymbol{I} + I_3 \boldsymbol{c}^{-1} \ .$$

On aura

$$\begin{aligned} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2J^{-1}} &= I_3 \frac{\partial \Phi}{\partial I_3} \boldsymbol{I} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \right) \boldsymbol{c} - I_1 \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \boldsymbol{c} + I_2 \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \boldsymbol{I} - I_3 \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \boldsymbol{c}^{-1} \\ \boldsymbol{\sigma} &= 2J^{-1} \left(\left(I_2 \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} + I_3 \frac{\partial \Phi}{\partial I_3} \right) \boldsymbol{I} + \frac{\partial \Phi}{\partial I_1} \boldsymbol{c} - I_3 \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \boldsymbol{c}^{-1} \right) \ . \end{aligned}$$

Solution 6.7

Selon (**L**6.80), on peut écrire

$$\begin{aligned} \Phi(I_1, I_2, I_3) \ &= C_{000} + C_{100}(I_1 - 3) + C_{010}(I_2 - 3) + C_{001}(I_3 - 1) \\ &+ C_{111}(I_1 - 3)(I_2 - 3)(I_3 - 1) + \dots \ . \end{aligned}$$

Dans la configuration de référence, on a

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \text{ ou } \boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}$$

et donc

$$I_1 = 3,\ I_2 = 3,\ I_3 = 1\ .$$

Par conséquent, on a

$$\Phi(3, 3, 1) = C_{000}\ .$$

Si $C_{000} = 0$, alors l'énergie est nulle.

Calculons les dérivées partielles de Φ par rapport aux invariants. Il vient

$$\frac{\partial \Phi}{\partial I_1} = C_{100} + C_{111}(I_2 - 3)(I_3 - 1) + \dots$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial I_2} = C_{010} + C_{111}(I_1 - 3)(I_3 - 1) + \dots$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial I_3} = C_{001} + C_{111}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + \dots$$

On constate que la relation (**L**6.62) devient ici

$$\frac{\partial \Phi}{\partial I_1} + 2\frac{\partial \Phi}{\partial I_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial I_3} = C_{100} + 2C_{010} + C_{001} = 0\ .$$

Solution 6.8

La première égalité de (**L**6.59) à l'aide de (**L**1.144) donne

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{C}} &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)}{\partial \lambda_i^2} (\boldsymbol{n}_i \otimes \boldsymbol{n}_i) \\
&= \boldsymbol{n}_1 \otimes \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_2 \otimes \boldsymbol{n}_2 + \boldsymbol{n}_3 \otimes \boldsymbol{n}_3 \\
&= \sum_{1}^{3} \boldsymbol{n}_i \otimes \boldsymbol{n}_i \\
&= \boldsymbol{I}\ .
\end{aligned}$$

La seconde égalité de (**L**6.59) à l'aide de (**L**1.144) donne

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{C}} &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial(\lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2 + \lambda_1^2\lambda_2^2)}{\partial \lambda_i^2}(\boldsymbol{n}_i \otimes \boldsymbol{n}_i) \\
&= (\lambda_2^2 + \lambda_3^2)(\boldsymbol{n}_1 \otimes \boldsymbol{n}_1) + (\lambda_3^2 + \lambda_1^2)(\boldsymbol{n}_2 \otimes \boldsymbol{n}_2) + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)(\boldsymbol{n}_3 \otimes \boldsymbol{n}_3) \\
&= (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)(\boldsymbol{n}_1 \otimes \boldsymbol{n}_1) + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)(\boldsymbol{n}_2 \otimes \boldsymbol{n}_2) \\
&+ (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)(\boldsymbol{n}_3 \otimes \boldsymbol{n}_3) \\
&- \lambda_1^2(\boldsymbol{n}_1 \otimes \boldsymbol{n}_1) - \lambda_2^2(\boldsymbol{n}_2 \otimes \boldsymbol{n}_2) - \lambda_3^2(\boldsymbol{n}_3 \otimes \boldsymbol{n}_3) \\
&= I_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{C} \ .
\end{aligned}
$$

Solution 6.9

La pression dans le ballon gonflé est donnée par l'équation (**L**6.102)

$$p_i(\lambda) = 4C_{10}\frac{e_i}{R}\frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{1}{\lambda^6}\right) \ .$$

La pression maximum est obtenue lorsque la dérivée de p par rapport au rapport d'extension λ s'annule

$$\frac{\partial p_i(\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \ .$$

On a

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7}\right) = -\frac{1}{\lambda^2} + \frac{7}{\lambda^8} = 0$$

et donc

$$\lambda^6 = 7 \Rightarrow \lambda = \sqrt[6]{7} = 1.383$$

$$p_i^{max} = 4C_{10}\frac{e_i}{R}\frac{1}{1.383}\left(1 - \frac{1}{7}\right) = 2.479\frac{C_{10}e_i}{R} \ .$$

Solution 6.10

La fonction d'énergie de Ogden est la relation (**L**6.86)

$$\phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mu_i}{\alpha_i}(\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \ .$$

Les contraintes principales sont données par la relation (**L**6.78)

$$\sigma_k = -p + \lambda_k \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_k}, \quad k = 1, 2, 3 \ .$$

Dès lors, on écrit

$$\sigma_1 = -p + \sum_{i=1}^{N} \mu_i \lambda_1^{\alpha_i}$$
$$\sigma_2 = -p + \sum_{i=1}^{N} \mu_i \lambda_2^{\alpha_i}$$
$$\sigma_3 = -p + \sum_{i=1}^{N} \mu_i \lambda_3^{\alpha_i} \ .$$

– Cas d'extension uniaxiale : $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ et $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^{-1/2}$ (incompressibilité). On obtient grâce à ces conditions : $\sigma = -\sum_{i=1}^{N} \mu_i \lambda^{-\frac{\alpha_i}{2}} + \sum_{i=1}^{N} \mu_i \lambda^{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{N} \mu_i (\lambda^{\alpha_i} - \lambda^{\frac{-\alpha_i}{2}})$

– Cas d'extension biaxiale : $\sigma_1, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0$, $\lambda_3 = \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}$ (incompressibilité). On obtient grâce à ces conditions : $\sigma_1 = -\sum_{i=1}^{N} \mu_i (\frac{1}{\lambda_1\lambda_2})^{\alpha_i} + \sum_{i=1}^{N} \mu_i \lambda_1^{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{N} \mu_i (\lambda_1^{\alpha_i} - (\frac{1}{\lambda_1\lambda_2})^{\alpha_i})$
  $\sigma_2 = -\sum_{i=1}^{N} \mu_i (\frac{1}{\lambda_1\lambda_2})^{\alpha_i} + \sum_{i=1}^{N} \mu_i \lambda_2^{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{N} \mu_i (\lambda_2^{\alpha_i} - (\frac{1}{\lambda_1\lambda_2})^{\alpha_i})$

– Cas d'extension équi-biaxiale : $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, $\sigma_3 = 0$ (cas particulier de l'extension biaxiale) et $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\lambda_3 = \lambda^{-2}$ (par incompressibilité). On obtient grâce à ces conditions : $\sigma = -\sum_{i=1}^{N} \mu_i \lambda^{-2\alpha_i} + \sum_{i=1}^{N} \mu_i \lambda^{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{N} \mu_i (\lambda^{\alpha_i} - \lambda^{-2\alpha_i})$.
  En appliquant les valeurs prescrites de l'énoncé, à savoir $N = 3, \alpha_1 = 1,3, \alpha_2 = 5, \alpha_3 = -2, \mu_1 = 0,63\text{MPa}$, $\mu_2 = 0,0012\text{MPa}$ et $\mu_3 = -0,01\text{MPa}$, on peut tracer $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ en fonction de leur élongation correspondante.

La figure 6.1 montre l'évolution de la contrainte uniaxiale en fonction de son élongation, tandis que la figure 6.2 exhibe l'évolution de la contrainte équibiaxiale.

Solution 6.11

Le tenseur des contraintes n'a qu'une seule composante non nulle, à savoir $\sigma_{11} = S$, où S est la force de traction par unité de surface.

L'énergie libre f est donnée par (**L**6.159)

$$\frac{1}{\rho}\ \sigma_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}}$$

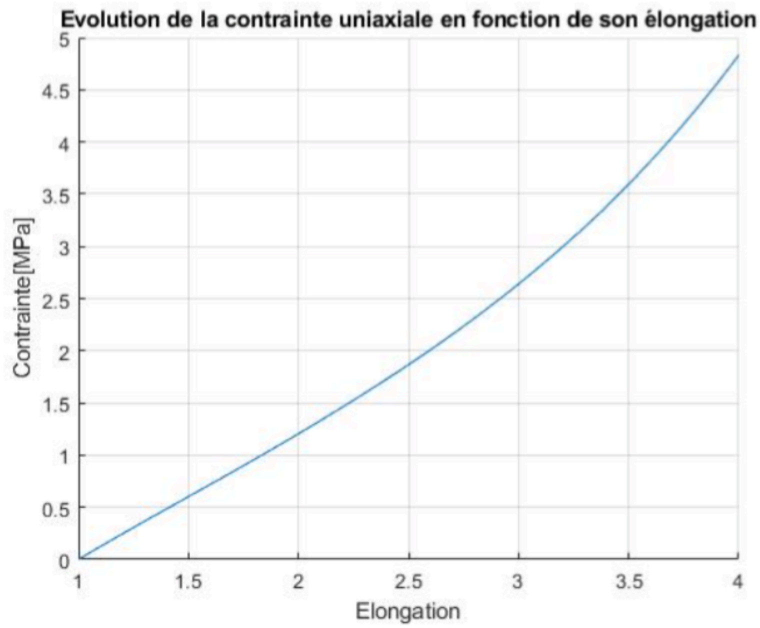

Figure 6.1 Contrainte uniaxiale

et donc

$$\frac{S}{\rho} = \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{11}} \ . \tag{6.3}$$

Par (**L**6.110), on a

$$\epsilon_{11} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \ S = \frac{1}{E} \ S \ ,$$

où E est le module de Young (**L**6.109). On écrit (6.3) sous la forme

$$\frac{S}{\rho} = \frac{\partial f}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial \epsilon_{11}} \ .$$

Ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{S}{\rho E}$$

et on a finalement en intégrant :

$$f = \frac{1}{\rho E} \frac{S^2}{2} + f_0 \ ,$$

où f_0 est l'énergie libre au repos (sans contraintes).

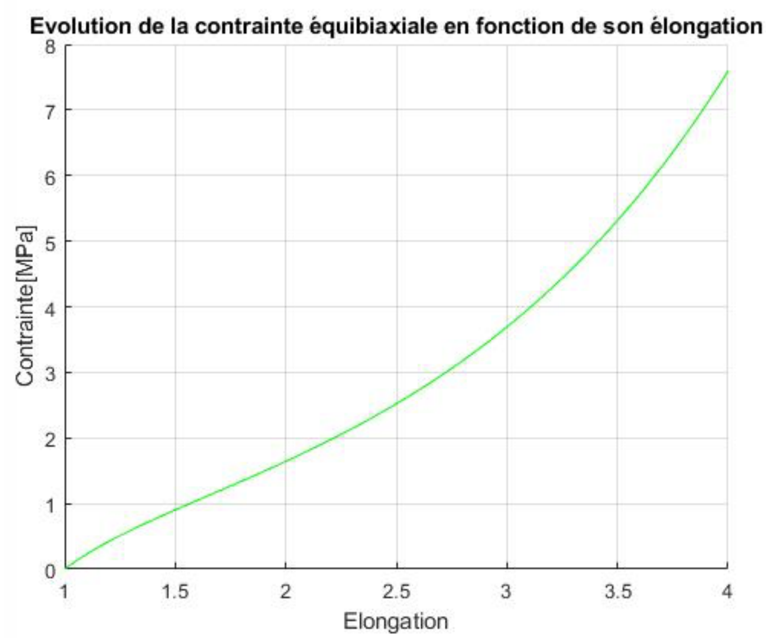

Figure 6.2 Contrainte équibiaxiale

Solution 6.12

Le développement de $f(\boldsymbol{\epsilon}, T)$ au voisinage de $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0}, T = T_0$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho\ f &= \rho\ f_0 - \rho\ s_0\ (T - T_0) + \frac{\lambda}{2}\epsilon_{ii}\epsilon_{kk} + \mu\epsilon_{ij}\epsilon_{ij} \\ &\quad + \epsilon_{ij}c_{ij}(T - T_0) - \frac{\rho c}{2T_0}(T - T_0)^2\ , \end{aligned} \quad (\mathbf{L}6.165)$$

où l'on a éliminé les termes d'ordre supérieur à 2, et où les coefficients f_0, s_0, c_{ij} et c sont encore à déterminer. Les facteurs ρ et $\frac{\rho}{T_0}$ ont été ajoutés pour simplifier les développements ultérieurs.

Pour un matériau isotrope, c_{ij} doit être isotrope, de la forme $a\ \delta_{ij}$ avec a un scalaire. Prenant $a = -(3\lambda + 2\mu)\alpha$, avec α à déterminer, on a

$$c_{ij}\ \epsilon_{ij}\ (T - T_0) = -(3\lambda + 2\mu)\ \alpha\ \epsilon_{kk}\ (T - T_0)\ . \quad (\mathbf{L}6.166)$$

En outre, en combinant ($\mathbf{L}$6.165) et ($\mathbf{L}$6.166) on obtient par ($\mathbf{L}$6.159) la relation

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \rho\frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}} \\ &= \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0)\delta_{ij}\ . \end{aligned}$$

Inversant pour obtenir $\boldsymbol{\epsilon}$ en fonction de $\boldsymbol{\sigma}$, on a

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2\mu} \left\{ \boldsymbol{\sigma} + \left[2\mu\alpha(T - T_0) - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} tr\boldsymbol{\sigma} \right] \boldsymbol{I} \right\} ,$$

où l'on a utilisé le fait que

$$\epsilon_{kk} = \frac{1}{3\lambda + 2\mu}\ \sigma_{kk} + 3\alpha(T - T_0) .$$

Pour rappel, α est le coefficient d'expansion thermique et a pour dimension l'inverse d'une température. Si l'on considère un cas de dilatation libre sans contraintes extérieures, alors $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{0}$ et on a

$$\boldsymbol{\epsilon} = \alpha(T - T_0)\boldsymbol{I} .$$

Comme $T = T(x_1)$, ϵ_{11} est la seule composante non nulle et en conséquence

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{11}(x_1) = \alpha(T_1 - T_0)\ \frac{x_1}{L} .$$

Solution 6.13

Pour résoudre cet exercice, on fait appel à la solution de la deuxième partie du problème 6.2. En introduisant la loi de conduction de Fourier $\boldsymbol{q} = -k\, \boldsymbol{\nabla} T$ dans (6.2), on obtient

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = -p\, tr\, \boldsymbol{d} + \mathrm{div}(k\, \boldsymbol{\nabla} T) + r .$$

Par l'équation de conservation de la masse (**L**3.41), on a l'égalité :

$$tr\, \boldsymbol{d} = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}$$

et l'équation d'énergie devient

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \mathrm{div}(k\, \boldsymbol{\nabla} T) + r .$$

En utilisant l'équation d'état (**L**6.136), on transforme l'équation précédente en la relation :

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} - \rho R \frac{DT}{Dt} + \mathrm{div}(k\, \boldsymbol{\nabla} T) + r .$$

Finalement, on peut écrire en tenant compte de (**L**6.141)

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \mathrm{div}(k\, \boldsymbol{\nabla} T) + r .$$

Solution 6.14

1) Les relations (**L**6.175)-(**L**6.176) permettent d'écrire

$$\sigma_{ij}^d + \sigma_0 \delta_{ij} = 3\lambda \varepsilon_0 \delta_{ij} + 2\mu(\varepsilon_{ij}^d + \varepsilon_0 \delta_{ij}) \ . \tag{6.4}$$

Rappelons que les tenseurs déviateurs ont une trace nulle

$$tr\, \sigma_{ij}^d = tr\, \varepsilon_{ij}^d = 0 \ .$$

Donc, prenant la trace de (6.4), on obtient

$$3\sigma_0 = 3\lambda\varepsilon_0.3 + 2\mu\varepsilon_0.3$$

et

$$\sigma_0 = 3\lambda\varepsilon_0 + 2\mu\varepsilon_0 = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_0 \ .$$

La définition (**L**6.119)

$$K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}$$

donne

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0 \ .$$

On récrit (6.4) successivement

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^d + 3K\varepsilon_0\delta_{ij} &= 3\lambda\varepsilon_0\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}^d + 2\mu\varepsilon_0\delta_{ij} \\ &= (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_0\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}^d \\ &= 3K\varepsilon_0\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}^d \ . \end{aligned}$$

Il vient

$$\sigma_{ij}^d = 2\mu\varepsilon_{ij}^d \ .$$

2) On rappelle que pour un tenseur symétrique du second ordre $\boldsymbol{L}$, on a $\boldsymbol{Ln} = \lambda\boldsymbol{n}$, où λ est la valeur propre de $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{n}$ son vecteur propre correspondant (sec. 1.3.8).
Pour le tenseur des contraintes déviatoire σ_{ij}^d, on a

$$\sigma_{ij}^d n_j = \lambda n_i \ . \tag{6.5}$$

On modifie (6.5) comme suit

$$\sigma_{ij}^d n_j + \sigma_0 n_i = \sigma_0 n_i + \lambda n_i = (\lambda + \sigma_0) n_i$$

À l'aide de (**L**6.175), on écrit

$$\sigma_{ij}^d n_j + \sigma_0 n_i = \sigma_{ij}^d n_j + \sigma_0 \delta_{ij} n_j = (\sigma_{ij}^d + \sigma_0\delta_{ij}) n_j = \sigma_{ij} n_j \ .$$

D'où on tire $\sigma_{ij}n_j = (\lambda + \sigma_0)n_i$. Ce qui montre que σ^d_{ij} et σ_{ij} ont les mêmes vecteurs propres.
En ce qui concerne les déplacements, on procède de la même manière. L'utilisation de (**L**6.177) dans (6.5) donne

$$\varepsilon^d_{ij}n_j = \frac{\lambda}{2\mu}n_i \ . \tag{6.6}$$

Ceci montre que σ^d_{ij} et ε^d_{ij} ont les mêmes vecteurs propres et par conséquence, les mêmes directions principales. L'usage de (**L**6.176) pour récrire (6.6) conduit à la relation

$$(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_0\delta_{ij})n_j = \frac{\lambda}{2\mu}n_i$$

ou encore

$$\varepsilon_{ij}n_j = (\varepsilon_0 + \frac{\lambda}{2\mu})n_i \ .$$

En comparant cette dernière relation avec (6.6), on constate que ε_{ij} et ε^d_{ij} ont les mêmes vecteurs propres. Finalement, puisque
σ^d_{ij} et σ_{ij} ont les mêmes vecteurs propres n_i,
σ^d_{ij} et ε^d_{ij} ont les mêmes vecteurs propres n_i,
ε_{ij} et ε^d_{ij} ont les mêmes vecteurs propres n_i,
on peut conclure que ε_{ij} et σ_{ij} ont les mêmes vecteurs propres n_i et par conséquent, les mêmes directions principales.

3) Le potentiel d'énergie de déformation est défini par la relation suivante

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\sigma_{ij} \ .$$

On a donc

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\sigma_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}(\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2}\lambda\varepsilon^2_{kk} + \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \ .$$

A l'aide de (**L**6.176), on écrit

$$\begin{aligned} W(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{1}{2}\lambda(3\varepsilon_0)^2 + \mu(\varepsilon^d_{ij} + \varepsilon_0\delta_{ij})(\varepsilon^d_{ij} + \varepsilon_0\delta_{ij}) \\ &= \frac{9}{2}\lambda(\varepsilon_0)^2 + \mu(\varepsilon^d_{ij}\varepsilon^d_{ij} + 3\varepsilon_0^2) \\ &= \frac{9}{2}\lambda(\varepsilon_0)^2 + 3\mu(\varepsilon_0)^2 + \mu\varepsilon^d_{ij}\varepsilon^d_{ij} \\ &= \frac{9}{2}\frac{3\lambda + 2\mu}{3}\varepsilon_0^2 + \mu\varepsilon^d_{ij}\varepsilon^d_{ij} \\ &= \frac{9}{2}K\varepsilon_0^2 + \mu\varepsilon^d_{ij}\varepsilon^d_{ij} \ . \end{aligned} \tag{L6.178}$$

4) Pour que la condition de stabilité

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) > 0$$

soit satisfaite, comme la relation (**L**6.178) est composée de deux carrés, il faut donc que les coefficients soient tels que

$$K > 0 \quad \text{et} \quad \mu > 0 \ .$$

Solution 6.15

Grâce à la symétrie de σ_{ij}, i.e. $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}u_{i,j} + \sigma_{ij}u_{j,i}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}u_{i,j} + \sigma_{ji}u_{j,i}\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}u_{i,j} + \sigma_{ij}u_{i,j}\right) = \sigma_{ij}u_{i,j} \ . \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant le théorème de la divergence, nous avons

$$\begin{aligned} \int_\omega \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV &= \int_\omega \sigma_{ij}u_{i,j}dV \\ &= \int_\omega \left[(\sigma_{ij}u_i)_{,j} - \sigma_{ij,j}u_i\right]dV \\ &= \int_{\partial\omega} \sigma_{ij}u_in_jdS - \int_\omega \sigma_{ij,j}u_idV \ . \end{aligned}$$

Avec le théorème de Cauchy (**L**3.76) et l'équation d'équilibre en l'absence de forces de volume (**L**3.96), on a

$$\begin{aligned} t_i &= \sigma_{ij}n_j \ , \\ \sigma_{ij,j} &= 0 \ . \end{aligned}$$

Nous obtenons alors

$$\int_\omega \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV = \int_{\partial\omega} t_iu_idS \ .$$

Solution 6.16

1) Avec (**L**6.106),(**L**6.180) et (**L**6.181), on écrit

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij} &= -\frac{\lambda\delta_{ij}}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_{nn} + \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} \\
&= -\frac{\lambda\delta_{ij}}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_{nn} + \frac{\sigma\delta_{ij}}{2\mu} \\
&= \left(-\frac{3\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} + \frac{1}{2\mu}\right)\sigma\delta_{ij} \\
&= \frac{-3\lambda+3\lambda+2\mu}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma\delta_{ij} \\
&= \frac{\sigma}{3K}\delta_{ij} \\
&= \varepsilon\delta_{ij} \ .
\end{aligned}$$

2) Avec la loi de Hooke (**L**6.104) et (**L**6.182), on a

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \\
&= \frac{\lambda\gamma}{2}(m_k n_k + m_k n_k)\delta_{ij} + \mu\gamma(m_i n_j + m_j n_i) \\
&= 0 + \mu\gamma(m_i n_j + m_j n_i) \\
&= \tau(m_i n_j + m_j n_i) \ .
\end{aligned}$$

3) Avec (**L**6.106) et (**L**6.184), on obtient

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij} &= -\frac{\lambda\delta_{ij}}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma n_m n_m + \frac{1}{2\mu}\sigma n_i n_j \\
&= -\frac{\lambda\sigma}{2\mu(3\lambda+2\mu)}(\delta_{ij} - n_i n_j + n_i n_j) + \frac{1}{2\mu}\sigma n_i n_j \\
&= \left(\frac{-\lambda+3\lambda+2\mu}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\right)\sigma n_i n_j - \frac{\lambda\sigma}{2\mu(3\lambda+2\mu)}(\delta_{ij} - n_i n_j) \\
&= \left(\frac{(\lambda+\mu)\sigma}{\mu(3\lambda+2\mu)}\right) n_i n_j - \frac{\lambda\sigma}{2\mu(3\lambda+2\mu)}(\delta_{ij} - n_i n_j) \\
&= \varepsilon_n n_i n_j + \varepsilon_T(\delta_{ij} - n_i n_j) \ .
\end{aligned}$$

CHAPITRE 7

Introduction à la mécanique des solides

Solution 7.1

Avec (**L**7.18), les équations (**L**7.21)-(**L**7.23) s'écrivent

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(1-\nu)+\nu\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\\
\sigma_{22} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}(1-\nu)+\nu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)\\
\sigma_{12} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \ .
\end{aligned}$$

On calcule les dérivées partielles des composantes du tenseur des contraintes par rapport aux variables d'espace

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}(1-\nu)+\nu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2}\right)\\
\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}(1-\nu)+\nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}\right)\\
\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}\right)\\
\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2}\right) \ .
\end{aligned}$$

Les équations d'équilibre sont données par (**L**7.20)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2}+f_1 &= 0\\
\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1}+f_2 &= 0 \ .
\end{aligned}$$

Il vient

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1 = 0 \\
&\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}(1-\nu) + \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \\
&+ \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + f_1 = 0 \\
&\frac{2}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}(1-\nu) + \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{f_1}{\mu} = 0 \\
&\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{f_1}{\mu} = 0 \\
&\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{f_1}{\mu} = 0 \\
&\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{f_1}{\mu} = 0 \\
&\mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\mu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + f_1 = 0 \\
&\mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + f_1 = 0 \ .
\end{aligned}
$$

Un raisonnement similaire conduit à (**L**7.313).

Solution 7.2

Avec (**L**7.41), les équations (**L**7.43) s'écrivent

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \\
\sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \\
\sigma_{12} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \ .
\end{aligned}
$$

On calcule les dérivées partielles des composantes du tenseur des contraintes par rapport aux variables d'espace

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right)\\
\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}\right)\\
\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}\right)\\
\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right)\ .
\end{aligned}$$

Les équations d'équilibre sont données par (**L**7.20)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1 = 0\\
\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + f_2 = 0\ .
\end{aligned}$$

La première équation d'équilibre donne

$$\begin{aligned}
&\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + f_1 = 0\\
&\frac{2}{1-\nu}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{f_1}{\mu} = 0\\
&\frac{2}{1-\nu}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{2\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{f_1}{\mu} = 0\\
&\frac{2}{1-\nu}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{f_1}{\mu} = 0\\
&\mu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right) + \mu\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + f_1 = 0\\
&\mu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right) + \frac{E}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + f_1 = 0\ .
\end{aligned}$$

Un raisonnement similaire conduit à (**L**7.315).

Solution 7.3

Les équations de Navier (**L**7.6) s'écrivent

$$(\lambda + \mu)u_{k,ki} + \mu u_{i,jj} + f_i = 0\,. \tag{7.1}$$

Avec l'expression de u_i donnée par (**L**7.315), on a successivement

$$\mu u_{i,jj} = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} g_{i,mmjj} - g_{n,nijj}$$

ainsi que

$$(\lambda + \mu) u_k = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} g_{k,mm} - \frac{\lambda + \mu}{\mu} g_{n,nk} \ .$$

Dérivant deux fois cette dernière relation, on obtient

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) u_{k,ki} &= \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} g_{k,mmki} - \frac{\lambda + \mu}{\mu} g_{n,nkki} = \\ &= \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} g_{k,kmmi} - \frac{\lambda + \mu}{\mu} g_{k,kmmi} \\ &= g_{k,kmmi} \ .\end{aligned}$$

En injectant ces expressions dans l'équation de Navier (7.1), on a

$$\begin{aligned}g_{k,kmmi} &+ \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} g_{i,mmjj} - g_{n,nijj} \\ &= g_{k,kmmi} + \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} g_{i,mmjj} - g_{k,kmmi} \\ &= \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} g_{i,mmjj} \\ &= 0\end{aligned}$$

si $g_{i,mmnn} = 0$.

Solution 7.4

1) On utilise l'identité (**L**1.238)

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}) - \nabla^2 \boldsymbol{u}$$

qui donne

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}) = \nabla^2 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u} \ .$$

On introduit cette dernière relation dans (**L**7.7) qui devient

$$\mu \nabla^2 \boldsymbol{u} + (\lambda + \mu) \left(\nabla^2 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u} \right) = 0 \ .$$

D'où

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \boldsymbol{u} + (\lambda + \mu) \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u} = 0 \ .$$

2) De la relation (**L**7.7), on écrit

$$\frac{\mu}{\lambda+\mu}\nabla^2\boldsymbol{u} + \nabla(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}) = 0\ .$$

Les constantes d'élasticité sont liées. Par (**L**6.109), $2\nu = \lambda/(\lambda+\mu)$. D'où, $\mu/(\lambda+\mu) = 1-2\nu$. Et donc le résultat.

3) On utilise la relation (**L**1.238) dans l'équation de Navier (**L**7.7)

$$\mu\left(\nabla(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}\right) + (\lambda+\mu)\nabla(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}) = 0$$

dont on tire facilement

$$(\lambda+2\mu)\nabla(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}) - \mu\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u} = 0\ .$$

Solution 7.5

L'équation (**L**7.66) s'écrit

$$\varphi(r) = C\ln\frac{r}{K}\ . \qquad (\mathbf{L}7.66)$$

Comme φ est une fonction harmonique, on a que

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{2\mu}\boldsymbol{\nabla}\varphi \qquad (\mathbf{L}7.59)$$

est une solution de l'équation de Navier. Les déplacements sont donnés par l'équation (**L**7.60) en coordonnées polaires (**L**A.4)

$$u_r = \frac{1}{2\mu}\frac{C}{r}, \quad u_\theta = u_z = 0\ . \qquad (7.2)$$

Les déformations non nulles sont par (**L**A.24)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{1}{2\mu}\frac{C}{r^2} \\
\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r} = \frac{1}{2\mu}\frac{C}{r^2}\ .
\end{aligned}$$

Avec les conditions d'extrémités non chargées, les contraintes (**L**7.43) sont

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du_r}{dr} + \nu\frac{u_r}{r}\right) = -\frac{C}{r^2}, \\
\sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u_r}{r} + \nu\frac{du_r}{dr}\right) = \frac{C}{r^2}, \\
\sigma_{zz} &= \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{rz} = 0\ .
\end{aligned}$$

Pour obtenir la même solution qu'à l'exemple de la page **L**241, il est nécessaire d'ajouter les contraintes additionnelles suivantes

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{add} &= D, \quad \sigma_{\theta\theta}^{add} = D, \\ \sigma_{zz}^{add} &= \sigma_{r\theta}^{add} = \sigma_{\theta z}^{add} = \sigma_{rz}^{add} = 0 \ .\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -\frac{C}{r^2} + D, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{C}{r^2} + D, &(7.3)\\ \sigma_{zz} &= \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{rz} = 0 \ . &(7.4)\end{aligned}$$

Cette contrainte supplémentaire ajoute la déformation suivante (conditions de contrainte plane, (**L**7.43)-(**L**7.44))

$$\varepsilon_{rr}^{add} = \varepsilon_{\theta\theta}^{add} = \frac{(1-\nu)D}{2(1+\nu)\mu}, \quad \varepsilon_{zz}^{add} = -\frac{\nu D}{(1+\nu)\mu} \ .$$

Ces déformations induisent les déplacements additionnels suivants (cf. (**L**A.24))

$$u_r^{add} = \frac{(1-\nu)Dr}{2(1+\nu)\mu}, \quad u_\theta^{add} = 0, \quad u_z^{add} = -\frac{\nu D z}{(1+\nu)\mu} \ .$$

Donc le déplacement total devient en tenant compte de (7.2)

$$u_r = \frac{r}{2\mu}\left[\frac{C}{r^2} + \frac{(1-\nu)D}{(1+\nu)}\right], \quad u_\theta = 0, \quad u_z = -\frac{\nu D z}{(1+\nu)\mu} \ . \qquad (7.5)$$

Les conditions aux limites sont données en se référant à la figure **L**7.5

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -P_i, \quad \text{en} \quad r = r_i \ , &(\mathbf{L}7.86)\\ \sigma_{rr} &= -P_e, \quad \text{en} \quad r = r_e \ . &(\mathbf{L}7.87)\end{aligned}$$

Par (7.3), on obtient

$$-P_i = -\frac{C}{r_i^2} + D, \quad -P_e = -\frac{C}{r_e^2} + D \ ,$$

et

$$C = r_i^2 r_e^2 \frac{P_e - P_i}{r_i^2 - r_e^2}, \quad D = \frac{P_e r_e^2 - P_i r_i^2}{r_i^2 - r_e^2} \ .$$

Par les relations (7.3) et (7.5), on obtient les contraintes et déplacements identiques aux expressions (**L**7.179).

Solution 7.6

On prend la divergence de la relation

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2 \boldsymbol{u} = \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} \ . \qquad (\mathbf{L}7.209)$$

On obtient

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{div} \nabla^2 \boldsymbol{u} = \rho \frac{\partial^2 (\operatorname{div} \boldsymbol{u})}{\partial t^2} \ .$$

Ensuite on utilise (**L**1.191) pour obtenir

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2 (\operatorname{div} \boldsymbol{u}) = \rho \frac{\partial^2 (\operatorname{div} \boldsymbol{u})}{\partial t^2} \ .$$

Solution 7.7

Avec $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \varepsilon_{ii} = 0$, les équations du mouvement (**L**7.202) deviennent

$$\mu \, \nabla^2 \boldsymbol{u} = \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} \ .$$

On prend le rotationnel de cette dernière relation

$$\mu \nabla \times \left(\nabla^2 \boldsymbol{u}\right) = \rho \nabla \times \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} \ .$$

En utilisant (**L**1.237), il vient

$$\mu \nabla^2 (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}) = \rho \frac{\partial^2 (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u})}{\partial t^2} \ . \qquad (\mathbf{L}7.319)$$

Solution 7.8

La fonction Φ est solution du problème si elle satisfait l'équation biharmonique (**L**7.38). A cette fin, calculons d'abord son laplacien. Il vient (cf. (**L**A.27))

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \Phi \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \\ &= -\frac{4B}{r^2} \sin 2\theta \ . \end{aligned}$$

Ensuite, on évalue le double laplacien. On a

$$\begin{aligned}\nabla^4\Phi &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(-\frac{4B}{r^2}\sin 2\theta\right)\\ &= -\frac{24B}{r^4}\sin 2\theta+\frac{1}{r}\frac{8B}{r^3}\sin 2\theta+\frac{1}{r^2}\frac{4B}{r^2}\cdot 2\cdot 2\sin 2\theta\\ &= 0\ .\end{aligned}$$

Les composantes de la contrainte sont données par les relations (**L**A.28)-(**L**A.30)

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} = -\frac{4B}{r^2}\sin 2\theta\\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} = 0\\ \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta\partial r} = \frac{1}{r^2}(A+2B\cos 2\theta)\ .\end{aligned}$$

L'équilibre en rotation du coin est donné par la relation

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}(\sigma_{r\theta}r d\theta)r - M = 0$$

et donc

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}(A+2B\cos 2\theta)d\theta = M\ . \tag{7.6}$$

À la condition (7.6), il faut ajouter celle qui exprime que les bords du coin sont libres et qu'ils ne sont soumis à aucune contrainte de cisaillement. On écrit

$$\sigma_{r\theta}(\theta=\alpha) = A+2B\cos 2\alpha = 0\ . \tag{7.7}$$

On a donc $A=-2B\cos 2\alpha$. Remplaçant A par cette valeur dans (7.6) et intégrant, il vient

$$B = \frac{M}{2\sin 2\alpha - 4\alpha\cos 2\alpha}\ .$$

La contrainte radiale devient

$$\sigma_{rr} = -\frac{4M}{2\sin 2\alpha-4\alpha\cos 2\alpha}\frac{\sin 2\theta}{r^2} = -\frac{2C}{r^2}\sin 2\theta$$

avec

$$C = -\frac{M}{\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha}\ .$$

La contrainte de cisaillement est

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{M}{r^2}\frac{\cos 2\alpha - \cos 2\theta}{\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha}\ .$$

Solution 7.9

(a) On vérifie facilement que la fonction de contrainte (**L**7.322) satisfait l'équation biharmonique. Des expressions à l'annexe **L**(A.28)-**L**(A.30), on obtient

$$\sigma_{rr} = \frac{2C\cos\theta}{r}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0 \ .$$

Pour trouver la constante C, on considère l'équilibre de la pièce à une distance r de l'origine. Donc

$$P = C\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2\cos\theta}{r} r\cos\theta \, d\theta = 2C\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos^2\theta \, d\theta \ .$$

D'où

$$P = 2C\left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{-\alpha}^{\alpha} = C\left[2\alpha + \sin 2\alpha\right]$$

On trouve

$$C = \frac{P}{2\alpha + \sin 2\alpha} \ .$$

La contrainte prend la forme

$$\sigma_{rr} = \frac{2P\cos\theta}{r(2\alpha + \sin 2\alpha)}$$

(b) En posant $\alpha = \pi/2$, on obtient les contraintes pour une plaque soumise à une charge linéique

$$\sigma_{rr} = \frac{2P}{\pi}\frac{\cos\theta}{r}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0 \ .$$

Notons que la différence de ce résultat avec (**L**7.164) provient du fait que les directions de σ_{rr} sont opposées dans les deux problèmes.

Chapitre 8

Introduction à la mécanique des fluides newtoniens

Solution 8.1

Les équations de Navier-Stokes sont traitées dans la section **L**8.4. La loi de conservation de la masse est donnée par (**L**3.44) ou (**L**8.9)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0 \ .$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement (**L**3.96) donne

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho \frac{D v_i}{D t} \ .$$

L'équation de constitution du fluide visqueux newtonien est écrite selon (**L**6.14)

$$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \lambda\, d_{kk}\,\delta_{ij} + 2\mu\, d_{ij} \ .$$

En insérant (**L**6.14) dans (**L**3.96), on obtient

$$\rho \frac{D v_i}{D t} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-p\delta_{ij} + \lambda d_{kk}\delta_{ij}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}(2\mu d_{ij}) + \rho b_i \ ,$$

et donc la relation (**L**8.10)

$$\rho \frac{D v_i}{D t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda d_{kk}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(2\mu d_{ij}) + \rho b_i \ ,$$

puisque

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-p + \lambda d_{kk}\right)\delta_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-p + \lambda d_{kk}\right) \ .$$

L'équation d'énergie (**L**8.7), en tenant compte de la loi de Fourier (**L**6.123) pour la conduction, devient

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \lambda\,(tr\boldsymbol{d})^2 + 2\mu\,\boldsymbol{d} : \boldsymbol{d} + \mathrm{div}(k\,\boldsymbol{\nabla} T) + r\ .$$

Si les coefficients λ et μ sont constants, on peut les sortir des dérivées partielles. L'équation de la quantité de mouvement donne

$$\rho\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda\frac{\partial}{\partial x_i}(d_{kk}) + \mu\Delta v_i + \mu\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}) + \rho b_i\ .$$

Si l'écoulement est incompressible, il en résulte que div $\boldsymbol{v} = tr\,\boldsymbol{d} = 0$ et l'équation précédente se simplifie

$$\rho\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\Delta v_i + \rho b_i\ .$$

Solution 8.2

Les solutions obtenues à la section **L**8.7.1, i.e. (**L**8.51) et (**L**8.63), pour les écoulements plans de Couette et de Poiseuille, respectivement, résultent d'équations différentielles linéaires. Comme les termes non linéaires des équations de Navier-Stokes n'interviennent pas, on peut faire appel au principe de superposition linéaire et la solution de l'écoulement plan combiné Couette-Poiseuille s'écrit

$$v_1 = -\frac{h^2}{2\mu}\frac{dP}{dx_1}\frac{x_2}{h}(1-\frac{x_2}{h}) + \frac{Ux_2}{h}\ .$$

La contrainte de cisaillement vaut

$$\sigma_{12} = \mu\frac{dv_1}{dx_2} = -\frac{h}{2}\frac{dP}{dx_1}(1-\frac{2x_2}{h}) + \frac{\mu U}{h}\ .$$

Enfin, le débit-volume est

$$Q = \int_0^h v_1\,dx_2 = -\frac{h^3}{12\mu}\frac{dP}{dx_1} + \frac{Uh}{2}\ .$$

Solution 8.3

Du point de vue géométrique, cet écoulement a lieu entre deux cylindres concentriques comme dans l'écoulement de Couette circulaire. Les cylindres intérieur de rayon R_1 et extérieur de rayon R_2 ont une vitesse angulaire de rotation ω_1 et ω_2, respectivement. Le fluide visqueux entre les cylindres est soumis également à un gradient de pression axial. Comme l'écoulement est stationnaire ($\partial/\partial t = 0$) et à symétrie de révolution ($\partial/\partial\theta = 0$), le profil de vitesse est fonction de r uniquement. On a

$$v_r = v_r(r),\ v_\theta = v_\theta(r),\ v_z = v_z(r),\ p = p(r,z)\ . \tag{8.1}$$

Le fluide adhérant à la paroi, les conditions aux limites sont

$$\begin{aligned} &v_r(R_1) = v_r(R_2) = 0, \qquad v_\theta(R_1) = \omega_1 R_1,\ v_\theta(R_2) = \omega_2 R_2,\\ &v_z(R_1) = v_z(R_2) = 0\ . \end{aligned} \tag{8.2}$$

Par un raisonnement identique à celui de l'écoulement circulaire de Couette, on peut montrer que la composante v_r est nulle partout (cf. (**L**8.98) et (**L**8.99)). Les équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques (A.32)-(A.34) deviennent

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{v_\theta^2}{r}\ , \tag{8.3}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) - \frac{v_\theta^2}{r} = 0\ , \tag{8.4}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = 0. \tag{8.5}$$

La solution de Couette (**L**8.102) reste valable

$$v_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r} = \frac{\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\, r - \frac{(\omega_2-\omega_1)R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\,\frac{1}{r}\ . \tag{8.6}$$

La relation (8.3) donne

$$p = \rho\int_{R_1}^{r} \frac{v_\theta^2}{r'} dr' + f(z)\ , \tag{8.7}$$

où v_θ est la solution de Couette et $f(z)$ est une fonction indéterminée de z. Introduisons (8.7) dans (8.5). Il vient

$$-\frac{df}{dz} + \mu\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right) = 0\ . \tag{8.8}$$

Comme f ne dépend que de z et que v_z n'est fonction que de r, on a

$$\frac{df}{dz} = \mu\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right) = -C\ ,$$

où C est une constante. On se référera au développement décrit aux pages **L**302 et **L**303 pour l'intégration de v_z. Les solutions s'écrivent en tenant compte des conditions aux limites (8.2)

$$f(z) = -Cz + D \ , \tag{8.9}$$

$$v_z(r) = \frac{C}{4\mu}\left[-r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln(R_2/R_1)}\ln r + \frac{R_1^2 \ln R_2 - R_2^2 \ln R_1}{\ln(R_2/R_1)}\right] . \tag{8.10}$$

Le facteur D est une constante. Le champ de pression est donné par

$$p(r,z) = \rho \int_{R_1}^{r} \frac{v_\theta^2}{r'} dr' - Cz + D \ . \tag{8.11}$$

La pression est connue à une constante près D, qui donnera la pression de référence ; le gradient de pression $-C$ agit dans la direction de l'axe et enfin, le premier terme du second membre de (8.11) équilibre la force centrifuge du fluide en rotation. Remarquons que la vitesse axiale est indépendante de la vitesse de rotation des cylindres, tandis que la vitesse azimutale v_θ est indépendante du gradient de pression.

Solution 8.4

On se réfère aux coordonnées sphériques (r, θ, φ) comme à la figure **L**8.20. L'axe de rotation de la sphère à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \boldsymbol{e}_{x_3}$ est l'axe x_3. Suite aux symétries du problème, le champ de vitesse ne possède qu'une seule composante telle qu'on ait

$$\boldsymbol{v} = v_\varphi(r,\theta)\boldsymbol{e}_\varphi \ . \tag{8.12}$$

On résout les équations de Stokes avec les conditions aux limites

$$\boldsymbol{v} = 0 \quad \text{en} \quad r = \infty \tag{8.13}$$

$$v_\varphi = \Omega R \sin\theta \quad \text{en} \quad r = R \ . \tag{8.14}$$

La forme de la condition aux limites (8.14) suggère de rechercher la solution sous la forme

$$v_\varphi = \Omega R f(r) \sin\theta \ , \quad p = p_\infty \ . \tag{8.15}$$

On vérifie que l'équation de conservation de la masse (**L**B.30) est trivialement vérifiée par (8.15). Le gradient de pression n'intervient pas dans (**L**B.33) par raison de la symétrie axiale ($\partial/\partial\varphi = 0$). On a

$$\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2\theta} = \Omega R \sin\theta \left(f'' + \frac{2f'}{r} - \frac{2f}{r^2}\right) = 0 \ . \tag{8.16}$$

La solution en f s'écrit sous la forme $f(r) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n r^n$. Ceci donne

$$f(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r^2} \ . \tag{8.17}$$

Les conditions aux limites (8.13) et (8.14) imposent $C_1 = 0$ et $C_2 = R^2$, respectivement. Le champ de vitesse autour de la sphère en rotation est

$$v_\varphi = \Omega \frac{R^3}{r^2} \sin\theta \, \boldsymbol{e}_\varphi \ .$$

Solution 8.5

Les conditions aux limites sont ici

$$v_\varphi = \Omega_1 R_1 \sin\theta \quad \text{en} \quad r = R_1 \tag{8.18}$$

$$v_\varphi = \Omega_2 R_2 \sin\theta \quad \text{en} \quad r = R_2 \ . \tag{8.19}$$

Les considérations de l'exercice précédent restent valables pour la recherche du profil de vitesse sous la forme (8.15)

$$v_\varphi = f(r)\sin\theta \ , \quad p = p_\infty \ . \tag{8.20}$$

On notera qu'on n'utilise plus le facteur ΩR puisque maintenant on a deux rayons et deux vitesses angulaires à prendre en compte. L'équation à résoudre est donc

$$\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2\theta} = \sin\theta \left(f'' + \frac{2f'}{r} - \frac{2f}{r^2} \right) = 0 \ , \tag{8.21}$$

dont la solution est écrite telle que

$$f(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r^2} \ . \tag{8.22}$$

L'imposition des conditions aux limites (8.18) et (8.19) donne

$$C_1 = \frac{\Omega_2 R_2^3 - \Omega_1 R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}, \quad C_2 = \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{R_2^3 - R_1^3} R_1^3 R_2^3 \ . \tag{8.23}$$

Solution 8.6

On considère la ligne de courant SA depuis la surface libre S vers l'orifice Or de l'enceinte (voir figure 8.1) et on lui applique le théorème de Bernouilli (**L**8.223). On a

$$p_S + \frac{\rho v_S^2}{2} + \rho\chi_S = p_A + \frac{\rho v_A^2}{2} + \rho\chi_A \ .$$

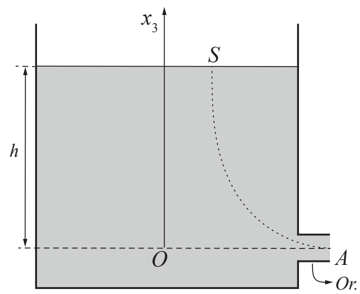

Figure 8.1 Enceinte avec surface libre et orifice.

Par (**L**8.193), on obtient

$$-g = -\frac{\partial \chi}{\partial x_3} \ ,$$

et donc $\chi = gx_3 + C$. A la surface libre la pression est celle de l'air ambiant ; il en est de même à l'orifice. Donc $p_S = p_A = p_{air}$. Si on prend l'origine de l'axe des x_3 au niveau de l'orifice, la contribution de $\rho\chi$ y est égale à C. Pour la facilité, on pose $C = 0$, tandis qu'à la surface libre $x_3 = h$, $\rho\chi_S = \rho gh$. A la surface libre, la vitesse v_S est nulle (ceci est d'autant plus vrai lorsque l'enceinte est grande). On a en posant $v_A = v$

$$\rho gh = \frac{\rho}{2} v^2 \ . \tag{8.24}$$

Ce qui donne bien la relation cherchée, qui est connue comme formule de Torricelli.

Solution 8.7

A partir des équations de Navier-Stokes (**L**8.17) en l'absence des forces de volume et en tenant compte du champ de vitesse de la forme

$$v_1 = v_1(x_2, x_3), \quad v_2 = v_3 = 0 \ , \tag{8.25}$$

la seule relation qui donne une contribution non nulle est celle relative à la composante de vitesse v_1. Il vient

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right) \ ,$$

ou encore

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} = C \ , \tag{8.26}$$

puisque $p = p(x_1)$ et $v_1 = v_1(x_2, x_3)$.

Sur la paroi de l'ellipse $v_1 = 0$ et donc $A + B = 0$, d'où $B = -A$. On peut calculer les dérivées secondes de la vitesse qu'on injecte dans (8.26). On a

$$2A\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x_1} = C \ ,$$

dont on tire A et $B = -A$. On obtient une solution générique, qui devient particulière pour un gradient de pression donné.

Solution 8.8

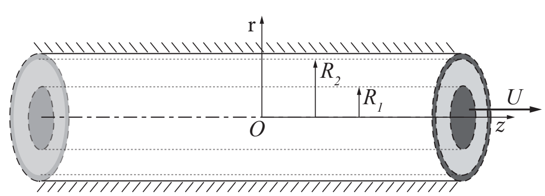

Figure 8.2 Ecoulement entre deux cylindres concentriques, l'un fixe et l'autre mobile à la vitesse U.

On travaille en coordonnées cylindriques avec l'axe z dans la direction des axes des deux cylindres (cf. figure 8.2). La seule composante de la vitesse qui n'est pas nulle est à l'évidence v_z. De plus $v_z = v_z(r)$.

L'écoulement est forcé cinématiquement par le déplacement du cylindre intérieur. Aucun gradient de pression ne participe au mouvement du fluide.

L'équation (A.34) donne

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right) = 0 \ . \tag{8.27}$$

Intégrant (8.27), il vient

$$v_z = C_1 \ln r + C_2 \ . \tag{8.28}$$

Les conditions aux limites sont

$$v_z(r = R_1) = U \tag{8.29}$$

$$v_z(r = R_2) = 0 \; . \tag{8.30}$$

Imposant (8.29) et (8.30) à (8.28), on obtient le champ de vitesse

$$v_z = \frac{U}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln \frac{r}{R_2} \; .$$

La seule composante du tenseur des contraintes non nulle est σ_{rz} qui est égale à

$$\sigma_{rz} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = \mu \frac{U}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \frac{1}{r} \; . \tag{8.31}$$

La force de frottement par unité de longueur qui s'exerce sur le cylindre mobile est donnée par l'intégrale

$$\int_0^1 \sigma_{rz}|_{r=R1} 2\pi R_1 dz = 2\pi\mu \frac{U}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \; .$$