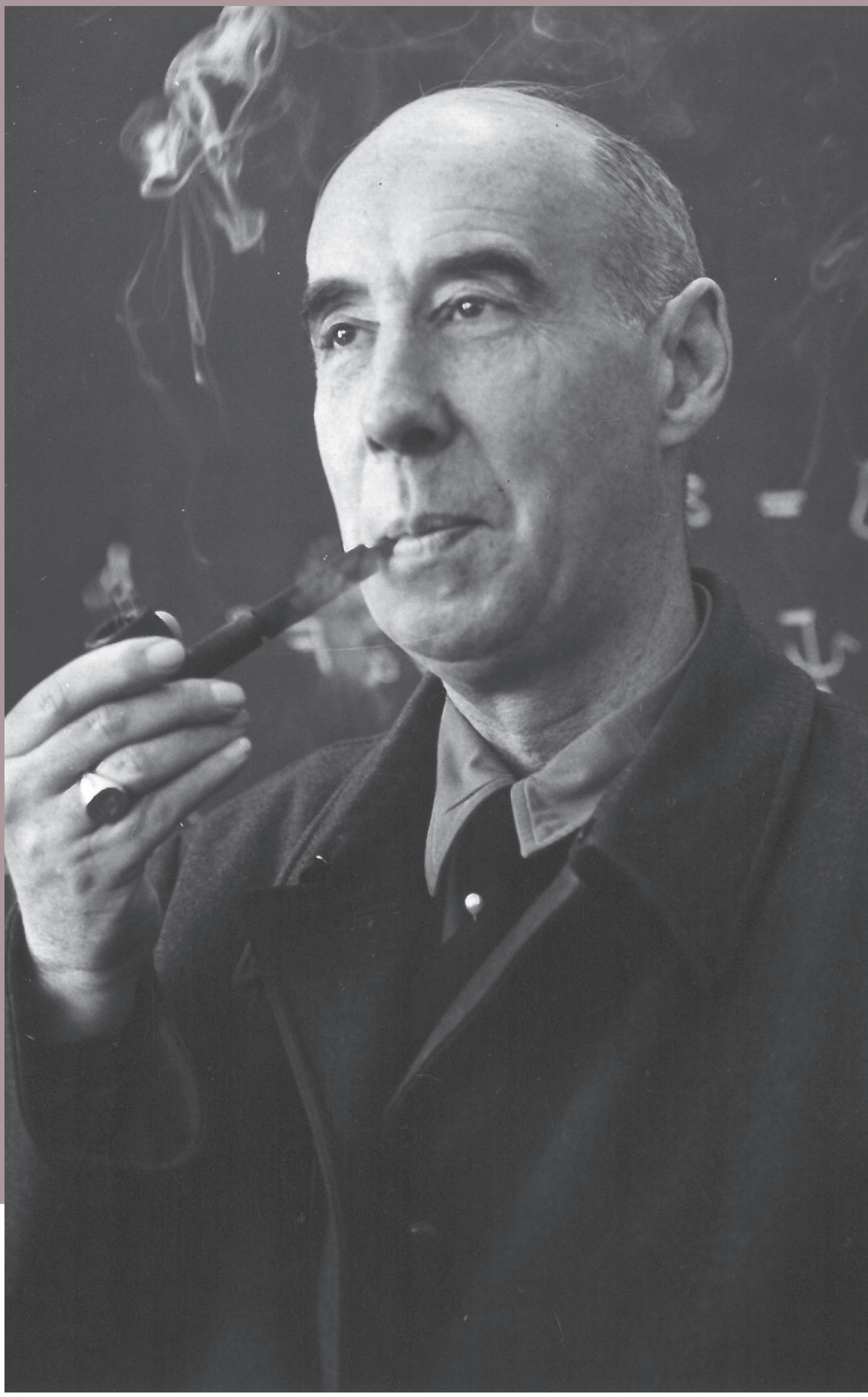
Ernst C. G. Stueckelberg

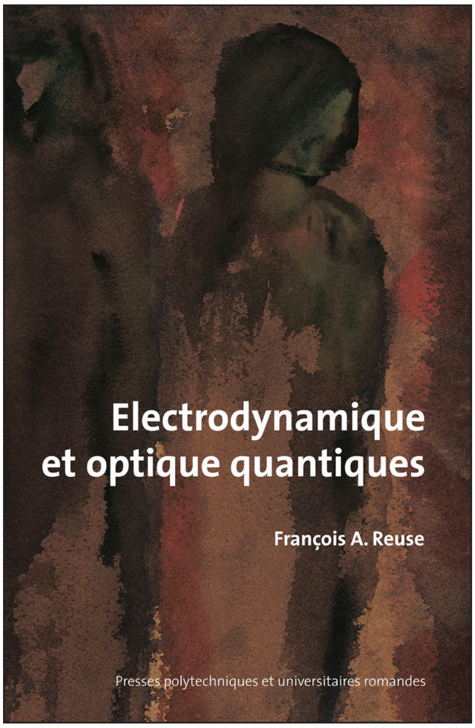
Théorie quantique des champs

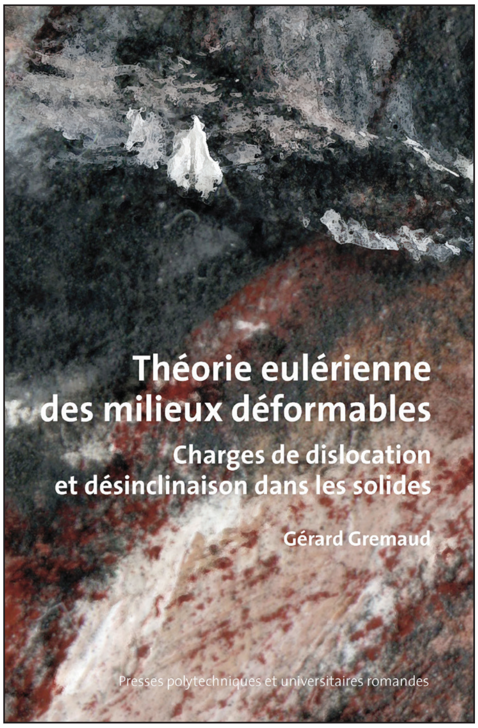


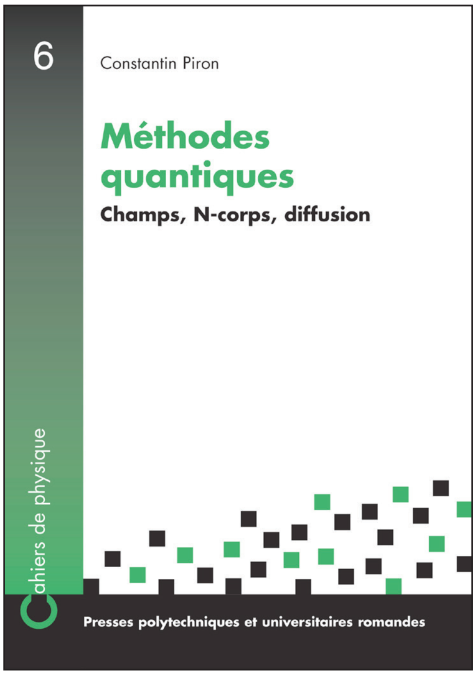
Livre VI

Presses polytechniques et universitaires romandes

Chez le même éditeur







Livre VI

Théorie quantique des champs

Table des matières

Chapitre 1

Notions et notations de la théorie des quanta

Présentation

On commence ce livre par une analyse des probabilités dans l'espace de Hilbert réel (section 1) puis on discute du principe d'incertitude qui exige l'utilisation du nombre imaginaire en physique des quanta (section 2). L'isomorphisme entre l'espace de Hilbert réel et l'espace de Hilbert complexe est ensuite présenté à la section 3 et les projecteurs sont ensuite exposés à la section 4.

1.1 Analyse des probabilités

Soient deux *observables* F et G d'un système Σ, dont les ensembles (les *spectres*) des valeurs qu'elles peuvent prendre sont, pour simplifier, supposés discrets :

$$\begin{aligned} F &: \{F^{(i)}\} = \{F^{(1)} < F^{(2)} < \ldots < F^{(i)} < \ldots < F^{(\omega_F)}\} \\ G &: \{'G^{('i)}\} = \{'G^{('1)} < 'G^{('2)} < \ldots < 'G^{('i)} < \ldots < 'G^{('\omega_G)}\}. \end{aligned}$$

En théorie classique, nous savons qu'à chaque état du système, les équations de mouvement permettent de calculer la valeur prise par les observables F et G. En théorie des quanta, il n'en est plus de même, il n'est possible de calculer que les *probabilités* $w^{(i)}$ ($'w^{('i)}$) d'obtenir $F^{(i)}$ ($'G^{('i)}$), $i = 1, 2, \ldots \omega_F$ $'i = '1, '2, \ldots '\omega_G$) si l'on effectue une mesure.

Par définition des probabilités nous devons avoir :

$$w^{(i)} \geq 0 \; ; \; \sum_{i=1}^{\omega_F} w^{(i)} = 1$$

$$'w^{('i)} \geq 0 \; ; \; \sum_{'i=1}^{'\omega_G} 'w^{('i)} = 1.$$

Si l'on dispose d'une grande quantité de systèmes identiques, la valeur moyenne de l'observable F (G) obtenue à partir des mesures de F (G), effectuées sur chacun des systèmes dans un même état, peut être prédite par la théorie des quanta grâce à l'*espérance mathématique*

$$\begin{aligned} < F > &= \sum_{i=1}^{\omega_F} w^{(i)} F^{(i)} \\ < G > &= \sum_{'i=1}^{\omega_G} {}'w^{('i)}\,{}'G^{('i)}. \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Puisque les probabilités sont des nombres non-négatifs, il est possible de les écrire comme une somme de carrés :

$$\begin{aligned} w^{(i)} &= \sum_{\alpha=1}^{\omega_i} \psi^2_{i\alpha} \\ {}'w^{'i} &= \sum_{'\alpha=1}^{'\omega_{'i}} {}'\psi^2_{'i'\alpha} \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

avec

$$\begin{aligned} i\alpha &= 11, 12, \ldots, 1\omega_1, 21, 22, \ldots, 2\omega_2, \ldots, \omega_F\omega_{\omega_F} \\ {}'i'\alpha &= {}'1'1, {}'1'2, \ldots, {}'1'\omega_1, {}'2'1, {}'2'2, \ldots, 2'\omega_2, \ldots, {}'\omega_G{}'\omega_{\omega_G}. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} &\{a\} = \{i\alpha\} \;\text{ et }\; \omega_R = \sum_{i=1}^{\omega_F} \omega_i \\ &a = 1, 2, \ldots \omega_R \\ &\{'a\} = \{'i'\alpha\} \;\text{ et }\; {}'\omega_{'R} = \sum_{'i=1}^{'\omega_G} {}'w_{'i} \\ &{}'a = 1, 2, \ldots, {}'\omega_{'R}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} &\psi_a = \psi_{i\alpha} \;\text{ et }\; {}'\psi_{'a} = {}'\psi_{'i'\alpha} \\ &F^{(a)} = F^{(i\alpha)} = F^{(i)} \;\text{ et }\; {}'G^{('a)} = {}'G^{('i'\alpha)} = {}'G^{(i)}. \end{aligned}$$

L'introduction de ces dégénerescences d'ordre ω_i $({}'\omega_{'i})$ dans le spectre de F (G) permet de les rendre équivalents à celui de G (F) :

$$\omega_R = {}'\omega_{'R}.$$

Par suite les espérances mathématiques (5.1.1) s'écrivent maintenant

$$\begin{aligned} < F > &= \sum_{a=1}^{\omega_R} \psi^2_a F^{(a)} \\ < G > &= \sum_{'a=1}^{\omega_R} {}'\psi^2_{'a}\,{}'G^{('a)}. \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

La normalisation des probabilités devient :

$$\sum_{i=1}^{\omega_F} w^{(i)} = \sum_{a=1}^{\omega_R} \psi_a^2 = 1$$
$$\sum_{{}'i}^{\omega_G} {}'w^{({}'i)} = \sum_{{}'a=1}^{\omega_R} {}'\psi_{{}'a}^2 = 1.$$

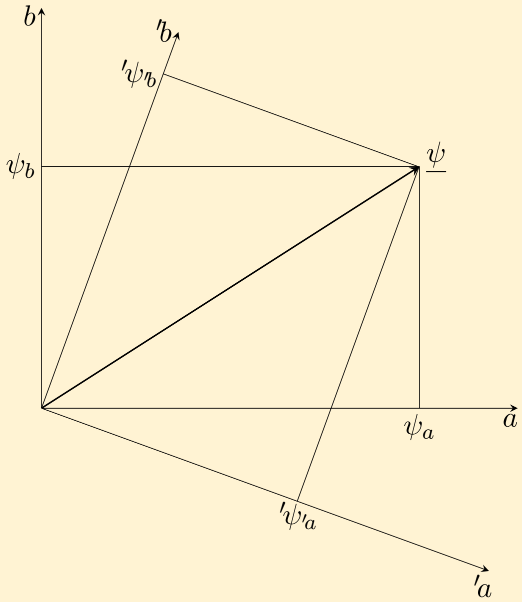


Fig. 1.1.1

Nous voyons par là qu'il est possible d'interpréter les grandeurs ψ_a et ${}'\psi_{{}'a}$ comme les composantes, dans deux référentiels orthogonaux différents d'un vecteur abstrait $\underline{\psi}$ dans un espace euclidien à ω_R dimensions ; ce vecteur $\underline{\psi}$ étant de module un. La norme de ce vecteur $\underline{\psi}$ étant

$$|\underline{\psi}|^2 = \sum_{a=1}^{\omega_R} \psi_a^2 = \sum_{{}'a=1}^{\omega_R} {}'\psi_{{}'a}^2 = 1.$$

Nous savons que les transformations permettant le passage du référentiel $\{a\}$ au référentiel $\{{}'a\}$ qui conservent la valeur et la forme de la norme sont les transformations orthogonales.

Soit $O = \{O_{{}'aa}\}$ la matrice d'une telle transformation ; alors si nous utilisons la convention sommatoire habituelle nous avons :

$$\begin{aligned} {}'\psi_{{}'a} &= O_{{}'aa}\psi_a \\ \psi_a &= O^{-1}_{a{}'a}\,{}'\psi_{{}'a}. \end{aligned}$$

Mais dans un espace euclidien, nous savons que

$$O^{-1} = O^T,$$

c'est-à-dire

$$O^{-1}_{a'a} = O^T_{a'a} = O_{'aa}.$$

Quant aux valeurs $F^{(a)}$ $('G^{'a)})$ du spectre, elles s'interprètent comme les composantes d'un tenseur symétrique du deuxième ordre diagonal dans le référentiel $\{a\}$ $(\{'a\})$:

$$F_{ab} \stackrel{*}{=} F^{(a)}\delta_{ab}$$
$$'G_{'a'b} \stackrel{*}{=} 'G^{('a)}\delta_{'a'b}.$$

En effet :

$$< F > = \sum_{ab}^{\omega_R} \psi_a F_{ab} \psi_b \stackrel{*}{=} \sum_{a,b}^{\omega_R} \psi_a F^{(a)} \delta_{ab} = \sum_{a}^{\omega_R} \psi_a^2 F^{(a)}$$
$$< G > = \sum_{'a'b} {'\psi_{'a}} {'G_{'a'b}} {'\psi_{'b}} \stackrel{*}{=} \sum_{'a'b}^{\omega_R} {'\psi_{'a}} {'G^{('a)}} \delta_{'a'b} {'\psi_{'b}} = \sum_{'a}^{\omega_R} {'\psi^2_{'a}} {'G^{('a)}}.$$

Dans cet espace euclidien à ω_R dimensions définissons un produit scalaire

$$(\underline{\phi}, \underline{\psi}) = (\underline{\psi}, \underline{\phi}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{a}^{\omega_R} \phi_a \psi_a. \tag{1.1.4}$$

Cet espace munit du produit scalaire vérifie les axiomes d'un *espace de Hilbert réel* (RHS). La dimension ω_R est en général infinie. (Si les spectres sont continus, il est possible de généraliser ce que nous venons de faire.)

Grâce à (5.1.4), les espérances mathématiques s'écrivent

$$< F > = \psi_a F_{ab} \psi_b = (\underline{\psi}, F\underline{\psi}) = (F\underline{\psi}, \underline{\psi})$$
$$< G > = {'\psi_{'a}} {'G_{'a'b}} {'\psi_{'b}} = (\underline{\psi}, G\underline{\psi}) = (\underline{G\psi}, \underline{\psi}),$$

où F et G sont les opérateurs associés aux observables F et G. Dans la représentation matricielle, nous avons

$$F = \{F_{ab}\}\ ;\ G = \{G_{ab}\}.$$

Dans RHS nous disons qu'un opérateur A^T est transposé de A lorsque

$$(A^T\underline{\phi}, \underline{\psi}) \stackrel{\text{def}}{=} (\underline{\phi}, A\underline{\psi})$$
$$A^T_{ab} = A_{ba}.$$

Par conséquent les observables étant des opérateurs symétriques, nous avons

$$F^T = F\ ;\ \ G^T = G.$$

Donnons encore les lois de transformation des observables :

$$< G > = {'\psi_{'a}} {'G_{'a'b}} {'\psi_{'b}} = \psi_a G_{ab} \psi_b,$$

qui, avec

$$'\psi_{'a} = O_{'aa}\psi_a \;;\;\; '\psi_{'b} = O_{'bb}\psi_b,$$

donne

$$< G >= O_{'aa}\psi_a {'G}_{'a'b} O_{'bb}\psi_b = \psi_a G_{ab}\psi_b,$$

c'est-à-dire

$$G_{ab} = O_{'aa}O_{'bb}{'G}_{'a'b},$$

ou de façon plus symétrique :

$$G_{ab} = O^T_{a'a}{'G}_{'a'b}O_{'bb} \tag{1.1.5}$$

et inversement

$$'G_{'a'b} = O_{'aa}G_{ab}O^T_{b'b}.$$

Sous forme condensée, cela s'écrit :

$$'\underline{\psi} = O\underline{\psi} \;;\; 'G = OGO^T.$$

En résumé, nous avons associé à chaque état d'un système Σ un vecteur abstrait $\underline{\psi}$ de longueur unité dans un RHS. Nous dirons alors pour abréger que le système Σ est dans l'état $\underline{\psi}$.

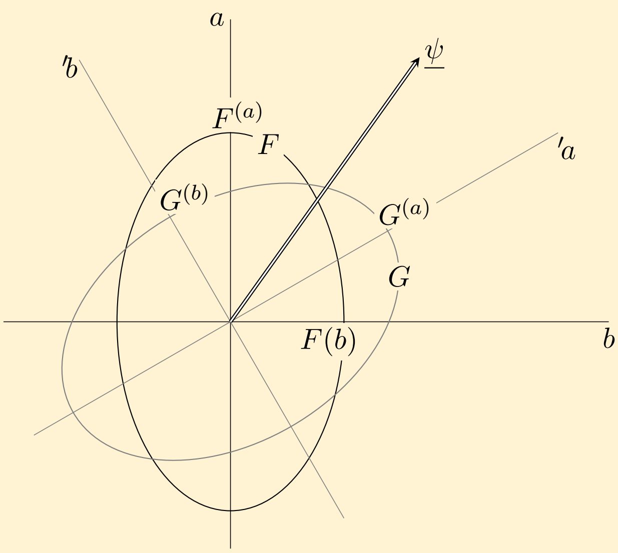


Fig. 1.1.2 Ellipsoïdes associés à deux grandeurs (figure pour le cas d'un RHS à 2 dimensions).

Les observables de ce système y sont représentées par des tenseurs symétriques du deuxième ordre ; géométriquement ce sont donc des ellipsoïdes dont la longueur des axes principaux est donnée par les valeurs du spectre.

Chaque tenseur (ellipsoïde) admet un référentiel $\{a\}$ dans lequel il est diagonal : $F_{ab} \overset{*}{=} F^{(a)}\delta_{ab}$. Dans ce référentiel $\{a\}$, le carré de la composante ψ_a de $\underline{\psi}$ représente la probabilité d'obtenir $F^{(a)}$ lors d'une mesure.

Une conséquence immédiate de ceci est que si $\psi_a = 1$, c'est-à-dire si le vecteur $\underline{\psi}$ est sur l'axe a, alors la valeur mesurée peut être prédite avec certitude égale à $F^{(a)}$, les autres probabilités $|\psi_{b\neq a}|^2$ étant alors nulles ! Nous voyons que si les axes principaux de deux ellipsoïdes d'observables F et G ne coïncident pas, il est impossible de prédire avec certitude une valeur de F et une valeur de G.

L'espérance mathématique d'une observable F d'un système Σ dans l'état $\underline{\psi}$ est

$$< F >_{\underline{\psi}} = (\underline{\psi}, F\underline{\psi}).$$

Si $\psi_a = 1$, alors évidemment : $< F >_{\underline{\psi}} = F^{(a)}$.

Remarque.

La position relative des deux ellipsoïdes, donc l'orientation relative des deux référentiels $\{a\}$ et $\{'a\}$ n'est pas nécessairement indépendante de l'état $\underline{\psi}$. Par conséquent $O = \{O_{ab}\}$ peut dépendre de $\underline{\psi}$. Nous excluons cette possibilité en postulant la linéarité des opérateurs (ce qui n'est pas une nécessité à priori !).

1.2 Principe d'incertitude

La présence d'une distribution de probabilité ($\{w^{(i)}\}$ ou $\{\psi_a^2\}$) d'obtenir telle ou telle valeur d'une observable si l'on effectue une mesure introduit évidemment une certaine incertitude sur la valeur que l'on a prédite (et ceci indépendamment de la précision de mesure). Cette incertitude est d'autant plus grande que la distribution est plus « étalée ».

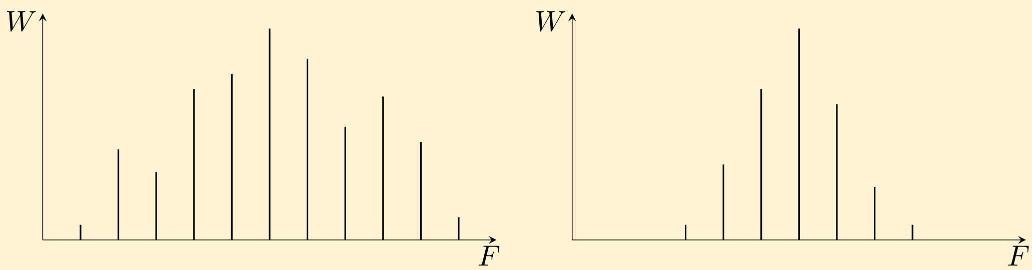


Fig. 1.2.1 Distributions typiques : « étalée » (partie gauche), « resserrée » (partie droite).

Par analogie avec le calcul des probabilités, nous définissons cette incertitude au moyen de la variance. Plus précisemment, nous introduisons le tenseur (ou opérateur) d'erreur ΔF_{ab} de F_{ab}

$$\Delta F_{ab} \stackrel{\text{def}}{=} F_{ab} - \delta_{ab} < F > .$$

L'incertitude est alors définie comme l'espérance mathématique de $(\Delta F_{ab})^2$. Un calcul simple montre que

$$< (\Delta F)^2 > = < F^2 > - < F >^2 . \tag{1.2.1}$$

Nous avons vu qu'il existe des états pour lesquels la distribution de probabilité se réduit à une certitude : ce sont les cas où le vecteur $\underline{\psi}$ est sur l'un des axes de l'ellipsoïde : $|\underline{\psi}| = \psi_a = 1$. Dans ces conditions il n'y a plus d'incertitude, la valeur prédite est égale à la valeur mesurée, si celle-ci est précise :

$$< \Delta F^2 >= 0.$$

On peut naturellement se demander s'il existe des observables pour lesquelles une prédiction certaine peut être faite pour chacune d'elle simultanément (c'est-à-dire pour un même état). De telles observables existent, ce sont celle dont les tenseurs peuvent être diagonalisés dans un même référentiel, c'est-à-dire dont les axes de leurs ellipsoïdes coïncident. En effet, leurs distributions de probabilité ($\{\psi_a^2\}$) sont alors identiques. De telles observables sont dites *compatibles*.

Examinons rapidement le contenu physique de ces résultats.

Supposons un système dont l'état est décrit par deux observables F et G de spectres $\{F_1,\ F_2\}$ et $\{'G_1,\ 'G_2\}$ (RHS à deux dimensions). Soient alors $\{\psi_1^2,\ \psi_2^2\}$ et $\{'\psi_1^2,\ '\psi_2^2\}$ les distributions de probabilité de F et de G dans l'état $\underline{\psi}$. Considérons alors les deux cas :

a) *F et G sont compatible.*
Les distributions de probabilité $\{\psi_i^2\}$ et $\{'\psi_i^2\}$ ont alors les mêmes valeurs. Si nous effectuons les mesures avec précision, ou bien nous obtenons (F_1 et G_1) ou bien (F_2 et G_2).

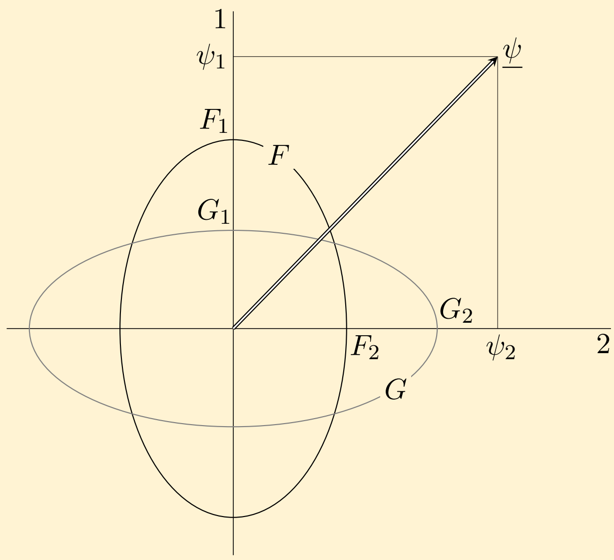


Fig. 1.2.2 Cas de deux grandeurs dont les ellipsoïdes reprśentatifs ont les axes principaux en coïncidence.

Donc après la mesure, le système se trouve ou bien dans l'état ψ_1 ou bien dans l'état ψ_2 ; dans chacun des cas les valeurs de F et G sont prédites avec certitude (et seraient mesurées telles avec précision) cf. figure 1.2.2.

b) *F et G ne sont pas compatibles.*

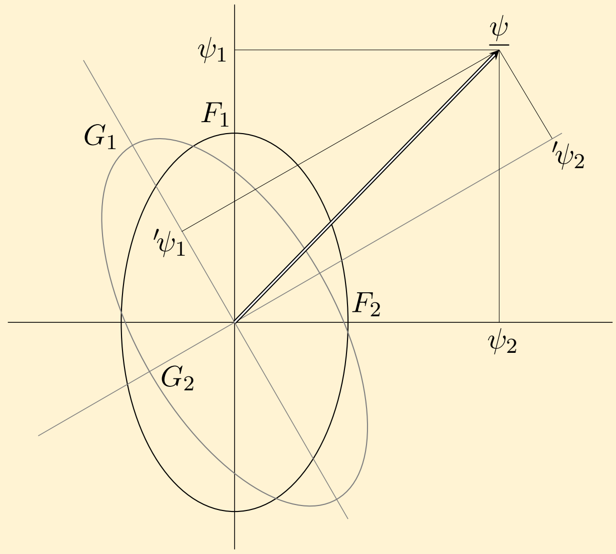


Fig. 1.2.3 Cas de deux grandeurs dont les ellipsoïdes reprśentatifs dont les axes principaux ne coïncident pas.

Alors si nous effectuons les mesures, ou bien nous obtenons une valeur précise de F (F_1 ou F_2) et il est impossible de mesurer G (ou bien nous obtenons une valeur précise de G (G_1 ou G_2) et il est impossible de mesurer F. L'état obtenu après les mesures est parfaitement indéterminé. Physiquement cela signifie que l'opération de mesure perturbe le système d'autant plus que la mesure est précise et que cette perturbation se reporte en particulier sur la mesure d'une autre observable non compatible avec la première. La seule chose que nous puissions faire dans ce cas est d'effectuer des mesures moins précises. L'état obtenu ne donnera alors plus des prédictions certaines pour les observables mais une distribution de probabilité.

Nous constatons donc que la mesure précise et simultanée de deux observables non compatibles est impossible.

En théorie des quanta un tel état est donc décrit par l'ensemble de toutes les observables compatibles (puisque ce sont les seules simultanément mesurables). Cet ensemble n'est en général pas égal à celui de toutes les observables indépendantes du système ; si c'est le cas, alors la théorie classique est valable sans restriction. La description d'un système en théorie des quanta est donc, comme en physique statistique, incomplète, mais pour d'autres raisons : voici l'origine des probabilités introduites à la section 5.1.

Cette imposibilité de mesurer simultanément et avec précision deux observables non compatibles revient à dire que leurs incertitudes ne peuvent s'annuler les deux à la fois et que si l'une diminue, l'autre doit nécessairement augmenter. A priori il y a deux possibilités d'énoncer mathématiquement ce principe :

$$< \Delta F^2 >< \Delta G^2 > \geq \begin{cases} \lambda^2 < P > & \text{(A)} \\ \lambda^2 < C >^2 & \text{(B)} \end{cases}$$

où P est un opérateur de dimension $[F^2][G^2]$ et C est un opérateur de dimension

$[F][G]$ et λ^2 est un nombre.

Au cas où les deux observables F et G sont compatibles, le second membre doit être nul, puisque alors le premier membre peut le devenir.

Le critère de compatibilité ou de non compatibilité de deux observables est la valeur du *commutateur* défini comme

$$[F,G]_{ab} \overset{\text{def}}{=} \sum_c F_{ac}G_{cb} - G_{ac}F_{cb}.$$

Alors

$$[F,G]_{ab} \begin{cases} = 0, \ \forall\, a,b & \text{si } F \text{ et } G \text{ compatibles} \\ \neq 0, \ \text{pour au moins une paire } a,b & \text{si } F \text{ et } G \text{ non-compatibles.} \end{cases} \tag{1.2.2}$$

En effet :

$$\begin{aligned} [F,G]_{ab} = F_{ac}G_{cb} - G_{ac}F_{cb} &\overset{*}{=} F^{(a)}\delta_{ac}G_{cb} - G_{ac}F^{(b)}\delta_{cb} \\ &= \underbrace{\left(F^{(a)} - F^{(b)}\right)}_{\substack{\neq 0 \text{ pour au moins} \\ \text{un couple } a,b}} G_{ab}. \end{aligned}$$

- Si G n'est pas compatible avec F, alors $G_{ab} \neq 0$ et $[F,G]_{ab} \neq 0$.
- Si G est compatible avec F, alors dans le référentiel où $F_{ab} \overset{*}{=} F^{(a)}\delta_{ab}$ nous avons également $G_{ab} \overset{*}{=} G^{(a)}\delta_{ab}$, par conséquent

$$[F,G]_{ab} \overset{*}{=} (F^{(a)} - F^{(b)})G^{(a)}\delta_{ab} = 0, \ \forall\, a,b.$$

a) Première possibilité (A) du principe d'incertitude.

$$< \Delta F^2 >< \Delta G^2 > \geq \lambda^2 < P >$$

P doit être une observable de moyenne $< P >$ positive, de dimension $[F^2][G^2]$ qui s'annule si $[F,G] = 0$.

La seule possibilité simple est de poser :

$$P_{ab} = -[F,G]^2_{ab} = P_{ba} \quad \text{ou} \quad (P = -[F,G]^2 = P^T).$$

Puisque $[F,G]$ est un tenseur antisymétrique,

$$[F,G]^T = -[F,G],$$

et, comme $(AB)^T = B^T A^T$, on voit que P est symétrique :

$$\begin{aligned} (-[F,G]^2)^T &= \big((-[F,G])[F,G]\big)^T = [F,G]^T(-[F,G])^T \\ &= -[F,G]([F,G]) = -[F,G]^2. \end{aligned}$$

De plus le signe moins dans la définition de P assure sa positivité ; nous avons alors

$$P_{ab} \stackrel{*}{=} \sum_c (F^{(a)} - F^{(c)})(F^{(c)} - F^{(b)}) G_{ac} G_{cb}$$

et $< P >_{\underline{\psi}} = \psi_a P_{ab} \psi_b$. Si nous nous plaçons-nous dans un état tel que

$$\underline{\psi} = (0, \ldots, 0, \psi_{a'} = 1, 0, \ldots .0),$$

alors nous avons

$$< P >_{\underline{\psi}} \stackrel{*}{=} P_{a'a'} = \sum_c (F^{(a')} - F^{(c)})^2 (G_{a'c})^2 \geq 0.$$

Si les deux observables F et G sont incompatibles, alors $< P >_{\underline{\psi}}$ doit être strictement positive, car au moins pour un indice c on aura $G_{a'c} \neq 0$. D'autre part, si nous supposons que les spectres de F et G sont composés de grandeurs finies (il en existe, exemple le spin !) alors

$$< P >_{\underline{\psi}} = (\text{fini})^2 > 0.$$

Dans un tel état, la distribution de probabilité se réduit à une certitude : la valeur prédite est $F^{(a')}$; par conséquent :

$$< \Delta F^2 > = 0.$$

Ce n'est par contre pas le cas pour G, $< \Delta G^2 >_{\underline{\psi}} \neq 0$; la limite supérieure de cette incertitude est

$$< \Delta G^2 >_{\underline{\psi}} \leq (G^{(1)} - G^{(\omega_G)})^2,$$

où $G^{(1)}$ est la plus petite et $G^{(\omega_G)}$ la plus grande valeur du spectre. Puisque toutes les grandeurs sont supposée finies, alors :

$$< \Delta G^2 >_{\underline{\psi}} = (\text{fini'})^2 > 0,$$

et notre principe d'incertitude devient

$$0 \, (\text{fini'})^2 \geq \lambda^2 (\text{fini})^2$$

ceci n'est pas absurde qu'à la seule condition que $\lambda = 0$; le principe (A) est donc

$$< \Delta F^2 >_{\underline{\psi}} < \Delta G^2 >_{\underline{\psi}} \geq 0,$$

ce qui est trivial !

b) Deuxième possibilité (B) pour le principe d'incertitude. Il consiste à poser :

$$< \Delta F^2 >_{\underline{\psi}} < \Delta G^2 >_{\underline{\psi}} \geq \lambda^2 < C >^2_{\underline{\psi}} .$$

C doit être une observable (pour les mêmes raisons que P introduit précédemment : le membre de gauche de la relation d'incertitude étant formé d'observables) de dimension $[F][G]$ s'annulant pour $[F, G] = 0$.

Poser $C = [F, G]$ ne convient pas car le commutateur étant antisymétrique n'est pas une observable (d'autre part l'antisymétrie donne $< [F, G] >_{\underline{\psi}} \equiv 0$).

La seule possibilité de construire un opérateur C satisfaisant les conditions ci-dessus est d'introduire un opérateur antisymétrique

$$J^T_{(FG)} = -J_{(FG)}$$
$$(J^T_{(FG)[ab]} \equiv J_{(FG)[ba]} = -J_{(FG)[ab]})$$

qui commute avec $[F, G]$:

$$[J_{(FG)}, [F, G]] = 0.$$

Alors $C = J_{(FG)}[F, G]$ est l'observable cherchée et son transposé est

$$C^T = [F, G]^T J^T_{(FG)} = [F, G]J_{(FG)}.$$

Il suffit évidemment que $J_{(FG)}$ commute avec F et G pour que soit satisfaite la condition $[J_{(FG)}, [F, G]] = 0$. Nous admettrons cette propriété qui s'écrit

$$[J_{(FG)}, F] = 0 \ ; \quad [J_{(FG)}, G] = 0.$$

Pour déterminer la valeur du nombre λ^2 dans le principe d'incertitude, nous introduisons l'opérateur

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \Delta F + \xi J_{(FG)}\Delta G \qquad \text{donc} \qquad A^T = \Delta F - \xi \Delta G J_{(FG)}$$

où ΔF et ΔG sont les opérateurs d'erreur définis plus haut et ξ est un nombre arbitraire. Calculons l'espérance mathématique de $A^T A$; cette quantité n'est jamais négative puisque

$$< A^T A >_{\underline{\psi}} = (\underline{\psi}, A^T A\underline{\psi}) = (A\underline{\psi}, A\underline{\psi}) = |A\underline{\psi}|^2 \geq 0$$

donc

$$< A^T A >_{\underline{\psi}} = f(\xi) \geq f_{\min}(\xi).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} A^T A &= (\Delta F - \xi \Delta G J_{(FG)})(\Delta F + \xi J_{(FG)}\Delta G) \\ &= (\Delta F)^2 + \xi(\Delta F J_{(FG)}\Delta G - \Delta G J_{(FG)}\Delta F) - \xi^2 \Delta G J^2_{(FG)}\Delta G. \end{aligned}$$

Avec

$$\Delta F J_{(FG)}\Delta G - \Delta G J_{(FG)}\Delta F = J_{(FG)}[\Delta F, \Delta G] \qquad \text{et} \qquad [\Delta F, \Delta G] = [F, G],$$

nous obtenons

$$< A^T A >_{\underline{\psi}} = < \Delta F^2 >_{\underline{\psi}} + \xi < J_{(FG)}[F, G] >_{\underline{\psi}} - \xi^2 < J^2_{(FG)}\Delta G^2 >_{\underline{\psi}} .$$

Pour faire apparaître le terme $< \Delta G^2 >_{\underline{\psi}}$, il est nécessaire que l'opérateur symétrique $J^2_{(FG)} = J_{(FG)}\ J_{(FG)}$ soit un nombre (c'est-à-dire un tenseur de la forme $J^2_{(FG)ab} =$

$\mathcal{J}\delta_{ab}$). Or $\mathcal{J}$ doit être négatif ; d'autre part, grâce à la présence du nombre arbitraire ξ^2, on ne restreint pas la généralité en posant $\mathcal{J} = -1$. Nous posons donc :

$$J^2_{(FG)} = (= -J^T_{(FG)}\ J_{(FG)}) = -1 \quad \text{soit} \quad J^2_{(FG)ab} = -\delta_{ab}.$$

Alors

$$< A^T A >_{\underline{\psi}} = f(\xi) =< \Delta F^2 > +\xi < J_{(FG)}[F,G] >_{\underline{\psi}} +\xi^2 < \Delta G^2 >_{\underline{\psi}} \geq 0.$$

Déterminons ξ' de telle sorte que le trinôme $f(\xi)$ soit minimum : $f(\xi') = f_{\min}$. On doit avoir

$$\left.\frac{df}{d\xi}\right|_{\xi=\xi'} =< J_{(FG)}[F,G] >_{\underline{\psi}} +2\xi < \Delta G^2 >_{\underline{\psi}} \equiv 0.$$

Donc (puisque $< \Delta G^2 >_{\underline{\psi}} \neq 0$)

$$\xi' = -\frac{< J_{(FG)}[F,G] >_{\underline{\psi}}}{2 < \Delta G^2 >_{\underline{\psi}}}.$$

Nous avons alors

$$f_{\min} =< \Delta F^2 >_{\underline{\psi}} - \frac{< J_{(FG)}[F,G] >^2_{\underline{\psi}}}{2 < \Delta G^2 >_{\underline{\psi}}} + \frac{< J_{(FG)}[F,G] >^2_{\underline{\psi}}}{4 < \Delta G^2 >_{\underline{\psi}}} \geq 0,$$

c'est-à-dire

$$< \Delta F^2 >_{\underline{\psi}} - \frac{< J_{(FG)}[F,G] >^2_{\underline{\psi}}}{4 < \delta G^2 >_{\underline{\psi}}} \geq 0$$

qui, en multipliant par $< \Delta G^2 >_{\underline{\psi}} > 0$, devient l'énoncé du principe d'incertitude

$$< \Delta F^2 >_{\underline{\psi}} < \Delta G^2 >_{\underline{\psi}} \geq \frac{1}{4} < J_{(FG)}[F,G] >^2_{\underline{\psi}} . \tag{1.2.3}$$

Si les observables sont compatibles : $[F,G] = 0$ alors nous obtenons bien

$$< \Delta F^2 >_{\underline{\psi}} < \Delta G^2 >_{\underline{\psi}} \geq 0 \qquad \text{(en particulier } = 0).$$

Si $< \Delta F^2 >_{\underline{\psi}} = 0$ (par exemple), alors

$$\underline{\psi} \stackrel{*}{=} \{\pm\delta_a^{a'}\}$$

et donc

$$\begin{aligned} < J_{(FG)}[F,G] >_{\underline{\psi}} &= \psi_a (J_{(FG)}[F,G])_{ab}\psi_b \stackrel{*}{=} (J_{(FG)}[F,G])_{a'a'} \\ &= J_{(FG)a'c}[F,G]_{ca'} = \underbrace{J_{(FG)a'c}(F^{(c)} - F^{(a')})}_{=-[J_{(FG)},F]=0} G_{ca'} = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent l'argument développé pour la possibilité (A) ne conduit ici à aucune contradiction :

$$0\,(\text{fini})^2 \geq \frac{1}{4}\,0.$$

Nous allons maintenant introduire au sujet de l'opérateur $J_{(FG)}$ un postulat qui, à vrai dire, s'impose presque de lui-même.

Opérateur J commutant avec toutes les observables

Les opérateurs antisymétriques $J_{(FG)}$, où F et G sont deux observables quelconques sont tous identiques :

$$J_{(FG)} \text{ indépendant de } F \text{ et } G.$$

Considérons en effet trois observables $F,\ G,\ H$ et soit

$$C = J_{(FG)}[F, G]\ ;\ \ D = J_{(CH)}[C, H].$$

Alors, en vertu de nos hypothèses sur $J_{(\,)}$, nous devons avoir :

$$[J_{(CH)}, C] = 0 = J_{(CH)}J_{(FG)}[F, G] - [F, G]J_{(FG)}J_{(CH)}.$$

Pour satisfaire cette équation, puisque F, G et H sont arbitraires, quoi de plus naturel que poser

$$J_{(CH)} = J_{(FG)} = J \ \text{ avec } \ J_{(CH)}J_{(FG)} = J_{(FG)}J_{(CH)} = J^2 = -1.$$

Définition complète de J

Dans notre RHS, il existe un opérateur antisymétrique J ($J_{[ab]}$) tel que :

$$J^T J = -J^2 = 1$$

et tel que toute observable commute avec lui :

$$[J, F] = 0,\ \forall\ F = \textit{observable}.$$

Le principe d'incertitude s'écrit alors

$$< \Delta F^2 >_{\underline{\psi}} < \Delta G^2 >_{\underline{\psi}} \geq \frac{1}{4} < J[F, G] >^2_{\underline{\psi}}\ . \tag{1.2.4}$$

Le principe d'incertitude est responsable de l'introduction de l'opérateur J.

L'existence postulée de J est d'une importance fondamentale car elle donne la forme des opérateurs d'observables. En effet, nous savons bien qu'il n'existe aucun opérateur antisymétrique capable de commuter avec tous les opérateurs symétriques (la démonstration de ce théorème est triviale !), par conséquent seule une classe d'opérateurs symétriques pourront être des observables. Examinons ceci de plus près. A partir de la définition

$$-\delta_{ab} = J_{ac}J_{cb},$$

nous concluons que J a au moins un élément non-nul pour chaque indice (en langage matriciel chaque ligne et chaque colonne contient au moins un élément non nul). De la définition

$$[J, F]_{ab} = 0 = J_{ac}F_{cb} - F_{ac}J_{cb} \overset{*}{=} J_{ab}(F^{(a)} - F^{(b)}),$$

nous tirons : $F^{(a)} = F^{(b)}$ quand $J_{ab} \neq 0$ (ceci est la démonstration triviale du théorème énoncé ci-dessus) et par conséquent puisque pour chaque a et pour chaque b il existe un $J_{ab} \neq 0$ au moins, le RHS est de dimension paire $\omega_R = (\omega_R/2) \cdot 2$ et les observables (tenseurs symétriques) n'ont pas $(1/2)\omega_R(\omega_R + 1)$ mais $(1/4)\omega_R^2$ composantes indépendantes.

Nous construirons le RHS et les observables à la section suivante.

1.3 Isomorphisme entre RHS et CHS

Nous allons montrer que la théorie des quanta dans le RHS est équivalente à celle usuelle définie dans l'espace de Hilbert complexe (CHS) ; pour cela il suffit de montrer qu'il existe un isomorphisme entre RHS et CHS.

Puisque la dimension ω_R de RHS est paire, nous pouvons considérer celui-ci comme formé du produit d'un espace à deux dimensions par un espace à $\omega_R/2$ dimensions. Les vecteurs $\underline{\psi} = \{\psi_a\}$ peuvent alors s'écrire

$$\underline{\Psi} = \begin{pmatrix} \psi_{(r)} \\ \psi_{(i)} \end{pmatrix},$$

où $\psi_{(r)}$ et $\psi_{(i)}$ sont des vecteurs-colonnes à $\omega_R/2$ dimensions. En utilisant les vecteurs-lignes, nous avons

$$\underline{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi_{(r)} & \phi_{(i)} \end{pmatrix}.$$

Nous définissons nos observables au moyen du produit de Kronecker :

$$A \stackrel{\text{def}}{=} 1 \times A_{(r)} + j \times A_{(i)},$$

où $A_{(r)}$ et $A_{(i)}$ sont des matrices $(\omega_R/2) \times (\omega_R/2)$ et où

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; j = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \; ; \; j^2 = -1.$$

Les observables étant symétriques, nous devons avoir

$$A^T = 1^T \times A^T_{(r)} + j^T \times A^T_{(i)} = 1 \times A^T_{(r)} - j \times A^T_{(i)} \equiv A.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} A^T_{(r)} &= A_{(r)} \quad (A_{(r)ab} = A_{(r)(ab)}) \\ A^T_{(i)} &= -A_{(i)} \quad (A_{(i)ab} = A_{(i)[ab]}). \end{aligned}$$

$A_{(r)}$ étant symétrique elle a $(1/2)(\omega_R/2)(\omega_R/2+1)$ éléments indépendants et $A_{(i)}$ étant antisymétrique a $(1/2)(\omega_R/2)(\omega_R/2-1)$ éléments indépendants, donc A a $(1/2)(\omega_R/2)\big((\omega_R/2+1)+(\omega_R/2-1)\big) = (1/4)\omega_R^2$ éléments indépendants.

Reste encore la règle $[J, A] = 0$; en définissant J comme :

$$J \stackrel{\text{def}}{=} j \times 1,$$

où 1 est ici l'opérateur unité à $(\omega_R/2) \times (\omega_R/2)$ dimensions, nous respecterons cette règle de commutation. En effet :

$$\begin{aligned} [J, A] &= J\,A - A\,J = j \times (1 \times A_{(r)} + j \times A_{(i)}) - (1 \times A_{(r)} + j \times A_{(i)}) j \times 1 \\ &= \underbrace{j\,1}_{j} \times 1\,A_{(r)} + \underbrace{j\,j}_{j^2=-1} \times 1\,A_{(i)} - \underbrace{1\,j}_{j} \times A_{(r)}\,1 - \underbrace{j\,j}_{j^2=-1} \times A_{(i)}\,1 = 0. \end{aligned}$$

Considérons maintenant un CHS à ω_C dimensions ; si nous définissons les vecteurs $\hat{\psi}$ par

$$\hat{\psi} = \psi_{(r)} + i\psi_{(i)}$$

avec $i = +\sqrt{-1}$, desvecteurs-colones à ω_C dimensions $\psi_{(r)}$ et $\psi_{(i)}$, et les observables par des opérateurs $\hat{A}$

$$\hat{A} = A_{(r)} + iA_{(i)}$$

avec la condition d'hermicité

$$\hat{A}^{\dagger}(= \hat{A}^{*T}) = A^T_{(r)} - iA^T_{(i)} = \hat{A},$$

condition qui implique $A^T_{(r)} = A_{(r)}$ et $A^T_{(i)} = -A_{(i)}$, nous constatons qu'il existe une correspondance biunivoque entre vecteurs et opérateurs dans RHS et vecteurs et opérateurs dans CHS, à condition que

$$\omega_C = \frac{\omega_R}{2}.$$

Pour qu'il y ait isomorphisme il faut encore montrer que cette correspondance est régulière vis à vis des produits scalaires.

Dans CHS, étant donné deux vecteurs $\hat{\phi}$ et $\hat{\psi}$, on définit le produit scalaire par

$$< \underline{\hat{\phi}}, \underline{\hat{\psi}} > \stackrel{\text{def}}{=} (\phi_{(r)} - i\phi_{(i)}, \psi_{(r)} + i\psi_{(i)}),$$

et donc

$$< \underline{\hat{\phi}}, \underline{\hat{\psi}} >= (\phi_{(r)}, \psi_{(r)}) + (\phi_{(i)}, \psi_{(i)}) - i[(\phi_{(i)}, \psi_{(r)}) - (\phi_{(r)}, \psi_{(i)})].$$

En introduisant la notation matricielle

$$\underline{\hat{\phi}} = \begin{pmatrix} \phi_{(r)} & \phi_{(i)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\hat{\phi}}^T = \begin{pmatrix} \phi_{(r)} \\ \phi_{(i)} \end{pmatrix},$$

on a

$$\begin{pmatrix} -\psi_{(i)} \\ \psi_{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{(r)} \\ \psi_{(i)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \psi_{(r)} \\ \psi_{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{(r)} \\ \psi_{(i)} \end{pmatrix}.$$

Ceci permet d'écrire le produit scalaire sous la forme

$$< \underline{\hat{\phi}}, \underline{\hat{\psi}} >= \begin{pmatrix} \phi_{(r)} & \phi_{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{(r)} \\ \psi_{(i)} \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} \phi_{(r)} & \phi_{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{(r)} \\ \psi_{(i)} \end{pmatrix}.$$

Or, par définition,

$$\underline{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi_{(r)} & \phi_{(i)} \end{pmatrix} \; ; \; \underline{\Psi} = \begin{pmatrix} \psi_{(r)} \\ \psi_{(i)} \end{pmatrix} \; ; \; 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si dans $j = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$ nous posons $\lambda = +1$, alors $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = j \times 1 = J$ et le produit scalaire s'écrit maintenant

$$< \underline{\hat{\phi}}, \underline{\hat{\psi}} >= (\underline{\Phi}, 1\; \underline{\Psi}) - i(\underline{\Phi}, J\; \underline{\Psi}).$$

Nous avons donc une *relation biunivoque* entre les vecteurs et les matrices dans les deux espaces :

$$\begin{aligned}
\hat{\psi} = \psi_{(r)} + i\psi_{(i)} &\longleftrightarrow \Psi = \begin{pmatrix} \psi_{(r)} \\ \psi_{(i)} \end{pmatrix} \\
\omega_C \text{ composantes} &\longleftrightarrow \omega_R = 2\,\omega_C \text{ composantes} \\
\hat{A} = A_{(r)} + iA_{(i)} &\longleftrightarrow A = 1 \times A_{(r)} + j \times A_{(i)} = \begin{pmatrix} A_{(r)} & -A_{(i)} \\ A_{(i)} & A_{(r)} \end{pmatrix} \\
\tilde{A}^* = A^T_{(r)} - iA^T_{(i)} &\longleftrightarrow A^T = 1 \times A^T_{(r)} - j \times A^T_{(i)} \\
i = i \times 1 &\longleftrightarrow J = j \times 1 \\
-i \times 1 &\longleftrightarrow J^T = -j \times 1.
\end{aligned}$$

Propriétés des observables

On a d'abord la relation de commutation

$$[J, A] = 0.$$

Les observables sont définies par

$$\begin{aligned}
F &= 1 \times F_{(r)} + j \times F_{(i)} \\
F^T &= 1 \times F^T_{(r)} - j \times F^T_{(i)}.
\end{aligned}$$

Si F est une observable, $F = F^T$ et donc

$$\begin{cases} F^T_{(r)} = F_{(r)} \\ F^T_{(i)} = -F_{(i)} \end{cases} \qquad \longleftrightarrow \quad \hat{F} \text{ est hermitien}$$

et alors

$$\begin{aligned}
(J\,F)^T &= (j \times F_{(r)} - 1 \times F_{(i)})^T = -j \times F^T_{(r)} - 1 \times F^T_{(i)} \\
&= -(j \times F_{(r)} - 1 \times F_{(i)}) = -J\,F.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$< \underline{\hat{\psi}}, \hat{F}\underline{\hat{\psi}} >=< \underline{\Psi}, F\underline{\Psi} > \text{ est réel car } (\underline{\Psi}, J\,F\underline{\Psi}) = 0.$$

Autres opérateurs.

Bien que cela ne concerne pas la théorie des quantas, on peut considérer des opérateurs du type suivant :

$$\begin{aligned}
A &= 1 \times A_{(r)} + j \times A_{(i)} + k \times A_{(k)} + \ell \times A_{(\ell)} \\
&= \begin{pmatrix} A_{(r)} + A_{(k)} & -A_{(i)} + A_{(\ell)} \\ A_{(i)} + A_{(\ell)} & A_{(r)} - A_{(k)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

où 1 et j sont précédemment définis et où

$$k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \ell = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces opérateurs ne commutent pas tous avec l'opérateur $J = j \times 1$. Par exemple, si on pose

$$A_1 = 1 \times A_{(r)} + j \times A_{(i)}$$
$$A_2 = 1 \times A_{(k)} + \ell \times A_{(\ell)},$$

il est facile de voir que J commute avec les opérateurs du type A_1 mais anticommute avec les opérateurs du type A_2 ; en effet, $[j,k]_+ = [j,\ell]_+ = 0$.

Propriété géométrique remarquable de l'opérateur J.

Soit $\underline{\hat{\psi}} = \{\hat{\psi}_q\}$, $\psi_q = \begin{pmatrix} \psi_{q(r)} \\ \psi_{q(i)} \end{pmatrix}$; nous avons

$$(J\,\underline{\psi})_q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{q(r)} \\ \psi_{q(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi_{q(i)} \\ \psi_{q(r)} \end{pmatrix}$$

Ainsi, $J\underline{\Psi}$ est obtenu à partir de Ψ par une rotation de $(\pi/2)$.

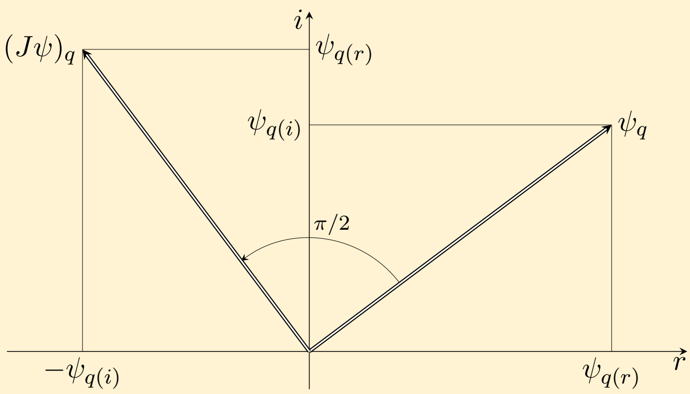


Fig. 1.3.1 Dans le cas où le RHS est à 2 dimensions, l'opérateur j joue le rôle d'une rotation de $\pi/2$.

L'espérance mathématique de F dans l'état $\underline{\Psi}$ s'écrit

$$< F >_{\underline{\Psi}} = (\underline{\Psi}, F\underline{\Psi}).$$

Soit $\underline{\Psi}' = e^{J\lambda}\underline{\Psi} = (\cos\lambda \cdot 1 + \sin\lambda \cdot J)\underline{\Psi}$, nous avons

$$(\underline{\Psi}', F\underline{\Psi}') = (e^{\lambda J}\underline{\Psi}, Fe^{\lambda J}\underline{\Psi}) = (\underline{\Psi}, e^{-\lambda J}Fe^{\lambda J}\underline{\Psi}) = (\underline{\Psi}, F\underline{\Psi})$$

car $J^T = -J$ et $[J,F] = 0$. Les vecteurs $\underline{\Psi}$ et $e^{\lambda J}\underline{\Psi}$ sont les mêmes à une phase près, ce qui est sans importance pour les espérances mathématiques.

1.4 Probabilités dans les formalismes CHS et RHS

Formalisme CHS.

Soient $\hat{F}$, $\hat{G}$, ..., des observables qui commutent, $[\hat{F}, \hat{G}] = 0$, et $\underline{\hat{\psi}}$ un état quelconque ; soit $\underline{\hat{\psi}}^{(i)}$ un état propre de $\hat{F}$: $\hat{F}\underline{\hat{\psi}}^{(i)} = \underline{\hat{\psi}}^{(i)} F^{(i)}$; alors

$$| < \underline{\hat{\psi}}^{(i)}, \underline{\hat{\psi}} > |^2 = \omega^{(i)} = \text{ probabilité d'être dans l'état } \psi^{(i)}$$
$$\sum_i \omega^{(i)} = 1.$$

Formalisme RHS.

Soit $\underline{\Psi}$ un état quelconque et $\underline{\Psi}^{(i)}$ un état propre de F : $F\underline{\Psi}^{(i)} = \underline{\Psi}^{(i)} F^{(i)}$, $i = 1, \ldots, \omega_C = \omega_R/2$, donc

$$(\underline{\Psi}^{(i)}, \underline{\Psi})^2 + (\underline{\Psi}^{(i)}, J\ \underline{\Psi})^2 = \omega^{(i)}$$

et on vérifie que l'on a bien

$$| < \underline{\hat{\psi}}^{(i)}, \underline{\hat{\psi}} > |^2 = |(\underline{\Psi}^{(i)}, \underline{\Psi}) - i(\underline{\Psi}^{(i)}, J\underline{\Psi})|^2 = \omega^{(i)}.$$

1.5 Représentations de Schrödinger et de Heisenberg.

1) Image de Schrödinger

L'état est représenté par un vecteur qui tourne et un opérateur symétrique par un ellipsoïde fixe, ce que l'on peut représenter par la figure 5.5.1 suivante.

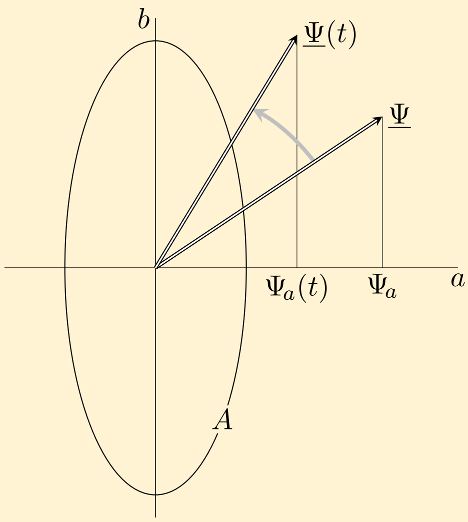


Fig. 1.5.1

Formalisme RHS.

Soit le déplacement infinitésimal

$$\delta\Psi_a = \delta t A_{ab}\Psi_b.$$

Mais nous savons que $(\underline{\Psi}, \underline{\Psi}) = 1$, $\forall\, t$ et donc

$$\delta(\underline{\Psi}, \underline{\Psi}) = (\delta\underline{\Psi}, \underline{\Psi}) + (\underline{\Psi}, \delta\underline{\Psi}) = (A_{ab}\Psi_b\Psi_a + \Psi_a A_{ab}\Psi_b)\,\delta t = 0.$$

Il en résulte

$$\Psi_a(A_{ba} + A_{ab})\Psi_b = 0 \qquad A_{ba} = -A_{ab}$$

et donc

$$\delta\underline{\Psi} = \delta A\underline{\Psi} \qquad \text{avec} \qquad A^T = -A.$$

Formalisme CHS.

Dans ce cas nous avons

$$\begin{aligned}\delta < \underline{\hat{\psi}}, \underline{\hat{\psi}} > &= \delta t(< \hat{A}\underline{\hat{\psi}}, \underline{\hat{\psi}} > + < \underline{\hat{\psi}}, \hat{A}\underline{\hat{\psi}} >)\\ &= \delta t < \underline{\hat{\psi}}, (\hat{A}^+ + \hat{A})\underline{\hat{\psi}} >) = 0,\end{aligned}$$

donc $\hat{A}^+ = -\hat{A}$. Posons alors $A = -J\,H$ et $\hat{A} = -i\hat{H}$ avec $H^T = H$, $[J, H] = 0$ et $\hat{H}^+ = \hat{H}$. L'équation de Schrödinger prend alors la forme

$$\underline{\dot{\Psi}} = -J\ H\ \underline{\Psi} \qquad \underline{\dot{\hat{\psi}}} = -i\hat{H}\underline{\hat{\psi}}$$

et nous avons

$$\underbrace{< F > (t)}_{\text{(RHS)}} = \underbrace{(\underline{\Psi}(t), F\underline{\Psi}(t))}_{\text{(CHS)}}.$$

Dérivons par rapport au temps

$$\begin{aligned}\partial_t < F > (t) &= (\underline{\dot{\Psi}}, F\underline{\Psi}(t)) + (\underline{\Psi}(t), F\underline{\dot{\Psi}})\\ &= (-J\,H\underline{\Psi}(t), F\underline{\Psi}(t)) + (\underline{\Psi}(t), F(-J\,H)\underline{\Psi}(t))\\ &= (\underline{\Psi}(t), J[H, F]\underline{\Psi}(t)).\end{aligned}$$

On pose par définition $\dot{F} = J[H, F]$ et alors

$$\partial_t < F > (t) = < \dot{F} > .$$

Du point de vue dimensionnel, il aurait fallu poser $\delta\underline{\Psi} = -JH\underline{\Psi}\delta t(1/\hbar)$ et $\underline{\dot{\Psi}} = -J\underline{\dot{\Psi}}(1/\hbar)$ qui conduirait à $\dot{F} = (1/\hbar)J[H, F]$, mais on a posé $\hbar = 1$.

Dans le cas classique nous avons

$$\dot{F}(x) = F_\alpha(x)v^\alpha(x) = (F_\alpha H_\beta j^{\beta\alpha})(x) = \{H, F\},$$

c'est-à-dire qu'il y a la correspondance

$$\{H, F\} \longleftrightarrow \frac{i}{\hbar}[H, F].$$

En mécanique classique nous aurions dû postuler que :

$$(F\vec{G}H)\ \big\{F, \{G, H\}\big\} = 0$$

(la notation $(F\vec{G}H)$ signifie : somme sur les permutations cycliques des objets), alors qu'ici la relation

$$(F\vec{G}H)\ \big[F, [G, H]\big] = 0$$

est d'emblée satisfaite.

La représentation de Schrödinger est alors :

$$\underline{\Psi}(t) = e^{-t\hbar^{-1}J\,H}\underline{\Psi}(0).$$

On peut poser $\underline{\Psi}(t) = O(t)\underline{\Psi}(0)$, alors $O^T(t) = O^{-1}(t)$ ce qui veut dire que $O(t)$ est une transformation orthogonale :

$$O(t) = e^{-t\hbar^{-1}J\,H}.$$

2. Image de Heisenberg

Au lieu de faire dépendre $\underline{\Psi}$ du temps, on reporte la dépendance temporelle sur l'observable en transformant l'opérateur par $O(t)$ de façon que l'espérance mathématique reste la même en chaque instant :

$$\begin{aligned}< F > (t) &= (\underline{\Psi}(t), F\underline{\Psi}(t)) = (O(t)\underline{\Psi}(0), F\,O(t)\underline{\Psi}(0)) \\ &= (\underline{\Psi}(0), O^{-1}(t)\,F\,O(t)\underline{\Psi}(0)) = (\underline{\Psi}(0), F(t)\underline{\Psi}(0)).\end{aligned}$$

Ce choix est représenté sur la figure 5.5.2 suivante.

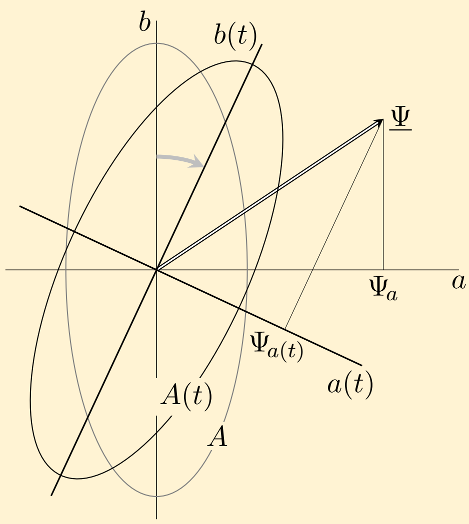


Fig. 1.5.2 On remarque que la coordonnés $\Psi_{a(t)}$ a la même valeur que la coordonnée $\Psi_a(t)$ sur la figure précédente, ce qui illustre bien le fait que les deux représentations conduisent aux mêmes probabilités de trouver les résultats possibles de mesure.

On a donc

$$< F >(t) = < F >_{\underline{\Psi}(t)} = < F(t) >_{\underline{\Psi}(0)},$$

où

$$F(t) = O^{-1}(t)\, F\, O(t).$$

Il en résulte que l'évolution est décrite par

$$\begin{cases} \Psi_a(t) & = O_{ab}(t)\Psi_b(0) & \text{image de Schrödinger} \\ F_{ab}(t) & = O^{-1}_{ac}(t)\, F_{cd}\, O_{db}(t) & \text{image de Heisenberg} \end{cases}$$

et alors $F(t) = e^{tJH\hbar^{-1}} F e^{-tJH\hbar^{-1}}$.

Dérivons par rapport au temps :

$$\partial_t F(t) = JH\hbar^{-1}F(t) - F(t)JH\hbar^{-1} = \hbar^{-1}J[H, F(t)].$$

Il en résulte

$$H(t) = e^{tJH\hbar^{-1}} H e^{-t\hbar^{-1}JH} = H$$

qui exprime la conservation de l'énergie.

Chapitre 2

Observables (multi-)locales en théorie classique

Présentation

Les équations de Maxwell sont tout d'abord rappelées et les champs tensoriels multilocaux sont introduits à la section 1. La transformation infinitésimale est alors introduite à la section 2 et les générateurs de l'algèbre de Lie y sont définis.

2.1 Equations de Maxwell et groupe de Lorentz

Si l'on pose

$$x^4 = ct\ ;\quad B_{i4} = E_i\ ;\quad H^{i4} = D^i\ ;\quad j^4 = cq,$$

les équations de Maxwell deviennent,

$$(\alpha\overrightarrow{\beta}\gamma)\ \partial_\alpha B_{\beta\gamma} = 0$$
$$\partial_\alpha H^{\alpha\beta} = \frac{1}{c} j^\beta$$

(où la notation $(\alpha\overrightarrow{\beta}\gamma)$ signifie que les autres équations sont déduites de la première par permutation cyclique des indices $\alpha\,\beta\,\gamma$ et où la sommation sur les indices répétés est sous-entendue).

La métrique dans cet espace à quatre dimensions est :

$$g_{ii} = g^{ii} = 1\ ;\quad g_{44} = g^{44} = -1.$$

Il existe donc une direction privilégiée, celle du temps. Une transformation

$${}'x'^{\alpha} = L^{\prime\alpha}_{\alpha}\, x^{\alpha}$$

est dite de Lorentz si elle conserve la métrique, c'est-à-dire si

$$'g^{'\alpha'\beta} = L^{'\alpha}_{\alpha}\, L^{'\beta}_{\beta}\, g^{\alpha\beta} = g^{'\alpha'\beta}.$$

Soit $F^{\alpha\beta\cdots}(x, y, \ldots)$ un champ tensoriel multilocal, il se transforme suivant

$$'F^{'\alpha'\beta\cdots}('x, 'y, \ldots) = L^{'\alpha}_{\alpha}\, L^{'\beta}_{\beta} \ldots F^{\alpha\beta\cdots}(x, y, \ldots)$$

avec

$$\begin{aligned} x &= L^{-1}\, 'x \\ 'x &= L\, x \end{aligned} \qquad x^{\alpha} = L^{-1\,\alpha}_{'\alpha}\, 'x^{'\alpha}.$$

On obtient donc une identité en $'x$ et $'y$:

$$'F^{'\alpha'\beta\ldots}('x, 'y, \ldots) = L^{'\alpha}_{\alpha}\, L^{'\beta}_{\beta} \ldots F^{\alpha\beta\cdots}(L^{-1}\, 'x, L^{-1}\, 'y, \ldots).$$

Pour abréger , nous continuons avec l'exemple d'un champ tensoriel d'ordre 1 et monolocal ; l'équation ci-dessus s'écrit alors

$$'F^{'\alpha}('x) = L^{'\alpha}_{(1)\alpha} F^{\alpha}(L^{-1}\, 'x)$$

et peut être réécrite

$$\begin{aligned} 'F^{'\alpha}('x) &= L^{'\alpha}_{(1)\alpha} \int d^4x\, \delta(x - L^{-1}_{(1)}\, 'x)\, F^{\alpha}(x) \\ &= L^{'\alpha}_{(1)\alpha} \int d^4x\, \delta('x - L_{(1)}x) F^{\alpha}('x). \end{aligned}$$

En introduisant la notation $\{X\} = \{\alpha, x\}$, cette équation prend la forme

$$'F^{'X} = L^{'X}_{X}\, F^{X}.$$

Les transformations $L^{'X}_{X}$ forment un groupe, en effet

$$''F^{''X} = L^{''X}_{(2)'X}\, 'F^{'X} = L^{''X}_{(2)'X} L^{'X}_{(1)X} F^{X}.$$

Cette propriété résulte des lignes suivantes

$$\begin{aligned} L^{''X}_{(2)'X} L^{'X}_{(1)X} &= L^{''\alpha}_{(2)'\alpha} \int d^4\, 'x\, \delta(''x - L_{(2)}\, 'x) L^{'\alpha}_{(1)\alpha} \delta('x - L_{(1)}x) \\ &= (L_{(2)} L_{(1)})^{''\alpha}_{\alpha}\, \delta(''x - L_{(2)} L_{(1)} x). \end{aligned}$$

2.2 Transformation infinitésimale

La transformation $'x = Lx$ est (au premier degré en x^{α})

$$'x^{'\alpha} = x^{'\alpha} + \delta\lambda^{'\alpha} + \delta\omega^{'\alpha}_{\alpha} x^{\alpha},$$

où $\delta\omega_{\mu\nu} = \delta\omega_{[\mu\nu]}$ est antisymétrique. Donc on peut encore écrire

$$'x'^{\alpha} = (\delta^{'\alpha}_{\alpha} + \frac{1}{2}\delta\omega^{[\mu\nu]}\Sigma^{'\alpha}_{\mu\nu'\alpha})x^{\alpha} + \delta\lambda'^{\alpha}$$

avec (à cause de la conservation de la métrique) $\Sigma^{'\alpha}_{[\mu\nu]\alpha} = \delta^{'\alpha}_{\mu} g_{\nu\alpha} - \delta^{'\alpha}_{\nu} g_{\mu\alpha}$.

La transformation inverse (au premier degré en $'x'^{\alpha}$) est donc

$$x^{\alpha} = {}'x^{\alpha} - \delta\lambda^{\alpha} - \delta\omega^{\alpha}_{'\alpha}\, 'x'^{\alpha}.$$

En reprenant le transformation infinitésimale d'un tenseur d'ordre 1, nous avons

$$\begin{aligned} 'F'^{\alpha}('x) &= L^{'\alpha}_{\alpha} F^{\alpha}(L^{-1}{}'x) \\ &= (\delta^{'\alpha}_{\alpha} + \frac{1}{2}\delta\omega^{[\mu\nu]}\Sigma^{'\alpha}_{\mu\nu\alpha})F^{\alpha}('x - \delta\lambda - \delta\omega_{'\nu}\, 'x'^{\nu}). \end{aligned}$$

Comme les transformations sont infinitésimales, nous pouvons développer $F^{\alpha}('x - \delta\lambda - \delta\omega_{'\nu}'x'^{\nu})$ en série de Taylor autour de $'x$ et négliger les termes d'ordre supérieurs au premier :

$$\begin{aligned} 'F'^{\alpha}('x) = F'^{\alpha}('x) + \delta\lambda^{\mu}\big(-\partial_{\mu}F'^{\alpha}('x)\big) + \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}\Sigma^{'\alpha}_{\mu\nu\alpha}F^{\alpha}('x) \\ - \delta^{'\alpha}_{\alpha}\delta^{\mu}_{\nu}\,'x^{\nu}\,'\partial_{\mu}F^{\alpha}('x), \end{aligned}$$

et donc, compte tenu de la représentation de $\delta\omega^{'\alpha}_{\alpha}$ introduite plus haut,

$$'F'^{\alpha}('x) = \left(\delta^{'\alpha}_{\alpha} + \delta\lambda^{\mu}\Big\{\underbrace{-\partial_{\mu}\delta^{'\alpha}_{\alpha}}_{\text{translation}}\Big\} + \frac{1}{2}\delta\omega^{(\mu\nu)}\Big\{\underbrace{\Sigma^{'\alpha}_{\mu\nu\alpha}}_{\text{spin}} + \underbrace{('x_{\mu}{}'\partial_{\nu} - {}'x_{\nu}{}'\partial_{\mu})\delta^{'\alpha}_{\alpha}}_{\text{orbite}}\Big\}\right)F^{\alpha}('x).$$

Les générateurs de cette transformation sont

$$\begin{aligned} E_{\mu} &= -'\partial_{\mu}\delta^{'\alpha}_{\alpha} \\ E_{\mu\nu} &= \Sigma^{'\alpha}_{\mu\nu\alpha} + ('x_{\mu}{}'\partial_{\nu} - {}'x_{\nu}{}'\partial_{\mu})\delta^{'\alpha}_{\alpha}. \end{aligned}$$

La transformation s'écrit symboliquement

$$'F'^{X} = (I + \delta\lambda^{\mu}E_{\mu} + \frac{1}{2}\delta\omega^{\mu\nu}E_{\mu\nu})F'^{X}.$$

On a les relations de commutation suivantes (en théorie classique et non quantique)

$$\begin{aligned} &[E_{\mu}, E_{\nu}] = 0 \\ &[E_{\mu}, E_{\sigma\tau}] = g_{\mu\sigma}\,E_{\tau} - g_{\mu\tau}\,E_{\sigma} \\ &[E_{\mu\nu}, E_{\sigma\tau}] = -g_{\mu\sigma}\,E_{\nu\tau} - g_{\nu\tau}\,E_{\mu\sigma} + g_{\mu\tau}\,E_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}\,E_{\mu\tau}. \end{aligned}$$

On peut alors écrire

$$'F'^{X} = (I + \delta\epsilon^{r}E_{r})^{'X}_{X}F^{X},$$

qui est la transformation de l'algèbre de Lie ou du groupe infinitésimal. On a posé $r=\mu,\ \mu\nu\ldots$ et $\delta\epsilon$ est un vecteur infinitésimal dans l'espace du groupe. Cette transformation est donnée par le développement au premier ordre de la transformation

$$(I+\delta\epsilon^r E_r)^{\prime X}_{X} = L^{\prime X}_{X}(\delta\epsilon^r).$$

La transformation est obtenue par la série de Taylor

$$\begin{aligned}{}'F^{\prime X} &= L(\epsilon^r)^{\prime X}_{X} F^X = \lim_{N\to\infty}(I+\frac{\epsilon^r}{N}E_r)^{N\prime X}_{X} F^X\\ &= (e^{\epsilon^r E_r})^{\prime X}_{X} F^X,\end{aligned}$$

où, en supposant la convergence de la série,

$$(e^{\epsilon^r E_r})^{\prime X}_{X} = \delta^{\prime X}_{X} + \frac{1}{1!}\epsilon^r E^{\prime X}_{rX} + \frac{1}{2!}(\epsilon^r E_r)^{\prime X}_{X}(\epsilon^r E_r)^{\prime X}_{X} + \ldots$$

Exemple du champ scalaire

$$\begin{aligned}E_{\mu\nu} &= x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu\\ \overrightarrow{ik\ell}\,[E_{ik},E_{k\ell}] &= E_{i\ell}.\end{aligned}$$

On pose : $E_{ik} = \mathring{E}^{\ell}$ et alors

$$[\mathring{E}^{\ell},\mathring{E}^{i}] = -\mathring{E}^{k}.$$

La transformation finie s'obtient par répétition de la transformation infinitésimale : si par exemple $\delta\lambda\neq 0$, si $\delta\omega^{\mu\nu}=0$ et si $\delta\lambda^\mu = \lambda^\mu/N$,

$$\begin{aligned}{}'F('x) &= \lim_{N\to\infty}\Big(1+\frac{1}{N}\lambda^\mu(-\partial_\mu)\Big)^N\\ &= \big(1+\frac{1}{1!}\lambda^\mu(-'\partial_\mu)+\frac{1}{2!}\lambda^\mu\lambda^\nu(-'\partial_\mu)(-'\partial_\nu)+\ldots\Big)F('x).\end{aligned}$$

C'est la série de Taylor : $'F('x) = F('x-\lambda)$. La transformation (particulière) est $'x = x+\lambda$.

Pour un tenseur quelconque

Dans ce cas les E_μ et $E_{\mu\nu}$ sont plus compliqués, il faut faire le produit tensoriel :

$$\begin{aligned}&F^{\alpha\beta\ldots}(x,y,\ldots)\\ &E_\mu = \delta^{\prime\alpha}_{\alpha}\delta^{\prime\beta}_{\beta}\ldots\Big((-'\partial^x_\mu)+(-'\partial^y_\mu)+\ldots\Big)\\ &E_{\mu\nu} = \Sigma^{\prime\alpha}_{\mu\nu\alpha}\delta^{\prime\beta}_{\beta}\ldots+\delta^{\prime\alpha}_{\alpha}\Sigma^{\prime\beta}_{\mu\nu\beta}\ldots+\ldots\\ &\quad+\delta^{\prime\alpha}_{\alpha}\delta^{\prime\beta}_{\beta}\ldots\Big(('x_\mu{}'\partial^x_\nu-{}'x_\nu{}'\partial^x_\mu)+('y_\mu{}'\partial^y_\nu-{}'y_\nu{}'\partial^y_\mu)+\ldots\Big).\end{aligned}$$

Les règles de commutation restent les mêmes. Nous avons donc exprimé ces générateurs sous forme d'une algèbre de Lie qui conserve la métrique.

Chapitre 3

Observables en théorie des quanta

Présentation

Nous donnons tout d'abord deux manières d'interpréter les espérances mathématiques lors d'un changement de repère (section 1). Nous discutons ensuite de la signature thermodynamique de la métrique, ce qui exige un rappel du livre III (Relativité restreinte) : définition des scalaires puis définition des tenseurs pseudo-chrones (section 2). Les constantes de structure d'un groupe de Lie sont alors introduites avec comme interprétation particulière la quantité de mouvement-énergie et l'énergie cinétique-centre de masse qui vont jouer un rôle important par la suite (sections 3 et 4).

3.1 Covariance et représentation

Aux grandeurs de la physique classique correspond en physique quantique les espérances mathématiques dans un certain état.

Soit une grandeur physique, c'est-à-dire une observable $F^\alpha(x)$ que nous pouvons écrire F^X (notation $\{X\} = \{\alpha, x\}$ déjà introduite) et un état est défini par le vecteur abstrait $\underline{\Psi}$

$$\begin{aligned} &\underline{\Psi} = \{\Psi_a\},\ \alpha = 1, 2, \dots \omega_R \\ &F^X = \{F^X_{ab}\}. \end{aligned}$$

En général, l'indice X indique que $F^{\alpha\beta\cdots}(x, y, \dots)$ est une observable multilocale qui est un tenseur dans l'espace $\{x\}$ à n dimensions (espace-temps). L'indice ab indique que F_{ab} est un opérateur dans l'espace de Hilbert des vecteurs états quantiques :

$$< F^\alpha(x) >_{\underline{\Psi}} = (\underline{\Psi}, F^\alpha(x)\underline{\Psi}) = \Psi_a F^\alpha_{ab}\Psi_b \equiv (\underline{\Psi}, F^X\underline{\Psi}) = \Psi_a F^X_{ab}\Psi_b.$$

Nous avons vu en physique classique que lors d'un changement de repère (espace-temps) nous avions la relation

$$'F'^\alpha('x) = L'^\alpha_\alpha F^\alpha(L^{-1\prime}x).$$

Etablissons donc comment se transforme l'espérance mathématique lors d'une telle transformation.

a) Première possibilité

Considérons que le changement de repère dans l'espace-temps ne change pas l'état $\underline{\Psi}$, mais transforme l'opérateur $F^X_{ab}(x)$:

$$< {}'F'^X >_{\underline{\Psi}} = L'^X_X < F^X >_{\underline{\Psi}} = L'^X_X (\Psi_a F^X_{ab} \Psi_b)$$

ou encore

$$< {}'F'^X >_{\underline{\Psi}} = \Psi_a {}'F'^X_{ab} \Psi_b.$$

b) Seconde possibilité

Voyons si nous pouvons exprimer la nouvelle espérance mathématique à l'aide du même opérateur (${}'F'^X$ et F'^X ont les mêmes valeurs propres, c'est le postulat de covariance : si l'on mesure des grandeurs physiques dans deux référentiels de Lorentz différents, les valeurs possibles sont les mêmes, mais les probabilités ont changés). Cependant à l'aide d'un nouveau vecteur état quantique ${}'\Psi$, obtenu à partir de Ψ par une transformation orthogonale O (unitaire) de l'espace de Hilbert (induite par la transformation de Lorentz dans l'espace-temps)

$${}'\underline{\Psi} = O\underline{\Psi},$$

nous avons

$$< {}'F'^X >_{\underline{\Psi}} = < F'^X >_{{}'\underline{\Psi}},$$

Avec

$${}'\Psi_{'a} = O_{'aa}\Psi_a,$$

l'égalité précédente devient

$$\Psi_a {}'F'^X_{ab} \Psi_b = {}'\Psi_{'a} F'^X_{'a'b} {}'\Psi_{'b} = O_{'aa}\Psi_a F'^X_{'a'b} O_{'bb}\Psi_b.$$

qui est une identité en Ψ_a et Ψ_b. Si $F^X_{ab} = F^X_{ba}$, c'est-à-dire si $(F^X)^T = F^X$, est une observable et nous obtenons encore

$${}'F'^X_{ab} = L'^X_X F^X_{ab} = F'^X_{'a'b} O_{'aa} O_{'bb}.$$

En se souvenant que $O_{'ca} O^{-1}_{a'a} = \delta_{'c'a}$ et $O^{-1}_{a'a} = O_{'aa}$, nous obtenons :

$$F'^X_{'a'b} = L'^X_X O_{'aa} O_{'bb} F^X_{ab}.$$

Ainsi F^X_{ab}, considéré comme vecteur de l'espace dont les axes numérotés par X, est un tenseur symétrique de l'espace de Hilbert dont les axes sont numérotés par a et b et est invariant si on le transforme par rapport à ces trois indices X, a et b. Reprenons la démonstration de façon plus formelle :

$$\begin{aligned} < {}'F'^X >_{\underline{\Psi}} &= L'^X_X (\underline{\Psi}, F^X \underline{\Psi}) = < F'^X >_{{}'\underline{\Psi}} = ({}'\underline{\Psi}, F'^X {}'\underline{\Psi}) \\ &= (O\underline{\Psi}, F'^X O\underline{\Psi}) = (\underline{\Psi}, L'^X_X F^X \underline{\Psi}) \end{aligned}$$

qui conduit à

$$L'^{X}_{X} F^{X} = O^{-1} F'^{X} O = {}'F'^{X}, \tag{3.1.1}$$

autrement dit :

$$F'^{X} = L'^{X}_{X} O F^{X} O^{T} \quad \text{soit} \quad F'^{X}_{'a'b} = L'^{X}_{X} O_{'aa} O_{'bb} F^{X}_{ab}.$$

Notons que le groupe O constitue une représentation du groupe L :

$$F'^{X} = L'^{X}_{(1)X} O_{(1)} F^{X} O^{-1}_{(1)}$$
$$F''^{X} = L''^{X}_{'X} O_{(2)} F'^{X} O^{-1}_{(2)} = L''^{X}_{(2)'X} L'^{X}_{(1)X} O_{(2)} O_{(1)} F^{X} O^{-1}_{(1)} O^{-1}_{(2)}.$$

Ainsi, à $O_{(3)} = O_{(2)} O_{(1)}$ correspond $L_{(3)} = L_{(2)} L_{(1)}$ et à tout O correspond L.

La réciproque n'est pas vraie :

$$F'^{X} = L'^{X}_{(1)X} O_{(1)} e^{J\lambda} F^{X} e^{-J\lambda} O^{-1}_{(1)}.$$

Comme F^{X} est une observable, elle commute avec J, donc

$$F'^{X} = L'^{X}_{(1)X} O_{(1)} F^{X}_{(1)} O^{-1}_{(1)}.$$

A tout L correspond un O à un facteur $e^{J\lambda}$ près. Illustrons $<' F'^{X} >_{\underline{\Psi}} = < F'^{X} >_{'\underline{\Psi}}$ par une figure :

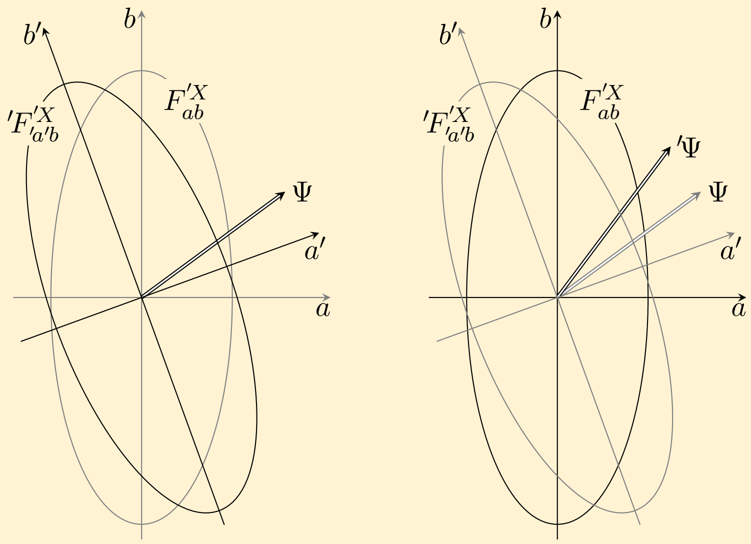


Fig. 3.1.1 Les couples « vecteur d'état-ellipsoïde représentant la grandeur » utilisés dans les deux expressions possibles, à savoir Ψ et $'F'^{X}$ d'une part et $'\Psi$ et F'^{X} d'autre part, sont en noir sur les deux parties de la figure.

3.2 Signature thermodynamique de $g^{\alpha\beta}$

Nous voulons montrer que, si on postule l'existence d'un état vide, alors

$$g_{\alpha\beta} = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Introduisons une généralisation des transformations considérées jusqu'ici :

$$'F^{'\alpha'\beta}('x,'y) = C(L)L^{'\alpha}_{\alpha}L^{'\beta}_{\beta}F^{\alpha\beta}(L^{-1}\,'x, L^{-1}\,'y)$$
$$'x = Lx \;;\; 'x^{'\alpha} = L^{'\alpha}_{\alpha}(x^{\alpha} + L^{\alpha}),$$

où $C(L)$ est un nombre satisfaisant à la condition

$$C(L_{(2)})C(L_{(1)}) = C(L_{(2)}L_{(1)})$$

avec :

$$C(L) = \begin{cases} 1 & \text{alors } F \text{ est une ortho-grandeur} \\ |\det(L^{'}_{\cdot})| & \text{alors } \mathring{F} \text{ est une pseudo-grandeur.} \end{cases}$$

Soit $F(x)$ une observable locale scalaire telle que

$$'F('x) = F(x) = F(L^{-1}\,'x) = O^{-1}\,F('x)\,O,$$

où O est une transformation correspondant à L.

Construisons l'observable bilocale scalaire

$$G(x,y) = J[F(x),F(y)] = -G(y,x)$$

qui apparaît dans les relations d'incertitude, cf. (1.2.3),

$$< \Delta F^2(x) >_{\underline{\Psi}} < \Delta F^2(y) >_{\underline{\Psi}} \geq \frac{1}{4} < G(x,y) >^2_{\underline{\Psi}} .$$

Faisons l'hypothèse qu'il existe un état particulier $\underline{\Psi}^{(0)}$ du cosmos, le vide qui est homogène et isotrope. Plaçons-nous dans l'image de Heisenberg de façon que le temps intervienne dans les observables ; posons :

$$< G(x,y) >_{\underline{\Psi}^{(0)}} = \overset{\cup}{f}(x-y) = -\overset{\cup}{f}(y-x),$$

alors

$$< 'G('x,'y) >_{\underline{\Psi}^{(0)}} = \overset{\cup}{'f}('x,'y) = C(L)\,\overset{\cup}{f}(x,y) = C(L)\,\overset{\cup}{f}(L^{-1}\,'x, L^{-1}\,'y).$$

Par définition du vide, tous les référentiels sont équivalents et nous devons avoir (car on ne peut distinguer dans lequel on se trouve) :

$$\overset{\cup}{'f}('x,'y) = \overset{\cup}{f}('x,'y).$$

Ces deux dernières égalités impliquent $\overset{\cup}{'f}('x,'y) = C(L)\,\overset{\cup}{f}('x,'y)$. L'homogénéité exige que $\overset{\cup}{f}(x,y) = \overset{\cup}{f}(x-y)$ et l'isotropie exige que $\overset{\cup}{f}(x,y) = \overset{\cup}{f}((x-y)^2)$, où $(x-y)^2 = (x-y)_{\alpha}(x-y)^{\alpha}$ est un invariant de Lorentz construit à l'aide de $x-y$. Cette condition n'est pas compatible avec l'antisymétrie du commutateur $\overset{\cup}{f}(x,y) = -\overset{\cup}{f}(y,x)$. Le seul moyen de tourner cette difficulté est de donner à la variété $\{x^\alpha\}$ un axe privilégié $x^4 = t$ appelé le temps, c'est-à-dire de donner à la métrique la signature thermodynamique

$$\mathrm{sign}(g^{\alpha\beta}) = \pm(+1, +1, +1, -1).$$

On obtient alors :

$$\overset{\cup}{f}(x, y) = \mathrm{sign}(x^4 - y^4)\, \overset{\cup}{f}((x - y)^2),$$

où $\overset{\cup}{f}(x, y) = 0$ si $x - y$ est spatial, c'est-à-dire si $g_{\alpha\beta}(x - y)^\alpha (x - y)^\beta \geq 0$ ($\overset{\cup}{f}(z^2) \neq 0$ dans le cône de lumière).

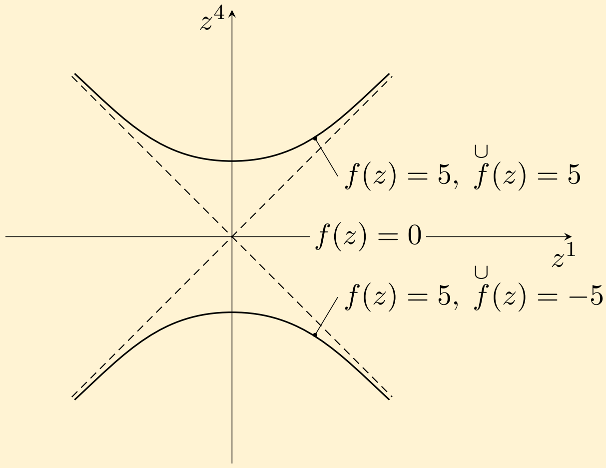


Fig. 3.2.1 On peut vérifier sur cette figure que les propriétés d'antisymétrie sont satisfaites.

$$\overset{\cup}{f}(x) = -\overset{\cup}{f}(-x).$$

Montrons que, si $\overset{\cup}{f}(x, y)$ est un scalaire bilocal pseudo-chrone, alors $\overset{\cup}{f}$ est un scalaire, c'est-à-dire que qu'il se transforme avec

$$C(L) = \mathrm{sign}(L'^4_4).$$

1) Si $\mathrm{sign}(L'^4_4) > 0$, la composante temporelle d'un vecteur ne change pas de signe :

$$\mathrm{sign}('x'^4 - 'y'^4) = \mathrm{sign}(x^4 - y^4).$$

Comme $'\overset{\cup}{f}(('x - 'y)^2)) = \overset{\cup}{f}((x - y)^2)$, on a $'\overset{\cup}{f}('x, 'y) = \overset{\cup}{f}(x, y)$.

2) Si $\mathrm{sign}(L'^4_4) < 0$, alors la composante temporelle de $x - y$ change de signe : $\mathrm{sign}('x'^4 - 'y'^4) = \mathrm{sign}(x^4 - y^4)\mathrm{sign}(L'^4_4)$. Donc $'\overset{\cup}{f}('x, 'y) = \mathrm{sign}(L'^4_4)\, \overset{\cup}{f}(x, y)$. Une même formule résume les discussions 1) et 2) :

$$'\overset{\cup}{f}('x, 'y) = \mathrm{sign}(L'^4_4)\, \overset{\cup}{f}(x, y).$$

Partition du groupe $\{L\}$ en quatre classes (cf. tome III).

Une grandeur pseudo-chrone est une grandeur qui se transforme de la façon suivante :

$$'\overset{\cup}{F}'^{\alpha}('x) = \mathrm{sign}(L'^{4}_{4})L'^{\alpha}_{\alpha}\,\overset{\cup}{F}^{\alpha}(L^{-1\prime}x) = O^{-1}\overset{\cup}{F}'\alpha('x)\,O.$$

Par exemple $<\overset{\cup}{G}(x,y)\ >_{\underline{\Psi}^{(0)}}=\overset{\cup}{f}(x,y)$. Or $\overset{\cup}{G}(x,y)\ =\overset{\cup}{J}\ [F(x),F(y)]$; pour que la moyenne de $\overset{\cup}{G}(x,y)$ soit un scalaire pseudo-chrone, il faut que $\overset{\cup}{G}$ (c'est-à-dire $\overset{\cup}{J}$ soit pseudo-chrone)

$$\begin{aligned}
'\overset{\cup}{G}('x,'y) &= \mathrm{sign}(L'^{4}_{4})\,\overset{\cup}{G}(x,y) = O^{-1}\,\overset{\cup}{G}('x,'y)O \\
&= (O^{-1}\overset{\cup}{J}O)O^{-1}['F('x),'F('y)]\,O \\
&= (O^{-1}\overset{\cup}{J}O)[F(x),F(y)] \\
&= (O^{-1}\overset{\cup}{J}O\overset{\cup}{J}^{-1})\,\overset{\cup}{J}[F(x),F(y)] \\
&= O^{-1}\overset{\cup}{J}O\overset{\cup}{J}^{-1}\overset{\cup}{G}\,(x,y),
\end{aligned}$$

donc $O^{-1}\overset{\cup}{J}O\,\overset{\cup}{J}^{-1} = 1\cdot\mathrm{sign}(L'^{4}_{4})$; d'où :

$$\overset{\cup}{J}O = \mathrm{sign}(L'^{4}_{4})\,O\,\overset{\cup}{J}\ .$$

Pour des transformations orthochrones : $\overset{\cup}{J}O^{\uparrow} = O^{\uparrow}\overset{\cup}{J}$, on a :

$$[O^{\uparrow},\overset{\cup}{J}]_{-} = 0.$$

Pour des transformations pseudo-chrones : $\overset{\cup}{J}O^{\downarrow} = -O^{\downarrow}\overset{\cup}{J}$, on a

$$[O^{\downarrow},\overset{\cup}{J}]_{+} = 0.$$

Mais $\overset{\cup}{J}$ est antisymétrique, ce n'est donc pas une observable. Nous devons donc définir la transformée de $\overset{\cup}{J}$ par une opération $O \longrightarrow L$:

$$'\overset{\cup}{J}= O^{-1}\,\overset{\cup}{J}O,$$

d'où : $'\overset{\cup}{J}= \mathrm{sign}(L'^{4}_{4})\,\overset{\cup}{J}$.

3.3 Constantes de structure d'un groupe de Lie

A la section 2.2, nous avons obtenu pour les transformations infinitésimales :

$$L(\delta\lambda^{\cdot},\delta\omega^{\cdot\cdot}) = \{L'^{X}_{X}\} = I + \delta\lambda^{\mu}E_{\mu} + \frac{1}{2}\delta\omega^{\mu\nu}E_{\mu\nu}$$

définie par les n paramètres $\delta\lambda^\mu$ (quatre translations) et les $\frac{1}{2}n(n-1)$ paramètres $\delta\omega^{\mu\nu}$ (six transformations de Lorentz pures). Pour simplifier la notation, nous écrivons

$$L = L(\delta\lambda^{\cdot}) = I + \delta\lambda^a E_a,$$

où a est un multi-indice prenant 4 valeurs (1, 2, 3, 4) puis $(1/2)4(4-1) = 6$ valeurs. Les transformations infinitésimales nous permettent de construire la composante connexe de l'identité, c'est-à-dire le sous-groupe des transformations continues :

$$L^{\uparrow+} = \{L(\lambda^{\cdot})\}$$

avec

$$L(\lambda^{\cdot}) = \lim_{N\to\infty}(I + \frac{\lambda^a}{N}E_a) = e^{\lambda^a E_a} = I + \frac{1}{1!}\lambda^a E_a + \frac{1}{2!}(\lambda^a E_a)^2 + \dots$$

où les E_a sont les générateurs de ce groupe à $4+6$ paramètres.

Pour que $\{L(\lambda^{\cdot})\}$ constitue un groupe, il faut que

$$L(\mu^{\cdot})L(\lambda^{\cdot}) = L(\nu^{\cdot}),$$

où ν^a est tel que

$$\nu^a = \nu^a(\mu^{\cdot},\lambda^{\cdot}) = \begin{cases} \mu^a & \text{si } \lambda^a = 0 \\ \lambda^a & \text{si } \mu^a = 0. \end{cases}$$

On effectue le produit

$$\begin{aligned} L(\mu^{\cdot})L(\lambda^{\cdot}) &= \Big(1 + \frac{1}{1!}\mu^b E_b + \frac{1}{2!}(\mu^b E_b)^2 + \dots\Big)\Big(1 + \frac{1}{1!}\lambda^a E_a + \frac{1}{2!}(\lambda^a E_a)^2 + \dots\Big) \\ &= 1 + (\mu^a + \lambda^a)E_a + \frac{1}{2!}\Big((\mu^b E_b)^2 + (\lambda^a E_a)^2 + 2(\mu^b E_b)(\lambda^a E_a)\Big) + \dots \end{aligned}$$

La deuxième approximation du produit devrait être

$$(\mu^b E_b + \lambda^a E_a)^2 = (\mu^b E_b)^2 + (\lambda^a E_a)^2 + (\mu^b E_b)(\lambda^a E_a) + (\lambda^a E_a)(\mu^b E_b).$$

Comme

$$2E_b E_a = [E_b, E_a]_+ + [E_b, E_a]_-,$$

on a

$$(\mu^b E_b + \lambda^a E_a)^2 = (\mu^a E_a)^2 + (\lambda^a E_a)^2 + \mu^b\lambda^a\{2E_b E_a - [E_b, E_a]_-\}.$$

Pour que la loi de groupe

$$L(\mu^{\cdot})L(\lambda^{\cdot}) = L(\nu^{\cdot})$$

soit satisfaite en deuxième approximation, on montre qu'il est nécessaire de poser la *condition de Lie* :

$$[E_b, E_a]_- = -C^c_{ba}\,E_c,$$

où les C^c_{ba} sont appelés les *constantes de structure* et

$$\nu^a = \mu^a + \lambda^a + (-\mu^b\lambda^c C^a_{bc}) + \dots$$

On a alors

$$L(\mu^{\cdot})L(\lambda^{\cdot}) = 1 + \underbrace{\{\mu^a + \lambda^a - \mu^b\lambda^c C^a_{bc}\}E_a}_{\nu^a E_a} + \frac{1}{2}\underbrace{\{(\mu^a + \lambda^a)^2\}E_a^2}_{(\nu^a E_a)^2} + \dots$$

Nous avons déja calculé, cf. section 2.2,

$$\begin{aligned} E_\mu &= -\partial_\mu \delta'^{\alpha}_{\alpha} \\ E_{\mu\nu} &= \Sigma'^{\alpha}_{\mu\nu\alpha} + (x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\delta'^{\alpha}_{\alpha}. \end{aligned}$$

Les relations de commutation (donnant les conditions du groupe de Lie et les constantes de structure) sont

$$\begin{aligned} [E_\mu, E_\nu] &= 0 \\ [E_\mu, E_{\sigma\tau}] &= -g_{\mu\tau}E_\sigma + g_{\mu\sigma}E_\tau \\ [E_{\mu\nu}, E_{\sigma\tau}] &= -g_{\mu\sigma}E_{\nu\tau} - g_{\nu\tau}E_{\mu\sigma} + g_{\mu\tau}E_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}E_{\mu\tau}. \end{aligned}$$

Les E_a sont les générateurs du groupe de Lie à 4+6 paramètres. A la transformation $L(\delta\lambda^{\cdot}) = I + \delta\lambda^\mu E_\mu + (1/2)\delta\omega^{\mu\nu}E_{\mu\nu}$ correspond une représentation de l'algèbre de Lie par un opérateur O dépendant des mêmes paramètres :

$$O(\delta\lambda^{\cdot}) = I + \delta\lambda^\mu(-\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{\Pi}_\mu) + \frac{1}{2}\delta^{\mu\nu}(\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{M}_{[\mu\nu]}).$$

Cette relation définit $-\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{\Pi}_\mu$ et $\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{M}_{[\mu\nu]}$ qui sont une représentation des générateurs du groupe à 10 paramètres. Pour que la représentation du groupe $\{O^{\uparrow+}\}$ dans le groupe $L^{\uparrow+}\}$ soit fidèle, nous voulons que :

$$L(\mu^{\cdot})\ L(\lambda^{\cdot}) = L(\nu^{\cdot}) \implies O(\mu^{\cdot})\ O(\lambda^{\cdot}) = O(\nu^{\cdot}).$$

Nous avons vu que

$$[O^{\uparrow}, \overset{\cup}{J}]_- = 0 \quad \text{donc} \quad [O^{\uparrow+}, \overset{\cup}{J}]_- = 0,$$

ce qui entraîne

$$[\overset{\cup}{J}, \overset{\cup}{\Pi}_\mu]_- = 0 \quad \text{et} \quad [\overset{\cup}{J}, \overset{\cup}{M}_{\mu\nu}]_- = 0.$$

Comme $L(\lambda^{\cdot}) = e^{\lambda^a E_a}$ et $L^{-1}(\lambda^{\cdot}) = e^{-\lambda^a E_a}$, pour que la représentation

$$L^{-1}(\delta\lambda^{\cdot}) \longrightarrow O^{-1} = I - \delta\lambda^\mu\Big(-\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{\Pi}{}^T_\mu\Big) - \frac{1}{2}\delta\omega^{\mu\nu}\Big(-\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{M}{}^T_{\mu\nu}\Big)$$

soit fidèle, il faut que la représentation de l'algèbre de Lie, c'est-à-dire $-\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{\Pi}_\mu$ et $\overset{\cup}{M}_{\mu\nu}$, vérifie les mêmes relations de commutations que les générateurs de l'algèbre E_μ et $E_{\mu\nu}$ et les relations de commutation avec $\overset{\cup}{J}$. Comme $O^T = O^{-1}$, il vient

$$\overset{\cup}{\Pi}_\mu = \overset{\cup}{\Pi}{}^T_\nu \quad \text{et} \quad \overset{\cup}{M}_{\mu\nu} = \overset{\cup}{M}{}^T_{\mu\nu},$$

les observables sont des générateurs pseudo-chrones du groupe $O^{\uparrow +}$ vérifient

$$\begin{aligned}
&[-\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{\Pi}_\mu, -\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{\Pi}_\nu]_- = 0\\
&[-\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{\Pi}_\mu, \overset{\cup}{J}\overset{\cup}{M}_{\sigma\tau}]_- = g_{\mu\sigma}(-\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{\Pi}_\tau) - g_{\mu\tau}(-\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{\Pi}_\sigma)\\
&[\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{M}_{\mu\nu}, \overset{\cup}{J}\overset{\cup}{M}_{\sigma\tau}]_- = -g_{\mu\sigma}\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{M}_{\nu\tau} - \dots
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Par multiplication par $-\overset{\cup}{J}^{-1}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\overset{\cup}{J}[\overset{\cup}{\Pi}_\mu, \overset{\cup}{\Pi}_\nu] &= 0\\
\overset{\cup}{J}[\overset{\cup}{\Pi}_\mu, \overset{\cup}{M}_{\sigma\tau}] &= g_{\mu\sigma}\overset{\cup}{\Pi}_\tau - g_{\mu\tau}\overset{\cup}{\Pi}_\sigma\\
\overset{\cup}{J}[\overset{\cup}{M}_{\mu\nu}, \overset{\cup}{M}_{\sigma\tau}] &= -g_{\mu\sigma}\overset{\cup}{M}_{\nu\tau} - g_{\nu\tau}\overset{\cup}{M}_{\mu\sigma} + g_{\mu\tau}\overset{\cup}{M}_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}\overset{\cup}{M}_{\mu\tau}\ .
\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Nous avons ainsi identifié l'algèbre de Lie avec ses relations de commutations avec celle de l'algèbre de Lie du groupe $L^{\uparrow +}$.

Appliquons la transformation infinitésimale sur les observables $F^\alpha(x)$ pour faire un pont entre les générateurs des deux algèbres

$$\begin{aligned}
{}'F'^\alpha('x) = F'^\alpha('x) &+ \delta\lambda^\mu(-'\partial_\mu F'^\alpha('x))\\
&+ \frac{1}{2}\delta\omega^{\mu\nu}\big(\Sigma'^\alpha_{\mu\nu\alpha} + ('x_\mu{}'\partial_\nu - 'x_\nu{}'\partial_\mu)\delta'^\alpha_\alpha\big)F^\alpha('x).
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
{}'F'^\alpha('x) &= O^{-1}(\delta\lambda^\cdot, \delta\omega^{\cdot\cdot})\, F'^\alpha('x) O(\delta\lambda^\cdot, \delta\omega^{\cdot\cdot})\\
&= \Big(I - \delta\lambda^\mu(-\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{\Pi}_\mu) - \frac{1}{2}\delta\omega^{\mu\nu}\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{M}_{\mu\nu}\Big)F'^\alpha('x)\Big(I + \delta\lambda^\mu(-\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{\Pi}_\mu) + \frac{1}{2}\delta\omega^{\mu\nu}\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{M}_{\mu\nu}\Big).
\end{aligned}$$

Ainsi, au premier ordre, par identification des coefficients des paramètres nous avons

$$\begin{aligned}
-\partial_\mu F^\alpha(x) &= \overset{\cup}{J}[\overset{\cup}{\Pi}_\mu, F^\alpha(x)]\\
-\big(\Sigma^\alpha_{\mu\nu\beta} + (x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\delta^\alpha_\beta F^\beta(x)\big) &= \overset{\cup}{J}[\overset{\cup}{M}_{\mu\nu}, F^\alpha(x)].
\end{aligned}$$

Interprétation des équations.

Dans l'image de Heisenberg, nous avons : $F = F(t)$ avec $< F(t)| >_{\underline{\Psi}} = < F >_{\underline{\Psi}(t)}$ et nous avions obtenu

$$\partial_t F(t) = \frac{1}{\hbar}\overset{\cup}{J}[H, F(t)].$$

Cette équation est contenue dans l'équation

$$-\partial_\mu F^\alpha(x) = \overset{\cup}{J}[\overset{\cup}{\Pi}_\mu, F^\alpha(x)],$$

en effet, si on prend $\mu = 4$ et $x^4 = t$, on obtient

$$-\partial_t F^\alpha(\vec{x}, t) = \overset{\cup}{J}[\overset{\cup}{\Pi}_4, F^\alpha(\vec{x}, t)].$$

Soit $g_{\alpha\neq\beta} = 0$ et $g_{ii} = g^{ii} = -g_{44} = g^{44} = 1$ la métrique. Posons

$$\overset{\cup}{\Pi}{}^4 = -(1/\hbar)H \quad \text{et} \quad \{\overset{\cup}{\Pi}{}^i\} = \overset{\cup}{\vec{\Pi}}.$$

Il vient alors

$$\partial_t F^{\alpha\beta\cdots}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\hbar}\overset{\cup}{J}[\overset{\cup}{H}, F^{\alpha\beta\cdots}(\vec{x}, t)].$$

Du moment que nous sommes dans l'image de Heisenberg et que les opérateurs dépendent du temps, comme nous sommes en relativité, ils doivent aussi dépendre de l'espace. Pour $\mu = 1$, on a

$$-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F^{\alpha\beta\cdots}(\vec{x}, t) = \overset{\cup}{J}[\overset{\cup}{\vec{\Pi}}, F^{\alpha\beta\cdots}(\vec{x}, t)].$$

Pour un scalaire, la deuxième équation nous donne

$$-(x_i\partial_k - x_k\partial_i)F^{\alpha\beta\cdots}(\vec{x}, t) = \overset{\cup}{J}[\overset{\cup}{M}_{ik}, F^{\alpha\beta\cdots}(\vec{x}, t)]$$

pour la rotation infinitésimale dans le plan (i, k).

Interprétons d'autre part les relations de commutation

$$[\overset{\cup}{\Pi}_\mu, \overset{\cup}{\Pi}_\nu] = 0 \quad \text{et} \quad \overset{\cup}{J}[\overset{\cup}{H}, \overset{\cup}{\vec{\Pi}}] = 0.$$

L'énergie et la quantité de mouvement commutent. La quantité de mouvement est donc une constante du mouvement. D'autre part

$$\overset{\cup}{J}[\overset{\cup}{\Pi}_4, \overset{\cup}{M}_{ik}] = 0 \quad \text{car } g_{4i} = g_{4k} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\overset{\cup}{J}[\overset{\cup}{H}, \overset{\cup}{\vec{M}}] = 0.$$

On a donc la même remarque pour le moment cinétique que pour la quantité de mouvement. Si on pose

$$\{\overset{\cup}{M}{}^{\alpha\beta}\} = \{\overset{\cup}{M}{}^{ik}, \overset{\cup}{M}{}^{i4}\} = \{\overset{\cup}{\vec{J}}, \overset{\cup}{\vec{M}}\},$$

bien que $\overset{\cup}{\vec{M}}$ ne nous intéresse pas spécialement pour cette interprétation, nous remarquons que, de

$$(\overrightarrow{ik\ell}) \quad \overset{\cup}{J}[\overset{\cup}{M}_{ik}, \overset{\cup}{M}_{k\ell}] = \overset{\cup}{M}_{i\ell},$$

nous pouvons tirer les relations de commutation habituelles pour le moment cinétique

$$\overset{\cup}{J}[\overset{\cup}{J}{}^\ell, \overset{\cup}{J}{}^i] = -\overset{\cup}{J}{}^k.$$

3.4 Opérateur de densité d’énergie-quantité de mouvement

Nous voulons construire $\overset{\cup}{\Pi}_\mu$ à partir d’observables locales : une manière de procéder pourrait être de poser la définition suivante

$$\overset{\cup}{\Pi}{}^{\mu} = \int_{\infty}^{\infty} dx^4 \pi^\mu(x),$$

mais nous ne pouvons intégrer sur le temps de $-\infty$ à $+\infty$ (divergence).

Nous prenons plutôt :

$$\overset{\cup}{\Pi}{}^{\mu} = \int_{\tau(y)=0} (d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha \theta^{\alpha\mu})(y) = \overset{\cup}{\Pi}{}^{\mu}[\tau(\ ), \theta^{\cdot\cdot}]. \tag{3.4.1}$$

On veut que $\overset{\cup}{\Pi}{}^{\mu}$ soit indépendant de la surface temporelle $\tau(y) = 0$. Nous prendrons toujours le vecteur $d\vec{\sigma}$ orienté vers le futur relatif, $d\vec{\sigma}$ apparaît ainsi comme un vecteur pseudo-chrone

$$d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha\, d\overset{\cup}{\sigma}{}^{\alpha}(y) < 0,$$

c’est-à-dire comme une surface à normale temporelle, avec $d\overset{\cup}{\sigma}_4(y) > 0$, c’est-à-dire orientée vers le futur relatif ; ainsi :

$${}'d\overset{\cup}{\sigma}_{'\alpha}({}'y) = \mathrm{sign}(L^{\prime 4}_{4})\, d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha(y) L^{-1\alpha}_{'\alpha}.$$

Si F est un scalaire, alors

$$\partial_\mu F = -\overset{\cup}{J}[\overset{\cup}{\Pi}_\mu, F]$$

est un 4-vecteur, donc $\overset{\cup}{\Pi}_\mu$ doit être un 4-vecteur :

$${}'\overset{\cup}{\Pi}{}^{\prime\mu} = O^{-1}\,\overset{\cup}{\Pi}{}^{\prime\mu}\,O = O^{-1}\int_{\tau(y)=0} d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha(y)\,\theta^{\alpha'\mu}(y)\,O.$$

Effectuons dans l’intégrale le changement de variables d’intégration $y \longrightarrow {}'y$ et des limites $\tau(y) = 0 \longrightarrow {}'\tau({}'y) = 0$; l’indice muet est aussi changé $\alpha \longrightarrow {}'\alpha$:

$${}'\overset{\cup}{\Pi}{}^{\prime\mu} = \int_{'\tau('y)=0} {}'d\overset{\cup}{\sigma}_{'\alpha}({}'y)\,\underbrace{O^{-1}\,\theta^{'\alpha'\mu}({}'y)\,O}_{L^{\prime\alpha}_{\alpha} L^{\prime\mu}_{\mu}\theta^{\alpha\mu}(L^{-1}{}'y)}$$

mais ${}'d\overset{\cup}{\sigma}_{'\alpha}({}'y)L^{\prime\alpha}_{\alpha} = \mathrm{sign}(L^{\prime 4}_{4})\, d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha(y)$, donc :

$${}'\overset{\cup}{\Pi}{}^{\prime\mu} = \mathrm{sign}(L^{\prime 4}_{4})L^{\prime\mu}_{\mu}\int_{\tau(y)=0} d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha(y)\,\theta^{\alpha\mu}(y),$$

c’est-à-dire

$${}'\overset{\cup}{\Pi}{}^{\prime\mu} = \mathrm{sign}(L^{\prime 4}_{4})L^{\prime\mu}_{\mu}\,\overset{\cup}{\Pi}\mu.$$

Donc $\overset{\cup}{\Pi}{}^{\mu}$ est bien un vecteur pseudo-chrone.

Cherchons maintenant la condition pour que $\overset{\cup}{\Pi}{}^{\mu}$ soit indépendant de la surface $\tau(y) = 0$. Le théorème de Gauss conduit à

$$\partial_{\alpha}\theta^{\alpha\mu}(x) = 0.$$

De façon analogue, nous pouvons définir

$$\overset{\cup}{M}{}^{\mu\nu} = \int_{\tau(y)=0} d\overset{\cup}{\sigma}_{\alpha}(y)(y^{\mu}\theta^{\alpha\nu} - y^{\nu}\theta^{\alpha\mu})(y) = \overset{\cup}{M}{}^{\mu\nu}[\tau(\;), \theta^{\cdot\cdot}(\;)]. \tag{3.4.2}$$

La loi de transformation pour $\overset{\cup}{M}{}^{\mu\nu}$ est :

$$\begin{aligned} {}'\overset{\cup}{M}{}^{'\mu'\nu} = O^{-1}\; \overset{\cup}{M}{}^{'\mu'\nu} O &= \int_{'\tau('y)=0} {}'d\overset{\cup}{\sigma}_{'\alpha}('y) O^{-1}('y^{'\mu}\theta^{'\alpha'\nu} - {}'y^{'\nu}\theta^{'\alpha'\mu})\, O \\ &= \int_{'\tau('y)=0} {}'d\overset{\cup}{\sigma}_{'\alpha}('y) L^{'\alpha}_{\alpha} L^{'\mu}_{\mu} L^{'\nu}_{\nu} (y^{\mu}.\theta^{\alpha\nu} - y^{\nu}\theta^{\alpha\mu})(L^{-1}{}'y) \end{aligned}$$

Mais, si on pose ${}'y = L^{'\mu}_{\mu}(y^{\mu} + L^{\mu})$ (L^{μ} correspond à une translation de l'origine), l'équation précédente, en la traitant comme précédemment pour $\overset{\cup}{\Pi}{}^{\mu}$, devient

$${}'\overset{\cup}{M}{}^{'\mu'\nu} = \mathrm{sign}(L^{'4}_{4}) L^{'\mu}_{\mu} L^{'\nu}_{\nu} \int_{\tau(y)=0} d\overset{\cup}{\sigma}_{\alpha}(y)[(y^{\mu} + L^{\mu})\theta^{\alpha\nu}(y) - (y^{\nu} + L^{\nu})\theta^{\alpha\mu}(y)],$$

c'est-à-dire encore

$${}'\overset{\cup}{M}{}^{'\mu'\nu} = \mathrm{sign}(L^{'4}_{4}) L^{'\mu}_{\mu} L^{'\nu}_{\nu} \left(\overset{\cup}{M}{}^{\mu\nu} + L^{\mu}\, \overset{\cup}{\Pi}{}^{\nu} - L^{\nu}\, \overset{\cup}{\Pi}{}^{\mu}\right).$$

Si l'on impose la condition que $\overset{\cup}{M}{}^{\mu\nu}$ soit indépendant de la surface $\tau(y) = 0$, on obtient

$$\partial_{\alpha}(x^{\mu}\theta^{\alpha\nu}(x) - x^{\nu}\theta^{\alpha\mu}(x)) = 0,$$

qui devient, puisque $\partial_{\alpha}x^{\mu} = \delta^{\mu}_{\alpha}$,

$$\theta^{\mu\nu} - \theta^{\nu\mu} = 0.$$

Finalement, la condition souhaitée est réalisée si

$$\begin{aligned} &\partial_{\alpha}\theta^{\alpha\beta}(x) = 0 \\ &\theta^{\alpha\beta}(x) = \theta^{(\alpha\beta)}(x). \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Chapitre 4

Théorie du champ scalaire

Présentation

Nous définissons tout d'abord le champ scalaire qui satisfait à l'équation de Klein-Gordon ; suivant que le champ commute ou anticommute avec J, on obtient les champs linéaires ou antilinéaires (section 1). Les relations de commutation du champ avec l'opérateur de quantité de mouvement-énergie et celui de moment cinétique-centre de masse sont alors écrites. Puis les relations trilinéaires entre les champs ou leurs transposés, qui permettent par intégration d'obtenir les relations de commutation du champ en différents points de l'espace, ainsi que la relation de commutation du champ et de son transposé en deux points, sont alors déduites (section 2). L'opérateur de charge est alors défini à la section 3 et la conjuguaison de charge est déduite à la section 4. Le développement de l'opérateur de champ en paquets d'onde est étudié au section 5 et la quantification explicite est donnée à la section 6.

4.1 Définition du champ

Considérons le champ scalaire $\omega(x)$, ($\neq \omega^T(x)$. Il satisfait à l'équation d'onde (équation de Klein-Gordon)

$$(\Box - M^2)\omega(x) = 0, \tag{4.1.1}$$

avec $M^2 \geq 0$, $\Box = -\text{sign}(g^{44})g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta$. Si $g^{ii} = 1 = -g^{44}$: $\Box = \Delta - \partial_t^2$.

A partir du champ scalaire, nous pouvons construire des observables ; par exemple

$$F^{(2)} = (\omega\omega^T) = (\omega\omega^T)^T.$$

De façon générale, des observables $F^{\alpha\cdots}(x)$ sont des formes bilinéaires en $\omega(x)\underset{\cup}{}\omega(x)^T$ et leurs dérivées (comprenant des nombres ou des opérateurs dépendant de $\overset{\cup}{J}$).

Dans RHS, les observables sont des opérateurs symétriques qui commutent avec $\overset{\cup}{J}$, c'est-à-dire

$$F = F^T \qquad [F, \overset{\cup}{J}]_- = 0.$$

Nous avons

$$[A\,B, C]_- = A[B, C]_\mp \pm [A, C]_\mp B.$$

Ainsi, il y aura donc deux possibilités pour que $[F, \overset{\cup}{J}]_- = 0$:

1) $[\omega_., \overset{\cup}{J}]_- = 0,$ champ linéaire ou de première espèce,

2) $[\omega_., \overset{\cup}{J}]_+ = 0$ champ antilinéaire ou de deuxième espèce.

Nous voulons construire à partir du champ scalaire $\omega(x)$, une observable $\theta^{\alpha\beta}(x)$ telle que

1) $\theta^{\alpha\beta} = \theta^{(\alpha\beta)}$

2) $\partial_\alpha \theta^{\alpha\beta} = 0.$

Le tenseur $\theta^{\alpha\beta}(x)$ le plus général qui satisfait ces conditions et qui soit une observable est donné par

$$\theta^{\alpha\beta} = \alpha_1 \theta^{\alpha\beta(1)} + \alpha_2 \theta^{\alpha\beta(2)},$$

où $\omega_\alpha = \partial_\alpha \omega(x)$ et

$$\theta^{\alpha\beta(1)} = \omega^{\alpha T}\omega^\beta + \omega^{\beta T}\omega^\alpha - g^{\alpha\beta}(\omega_\rho^T \omega^\rho + M^2 \omega^T \omega) \tag{4.1.2}$$

$$\theta^{\alpha\beta(2)} = \omega^\alpha \omega^{\beta T} + \omega^\beta \omega^{\alpha T} - g^{\alpha\beta}(\omega_\rho \omega^{\rho T} + M^2 \omega \omega^T). \tag{4.1.3}$$

Vérifions les conditions pour $\theta^{\alpha\beta\,(1)}$:

1) $\theta^{\alpha\beta(1)}$ commute bien avec $\overset{\cup}{J}$ si ω commute avec $\overset{\cup}{J}$

2) $\theta^{\alpha\beta(1)} = (\theta^{\alpha\beta(1)})^T$ trivial

3) $\theta^{\alpha\beta(1)} = \theta^{(\alpha\beta)(1)}$ trivial

4) $$\begin{aligned}\partial_\alpha \theta_\beta^{\alpha(1)} &= (\partial_\alpha \omega^{\alpha T})\omega_\beta + \omega^{\alpha T}\partial_\alpha \omega_\beta + (\partial_\alpha \omega_\beta^T)\omega^\alpha + \omega_\beta^T \partial_\alpha \omega^\alpha \\ &\quad - (\partial_\beta \omega_\rho^T)\omega^\rho - \omega^{\rho\,T}\partial_\beta \omega_\rho - M^2 \omega^T \partial_\beta \omega - M^2(\partial_\beta \omega^T)\omega \\ &= (\Box - M^2)\omega^T \cdot \omega_\beta + \omega_\beta^T(\Box - M^2)\omega = 0,\end{aligned}$$

où l'on a utilisé $\partial_\alpha \omega_\beta = \partial_\alpha \partial_\beta \omega = \partial_\beta \omega_\alpha$. La même vérification peut être faite pour $\theta^{\alpha\beta(2)}$.

4.2 Règles de commutation générales

On a déjà vu à la section précédente :

$$\theta^{\alpha\beta} = \alpha_1 \theta^{\alpha\beta(1)} + \alpha_2 \theta^{\alpha\beta(2)}$$

et

$$\overset{\cup}{\Pi}_\mu = \int_{\tau(y)=0} (d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha \, \theta^\alpha_\mu)(y).$$

Soit le scalaire (observable) $F^{(1)}(x) = \omega^T(x)\omega(x)$; il se transforme suivant

$$\begin{aligned} {}'F^{(1)}('x) &= {}'\omega^T('x)'\omega('x) = O^{-1}\, F^{(1)}(x)\, O = F^{(1)}(L^{-1}{}'x) \\ &= O^{-1}\,\omega^T('x)\, O)(O^{-1}\,\omega('x)\, O) = F^{(1)}(x) = \omega^T(x)\omega(x) \end{aligned}$$

Pour cela, il suffit (il le faut aussi mais ce n'est pas démontré) que

$$O^{-1}\,\omega('x)\, O = {}'\omega('x) = e^{\lambda \overset{\cup}{J}} \omega(L^{-1}{}'x).$$

Envisageons la transformation infinitésimale provenant du développement de $e^{\lambda \overset{\cup}{J}} \omega(L^{-1}{}'x)$:

$$\begin{aligned} {}'\omega('x) &= \{(1 + \delta\lambda^\mu(-{}'\partial_\mu) + \frac{1}{2}\delta\omega^{\mu\nu}({}'x_\mu{}'\partial_\nu - {}'x_\nu{}'\partial_\mu) + \overset{\cup}{J}\,\delta\lambda)\}\omega('x) \\ &= O^{-1}\,{}'\omega('x)\, O \\ &= \{(1 - \delta\lambda^\mu(-\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{\Pi}_\mu) - \frac{1}{2}\delta\omega^{\mu\nu}(-\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{M}_{\mu\nu})\}\,\omega('x) \\ &\quad \times \{(I + \delta\lambda^\mu(-\overset{\cup}{J}\,\overset{\cup}{\Pi}_\mu) + \frac{1}{2}\delta\omega^{\mu\nu}(\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{M}_{\mu\nu})\}, \end{aligned}$$

où nous constatons qu'il est nécessaire que $\delta\lambda = 0$, donc la phase ne peut apparaitre que pour des transformations discrètes.

Par identification des coefficients de $\delta\lambda^\mu$ et $\delta\omega^{\mu\nu}$, on trouve les mêmes relations que pour un scalaire puisque pour les transformations infinitésimales, les ω se comportent comme des scalaires (bien qu'ils ne soient pas des observables) :

$$\begin{aligned} [\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{\Pi}_\mu, \omega(x)] &= -\omega_\mu(x) \\ [\overset{\cup}{J}\,\overset{\cup}{M}_{\mu\nu}, \omega(x)] &= -(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\,\omega(x) \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Ces relations restent valables pour le champ antilinéaire.

La première de ces égalités s'écrit explicitement :

$$\begin{aligned} [\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{\Pi}_\mu, \omega('y)] = \int_{\tau(y)=0} & d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha(y)\Big\{\alpha_1\big[\overset{\cup}{J}(\omega^{T\alpha}\omega_\mu)(y), \omega('y)\big] + \alpha_2\big[\overset{\cup}{J}(\omega^\alpha\omega^T_\mu)(y), \omega('y)\big] \\ & + \alpha_1\big[\overset{\cup}{J}(\omega^\alpha\omega^T_\mu)(y), \omega('y)\big] + \alpha_2\big[\overset{\cup}{J}(\omega_\mu\omega^{T\alpha})(y), \omega('y)\big]\Big\} \\ & - \int_{\tau(y)=0} d\overset{\cup}{\sigma}_\mu\Big\{\alpha_1\big[\overset{\cup}{J}(\omega^{T\rho}\omega_\rho)(y), \omega('y)\big] + \alpha_2\big[\overset{\cup}{J}(\omega_\rho\omega^{T\rho})(y), \omega('y)\big]\Big\} \\ & - M^2\int_{\tau(y)=0} d\overset{\cup}{\sigma}_\mu\Big\{\alpha_1\big[\overset{\cup}{J}(\omega^T\omega)(y), \omega('y)\big] + \alpha_2\big[\overset{\cup}{J}(\omega\omega^T)(y), \omega('y)\big]\Big\} \\ \equiv -\omega_\mu('y). \end{aligned}$$

Nous choisissons $\tau(y) = \tau(y') = 0$, c'est-à-dire y et y' sont des événements sur la même hypersurface temporelle du genre temps $\overset{\cup}{\nu}{}^{\alpha}(y)$ $(d\overset{\cup}{\sigma}{}^{\alpha}(y) = \overset{\cup}{\nu}{}^{\alpha} d\sigma(y)\,;$ $(\overset{\cup}{\nu}{}^{\alpha}\,\overset{\cup}{\nu}_{\alpha})(y) = \operatorname{sign}(g^{44}))$. On remarque que ω et ω_μ sont linéairement indépendants. La dernière intégrale, proportionnelle à M^2, ne contient pas de ω_μ et doit donc s'annuler : cela conduit à

$$\alpha_1[\overset{\cup}{J}(\omega^T\omega)(y), \omega({}'y)] + \alpha_2[\overset{\cup}{J}(\omega\omega^T)(y), \omega({}'y)] = 0. \tag{I}$$

Pour satisfaire l'équation, on pose pour la somme du premier et du dernier terme sous la première intégrale :

$$-\alpha_1[\overset{\cup}{J}(\omega^{T\alpha}\omega_\mu)(y), \omega({}'y)] - \alpha_2[\overset{\cup}{J}(\omega_\mu\omega^{T\alpha})(y), \omega({}'y)] = \overset{\cup}{\delta}{}^{\alpha}(y, {}'y)\,\omega_\mu(y). \tag{II}$$

Le dernier symbole, $\overset{\cup}{\delta}{}^{\alpha}(y, {}'y)$, est une généralisation de la distribution de Dirac sur la surface $\tau(y) = 0$:

$$\overset{\cup}{\delta}{}^{\alpha}(y, {}'y) = \overset{\cup}{\delta}{}^{\alpha}({}'y, y) \quad \text{et} \quad \int d\overset{\cup}{\sigma}_{\alpha}(y)\,\overset{\cup}{\delta}{}^{\alpha}(y, {}'y) f(y) = f({}'y).$$

Cette relation peut être généralisée pour des indices μ et α en

$$\int d\overset{\cup}{\sigma}_{\mu}\overset{\cup}{\delta}_{\alpha}(y, {}'y) f(y) = \operatorname{sign}(g^{44})(\overset{\cup}{\nu}_{\mu}\overset{\cup}{\nu}_{\alpha})(y') f(y').$$

On vérifie alors que les termes restants se compensent exactement (deuxième et troisième termes sous la première intégrale et termes de la deuxième intégrale). Les égalités trouvées ci-cessus, (I) et (II), sont des conditions nécessaires pour avoir $[\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{\Pi}_{\mu}, \omega(x)] = -\omega_\mu(x)$. Nous pouvons intégrer ces deux conditions en utilisant le *nombre invariant pseudo-chrone* défini par

$$\begin{aligned}
&\overset{\cup}{D}(x, y) = \overset{\cup}{D}(x - y) = -\,\overset{\cup}{D}(y, x)\\
&(\Box_x - M^2)\,\overset{\cup}{D}(x, y) = 0\\
&\overset{\cup}{D}(y, {}'y) = 0 \qquad \partial_y^{\nu}\,\overset{\cup}{D}(y, {}'y) = -\,\overset{\cup}{\delta}_{\alpha}(y, {}'y)
\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

lorsque les points y et ${}'y$ sont sur la surface $\tau(y) = 0$. Pour trois points différents x, y et z nous posons la relation trilinéaire

$$\alpha_1[\overset{\cup}{J}\omega^T(x)\omega(z), \omega(y)] + \alpha_2[\overset{\cup}{J}\omega(z)\omega^T(x), \omega(y)] = \overset{\cup}{D}(x, y)\omega(z).$$

A partir de la définition (4.2.2), on s'assure que les conditions (I) et (II) sont satisfaites.

Un calcul quelque peu laborieux montre que cette dernière égalité est une condition suffisante pour avoir

$$[\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{M}_{\mu\nu}, \omega(x)] = -[x_\mu, \partial_\nu]\omega(x).$$

Considérons le champ de première espèce. En réécrivant la relation trilinéaire ci-dessus, nous trouvons

$$\begin{aligned}\overset{\cup}{J}\alpha_1\Big\{\omega^T(x)[\omega(z),\omega(y)]_{\mp} \pm [\omega^T(x),\omega(y)]_{\mp}\omega(z)\Big\}\\ + \overset{\cup}{J}\alpha_2\Big\{\omega(z),[\omega^T(x),\omega(y)]_{\mp} \pm [\omega(z),\omega(y)]_{\mp}\omega(x)\Big\} = \overset{\cup}{D}(x,y)\omega(z).\end{aligned}$$

La solution la plus simple est

$$[\omega(x),\omega(y)]_{\mp} = 0 \tag{4.2.3}$$

et l'équation s'écrit alors

$$\overset{\cup}{J}[\omega^T(x),\omega(y)]_{\mp} = \overset{\cup}{D}(x,y)$$

si l'on choisit α_1 et α_2 satisfaisant à la condition

$$\pm\alpha_1 + \alpha_2 = 1. \tag{4.2.4}$$

Il sera plus simple d'écrire la relation précédente sous la forme usuelle

$$\overset{\cup}{J}[\omega(x),\omega^T(y)]_{\mp} = \pm\overset{\cup}{D}(x,y), \tag{4.2.5}$$

qui est la règle de commutation (ou anticommutation) du champ avec son transposé.

4.3 L'opérateur de charge Q

La transformation de phase $'\omega(x) = e^{\lambda\overset{\cup}{J}Q}\omega(x)$ laisse invariantes les observables.

Cherchons un opérateur orthogonal $O(\lambda^{\cdot})$ dans RHS qui effectue cette transformation. Il lui correspondra la transformation identique de $\{L\}$ puisqu'il laisse invariant les observables.

Posons

$$O(\lambda) = e^{\overset{\cup}{J}\lambda Q}.$$

La condition que $O(\lambda)$ soit l'opérateur cherché sera donnée si l'on considère λ infiniment petit :

$$O(\lambda) = e^{\overset{\cup}{J}\lambda Q}\omega(x) = (I + \overset{\cup}{J}\lambda Q + \ldots)$$

et donc

$$\begin{aligned}'\omega(x) &= O^{-1}(\lambda)\,\omega(x)\,O(\lambda) = (I - \overset{\cup}{J}\lambda Q + \ldots)\,\omega(x)\,(I + \overset{\cup}{J}\lambda Q + \ldots)\\ &= \omega(x) - \overset{\cup}{J}\lambda[Q,\omega].\end{aligned}$$

Il faut donc que $Q = Q^T$, $[\overset{\cup}{J}, Q] = 0$ et surtout :

$$-[\overset{\cup}{J} Q, \omega] = \overset{\cup}{J}\, \omega.$$

Construisons cet opérateur appelé *charge*. On définit dans le cas linéaire, les observables

$$\begin{aligned} \overset{\cup}{\jmath}{}^{\alpha(1)} &= \overset{\cup}{J}{}^{-1}(\omega^T \omega^\alpha - \omega^{T\alpha}\omega)(x) \\ \overset{\cup}{\jmath}{}^{\alpha(2)} &= \overset{\cup}{J}{}^{-1}(\omega\omega^{T\alpha} - \omega^\alpha \omega^T)(x). \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Vérifions que $\overset{\cup}{\jmath}{}^{\alpha(1)}$ satisfont à l'équation de continuité

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \overset{\cup}{\jmath}{}^{\alpha(1)} &= \overset{\cup}{J}{}^{-1}(\omega^T_\alpha \omega^\alpha + \omega^T \Box\, \omega - \Box\, \omega^T \omega - \omega^{T\alpha}\omega_\alpha) \\ &= \overset{\cup}{J}{}^{-1}(\omega^T\omega - \omega^T\omega) = 0 \end{aligned}$$

car $\Box\, \omega^T = M^2 \omega^T$. Nous avons la même vérification pour $\overset{\cup}{\jmath}{}^{\alpha(2)}$.

Définissons maintenant le vecteur *densité de charge*

$$\overset{\cup}{\jmath}{}^{\alpha}(x) = \beta_1\, \overset{\cup}{\jmath}{}^{\alpha(1)}(x) + \beta_2\, \overset{\cup}{\jmath}{}^{\alpha(2)}(x)$$

satisfaisant à

$$\partial_\alpha \overset{\cup}{\jmath}{}^{\alpha}(x) = 0.$$

Ce vecteur permet de définir le scalaire indépendant de $\tau(y) = 0$

$$Q = \int_{\tau(y)=0} d\, \overset{\cup}{\sigma}_\alpha(y)\, \overset{\cup}{\jmath}{}^{\alpha}(y) = \beta_1 Q^{(1)} + \beta_2 Q^{(2)}. \tag{4.3.2}$$

Cherchons la condition à imposer à β_1 et à β_2 pour que $-[\overset{\cup}{J} Q, \omega] = \overset{\cup}{J}\, \omega$. Pour les champs de première espèce, cette condition se réduit à

$$\begin{aligned} -[Q, \omega(y')] = \int_{\tau(y)=0} & d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha(y) \{\beta_1[(\omega^T\omega^\alpha)(y), \omega(y')] - \beta_2[(\omega^\alpha\omega^T)(y), \omega(y')] \\ & - \beta_1[(\omega^{T\alpha}\omega)(y), \omega(y')] + \beta_2[(\omega\omega^{T\alpha})(y), \omega(y')] \\ = \int_{\tau(y)=0} & d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha(y)\, \overset{\cup}{\delta}{}^{\alpha}(y, y')\, \omega(y) = \omega(y'). \end{aligned}$$

En se reportant aux calculs de la section précédente, on voit que les deux premiers termes ne contribuent pas si $\beta_1 = \lambda\alpha_1$ et $\beta_2 = -\lambda\alpha_2$, tandis que les seconds termes donnent lieu à l'intégrale du second membre si

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = -\alpha_2.$$

En résumé, pour le cas linéaire, nous avons

$$\begin{aligned} \theta^{\alpha\beta} &= \alpha_1 \theta^{\alpha\beta(1)} + \alpha_2 \theta^{\alpha\beta(2)} \\ \overset{\cup}{\jmath}{}^{\alpha} &= \alpha_1\, \overset{\cup}{\jmath}{}^{\alpha(1)} - \alpha_2\, \overset{\cup}{\jmath}{}^{\alpha(2)}. \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

Les champs linéaires, vérifiant $[\overset{\cup}{J}, \omega]_{-} = 0$, satisfont à la relation de commutation s'il satisfont aux relations

$$\begin{aligned}
&[\omega(x), \omega(y)]_{\mp} = 0\\
&\overset{\cup}{J}[\omega^T(x), \omega(y)]_{\mp} = \overset{\cup}{D}(x,y)\\
&\pm\,\alpha_1 + \alpha_2 = 1.
\end{aligned}$$

L'opérateur Q ainsi défini est le générateur de la transformation de phase pour le champ linéaire.

4.4 Conjugaison de charge et loi de commutation générale

Pour les champs de première espèce, il suit que $O_{(C)}$ définie par

$$\begin{aligned}
{}'\omega(x) &= O^{-1}_{(C)}\,\omega(x)\,O_{(C)} = \omega^T(x),\\
{}'\omega^T(x) &= O^{-1}_{(C)}\,\omega^T(x)\,O_{(C)} = \omega(x)
\end{aligned}$$

est une transformation orthogonale dans RHS. Appliquons la transformation $O_{(C)}$ à la règle d'(anti)-commutation de ω et ω^T sous la forme

$$\overset{\cup}{J}[\omega(x), \omega^T(y)]_{\mp} = \overset{\cup}{D}(x,y).$$

Puisque $\overset{\cup}{D}(x,y) = -D(y,x)$, on constate alors que ces relations ne sont $O_{(C)}$-covariantes que si l'on prend les règles de commutation. On est donc conduit à appliquer la statistique de Bose-Einstein au champ scalaire.

Un calcul simple montre que

$$O^{-1}_{(C)}\,\theta^{\alpha\beta(1)}\,O_{(C)} = \theta^{\alpha\beta(2)} \quad \text{et} \quad O^{-1}_{(C)}\,\theta^{\alpha\beta(2)}\,O_{(C)} = \theta^{\alpha\beta(1)}.$$

Si on choisit $\alpha_1 = \alpha_2$, c'est-à-dire $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$, alors

$$\theta^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\theta^{\alpha\beta(1)} + \theta^{\alpha\beta(2)}) \tag{4.4.1}$$

est invariant par rapport à $O_{(C)}$:

$$O^{-1}_{(C)}\,\theta^{\alpha\beta}\,O_{(C)} = \theta^{\alpha\beta}.$$

Mais, pour la charge, nous avons $\beta_1 = -\beta_2 = 1/2$. Comme

$$O^{-1}_{(C)}\,\overset{\cup}{\jmath}^{\alpha(1)}\,O_{(C)} = \overset{\cup}{\jmath}^{\alpha(2)} \quad \text{et} \quad O^{-1}_{(C)}\,\overset{\cup}{\jmath}^{\alpha(2)}O_{(C)}\,\overset{\cup}{\jmath}^{\alpha(1)},$$

il vient

$$O^{-1}_{(C)}\,\overset{\cup}{\jmath}^{\alpha}(x)\,O_{(C)} = -\,\overset{\cup}{\jmath}^{\alpha}(x) \tag{4.4.2}$$

et

$$\overset{\cup}{\jmath}^{\alpha}(x) = \frac{1}{2}\Big(\overset{\cup}{\jmath}^{\alpha(1)}(x) - \overset{\cup}{\jmath}^{\alpha(2)}(x)\Big).$$

Il y a un changement de signe par l'opération $O_{(C)}$. On a donc, par cette représentation $O_{(C)}$,

$$\begin{aligned} \overset{\cup}{\Pi}_{\mu} &\longrightarrow \overset{\cup}{\Pi}_{\mu} \\ Q &\longrightarrow -Q. \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

On voit que $\overset{\cup}{\jmath}^{\alpha}$ et Q changent de signe sous $O_{(C)}$. Nous pouvons maintenant définir deux types de renversement du temps :

(1) $T \longrightarrow O_{(T)}$, le renversement du temps faible (T) :

$${}'\omega('x) = O_{(T)}^{-1}\,\omega('x)\,O_{(T)} = \omega(T^{-1}{}'x)$$

par rapport auquel $\overset{\cup}{\jmath}^{\alpha}(x)$ est un vecteur pseudo-chrone et Q est un scalaire ;

(2) $T \longrightarrow O_{(C)}\,O_{(T)} \equiv O_{(CT)}$, le renversement du temps fort (CT) :

$${}'\omega('x) = O_{(CT)}^{-1}\,\omega('x)\,O_{(CT)} = \omega^{T}(T^{-1}{}'x)$$

par rapport auquel $j^{\alpha}(x)$ est un (ortho)-vecteur et $\overset{\cup}{Q}$ est un scalaire pseudo-chrone.

4.5 Spectre de Q

On a donc

$$-[Q, \omega(x)] = \omega(x) \quad \text{et} \quad [Q, \omega^{T}(x)] = \omega^{T}(x)$$

d'où

$$Q\omega(x) = \omega(x)(Q-1) \quad \text{et} \quad Q\omega^{T}(x) = \omega^{T}(x)(Q+1).$$

Soient $\psi', \psi'', \ldots$ les vecteurs propres de Q avec les valeurs propres $Q', Q'', \ldots$, c'est-à-dire

$$Q\psi' = \psi' Q'.$$

Avec un vecteur propre, par exemple ψ', formons le vecteur (non normalisé)

$$\omega(x_0)\psi' \equiv \phi'_{-}(x_0)$$

où x_0 désigne un point donné ; il vient alors

$$Q\phi'_{-}(x_0) = Q\omega(x_0)\psi' = \omega(x_0)(Q-1)\psi' = \phi'_{-}(x_0)(Q'-1).$$

Donc

$\phi'_{-}(x_0) = \omega(x_0)\psi'$ est vecteur propre de Q avec la valeur propre $Q' - 1 = Q''$

et de même

$$\phi'_+(x_0) = \omega^T(x_0)\psi' \text{ est vecteur propre de } Q \text{ avec la valeur propre } Q'' = Q' + 1.$$

Donc étant donné que Q et $Q' = O_C^{-1}\, Q\, O_C = -Q$ ont le même spectre on a le résultat que

$$Q', Q'', \ldots = -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{ou (et)} \qquad = \ldots -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$$

4.6 Spectre de $\overset{\cup}{\Pi}_\mu$

On a

$$-\overset{\cup}{J}[\overset{\cup}{\Pi}_\mu, \omega(x)] = \omega_\mu(x).$$

Considérons la fonction propre ψ' de valeur propre $\overset{\cup}{\Pi}{}'_\mu$

$$\overset{\cup}{\Pi}_\mu\, \psi' = \psi'\, \overset{\cup}{\Pi}{}'_\mu$$

et formons

$$\phi'_+(x) = \omega^T(x)\, \psi'.$$

Remarquons que $\omega^T(x)$ crée une charge $+1$ en x. Alors

$$\overset{\cup}{\Pi}_\mu\, \phi'_+(x) = \omega^T(x)(\overset{\cup}{\Pi}_\mu + \overset{\cup}{J}\,\partial_\mu\cdot)\psi',$$

où la notation $\partial_\mu\cdot$ avec un point à droite signifie que ∂_μ opère à gauche (voir section suivante). Remarquons encore qu'avec l'opérateur de phase

$$u'^T(x) = a' e^{-\overset{\cup}{J}(\overset{\cup}{k},\overset{\cup}{x})},$$

il vient

$$\overset{\cup}{J}\,\partial_\mu u'^T(x) = \overset{\cup}{k}_\mu u'^T(x)$$

et alors, en prenant dans la décomposition de Fourier de $\omega^T(x)$ le terme de phase $u'^T(x)$, on a

$$\overset{\cup}{\Pi}_\mu\ \phi'(x) = u'^T(x)(\overset{\cup}{\Pi}_\mu + \overset{\cup}{k}_\mu)\psi' = u'^T\psi'(\overset{\cup}{\Pi}{}'_\mu + \overset{\cup}{k}_\mu) = \phi'(x)(\overset{\cup}{\Pi}{}'_\mu + \overset{\cup}{k}_\mu).$$

Donc si $\overset{\cup}{\Pi}{}'_\mu$ fait partie du spectre, alors

$$\ldots, \overset{\cup}{\Pi}{}'_\mu - \overset{\cup}{k}_\mu, \overset{\cup}{\Pi}{}'_\mu, \overset{\cup}{\Pi}{}'_\mu + \overset{\cup}{k}_\mu, \overset{\cup}{\Pi}{}'_\mu + 2\,\overset{\cup}{k}_\mu, \ldots$$

font aussi partie du spectre.

On a donc

$$\begin{aligned}
&\partial^\alpha u'(x) \simeq \overset{\cup}{J}\overset{\cup}{k}{}^\alpha u'(x)\\
&\overset{\cup}{k}_\alpha \overset{\cup}{k}{}^\alpha + M^2 = 0\\
&\overset{\cup}{k}{}^4 = \sqrt{M^2 + |\vec{k}|^2} = M + \frac{1}{2M}|\vec{k}|^2 + \dots\\
&\overset{\cup}{k}{}^4 \geq |M|.
\end{aligned}$$

4.7 Développement en paquets d'ondes

Nous introduisons un opérateur positif

$$\Omega(\vec{x})f(\vec{x}) = \sqrt{M^2 - \Delta}f(\vec{x})$$

ainsi défini : si $f(x)$ est la fonction

$$f(x) = \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} f(\vec{k}),$$

alors

$$\Omega(\vec{x})f(\vec{x}) = \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}(M^2 + |\vec{k}|^2)^{1/2} f(\vec{k}).$$

De la même manière, nous définissons

$$\Omega^{1/2} \to (M^2 - \Delta)^{1/4}.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}
\int dV(\vec{x})g(\vec{x}) \cdot \Omega(\vec{x})f(\vec{x}) &= \int dV(\vec{x})g(\vec{x})\Omega(\vec{x}) \cdot f(\vec{x})\\
&= \int dV(\vec{x})\big(\Omega^{1/2}(\vec{x})\big(\Omega^{1/2}f(\vec{x})\big),
\end{aligned}$$

donc

$$\int dV(\vec{x})f(\vec{x}) \cdot \Omega f(\vec{x}) \geq 0.$$

Les opérateurs $\cdot\partial^\alpha$ et $\cdot\Omega$ (avec des points sur la gauche) opèrent dans le sens usuel à la droite. Les opérateurs $\partial^\alpha\cdot$ et $\Omega\cdot$ (avec des points à la droite) opèrent à la gauche. On introduit un ensemble de fonctions $\{u',\, u'', \dots\}$ satisfaisant à

$$\partial^4 u'(x) = -\partial_t u'(\vec{x}, t) = \overset{\cup}{J}\,\Omega\, u'(\vec{x}, t).$$

Ces fonctions sont appellées *ondes de fréquences positives* Ces ensembles sont normalisés en termes d'« éléments de matrices » :

$$\frac{1}{2}\overset{\cup}{J}{}^{-1}\int_{\tau(y)=0} d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha\ (y)(u''\cdot\partial^\alpha u' - u''\partial^\alpha\cdot u') \equiv Q(u'', u')$$

et, en formant la même expression avec u''^T, on voit que

$$Q(u''^T, u') = -Q(u', u''^T).$$

On a alors

$$\begin{aligned} Q(u'', u') &= \frac{1}{2}\int dV(\vec{x})(u'' \cdot \Omega u' - u''\Omega \cdot u')) = 0 \\ Q(u''^T, u') &= \frac{1}{2}\int dV(\vec{x})(u''^T \cdot \Omega u' - u''^T\Omega \cdot u') = \int dV(\Omega^{1/2}u'')(\Omega^{1/2}u')(\vec{x}) \geq 0. \end{aligned}$$

Ceci permet de fixer la normalisation de ondes de telle sorte que

$$\begin{aligned} &Q(u'', u') = 0 \\ &Q(u''^T, u') = -Q(u', u''^T) = \delta_{u'u''}. \end{aligned}$$

Si le système est *complet*, on définit la fonction D^+ pour les ondes à fréquences positives

$$\mathop{\mathsf{S}}_{u'} u'(x)u'^T(y) \equiv D^+(x,y) = D^+(x-y)$$

et la fonction D^- pour les ondes à fréquences négatives

$$\mathop{\mathsf{S}}_{u'} u'^T(x)u'(y) = D^-(x,y) = D^-(y-x) = (D^+(x,y)^T.$$

Soit

$$f^+(x) = \mathop{\mathsf{S}}_{u'} u'(x) f^+_{u'}$$

une solution correspondant à une supperposition d'ondes à fréquences positives. Alors on a l'identité

$$f^+(x) = \frac{1}{2}\,\overset{\cup}{J}{}^{-1}\int_{\tau(y)=0} d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha(y) D^+(x,y)(\cdot\partial^\alpha_y - \partial^\alpha_y\cdot) f^+(y)$$

car, en vertu des relations précéentes,

$$f^+(x) = \mathop{\mathsf{S}}_{u''}\mathop{\mathsf{S}}_{u'} u''(x)\underbrace{\frac{1}{2}\,\overset{\cup}{J}{}^{-1}\int_{\tau(y)=0} d\overset{\cup}{\sigma}(y)\big(u''^T(y)(\cdot\partial^\alpha_y - \partial^\alpha_y\cdot)u'(y)\big)}_{\delta_{u''u'}} f^+_{u'} = \mathop{\mathsf{S}}_{u'} u'(x) f^+_{u'}.$$

Il en va de même pour

$$f^-(x) = -\frac{1}{2}\,\overset{\cup}{J}{}^{-1}\int_{\tau(y)=0} d\overset{\cup}{\sigma}(y) D^-(x,y)(\cdot\partial^\alpha_y - \partial^\alpha_y\cdot) f^-(y).$$

La *solution générale* de l'équation d'onde peut s'écrire comme une superposition d'ondes à fréquences positives et négatives

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\mathop{\mathsf{S}}_{u'} u'(x)a_{u'} + \mathop{\mathsf{S}}_{v'} v'^T(x) b_{v'}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\,\overset{\cup}{J}{}^{-1}\int_{\tau(y)=0} d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha(y)(D^+(x,y) - D^-(x,y))(\cdot\partial^\alpha_y - \partial^\alpha_y\cdot)\,\omega(y) \\ &= \int_{\tau(y)=0} d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha(y) D^0(x,y)(\cdot\partial^\alpha_y - \partial^\alpha_y\cdot)\,\omega(y). \end{aligned}$$

On a posé

$$D^0(x,y) = \frac{1}{2}\overset{\cup}{J}(D^+ - D^-)(x,y) = D^{0T}(x,y) = -D^0(y,x).$$

Vu que $\partial_y^\alpha D(x,y) = -\partial_x^\alpha D(x,y)$, on peut encore écrire

$$\omega(x) = \int_{\tau(y)=0} d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha(y)\left(-\partial_x^\alpha D^0(x,y)\,\omega(y) - D^0(x,y)\,\omega^\alpha(y)\right).$$

Cela signifie que le champ en x est entièrement déterminé par la connaissance du champ et de ses dérivées sur la surface temporelle « initiale », (à condition que x soit à l'intérieur des cônes de lumière de tous les points de cette surface, cela à cause du principe de causalité).

La solution est engendrée localement par les valeurs initiales du champ $\omega(y)$ et de sa dérivée $\omega^\alpha(y)$. Comme $\omega(y)$ et $\omega^\alpha(y)$ sont linéairement indépendants, on est amené à conclure que

$$\begin{aligned}(\Box - M^2)D^0(x,y) &= 0\\ D^0(x,y) &= -D^0(y,x)\end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned}-\partial_y^\alpha D^0(y,y') &= \delta^\alpha(y,y')\\ D^0(y,y') &= 0\end{aligned}$$

lorsque y et y' sont sur la surface $\tau(y) = 0$.

On constate que ces relations sont les mêmes que celles qui définissaient $\overset{\cup}{D}(x,y)$, cf. (4.2.2) et on peut donc faire l'identification

$$D^0(x,y) = \overset{\cup}{D}(x,y).$$

4.8 Quantification explicite

On considère le champ linéaire et on montre que les règles d'anticommutation conduisent à une contradiction. En effet :

$$(\overset{\cup}{J}[\omega^T(x),\omega(y)]_+)^T = \overset{\cup}{D}(x,y) = -\overset{\cup}{J}[\omega(x),\omega^T(y)]_+ = -\overset{\cup}{D}(x,y),$$

donc $\omega(x) = 0$. Il y a donc seulement le cas des règles de commutation à considérer :

$$\begin{aligned}[\omega(x),\omega(y)]_- &= 0\\ \overset{\cup}{J}[\omega^T(x),\omega(y)]_- &= \overset{\cup}{D}(x,y).\end{aligned}$$

Reprenons l'argument à l'aide du développement du champ que nous venons d'obtenir

$$\omega(y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\mathsf{S}_{u''}\, u''(y)\; a_{u''} + \mathsf{S}_{v''}\, v''^T(y)\; b^T_{v''}\Big)$$
$$\omega^T(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\mathsf{S}_{u'}\, u'^T(x)\; a^T_{u'} + \mathsf{S}_{v'}\, v'(x)\; b_{v'}\Big).$$

Explicitons la condition :

$$\overset{\cup}{J}\,[\omega^T(x), \omega(y)]_{\mp} = \overset{\cup}{D}\,(x, y).$$

$$\begin{aligned}\overset{\cup}{J}\,[\omega^T(x), \omega(y)]_{\mp} &= \frac{\overset{\cup}{J}}{2}\Big\{\mathsf{S}_{u'}\mathsf{S}_{u''}\, u'^T(x)u''(y)\,[a^T_{u'}, a_{u''}]_{\mp} + \mathsf{S}_{v'}\mathsf{S}_{v''}\, v'(x)v''^T(y)\,[b_{v'}, b^T_{v''}]_{\mp}\\ &\quad + \mathsf{S}_{u'}\mathsf{S}_{v''}\, u'^T(x)v''^T(y)\,[a^T_{u'}, b^T_{v''}]_{\mp} + \mathsf{S}_{u''}\mathsf{S}_{v'}\, u''(x)v'(y)\,[a_{u''}, b_{v'}]_{\mp}\Big\}\\ &= \frac{\overset{\cup}{J}}{2}\Big\{\mathsf{S}_{v'}\, v'(x)v'^T(y) - \mathsf{S}_{u'}\, u'^T(x)u'(y)\Big\}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}[b_{v'}, b^T_{v''}]_{\mp} &= \delta_{v'\,v''}\\ [a^T_{u'}, a_{u'}]_{\mp} &= -\delta_{u'\,u'}\\ [a_{u'}, b_{v'}]_{\mp} &= 0.\end{aligned} \tag{4.8.1}$$

La condition $[\omega(x), \omega(y)]_- = 0$ nous apporte en outre

$$\begin{aligned}[a_{u'}, a_{u'}] &= 0\\ [b_{v'}, b_{v''}] &= 0\\ [a_{u'}, b^T_{v''}] &= 0.\end{aligned} \tag{4.8.2}$$

Comme $a_{u'}a^T_{u'}$ et $a^T_{u'}a_{u'}$ sont des opérateurs positifs, la relation d'anticommutation $a^T_{u'}a_{u'} + a_{u'}a^T_{u'} = -1$ est impossible.

C'est l'argument de Pauli pour éliminer les relations d'anti-commutation et la statistique de Fermi-Dirac pour les champs scalaires.

La théorie des champs scalaires décrit donc les bosons à spin zéro comme les mésons π.

Les relations de commutation peuvent être satisfaite en termes des opérateurs de création (a^T) et d'annihilation (a) :

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots\\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad a^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & \dots\\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$N = a^T\, a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots\\ 0 & 1 & 0 & \dots\\ 0 & 0 & 2 & \dots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad [a, a^T] = 1_\infty \quad a\, a^T = N + 1_\infty,$$

avec $J = j \times 1_\infty$, on a $A = 1 \times A_r + j \times A_i$. On définit alors :

$$a_u(\rho) = a_{(\rho)} = 1_2 \times (1_\infty \times 1_\infty) \times \ldots \times (a \times 1_\infty) \times (1_\infty \times 1_\infty \times \ldots$$
$$b_v(\rho) = b_{(\rho)} = 1_2 \times (1_\infty \times 1_\infty) \times \ldots \times (1_\infty \times a) \times (1_\infty \times 1_\infty) \times \ldots$$

Les valeurs propres de $N_{u'} = a^T_{u'}\, a_{u'}$ sont les entiers non négatifs. Dans cette représentation nous avons les bonnes relations de commutation.

Calculons la charge et l'énergie en termes de ces opérateurs :

$$N_{(\rho)} = a^T_{(\rho)}\, a_{(\rho)} = 1_2 \times (1_\infty \times 1_\infty) \times \ldots \times \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 2 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \times 1_\infty \right) \times (1_\infty \times 1_\infty) \times \ldots$$

a ses valeurs propres entières. Reprenons les « éléments de matrice » $Q(u'', u')$ et $Q(u''^T, u')$

$$Q(u'', u') = \frac{1}{2} \overset{\cup}{J}{}^{-1} \int d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha (u''(\cdot\partial^\alpha - \partial^\alpha \cdot)u') = 0$$
$$Q(u''^T, u') = -Q(u', u''^T) = \delta_{u''u'}.$$

obtenus après normalisation des paquets d'onde. En reprenant l'expression de la charge (4.3.2) et celle du courant (4.3.3), on est conduit au développement

$$\begin{aligned} Q^{(1)} = {} & \frac{1}{2} \mathop{\mathsf{S}}_{u''} \mathop{\mathsf{S}}_{u'} \overset{\cup}{J}{}^{-1} \int d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha(y)(u''^T(\cdot\partial^\alpha - \partial^\alpha \cdot)u') a^T_{u''} a_{u'} \\ & + \frac{1}{2} \mathop{\mathsf{S}}_{v''} \mathop{\mathsf{S}}_{v'} \overset{\cup}{J}{}^{-1} \int d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha(y)(v''(\cdot\partial^\alpha - \partial^\alpha \cdot)v'^T) b_{v''} b^T_{v'} \\ & + \frac{1}{2} \mathop{\mathsf{S}}_{u''} \mathop{\mathsf{S}}_{v'} \overset{\cup}{J}{}^{-1} \int d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha(y)(u''^T(\cdot\partial^\alpha - \partial^\alpha \cdot)v'^T) a^T_{u''} b^T_{v'} \\ & + \frac{1}{2} \mathop{\mathsf{S}}_{v''} \mathop{\mathsf{S}}_{u'} \overset{\cup}{J}{}^{-1} \int d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha(y)(v''(\cdot\partial^\alpha - \partial^\alpha \cdot)u') b_{v''} a_{u'}. \end{aligned}$$

Les deux dernières intégrales tombent parce qu'elles sont relatives à des paquets d'onde dont la fréquence est de même signe. Il reste, si l'on remplace $Q(u''^T, u')$ et $Q(v'', v'^T)$ par leur valeur,

$$Q^{(1)} = \mathop{\mathsf{S}}_{u'} N_{u'} - \mathop{\mathsf{S}}_{v'} \Big(N_{v'} + 1 \Big).$$

De même :

$$Q^{(2)} = \mathop{\mathsf{S}}_{v'} N_{v'} - \mathop{\mathsf{S}}_{u'} \Big(N_{u'} + 1 \Big).$$

Puisque $Q = (1/2)(Q^{(1)} - Q^{(2)})$ (car $\beta_1 = -\beta_2 = 1/2$),

$$Q = \mathop{\mathsf{S}}_{u'} N_{u'} - \mathop{\mathsf{S}}_{v'} N_{v'}. \tag{4.8.3}$$

Donc Q a les valeurs propres

$$\{\ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots\}$$

et on obtient ainsi la quantification de la charge. Remarquons que

$$Q\psi_0 = 0 \quad \text{existe.}$$

Pour quantifier explicitement $\overset{\cup}{\Pi}_\mu$, un ensemble satisfaisant à

$$\begin{aligned}
&\partial^\alpha u'(x) \simeq \overset{\cup}{J}\,\overset{\cup}{k}{}^\alpha u'(x)\\
&\overset{\cup}{k}_\alpha \overset{\cup}{k}{}^\alpha + M^2 = 0\\
&\overset{\cup}{k}{}^4 = \sqrt{M^2 + |\vec{k}|^2} = M + \frac{1}{2M}|\vec{k}|^2 + \ldots\\
&\overset{\cup}{k}{}^4 \geq |M|
\end{aligned}$$

doit être choisi tout en gardant la dénombrabilité, ce qui pose un problème. On avait :

$$\theta^{\alpha\beta(1)} = \omega^{\alpha T}\omega^\beta + \omega^{\beta T}\omega^\alpha - g^{\alpha\beta}(\omega^T_\rho\omega^\rho + M^2\omega^T\omega).$$

Prenons : $d\,\overset{\cup}{\sigma}_\alpha = (0, 0, 0, dV)$, il vient alors

$$\overset{\cup}{\Pi}{}^{i(1)} = \int d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha\,(\omega^{T\alpha}\omega^i + \omega^{iT}\omega^\alpha) = \int d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha\,(\omega^{T\alpha}\omega^i - \omega^T\omega^{\alpha i}).$$

Montrons que cette équation est encore valable pour $\overset{\cup}{\Pi}{}^{4(1)}$:

$$\overset{\cup}{\Pi}{}^{4(1)} = \int d\overset{\cup}{\sigma}_4\,(\omega^{T4}\omega^4 + \omega^T_i\omega^i + M^2\omega^T\omega) = \int dV(\omega^{T4}\omega^4 + \omega^T(M^2 - \Delta)\omega).$$

Or $(\Delta - M^2)\omega(x) = \omega^{44}$ car $(\Box - M^2)\omega = 0$, donc

$$\overset{\cup}{\Pi}{}^{4(1)} = \int dV(\omega^{T4}\omega^4 - \omega^T\omega^{44}) = \int d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha\,(\omega^{\alpha T}\omega^4 - \omega^T\omega^{\alpha 4})$$

et donc

$$\overset{\cup}{\Pi}{}^{\mu(1)} = \int d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha\,(\omega^{\alpha T}\omega^\mu - \omega^T\omega^{\alpha\mu}). \tag{4.6.4}$$

Avec $\partial^\mu u'(x) \simeq \overset{\cup}{J}\overset{\cup}{k}{}^\mu u'(x)$, il vient alors les développements en fréquences positives et négatives

$$\begin{aligned}
\overset{\cup}{\Pi}{}^{\mu(1)} = {} & \mathop{\mathsf{S}}_{u''}\mathop{\mathsf{S}}_{u'}\frac{1}{2}\,\overset{\cup}{J}{}^{-1}\int d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha\,(u''^T(\cdot\partial^\alpha - \partial^\alpha\cdot)u')\,\overset{\cup}{k}{}^\mu a^T_{u''}a_{u'}\\
& - \mathop{\mathsf{S}}_{v'}\mathop{\mathsf{S}}_{v''}\frac{1}{2}\,\overset{\cup}{J}{}^{-1}\int d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha\,(v''(\cdot\partial^\alpha - \partial^\alpha\cdot)v'^T)\,\overset{\cup}{k}{}^\mu b_{v''}b^T_{v'}\\
& + \underbrace{\mathop{\mathsf{S}}_{u''}\mathop{\mathsf{S}}_{v'}\ldots - \mathop{\mathsf{S}}_{u'}\mathop{\mathsf{S}}_{v''}\ldots}_{=0 \text{ car même signe à la fréquence}}
\end{aligned}$$

et, de la même façon que nous avons utilisée pour la charge, nous obtenons

$$\overset{\cup}{\Pi}^{\mu(1)} = \mathsf{S}_{u'} N_{u'} \overset{\cup}{k}^{\mu} + \mathsf{S}_{v'} (N_{v'} + 1) \overset{\cup}{k}^{\mu}$$

$$\overset{\cup}{\Pi}^{\mu(2)} = \mathsf{S}_{u'} (N_{u'} + 1) \overset{\cup}{k}^{\mu} + \mathsf{S}_{v'} N_{v'} \overset{\cup}{k}^{\mu}.$$

Il en résulte immédiatement

$$\overset{\cup}{\Pi}^{\mu} = \mathsf{S}_{u'} \Big(N_{u'} + \frac{1}{2}\Big) \overset{\cup}{k}^{\mu} + \mathsf{S}_{v'} \Big(N_{v'} + \frac{1}{2}\Big) \overset{\cup}{k}^{\mu},$$

soit encore en réintroduisant $\hbar$:

$$H = \mathsf{S}_{u'} \Big(N_{u'} + \frac{1}{2}\Big) \hbar\omega + \mathsf{S}_{v'} \Big(N_{v'} + \frac{1}{2}\Big) \hbar\omega$$

$$\vec{\overset{\cup}{\Pi}} = \mathsf{S}_{v'} \Big(N_{v'} + \frac{1}{2}\Big) \hbar \frac{2\pi}{\lambda} \vec{\overset{\cup}{v}} + \mathsf{S}_{u'} \Big(N_{u'} + \frac{1}{2}\Big) \hbar \frac{2\pi}{\lambda} \vec{\overset{\cup}{u}},$$

où l'on remarque que la quantité de mouvement est un multiple de $\hbar \frac{2\pi}{\lambda}$ et que l'énergie transportée par une onde est un multiple de $\hbar\omega = \hbar\sqrt{M^2 + |\vec{k}|^2}$.

Remarques.

1) Dans le cas d'une particule chargée, il n'apparait pas de charge au point zéro à cause de la correspondance biunivoque entre les ensembles $\{u'\}$ et $\{v'\}$.
2) Dans le cas de l'énergie, il apparait une contribution infinie au point zéro. Le vide est défini par $N_\rho = 0$. Remarquons que

$$\psi_0 \equiv \psi_2 \times \Pi_\rho (\psi_{\infty\,0} \times \psi_{\infty\,0})_\rho \text{ avec } \psi_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},\ \alpha^2 + \beta^2 = 1 \text{ et } \psi_{\infty\,0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

On définit donc la *renormalisation* de $\theta^{\alpha\beta}(x)$

$$: \theta^{\alpha\beta}(x) : = \theta^{\alpha\beta}(x) - < \theta^{\alpha\beta}(x) >_{\psi_0}$$

et alors

$$\overset{\cup}{\Pi}_{\mu} = \mathsf{S}_{u'} N_{u'} \overset{\cup}{k}_{\mu} + \mathsf{S}_{v'} N_{v'} \overset{\cup}{k}_{\mu}$$

et

$$\overset{\cup}{\Pi}_{\mu} \psi_0 = 0.$$

3) L'énergie est toujours positive et a une limite inférieure ; la thermostatique avec une température absolue positive peut donc être appliquée.
4) A toute particule ayant une charge correspond une particule identique avec la charge opposée : l'antiparticule. L'expression $\overset{\cup}{\Pi}^{\mu}$ est symétrique pour particule et antiparticule.
5) Nous avons obtenu la statistique de Bose-Einstein par les relations de commutation ce qui donne la forme des opérateurs a.

Chapitre 5

Champ spinoriel quantifié

Présentation

On définit tout d'abord un spineur contravariant et un spineur covariant ainsi qu'un bispineur mixte qui permet d'établir une relation entre les spineurs et les vecteurs de l'espace-temps. Cette section se termine par une liste de résultats sur les α-tenseurs et une représentation du groupe de Poincaré (section 1). L'équation de Dirac est introduite à la section 2 et le spineur fondamental η est étudié à la section 3. La quantification du champ spinoriel est alors entreprise à la section 4. L'opérateur de charge ainsi que la conjuguaison de charge sont introduits aux sections 5 et 6. Le développement du champ spinoriel en paquet d'onde est alors étudié à la section 7 et le chapitre se termine par l'énoncé du théorème de Frobenius et Schur (annexe) qui permet de justifier un certain nombre de résultats sur les représentations réelles d'un groupe.

5.1 L'espace spinoriel ϕ^A

Nous rappelons la loi de transformation des vecteurs de l'espace-temps sous l'action d'une transformation de Lorentz. Elle s'écrit

$$'a'^{\alpha}('x) = L^{'\alpha}_{\alpha} a^{\alpha}(x) \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4 \text{ (espace physique).}$$

1. — Dans l'espace spinoriel ou S-espace, nous avons des « vecteurs » appelés *spineurs contravariants* ϕ^A se transformant par

$$'\phi'^A('x) = S^{'A}_{(L)A}\, \phi^A(x), \qquad A, B = 1, 2, \ldots N \tag{5.1.1}$$

et des *spineurs covariants* se transformant selon

$$'\chi_{'A}('x) = \chi_A(x)\, S^{-1\,A}_{(L)'A} \tag{5.1.2}$$

où les matrices $S'^{A}_{(L)A}$ sont des représentations des matrices L'^{α}_{α}.

2. — Nous avons aussi des bispineurs mixtes notés $\gamma^{\alpha\,A}_{B}$. Ce sont des matrices $\gamma^{\alpha\,A}_{B}$ qui sont reliées aux vecteurs v_α de l'espace-temps par

$$\gamma^{A}_{B}(v) = \gamma^{\alpha\,A}_{B} v_\alpha.$$

et l'on a

$$S^{A}_{(L)C}\,\gamma^{\alpha\,C}_{D}\,S^{-1\,D}_{(L)B} = L^{\alpha}_{\beta}\gamma^{\beta\,A}_{B}.$$

Les matrices $\gamma^{\alpha\,A}_{B}$ vérifient alors les relations

$$\gamma^{\alpha\,A}_{C}\,\gamma^{\beta\,C}_{B} + \gamma^{\beta\,A}_{C}\,\gamma^{\alpha\,C}_{B} = 2g^{\alpha\beta}\gamma^{0A}_{B}, \tag{5.5.3}$$

soit, en notation matricielle,

$$\gamma^\alpha\gamma^\beta + \gamma^\beta\gamma^\alpha \equiv (\gamma^\alpha, \gamma^\beta) = 2g^{\alpha\beta}\,\gamma^0,$$

où $\gamma^{0\,A}_{B} = \delta^{A}_{B}$ est l'opérateur identité. En effet l'invariance de la métrique

$$'g^{'\alpha'\beta} = L'^{\alpha}_{\alpha}\,L'^{\beta}_{\beta}\,g^{\alpha\beta} = g^{'\alpha'\beta}$$

implique

$$'\gamma'^{\alpha'A}_{'B} = L'^{\alpha}_{\alpha}\,S'^{A}_{(L)A}\,\gamma^{\alpha\,A}_{B}\,S^{-1\,B}_{(L)'B} = \gamma'^{\alpha\,'A}_{'B}. \tag{5.1.4}$$

Nous distinguerons entre réel S-espace (RSS) et complexe S-espace (CSS). Le cas général étant (CSS), tous les symboles $\phi^A,\ \chi_A, \ldots$ devront être écrits comme $\hat{\phi}^A,\ \hat{\chi}_A, \ldots$ pour souligner leur caractère complexe. Pour un nombre complexe quelconque :

$$\hat{\rho} = \rho_{(r)} + i\rho_{(i)} \;\rightleftharpoons\; \rho(\overset{\cup}{J}) = \rho_{(r)} + \overset{\cup}{J}\rho_{(i)}$$

donne la relation entre un nombre complexe $\hat{\rho}$ et l'opérateur $\rho = \rho(\overset{\cup}{J})$ qui dépend de $\overset{\cup}{J}$. Le symbole $\overset{\cup}{J}$ désigne un opérateur tel que $\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{J} = -$identité ; dans le cas présent, on a

$$\overset{\cup}{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deux spineurs contragrédients permettent de construire un scalaire $\chi\phi = \chi_A\,\phi^A$ et un vecteur $\chi\,\gamma^\alpha\,\phi = \chi_A\,\gamma^{\alpha\,A}_{B}\,\phi^B$ dans le α-espace.

Si $n = 3$: $\gamma^1 = j,\ \gamma^2 = \ell,\ \gamma^3 = k$. Si $n = 4$, nous avons

$$\begin{aligned} \gamma^1 &= k \times k \\ \gamma^2 &= k \times \ell \\ \gamma^3 &= k \times 1 \\ \gamma^4 &= \jmath \times 1. \end{aligned}$$

La matrice transposée de γ^α est notée $\gamma^{\alpha\,\sim}$ et $\gamma^{\alpha\sim A}_{B} = \gamma^{\alpha B}_{A}$.

Le groupe $L^{+\uparrow}$ est engendré par les transformation infinitésimales :

$$L'^{\alpha}_{\alpha} = \delta'^{\alpha}_{\alpha} + \frac{1}{2}\delta\omega^{\mu\nu}\,\Sigma'^{\alpha}_{\mu\nu\alpha}.$$

On montre qu'il leur correspond :

$$S'^{A}_{(L)A}(\delta\omega^{\cdot\cdot}) = \gamma^{0\,'A}_{A} + \frac{1}{2}\,\delta\omega^{\mu\nu}\sigma'^{A}_{\mu\nu\,A}. \tag{5.1.5}$$

Par les règles de commutation, on peut voir que :

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]_- \quad \text{où } \gamma_\mu = g_{\mu\rho}\gamma^\rho. \tag{5.1.6}$$

et l'on a

$$\mu \neq \nu \;\longrightarrow\; \sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\gamma_\mu\gamma_\nu \equiv \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu} \quad \text{où } \gamma_{\mu\nu} = \gamma_\mu\gamma_\nu.$$

Soit une rotation d'angle ω dans le plan 1 2, alors

$$\begin{aligned} S = e^{(1/2)\omega\gamma^{12}} &= \gamma^0\Big(1 - \frac{1}{2!}\big(\frac{\omega}{2}\big)^2 + \dots\Big) + \gamma^{12}\Big(\frac{\omega}{2} - \frac{1}{3!}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)^3 + \dots\Big) \\ &= \gamma^0\cos\frac{\omega}{2} + \gamma^{12}\sin\frac{\omega}{2}, \end{aligned}$$

puisque $(\gamma^{12})^2 = \gamma^1\gamma^2\gamma^1\gamma^2 = -\gamma^1\gamma^1\gamma^2\gamma^2 = -\gamma^0$. Si $\omega = 2\pi$, $S = -\gamma^0$, c'est-à-dire que si, dans l'espace physique on fait une rotation de 2π, dans l'espace spinoriel à quatre dimensions, le spineur devient son opposé.

Nous résumons sans preuve ni référence, un nombre de théorèmes bien connus :

1) L'anneau Γ engendré par $\{\gamma^r,\ r = 0, \alpha, [\alpha_1,\alpha_2], \dots, [\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n]\}$ est formé des tenseurs du α-espace totalement antisymétrique

$$\begin{aligned} \gamma^{\alpha_1\dots\alpha_\nu} = \gamma^{[\alpha_1\dots\alpha_\nu]} &= (\nu!)^{-1}\sum_P(-1)^P P(\gamma^{\alpha_1}\dots\gamma^{\alpha_\nu}) \\ &= \gamma^{\alpha_1}\dots\gamma^{\alpha_\nu} \text{ si tous les } \alpha_1\dots\alpha_\nu \text{ sont différents.} \end{aligned}$$

Les sous-ensembles $\Gamma^{(\nu)} = \{\gamma^{\alpha_1\dots\alpha_\nu}\}$ contient $\binom{n}{\nu}$ éléments indépendants.

2) Si deux représentations irréductibles de $S_{(L)}$, $'\gamma^\alpha$ et γ^α sont reliées par

$$'\gamma^\alpha\,S_{(L)} = S_{(L)}\,\gamma^\alpha,$$

alors $S_{(L)}$ est ou bien la matrice zéro ou bien une matrice carrée non-singulière. En particulier, pour $n = 2m$ (n pair), toutes les représentations irréductibles sont équivalentes, c'est-à-dire que nous avons :

$$'\gamma^\alpha = S_{(L)}\,\gamma^\alpha\,S^{-1}_{(L)} \;\;;\;\; S_{(L)} = \{S'^{A}_{(L)A}\} \;\;;\;\; 'N = N.$$

Pour $n = 2m+1$, deux représentations non-équivalentes existent. Une matrice S qui commute avec les n matrtices γ^α d'une représentation irréductible est toujours de la forme

$$[S,\gamma^\alpha] = 0 \;\;;\;\; S = \rho\,\gamma^0.$$

De plus si S et S' sont équivalentes, nous avons

$$S' = \rho\,S.$$

3) Pour $n = 2m$, les 2^n éléments de l'anneau Γ engendré par $\{\gamma^r\}$ sont linéairement indépendants.
4) La relation suivante est valable

$$\gamma^r \gamma^s = \epsilon^{rs}\gamma^t \;\; ; \;\; t = t(r,s) \; ; \;\; \epsilon^{rs} = \pm 1.$$

5) Si une représentation irréductible $S_{(L)}$ est trouvée pour $n = 2m$, nous pouvons former

$$\gamma_{n+1} = \rho\,\gamma^{12\ldots n}, \;\; \rho = 1 \text{ ou } \overset{\cup}{J},$$

et ainsi obtenir une représentation irréductible pour $'n = n + 1 = 2m + 1$ car

$$[\gamma_{n+1}, \gamma^\alpha]_+ = 0 \;\; ; \;\; \alpha = 2, 4, \ldots, 2m \;\; ; \;\; (\gamma_{n+1})^2 = \gamma^0.$$

6) Le nombre ξ^r dans

$$\gamma_r\,\gamma^r(\text{sans sommation sur } r) = \xi^r\,\gamma^0 = \xi^{(r)}\,\gamma^0$$

dépend seulement de l'ensemble $\Gamma^{(\nu)}$ et prend les valeurs

$$\xi^{(\nu)} = \begin{cases} (-1)^{\nu/2} & \text{pour } \nu = 2\mu, \\ (-1)^{(\nu-1)/2} & \text{pour } \nu = 2\mu + 1 \end{cases}$$

si $\text{sign}(g^{\alpha\beta}) = +(1\,1\,1\,-1)$.
7) A la transformation infinitésimale

$$L^{\prime\alpha}_{\alpha} = \delta^{\prime\alpha}_{\alpha} + \frac{1}{2}\delta\omega^{\mu\nu}\Sigma^{\prime\alpha}_{\mu\nu\alpha}$$

correspond la transformation

$$S_{(L)} = \gamma^0 + \frac{1}{4}\delta\omega^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu}.$$

8) En ce qui concene les transformations $L(P, T, PT)$, où

$$\begin{aligned} P &\rightarrow \{'x^i = -x^i, 'x^4 = x^4\} \\ T &\rightarrow \{'x^i = x^i, 'x^4 = -x^4\} \\ PT &\rightarrow \{'x^\alpha = -x^\alpha\}, \end{aligned}$$

on a $S_P = c\gamma^n$, $S_P^{-1} = c^{-1}\gamma^n$, $S_T = c\gamma^{12\cdots \mathrm{d}}$ et $S_T^{-1} = c^{-1}\gamma_{\mathrm{d}\cdots 21}$ avec c réel.
Remarque : notre discussion est limitée au cas où $n = 4$.

En plus de ces théorèmes bien connus, nous ajoutons les deux théorèmes qui découlent d'un théorème que nous discutons dans l'annexe.

9) Pour $n = 2m$, le nombre de dimensions d'une représentation irréductible est

$$N = 2^{n/2} = 2^m.$$

10) Pour $n = 2, 4 (\mathrm{mod}\, 8) \ldots = 2, 4, 10, 12, \ldots$ toutes les représentations sont équivalente à une *représentation réelle*. Pour $n = 6, 8 (\mathrm{mod}\, 8) \ldots = 6, 8, 14, 16, \ldots$ toutes les représentations sont *nécessairement complexes*. Toutefois il existe une matrice C telle que

$$\hat{\gamma}^{*r} = C \hat{\gamma}^r C^{-1} \text{ ou } \gamma^{Tr} = C \gamma^r C^{-1}.$$

11) Chaque représentation matricielle irréductible $\{\pm' \hat{\gamma}^r\}$ est équivalente à une représentation unitaire $\{\pm \hat{\gamma}^r\}$. Dans RHS, ceci implique que pour chaque représentation $\{\pm' \gamma^r\}$, il existe un S tel que

$$'\gamma^r = S \gamma^r S^{-1}$$

et l'on a la relation

$$\gamma^{\sim Tr} \equiv \gamma^{\times r} \stackrel{*}{=} (\gamma^r)^{-1} = \xi^r \gamma_r (\text{sans sommation sur } r).$$

12) Pour $n = 2, 4 (\mathrm{mod}\, 8)$,..., où $\{' \hat{\gamma}^r\}$ peut être choisi réelle, la représentation unitaire correspondante peut être choisie réelle et orthogonale :

$$\gamma^{\sim r} \stackrel{*}{=} (\gamma^r)^{-1} = \xi^r \gamma_r (\text{sans sommation sur } r).$$

5.2 Equation de Dirac

L'équation de Dirac s'écrit :

$$\begin{aligned} (\gamma^{\alpha A}_B\, \partial_\alpha + M \gamma^{0A}_B)\, \phi^B(x) = 0 \text{ ou matriciellement } (\gamma^\alpha\, \partial_\alpha + M\gamma^0)\, \phi(x) = 0, \\ \chi_A(x) (\gamma^{\alpha A}_B \partial_\alpha \cdot - M \gamma^{0A}_B) = 0 \text{ ou matriciellement } \chi(x)\, (\gamma^\alpha \partial_\alpha - M\gamma^0) \cdot = 0 \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

En multipliant à gauche la première de ces deux équations par χ_A puis à droite la deuxième par ϕ^A et en faisant la somme, on obtient

$$\big(\chi\, \gamma^\alpha (\cdot \partial_\alpha + \partial_\alpha \cdot) \phi\big)(x) = \partial_\alpha (\chi\, \gamma^\alpha\, \phi)(x) = 0\,,$$

donc $j^\alpha(x) = (\chi\, \gamma^\alpha\, \phi)(x) = \chi_A\, \gamma^{\alpha A}_B\, \phi^B$ obéit à l'équation de continuité $\partial_\alpha j^\alpha(x) = 0$.

En multipliant à gauche par $\gamma^\beta \partial_\beta - M\gamma^0$ la première équation, on obtient l'équation de Klein-Gordon

$$(\Box - M^2)\, \phi^A = 0$$

car $[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]_+ = 2 g^{\alpha\beta} \gamma^0$.

On peut construire le tenseur canonique de quantité de mouvement-énergie à partir de :

$$T^\alpha_\beta = \chi\, \gamma^\alpha \partial_\beta\, \phi \quad \text{ ou } \quad \phi\, \gamma^\alpha \partial_\beta\, \chi,$$

d'où la quantité de mouvement-énergie

$$\overset{\cup}{\Pi}_\mu = \int_{\tau(y)=0} d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha T^\alpha_\mu(y).$$

Pour garantir la symétrie du tenseur quantité de mouvement-énergie, on écrit

$$T^{\alpha}_{\beta} = \frac{1}{2}\chi\,\gamma^{\alpha}(\cdot\partial_{\beta} - \partial_{\beta}\cdot)\,\phi$$

dont la dérivée ∂_α donne zéro, autrement dit :

$$\partial_\alpha T^{\alpha}_{\beta} = 0\,.$$

Nous introduisons la *densité de spin*

$$s^{\alpha\beta\gamma} = s^{[\alpha\beta\gamma]} = \frac{1}{2}\chi\,\gamma^{\alpha\beta\gamma}\,\phi$$

pour laquelle on peut démontrer les deux propriétés :

$$\partial_\alpha s^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\Big(\chi_\alpha\gamma^{\alpha\beta\gamma}\phi + \chi\gamma^{\beta\gamma\alpha}\phi_\alpha\Big) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_{(\beta}\partial_{\alpha)}s^{\alpha\beta\gamma} = 0.$$

Alors nous définissons :

$$\theta^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\partial_\rho s^{\rho\alpha\beta}$$

et formons

$$\overset{\cup}{M}_{ik} = \int_{\tau(y)=0} dV(y^i\theta^{4k} - y^k\theta^{4i}) + \int_{\tau(y)=0} dV\frac{1}{2}(y^i\partial_\rho s^{\rho 4k} - y^k\partial_\rho s^{\rho 4i}).$$

En intégrant par partie, la deuxième intégrale devient le *moment de spin*

$$\overset{\cup}{S}{}^{ik} = \frac{1}{2}\int_{\tau(y)=0} dV(s^{4ik} - s^{4ki}) = \int dV\,s^{4ik}.$$

Ainsi on a bien le moment cinétique total somme du moment cinétique orbital et du moment cinétique de spin :

$$\overset{\cup}{M}_{ik} = \overset{\cup}{L}_{ik} + \overset{\cup}{S}_{ik}\,. \tag{5.2.2}$$

Reprenons l'expression de $\overset{\cup}{\Pi}{}^i$ à partir de T^{α}_{β}. Après une intégration par parties, nous trouvons

$$\overset{\cup}{\Pi}{}^i = \frac{1}{2}\int_{\tau(y)=0} dV(\chi\,\gamma^4\,\phi^i - \chi^i\,\gamma^4\,\phi) = \int dV(\chi\,\gamma^4\,\phi^i) = -\int dV(\chi\,\gamma^4\,\phi).$$

Un calcul similaire pour $\overset{\cup}{\Pi}{}^4$, conduit à l'expression

$$\overset{\cup}{\Pi}_\mu = \int_{\tau(y)=0} d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha\,\chi\,\gamma^\alpha\,\phi_\mu = -\int_{\tau(y)=0} d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha\,\chi_\mu\,\gamma^\alpha\,\phi. \tag{5.2.3}$$

Le vecteur *courant-densité de charge* est

$$j^\alpha(x) = (\chi\,\gamma^\alpha\,\phi)(x)$$

avec

$$j^\alpha(x) = j^\alpha_{(\text{convection})}(x) - \partial_\rho m^{\rho\alpha}(x)\,,$$

où

$$j^\alpha_{(\text{convection})}(x) = -\frac{1}{2M}(\chi\,(\cdot\partial^\alpha - \partial^\alpha\cdot)\,\phi)(x),$$
$$m^{\alpha\beta}(x) = -\frac{1}{2M}(\chi\,\gamma^{\alpha\beta}\,\phi)(x).$$

5.3 Les spineurs fondamentaux

En vue de d'exprimer les observables $\theta^{\alpha\beta}$, T^{α}_{β}, $s^{\alpha\beta\gamma}$ et j^{α} pour un champ contravariant $\phi^{A}(x)$, nous avons besoin d'un spineur fondamental non singulier η_{AB} à l'aide duquel nous pouvons former un opérateur de champ covariant $\psi^{T}_{A}(x) = \eta_{AB}\psi^{TB}(x)$:

$$\eta^{-1\,AC}\eta_{CB} = \eta_{BC}\,\eta^{-1\,CA} = \gamma^{0\,A}_{B} \quad \text{et} \quad \eta^{-1}\,\eta = \eta\,\eta^{-1} = \gamma^{0}.$$

Nous supposerons une représentation réelle de $\gamma^{\alpha A}_{B}$, c'est-à-dire que nous restreignons nos considérations à $n = 2, 4(\mathrm{mod.}\,8)\ldots$ Toutefois la théorie peut aussi être écrite pour un $\gamma^{\alpha A}_{B}$ dépendant de $\overset{\cup}{J}$, mais les calculs sont beaucoup plus longs.

Nous exigeons l'invariance de η par rapport au groupe $S_{(L)}$, c'est-à-dire que nous imposons la condition suivante avec $c(L) = 1$ ou $\mathrm{sign}(L'^{i}_{i})$ ou encore $\mathrm{sign}(L'^{4}_{4})$:

$${}'\eta_{A'B} = c(L)\,\eta_{AB}\,S^{-1\,A}_{(L)'A}\,S^{-1\,B}_{(L)'B} \quad \text{et} \quad \eta' = c(L)\,S^{-1\sim}_{(L)}\,\eta\,S^{-1}_{(L)}.$$

Pour $L_{(\mathrm{cont})}$ nous avons

$$\gamma^{\sim\mu\nu}\eta + \eta\,\gamma^{\mu\nu} = 0,$$

ce qui permet les *deux possibilités* suivantes :

$$\gamma^{\sim\alpha} = \mp\,\overset{\underset{\cup}{\cap}}{\eta}\;\gamma^{\alpha}\;\overset{\underset{\cup}{\cap}}{\eta}{}^{-1} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \gamma^{\sim\alpha}\,\overset{\underset{\cup}{\cap}}{\eta} = \mp\,\overset{\underset{\cup}{\cap}}{\eta}\,\gamma^{\alpha}.$$

où $\overset{\underset{\cup}{\cap}}{\eta}$ signifie $\overset{\cup}{\eta}$ ou $\overset{\cap}{\eta}$. Nous allons maintenant montrer que $\overset{\cup}{\eta}$ est pseudo-chrone tandis que $\overset{\cap}{\eta}$ est pseudo-chore. Nous avons

$$\overset{\underset{\cup}{\cap}}{\eta} = c(P)\lambda^{-2}\,\gamma^{\sim}_{4}\,\overset{\underset{\cup}{\cap}}{\eta}\;\gamma_{4} = c(P)\,\lambda^{-2}\,\overset{\underset{\cup}{\cap}}{\eta}\,(\gamma_{4})^{2} = \pm c(P)\,\lambda^{-2}\,\overset{\underset{\cup}{\cap}}{\eta}\,.$$

d'où il résulte $\lambda^{2} = 1$ et $c(P) = +(-)1$ pour $\overset{\cup}{\eta}$ $(\overset{\cap}{\eta})$: ($\overset{\cup}{\eta}$ est ainsi ortho-chrone et $\overset{\cap}{\eta}$ est pseudo-chore. De plus

$$\begin{aligned}\overset{\underset{\cup}{\cap}}{\eta} &= c(T)\lambda^{-2}\,\gamma^{\sim}_{321}\,\overset{\underset{\cup}{\cap}}{\eta}\,\gamma_{321}\\ &= \mp\,c(T)\lambda^{-2}\,\overset{\underset{\cup}{\cap}}{\eta}\,(\gamma_{3})^{2}(\gamma_{2})^{2})(\gamma_{1})^{2} = \mp c(T)\lambda^{-2}\,\overset{\underset{\cup}{\cap}}{\eta}\end{aligned}$$

conduit à nouveau à $\lambda^{2} = 1$ et $c(T) = -(+)1$ pour $\overset{\cup}{\eta}$ $(\overset{\cap}{\eta})$: ce qui confirme que $\overset{\cup}{\eta}$ est pseudo-chrone et $\overset{\cap}{\eta}$ est pseudo-chore.

En transposant les deux possibilités, nous trouvons

$$\gamma^{\alpha} = \mp\,\overset{\underset{\cup}{\cap}}{\eta}{}^{-1\sim}\,\gamma^{\sim\alpha}\,\overset{\underset{\cup}{\cap}}{\eta}{}^{\sim} \qquad \text{et} \qquad \gamma^{\sim\alpha} = \mp\,\overset{\underset{\cup}{\cap}}{\eta}{}^{\sim}\gamma^{\alpha}\,\overset{\underset{\cup}{\cap}}{\eta}{}^{\sim-1}.$$

et les deux possibilités correspondent à deux types de représentation, cf. section 1.1, (parce que ${}'\gamma^{\alpha} = -\gamma^{\alpha}$ est un changement de représentation). Donc nous avons :

$$\overset{\underset{\cup}{\cap}}{\eta} = \lambda\,\overset{\underset{\cup}{\cap}}{\eta}{}^{\sim}.$$

En transposant cette équation, nous trouvons $\lambda^2 = 1$; $\overset{\cup}{\eta}$ et $\overset{\cap}{\eta}$ sont ou bien des *matrices symétriques* ou bien des *matrices antisymétriques*. De plus, nous avons

$$\overset{\cup}{\eta}{}^{-1}\overset{\cap}{\eta} = S_{(PT)} = \pm\gamma^{1234} = \pm\gamma_5.$$

En vue de trouver la symétrie de $\overset{\cup}{\eta}$, nous choisissons une représentation orthogonale telle que

$$\begin{aligned}\gamma^{\sim\, i} &\overset{*}{=} (\gamma^i)^{-1} = \gamma_i = \gamma^i,\ \forall\, i = 1,\, 2,\, 3\\ \gamma^{\sim\, 4} &\overset{*}{=} (\gamma^4)^{-1} = \gamma_4 = -\gamma^4.\end{aligned}$$

Des relations d'anti-commutation, il résulte que $\overset{\cup}{\eta} \overset{*}{=} \lambda\gamma^4$ satisfait la première des deux possibilités, $\overset{\cup}{\eta}$ est par conséquent une *matrice antisymétrique* dans cette représentation particulière. On peut montrer que nous avons, dans le cas d'une représentation générale

$${}'\overset{\cup}{\eta}_{'A'B} = \overset{\cup}{\eta}_{AB}\ S^{-1A}_{(L)'A} S^{-1B}_{(L)'B},$$

conservation de cette antisymétrie : $\overset{\cup}{\eta}_{AB}$ est, dans toutes les représentations réelles, antisymétrique :

$${}'\overset{\cup}{\eta}{}^{\sim}_{AB} = \overset{\cup}{\eta}_{BA} = -\,\overset{\cup}{\eta}_{AB} \qquad \text{et} \qquad \overset{\cup}{\eta}{}^{\sim} = -\,\overset{\cup}{\eta}\,.$$

Nous choisissons en particulier

$$\overset{\cup}{\eta}_{AB} \overset{*}{=} \gamma^{4A}_{B}$$

en vue d'avoir pour la densité de charge un opérateur positif :

$$\begin{gathered}\overset{\cup}{j}{}^{(1)4} = \overset{\cup}{\psi}{}^{T}\gamma^4\psi = \overset{\cup}{\psi}{}^{T}_{C}\gamma^{4C}_{B}\psi^B = \psi^{TA}\left(-\,\overset{\cup}{\eta}_{AB}\ \gamma^{4C}_{B}\right)\psi^B\\ \psi^{TA}\Big(-\,\overset{\cup}{\gamma}{}^{4}_{AB}\Big)\psi^B \overset{*}{=} \sum_A \psi^{TA}\psi^A > 0 \qquad \text{et} \qquad -\,\overset{\cup}{\gamma}{}^{4}_{AB} \overset{*}{=} \delta^A_B\end{gathered}$$

Nous pouvons maintenant déterminer les symétries du *bi-spineur pseudo-chrone covariant* :

$$\overset{\cup}{\gamma}{}^{r(\mathrm{cov})}_{AB} = \overset{\cup}{\eta}_{AC}\ \gamma^{r\,C}_{B} \qquad \text{et} \qquad \overset{\cup}{\gamma}{}^{r(\mathrm{cov})} = \overset{\cup}{\eta}\ \gamma^r.$$

Nous avons donc, en vertu des deux possibilités évoquées plus haut

$$\gamma^{\sim\alpha_\nu}\ldots\gamma^{\sim\alpha_1}\ \overset{\cup}{\eta}{}^{\sim} = -\gamma^{\sim\alpha_\nu}\ldots\gamma^{\sim\alpha_1}\ \overset{\cup}{\eta} = -(-1)^\nu\ \overset{\cup}{\eta}\ \gamma^{\alpha_\nu}\ldots\gamma^{\alpha_1}.$$

Il en résulte que

$$\overset{\cap}{\eta}{}^{\sim} = \pm\,\overset{\cap}{\eta}\ \text{ pour } n = \begin{cases}2(\mathrm{mod}\,8)\\ 4(\mathrm{mod}8).\end{cases}$$

5.4 Quantification du champ spinoriel

Si $\psi^A(x)$ satisfait l'équation de Dirac, il découle de la symétrie de $\overset{\cup}{\gamma}{}^{\alpha}_{AB} = \overset{\cup}{\gamma}{}^{\alpha}_{(AB)}$ et de $\overset{\cup}{\gamma}{}^{0}_{AB} = \overset{\cup}{\gamma}{}^{0}_{(AB)}$ que

$$\overset{\cup}{\psi}_A(x) = \overset{\cup}{\eta}_{AB}\,\psi^A - \psi^B\,\overset{\cup}{\eta}_{BA}$$

satisfait aussi à l'équation de Dirac. La même chose est vraie pour $\psi^{TA}(x)$ et $\psi^T_A(x)$ parce que nous considérons les représentations réelles , $n = 2, 4 (\mathrm{mod}\, 8)$. Nous formons les tenseurs $T^\alpha_\beta(x)$ et $s^{\alpha\beta\gamma}(x)$, ou bien en posant

$$\chi_A = \Big(\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{\psi}_A\Big)^T \quad \text{et} \quad \phi^A(x) = \psi^A(x)$$

et alors la définition est

$$\begin{aligned} T^{(1)\alpha}_\beta &= \frac{1}{2}\Big(\Big(\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{\psi}\Big)^T\gamma^\alpha\psi_\beta - \Big(\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{\psi}_\beta\Big)^T\gamma^\alpha\psi\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\psi^{TA}\,\overset{\cup}{J}{}^T\psi^B_\beta + \psi^T_\beta\,\overset{\cup}{J}\,\psi^{AT}\Big)(x)\Big(-\,\overset{\cup}{\gamma}{}^\alpha_{AB}\Big), \end{aligned}$$

ou bien en posant

$$\chi_A = \overset{\cup}{\psi}_A \quad \text{et} \quad \psi^A = \Big(\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{\psi}{}^A\Big)^T$$

et alors la définition est

$$\begin{aligned} T^{(2)\alpha}\beta &= \frac{1}{2}\Big(\overset{\cup}{\psi}\,\gamma^\alpha\Big(\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{\psi}_\beta\Big)^T - \overset{\cup}{\psi}_\beta\,\gamma^\alpha\big(\overset{\cup}{J}\,\psi\Big)^T\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\psi^A\psi^{TB}_\beta\,\overset{\cup}{J}{}^T + \overset{\cup}{J}\,\psi^B_\beta\psi^{AT}\Big)(x)\Big(-\,\overset{\cup}{\gamma}{}^\alpha_{(AB)}\Big). \end{aligned}$$

La seconde forme des deux équations montre

- que $T^{(1)\alpha}_\beta$ et $T^{(2)\alpha}_\beta$ sont des observables (à cause de la symétrie de $\overset{\cup}{\gamma}{}^\alpha_{(AB)}$),
- qu'elles sont ortho-chrones si nous définissons

$$'\psi'^A('x) = O^{-1}_{(L)}\psi'^A('x)O_{(L)} = e^{\overset{\cup}{J}\lambda}S'^A_{(L)A}\psi^A(L^{-1}{}'x).$$

C'est encore vrai pour $s^{(1)\alpha\beta\gamma}$ et $s^{(2)\alpha\beta\gamma}$ compte tenu de l'antisymétrie de $\overset{\cup}{\gamma}{}^{\alpha\beta\gamma}_{AB} = \overset{\cup}{\gamma}{}^{\alpha\beta\gamma}_{[AB]}$. Donc $\theta^{(1)\alpha\beta}$ et $\theta^{(2)\alpha\beta}$ sont des observables ortho-chrones.

On peut montrer, en utilisant les équations de Dirac et les intégrations partielles, qu'il est possible d'écrire

$$\begin{aligned} \overset{\cup}{\Pi}{}^{(1)}_\mu &= \int_{\tau(y)=0} d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha(y)\Big(\Big(\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{\psi}\Big)^T\gamma^\alpha\psi_\mu\Big)(y) \\ \overset{\cup}{\Pi}{}^{(2)}_\mu &= -\int_{\tau(y)=0} d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha(y)\Big(\psi_\mu\gamma^\alpha\Big(J\psi\Big)^T\Big)(y). \end{aligned}$$

avec

$$\overset{\cup}{\Pi}_\mu = \alpha_1 \overset{\cup}{\Pi}{}^{(1)}_\mu + \alpha_2 \overset{\cup}{\Pi}{}^{(2)}_\mu .$$

La relation

$$-\left[\overset{\cup}{J}\,\overset{\cup}{\Pi}_\mu, \psi^{B'}(y')\right] = \psi^{B'}_\mu(y')$$

est satisfaite si

$$\alpha_1\left[\left(\overset{\cup}{J}\,\overset{\cup}{\psi}\right)^T\gamma^\alpha\psi_\mu)(y), \psi^{B'}(y')\right] + \alpha_2\left[\psi_\mu\gamma^\alpha\left(\overset{\cup}{J}\,\psi\right)^T(y), \psi^{B'}(y')\right] \equiv \overset{\cup}{\delta}{}^\alpha(y', y)\psi^{B'}_\mu(y').$$

Cette relation peut être intégrée, en utilisant le nombre (réel) invariant pseudochrone

$$\overset{\cup}{S}{}^{0\,A}_{B}(x,y) = (-\gamma^{\alpha A}_B\partial^x_\alpha + \gamma^{0\,A}_B M)\,\overset{\cup}{D}{}^0(x,y),$$

sous la forme

$$\begin{aligned}&-\alpha_1\left[\overset{\cup}{J}\,\left(\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{\psi}_A\right)^T(x)\gamma^{\alpha A}_B\psi^B(z), \psi^{B'}(y')\right]\\ &\qquad + \alpha_2\left[\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{\psi}_A\,(z)\gamma^{\alpha A}_B\left(\overset{\cup}{J}\,\psi^B\right)^T(x), \psi^{B'}(y')\right] \equiv \overset{\cup}{S}{}^{0\,B'}_A(y', x)\gamma^{\alpha A}_B\psi^B(z).\end{aligned}$$

Enfin, après une nouvelle transformation, cette relation devient

$$\begin{aligned}&-\alpha_1\left\{\overset{\cup}{\psi}{}^T_A(x)\gamma^{\alpha A}_B[\psi^B(z), \psi^{B'}(y')]_\mp \pm [\overset{\cup}{\psi}{}^T_A(x), \psi^{B'}(y')]_\mp\gamma^{\alpha A}_B\psi^B(z)\right\}\\ &\qquad + \alpha_2\left\{\overset{\cup}{\psi}_A\,(z)\gamma^{\alpha A}_B[\psi^{TB}(x), \psi^{B'}(y')]_\mp \pm [\overset{\cup}{\psi}_A\,(z), \psi^{B'}(y')]_\mp\gamma^{\alpha A}_B\psi^{TB}(x)\right\}\\ &\qquad = \overset{\cup}{S}{}^{0\,B'}_A(y', x)\gamma^{\alpha A}_B\psi^B(z).\end{aligned}$$

Pour qu'elle soit satisfaite, la solution la plus simple consiste à prendre

$$\left[\psi^A(x), \psi^B(y)\right]_\mp = 0 \tag{5.4.1}$$

et

$$\mp\left[\overset{\cup}{\psi}{}^T_A(x), \psi^{B'}(y')\right]_\mp = \overset{\cup}{S}{}^{0\,B'}_A(y', x)$$

qui permet d'évaluer le premier terme du premier membre. Pour le deuxième terme, nous utilisons l'identité

$$\overset{\cup}{\psi}_A\,(z)\gamma^{\alpha A}_B\;\psi^{TB}(x) = \psi^B(z)\gamma^{\alpha A}_B\;\overset{\cup}{\psi}{}^T_A(x)$$

et la relation (5.4.1). Nous trouvons que la relation trilinéaire est valable à condition que

$$\alpha_1 \mp \alpha_2 = 1. \tag{5.4.2}$$

Nous pouvons réécrire la dernière relation sous la forme usuelle

$$[\psi^A(x), \psi_B(y)]_\mp = \overset{\cup}{S}{}^{0\,A}_B(x,y). \tag{5.4.3}$$

5.5 Opérateur de charge

Les deux expressions pour $\overset{\cup}{j}^{\alpha}(x)$ sont

$$\overset{\cup}{j}^{(1)\alpha}(x) = \Big(\overset{\cup}{\psi}^T\gamma^\alpha\psi\Big)(x) = \Big(\psi^{TA}\psi^B\Big)(x)\Big(-\overset{\cup}{\gamma}^\alpha_{AB}\Big)$$
$$\overset{\cup}{j}^{(2)\alpha}(x) = \Big(\overset{\cup}{\psi}\,\gamma^\alpha\psi^T\Big)(x) = (\psi^A\,\psi^{TB})(x)\Big(-\overset{\cup}{\gamma}^\alpha_{AB}\Big).$$

Formant à nouveau $Q = \beta_1 Q^{(1)} + \beta_2 Q^{(2)}$, nous avons pour les champs de première espèce

$$-[Q,\psi^{B'}(y')] = -\int d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha(y)\Big\{\beta_1\Big[\Big(\overset{\cup}{\psi}^T\gamma^\alpha\psi\Big)(y),\psi^{B'}\Big]+\beta_2\Big[\Big(\overset{\cup}{\psi}\,\gamma^\alpha\psi^T\Big)(y),\psi^{B'}(y')\Big]\Big\}$$
$$\equiv \int d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha(y)\;\overset{\cup}{\delta}^\alpha(y',y)\psi^{B'}(y) = \psi^{B'}(y').$$

Pour les champs de première espèce, nous comparons cette expression avec celle donnant $-\Big[\overset{\cup}{J}\overset{\cup}{\Pi}_\mu,\psi^{B'}(y')\Big] = \psi^{B'}_\mu(y')$, (il n'y a pas le $\overset{\cup}{J}$ ni l'indice $_\mu$ de différentiation). Le résultat est alors obtenu si nous posons à nouveau

$$\beta_1 = \alpha_1 \quad \text{et} \quad \beta_2 = -\alpha_1.$$

5.6 Conjuguaison de charge et relations de commutation générales

Considérons la relation

$$-\alpha_1\Big[\overset{\cup}{\psi}^T_A(x)\psi^B(z),\psi^{B'}(y')\Big] + \alpha_2\Big[\psi^B(z)\,\overset{\cup}{\psi}^T_A(x),\psi^{B'}(y')\Big] = \overset{\cup}{S}^{B'}_A(y',x)\psi^B(z)$$

et opérons avec $\overset{\cup}{\eta}^{-1\,A'A}$. Rappelons que (section 5.4)

$$\overset{\cup}{S}^{B'}_A(y',x) = (-\gamma^{\alpha B'}_A\partial^{y'}_\alpha + M\gamma^{0\,B'}_A)\,\overset{\cup}{D}(y',x).$$

En définissant

$$\overset{\cup}{\gamma}^{B'A'} = \overset{\cup}{\eta}^{A'A}\gamma^{B'}_A\,,\quad \overset{\cup}{\gamma}^n_{CB} = \overset{\cup}{\eta}_{AC}\,\gamma^{nC}_B$$

et

$$\overset{\cup}{\gamma}^n_{AB} = \gamma^{nA}_C\gamma^{nC}_B = (\gamma^n)^{2A}_B = -\delta^A_B,\quad \overset{\cup}{\eta}^{-1\,AB} = -\gamma^{nA}_B,$$

nous obtenons alors

$$j^\alpha(x) = \alpha_1\Big(\overset{\cup}{\psi}^T\gamma^\alpha\psi\Big)(x) - \alpha_2\Big(\overset{\cup}{\eta}^{-1\,AC}\,\overset{\cup}{\psi}\gamma^\alpha\psi^T\Big)(x).$$

Mais, étant donné que

$$\breve{\eta}^{\sim} = -\eta \quad \text{et donc} \quad \eta^{-1\sim} = -\eta^{\sim},$$

on a

$$\breve{\psi}^{T}_{A}\gamma^{\alpha A}_{B} = \breve{\psi}^{T}_{A}\, \breve{\eta}^{-1\,AC}\, \breve{\eta}_{CD}\, \gamma^{\alpha D}_{B} = -\, \breve{\eta}^{-1\,CA}\, \breve{\psi}^{T}_{A}\, \breve{\gamma}^{\alpha}_{CB} = \psi^{C}\Big(-\, \breve{\gamma}^{\alpha}_{CB}\Big)$$

d'où

$$j^{\alpha} = \alpha_1\bigg(\psi^{TA}\Big(-\,\breve{\gamma}^{\alpha}_{AB}\Big)\psi^{B}\bigg)(x) - \alpha_2\bigg(\psi^{A}\Big(-\,\breve{\gamma}^{\alpha}\Big)_{AB}\psi^{TB}\bigg).$$

Maintenant, les deux relations

$$O^{T}_{C}\psi^{TA}(x)O^{-1\,T}_{C} = \psi^{TA}(x) = {}'\psi^{A}(x) \quad \text{car} \quad O^{T}_{C} = O^{-1}_{C} \text{ est unitaire}$$

et

$$S^{B'A'}(y',x) = \breve{\eta}^{-1\,A'A}\, \breve{S}^{B'}_{A}(y',x) = (-\,\breve{\gamma}^{\alpha}\partial^{y'}_{\alpha} + M\,\breve{\gamma}^{0})\,\breve{D}\,(y',x) = S^{A'B'}(x,y'),$$

permettent d'écrire la relation de commutation générale sous sa forme ortho-chrone

$$-\alpha_1[\psi^{TA}(x)\psi^{B}(z),\psi^{B'}(y')] + \alpha_2[\psi^{B}(z)\psi^{TA}(x),\psi^{B'}(y')] = S^{B'A}(y',x)\psi^{B}(z).$$

En prenant la transposée $[A,B]^T = -[A^T,B^T]$, il vient

$$+\alpha_1[\psi^{TB}(z)\psi^{A}(x),\psi^{TB'}(y')] - \alpha_2[\psi^{A}(x)\psi^{TB}(z),\psi^{TB'}(y')] = S^{B'A}(y',x)\psi^{TB}(z).$$

Finalement, en multipliant à gauche par O^{-1}_{C} et à droite par O_C, nous trouvons encore une fois

$$\alpha_1 = \alpha_2 \equiv \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \beta_1 = -\beta_2 = \frac{1}{2}$$

donc

$$\theta^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\theta^{(1)\alpha\beta} + \frac{1}{2}\theta^{(2)\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \breve{j}^{\alpha} = \frac{1}{2}\,\breve{j}\,\frac{1}{2}^{(1)\alpha} - \frac{1}{2}\,\breve{j}\,\frac{1}{2}^{(2)\alpha}.$$

Il en résulte respectivement

$$\breve{\Pi}_{\mu} = \frac{1}{2}\,\breve{\Pi}^{(1)}_{\mu} + \frac{1}{2}\,\breve{\Pi}^{(2)}_{\mu} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{2}Q^{(1)} - \frac{1}{2}Q^{(2)}.$$

On a de nouveau

$$'\theta^{\alpha\beta} = O^{-1}_{C}\theta^{\alpha\beta}O_C = \theta^{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad '\breve{\Pi}_{\mu} = \breve{\Pi}_{\mu}$$

et également

$$'\breve{j}^{\alpha} = -\,\breve{j}^{\alpha} \quad \text{et} \quad 'Q = -Q.$$

Donc, une fois encore Q et $-Q$ ont le même spectre.

5.7 Développement en paquets d'ondes

Nous introduisons à nouveau deux ensembles de paquets d'onde

$$\{\phi'^{A},\ \phi''^{A},\ \ldots,\phi^{(\rho)A}\} \quad \text{et} \quad \{\chi'^{A},\ \chi''^{A},\ldots,\chi^{(\rho)A}\}$$

qui satisfont à l'équation de Dirac. Ces ensembles sont normalisés en termes de

$$j^{\alpha}(\phi',\chi')(x) = j^{\alpha}(\chi',\phi')(x) = (\overset{\cup}{\phi}{}'\gamma^{\alpha}\chi')(x) = (\phi'^{A},\chi'^{B})(x)(-\overset{\cup}{\gamma}{}^{\alpha}_{AB}).$$

Compte tenu de la forme de Q, on vérifie que la normalisation

$$Q(\phi',\chi') = 0 \quad ; \quad Q(\phi'^{T},\phi'') = Q(\phi'',\phi'^{T}) = \delta_{\phi'\,\phi''} > 0$$

est possible. La complétude est assurée si les opérateurs dépendant de $\overset{\cup}{J}$

$$\overset{\cup}{S}{}^{+A}_{B}(x,y) \equiv \mathop{\mathsf{S}}_{\phi'} \phi'^{A}(x)\ \overset{\cup}{\phi}{}'^{T}_{B}(y) = \overset{\cup}{S}{}^{+A}_{B}(x-y)$$

$$\overset{\cup}{S}{}^{-A}_{B}(x,y) \equiv \mathop{\mathsf{S}}_{\phi'} \phi'^{TA}(x)\ \overset{\cup}{\phi}_{B}(y) = \overset{\cup}{S}{}^{-A}_{B}(x-y)$$

et

$$S^{-AB}(x,y) = S^{TAB}(x,y) = S^{+BA}(x,y)$$

sont invariants par rapport à $\{L_{(\mathrm{orth})}\}$. A nouveau, nous prenons une solution à fréquence positive $f^{+A}(x)$ de l'équation de Dirac qui peut s'écrire

$$f^{+A}(x) = \mathop{\mathsf{S}}_{\phi'} \phi'^{A}(x)\ f^{+}_{\phi'} = \int d\overset{\cup}{\sigma}_{\alpha}(y)\,\overset{\cup}{S}{}^{+A}_{B}(x,y)\gamma^{\alpha B}_{C} f^{+C}(y)$$

et une solution à fréquence négative qui peut s'écrire

$$f^{-A}(x) = \mathop{\mathsf{S}}_{\chi'} \chi'^{TA}(x) f^{-}_{\chi'} = \int d\overset{\cup}{\sigma}_{\alpha}(y)\,\overset{\cup}{S}{}^{-A}_{B}(x,y)\gamma^{\alpha B}_{C} f^{-C}(y).$$

La solution générale de l'équation de Dirac peut alors être exprimée sous la forme

$$\psi^{A}(k) = \mathop{\mathsf{S}}_{\phi'} a_{\phi'}\phi'^{A}(x) + \mathop{\mathsf{S}}_{\chi'} b^{T}_{\chi'}\chi'^{TA}(x) = \int d\overset{\cup}{\sigma}_{\alpha}(y)\,\overset{\cup}{S}{}^{0A}_{B}(x,y)\ \gamma^{\alpha B}_{C}\psi^{C}(y)\,,$$

avec

$$\overset{\cup}{S}{}^{0A}_{C}(x,y)\gamma^{\alpha C}_{B} = (\overset{\cup}{S}{}^{+A}_{B} + \overset{\cup}{S}{}^{-A}_{B})(x,y).$$

Si $x = y'$ est choisi sur $\tau(y') = \tau(y) = 0$, il découle que

$$\overset{\cup}{S}{}^{0A}_{C}(y',y)\gamma^{\alpha C}_{B} = \gamma^{0A}_{B}\ \overset{\cup}{\delta}{}^{\alpha}(y',y).$$

Maintenant, ce sont exactement les conditions valables pour le champ spinoriel. Donc $\overset{\cup}{S}{}^{0A}_{B}(x,y)$ ainsi définie coïncide avec le nombre invariant déjà défini.

En développant $\psi^A(k)$, on obtient

$$[a_{\phi'}, a^T_{\phi''}]_\mp = \delta_{\phi'\phi''}\ , \quad [b^T_{\chi'}, b_{\chi''}]_\mp = \delta_{\chi'\chi''} \quad \text{et} \quad [a_{\phi'}, b_{\chi''}]_\mp = 0$$

ainsi que

$$\begin{gathered}[a_{\phi'}, a_{\phi''}]_\mp = [b^T_{\chi'}, b^T_{\chi''}]_\mp = [a_{\phi'}, b^T_{\chi'}]_\mp = 0,\\ [a_{\phi'}, a^T_{\phi''}]_\mp = \delta_{\phi'\,\phi''}\ , \quad [b^T_{\chi'}, b_{\chi''}]_\mp = \delta_{\chi'\,\chi''} \quad \text{et} \quad [a_{\phi'}, b_{\chi'}]_\mp = 0.\end{gathered}$$

Alors, il vient

$$\begin{aligned}[\phi^A(x), \phi_B(y)]_\mp &= \mathsf{S}_{\phi'}\mathsf{S}_{\phi''}\,\phi^A(x)\phi''_B(y)[a_{\phi'}, a^T_{\phi''}]_\mp + \mathsf{S}_{\chi'}\mathsf{S}_{\chi''}\,\chi'_B(x)\chi''^{TA}(y)[b^T_{\chi'}, b_{\chi''}]_\mp\\ &\quad + \mathsf{S}_{\phi'}\mathsf{S}_{\chi''}\,\phi'^A(x)\chi''_B(y)[a_{\phi'}, b_{\chi''}]_\mp + \mathsf{S}_{\chi'}\mathsf{S}_{\phi''}\,\chi'^{TA}(x)\phi''^T_B(y)[b^T_{\chi'}, a^T_{\phi''}]_\mp\\ &= S^A_B(x,y) = (S^+ + S^-)^A_B(x,y) = \mathsf{S}_{\phi'}\,\phi'^A(x)\phi'_B(y) + \mathsf{S}_{\chi'}\,\chi'^{TA}(x)\chi'^T_B(y).\end{aligned}$$

En prenant les relations d'anti-commutation (compte tenu de la $O_{(C)}$-covariance) on est conduit à l'égalité

$$Q = \mathsf{S}_{\phi'}\Big(N_{\phi'} - \frac{1}{2}\Big) - \mathsf{S}_{\chi'}\Big(N_{\chi'} - \frac{1}{2}\Big) = \mathsf{S}_{\phi'}\,N_{\phi'} - \mathsf{S}_{\chi'}\,N_{\chi'}$$

avec $N_{\phi'} = a^T_{\phi'}a_{\phi'}$. Les relations d'anti-commutation sont satisfaites en termes des pseudo-quaternions :

$$\begin{gathered} j = \begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\ ;\ k = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\ ;\ \ell = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\ a^T = \frac{1}{2}(\ell + \jmath) = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\ ;\ a = \frac{1}{2}(\ell - \jmath) = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.\end{gathered}$$

Nous avons alors

$$N = a^T a = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\ell - k)$$

avec

$$\begin{aligned} a_{\phi(\rho)} &= 1 \times (k \times k) \times \ldots \times (a \times 1) \times (1 \times 1) \times \ldots\\ b_{\chi(\rho)} &= 1 \times (k \times k) \times \ldots \times (k \times a) \times (1 \times 1) \times \ldots\end{aligned}$$

Les valeurs propres sont $\{N'_{\phi'}\} = \{0, 1\}$, c'est-à-dire que la statistique de Fermi-Dirac est valable. La forme explicite de $O_{(C)}$ est encore donnée par l'expression de la quantification du champ scalaire, si $\{\phi'\}$ et $\{\chi'\}$ sont choisis identiques. La quantification de $\overset{\cup}{\Pi}_\mu$ conduit à

$$\overset{\cup}{\Pi}{}^\mu = \mathsf{S}_{\phi'}\Big(N_{\phi'} - \frac{1}{2}\Big)\,\overset{\cup}{k}{}'^\mu + \mathsf{S}_{\chi'}\Big(N_{\chi'} - \frac{1}{2}\Big)\,\overset{\cup}{k}{}'^\mu.$$

Remarques.

1) Si le paquet d'onde à fréquence positive satisfait aux conditions $\overset{\cup}{k}'_\alpha \, \overset{\cup}{k}'^\alpha + M^2 = 0$ et $\overset{\cup}{k}'^4 \geq |M|$, alors l'énergie est (outre la contribution point zéro qui est infinie) de nouveau un opérateur positif : le spectre a donc une limite inférieure et la thermodynamique statistique avec une température positive peut être appliquée. On utilise là aussi la *renormalisation*

$$:\theta^{\alpha\beta}(x) := \theta^{\alpha\beta} - < \theta^{\alpha\beta}(x) >_{\psi_0} .$$

2) Les relations de commutation conduisent à un spectre d'énergie sans limites inférieure ou supérieure donc la thermodynamique statistique ne peut pas être appliquée. Ceci est l'argument de Pauli pour exclure la statistique de Bose-Einstein pour les champs spinoriels.

Annexe : Le théorème de Frobenius et Schur

Ce théorème établit que les groupes de matrices irréductibles (GMI) d'ordre h, notés $\{\hat{D}_i\}$, $(i, k, \ldots = 1, 2, \ldots, h)$, se répartissent en trois espèces.

Un GMI est de première, de deuxième ou de troisième espèce, suivant que

$$h^{-1} \sum_i \operatorname{tr}(\hat{D}^2) = \begin{cases} -1 \\ 1 \\ 0. \end{cases} \tag{5.8.1}$$

1) Un GMI est de première espèce s'il est équivalent à un groupe de matrices réelles, c'est-à-dire si pour toute représentation $\{'\hat{D}_i\}$ une matrice $\hat{S}$ existe et satisfait à

$$\{'\hat{D}_i\} = \{\hat{S}\, \hat{D}_i\, \hat{S}^{-1}\} \text{ avec } '\hat{D}_i^* = '\hat{D}_i. \tag{5.8.2}$$

2) Un GMI est de seconde espèce s'il est équivalent à son groupe complexe conjugué, c'est-à-dire si pour toute représentation une matrice $\hat{C}$ existe et satisfait à

$$\{'\hat{D}_i\} = \{\hat{C}\, \hat{D}_i\, \hat{C}^{-1}\} \text{ avec } '\hat{D}_i^* = '\hat{D}_i. \tag{5.8.3}$$

Pour un GMI de première espèce, une matrice $\hat{C}$ existe a fortiori ($\hat{C} = \hat{S}^{*-1}\, \hat{S}$).

3) Un GMI est de troisième espèce s'il n'est pas équivalent à son groupe complexe conjugué, c'est-à-dire s'il n'existe aucune matrice $\hat{C}$ satisfaisant la condition (5.8.3).

Maintenant considérons l'ensemble $\{\pm\Gamma\} = \{\pm\gamma^r\}$. Pour $n = 2m$ et compte tenu des relations $\gamma^r\, \gamma^s = \epsilon^{rs}\, \gamma^t$, $t = t(r, s)$ et $\epsilon^{rs} = \pm 1$, il forme un GMI d'ordre 2×2^n. Pour trouver à quelle espèce il appartient, nous devons évaluer

$$(2 \times 2^n)^{-1} \sum_r \sum_\pm \operatorname{tr}((\pm\gamma^r)^2) = 2^{-n} \sum_r \operatorname{tr}\big((\gamma^r)^2\big). \tag{5.8.4}$$

Avec $d = n - 1$, qui donne

$$\binom{n}{\nu} = \binom{d}{\nu} + \binom{d}{\nu - 1}, \tag{5.8.5}$$

et en utilisant

$$\xi^{(\nu)} = (-1)^{\nu/2} \text{ pour } \nu = 2\mu,$$
$$\xi^{(\nu)} = (-1)^{(\nu-1)/2} \text{ pour } \nu = 2\mu + 1,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_r \mathrm{tr}[\,(\gamma^r)^2] &= \sum_\nu \left[\binom{d}{\nu} - \binom{d}{\nu-1}\right] \begin{Bmatrix} (-1)^{\nu/2} \\ (-1)^{(\nu-1)/2} \end{Bmatrix} \mathrm{tr}\,(\gamma^0) \\ &= N\Re \sum_r \left[\binom{d}{\nu} - \binom{d}{\nu-1}\right](1-i)i^\nu \\ &= 4N\Re[(1+i)^{n-3}] = 2^{(n+1)/2} N \cos\Big((n-3)\frac{\pi}{4}\Big).\end{aligned}$$

Nous remarquons tout d'abord que les conditions (5.8.1) et (5.8.4) ont la périodicité $'n = n (\mathrm{mod}\, 8) = \ldots, n-8,\ n,\ n+8, \ldots$ En particulier nous trouvons, compte tenu de $\cos(\pi/4) = 2^{-1/2}$ et $N = 2^{n/2}$, que

- par l'item (9), section 5.1, notre GMI est de première espèce pour $n = 2, 4 (\mathrm{mod}\ 8)$;
- par l'item (10), section 5.1, qu'il est de deuxième espèce pour $n = 6, 8 (\mathrm{mod}\ 8)$.

Index

T

V