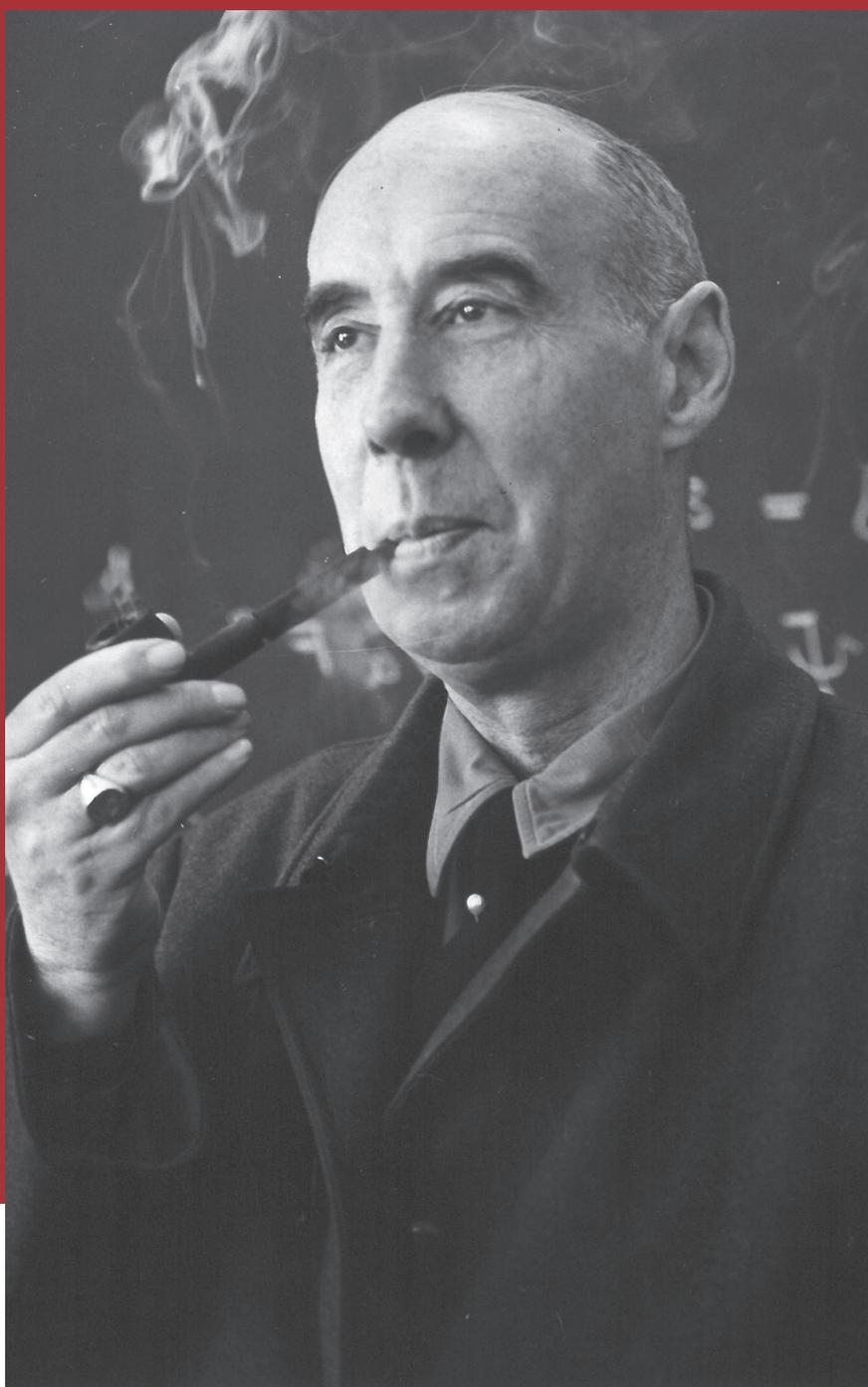


Ernst C. G. Stueckelberg

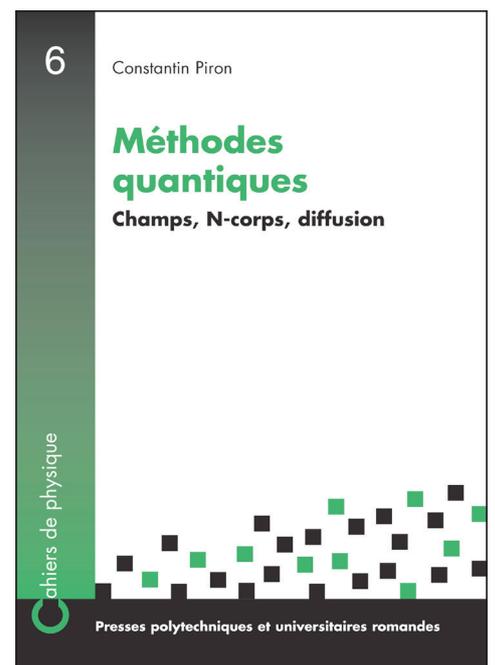
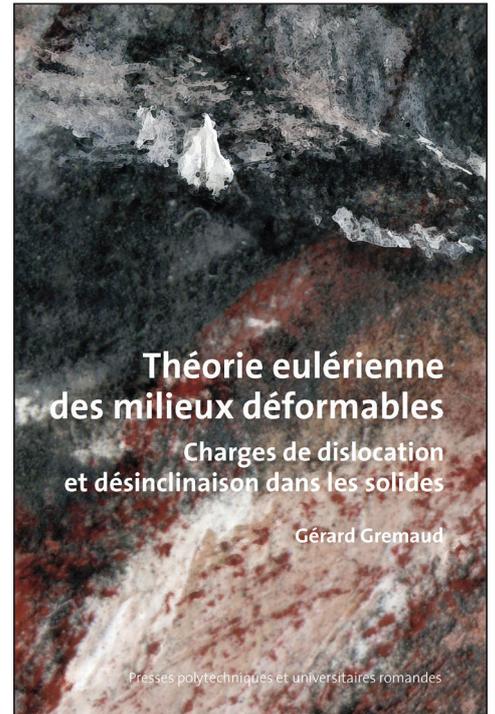
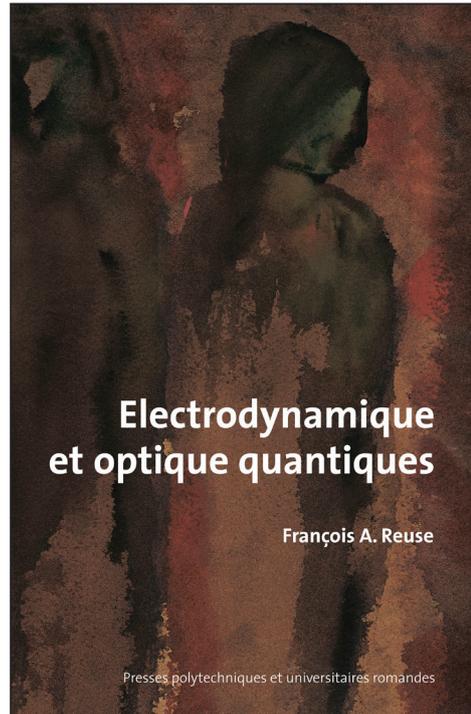
Electrodynamique



Livre II

Presses polytechniques et universitaires romandes

Chez le même éditeur



LIVRE II

Electrodynamique

Table des matières

1	Fondements de l'électrostatique	1
1.1	Définitions de la charge électrique et du champ de déplacement	1
1.2	Conditions d'équilibre	4
1.3	Force sur une charge rigide	11
1.4	Loi de Coulomb	13
1.5	Déplacement conservatif de la charge	15
1.6	Conducteurs	16
1.7	Force sur un diélectrique rigide	21
1.8	Tenseur de Maxwell	25
2	Electostatique linéaire et théorie du potentiel	29
2.1	Discontinuité de $\epsilon(\vec{x})$	29
2.1.1	Conditions aux limites pour $\vec{D}(\vec{x})$	30
2.1.2	Conditions aux limites pour	31
2.2	Démonstration de l'unicité de $\phi(\vec{x})$ lorsque $\epsilon = \text{cte}$	32
2.3	Laplacien en coordonnées curvilignes orthogonales	33
2.4	Polynomes de Legendre	37
2.5	Charge ponctuelle à l'intérieur d'un conducteur sphérique	44
2.6	Cas général – Théorème de Green II	48
2.7	Potentiel de Coulomb	50
2.8	Potentiel de double couche	52
2.9	Surface à polarisation constante	56
2.10	Corps polarisé	60
2.11	Capacité d'un condensateur	65

3	Courants stationnaires – Aimants	69
3.1	Loi de production	69
3.2	Le théorème de Stokes	72
3.3	Vecteur axial	74
3.4	Etablissement des équations du champ et de la force	75
3.5	Loi de Biot-Savart	81
3.6	Force entre deux éléments de courant	83
3.7	Couches doubles et courants	86
3.8	Travail d'induction	88
3.9	Aimants et magnétostatique	92
3.10	Forces entre aimants et courants	97
3.11	Tenseur de Maxwell	99
3.12	Coefficients d'induction	103
4	Electrodynamique	107
4.1	Equation de continuité	107
4.2	Equations de Maxwell	109
4.3	Relations entre q et \vec{j}	112
4.4	Les deux équations d'onde	114
4.5	Quantité de mouvement	116
4.6	Systèmes d'unités	120
4.7	Relativité restreinte.	124
4.8	Loi d'Ohm pour un conducteur au repos	131
4.9	Loi de Kirchhoff	134
4.10	Circuit oscillant	136
4.11	Champs retardés et avancés	138
4.12	Rayonnement du dipôle électrique	141
4.13	Rayonnement du dipôle magnétique	148
	Index	151

Fondements de l'électrostatique

Présentation

La section 1 définit le champ d'induction ; la loi d'induction sous forme locale suit et nous terminons cette section par l'énergie électrostatique. Les conditions d'équilibre sont discutées, par le moyen de la méthode des multiplicateurs de Lagrange, à la section 2 ; elles nous permettent d'introduire le champ électrique et le potentiel scalaire ; l'électrostatique linéaire est ensuite examinée avec le tenseur diélectrique. Comme exemple, on donne la boule chargée. La force sur une charge rigide et la loi de Coulomb sont examinées aux sections 3 et 4. Le déplacement conservatif de la charge fait l'objet de la section 5 et les conducteurs ainsi que leur loi de force sont étudiés à la section 6. La force sur un diélectrique est alors traitée à la section 7 et le tenseur de Maxwell qui permet d'exprimer la force électrostatique totale à l'aide d'une intégrale de surface est finalement introduit à la section 8.

1.1 Définitions de la charge électrique et du champ de déplacement

Diverses expériences permettent d'observer quantitativement la présence de charges électriques avant toute explication théorique. Ces charges sont des grandeurs essentiellement liées à la matière et constituent une nouvelle propriété de celle-ci. Il apparaît que le nombre qui mesure une charge est soit positif, soit négatif suivant la nature de celle-ci.

Nous désignons par Q_V la somme algébrique de toutes les charges contenues dans un volume V ; cette grandeur manifestement extensive peut, dans le cas d'une distribution continue de charge, s'exprimer par l'intermédiaire d'une densité scalaire :

$$Q_V = \int_V (dVq)(\vec{x}), \quad (1.1.1)$$

où

$$q(\vec{x}) = \frac{dQ(\vec{x})}{dV(\vec{x})}$$

est la *densité de charge électrique*, $dQ(\vec{x})$ étant le nombre de charges (positives et négatives) contenues dans $dV(\vec{x})$.

Si la distribution de charges est discrète, nous avons

$$Q_V = \sum_i q_i.$$

Loi d'induction

Nous appelons *champ de déplacement* (ou *induction électrique*) et nous notons $\vec{D}(\vec{x}) : \{D^i(x^1, x^2, x^3)\}$ le champ vectoriel contravariant défini par la loi

$$C_e Q_V = \oint_V (d\vec{\sigma}, \vec{D})(\vec{y}) \quad (1.1.2)$$

où $d\vec{\sigma}(\vec{y})$ est l'élément de surface extérieure et où C_e est une constante dépendant du système d'unités choisi.

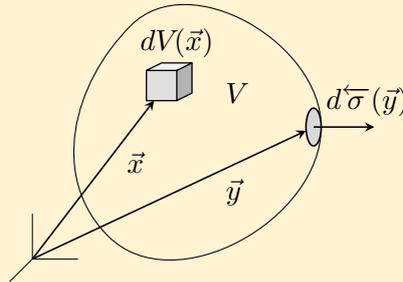


Fig. 1.1.1 Eléments de volume et de surface extérieure.

Cette loi exprime que le flux du champ $\vec{D}(\vec{x})$ à travers la surface fermée entourant le volume V est égal à la charge totale Q_V contenue dans celui-ci. Dans le cas d'une distribution continue de charge, cette loi peut s'exprimer sous forme locale. Pour cela, rappelons quelques notions d'*analyse vectorielle* : si $\vec{a}(\vec{x})$ est un champ vectoriel, on peut lui associer le champ scalaire $\text{div} \vec{a}(\vec{x})$ défini par

$$\text{div} \vec{a}(x_0) = \lim_{\Delta V_0 \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V_0} \oint_{\Delta V_0} (d\vec{\sigma}, \vec{a})(\vec{y}_0)$$

et alors, en divisant le volume V en éléments ΔV_0 :

$$\begin{aligned} \int_V (dV \text{div} \vec{a})(\vec{x}) &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sum_{\alpha} (\Delta V_0 \text{div} \vec{a})(\vec{x}) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sum_{\alpha} \oint_{\Delta V_0} (d\vec{\sigma}, \vec{a})(\vec{y}_0) = \oint_V (d\vec{\sigma}, \vec{a})(\vec{y}), \end{aligned}$$

ce qui conduit au *théorème de Gauss* :

$$\int_V (dV \operatorname{div} \vec{a})(\vec{x}) = \oint_V (d\vec{\sigma}, \vec{a})(\vec{y}).$$

En appliquant ce théorème à notre loi de production, nous obtenons

$$C_e Q_V = \oint_V (d\vec{\sigma}, \vec{D})(\vec{y}) = \int_V (dV \operatorname{div} \vec{D})(\vec{x}).$$

Pour une distribution continue :

$$Q_V = \int_V (dV q)(\vec{x})$$

et alors

$$\int_V (dV (C_e q - \operatorname{div} \vec{D}))(\vec{x}) = 0.$$

Comme nous n'avons fait aucune hypothèse sur le volume V , celui-ci peut être arbitraire ; nous avons donc en chaque point :

$$\operatorname{div} \vec{D}(\vec{x}) = C_e q(\vec{x}), \quad (1.1.3)$$

ce qui constitue la *loi d'induction sous forme locale*.

Cette loi montre que les charges sont les sources du champ de déplacement $\vec{D}(\vec{x})$.

Un système est dit électrostatique et est noté $\Sigma^{(el.)}$ lorsque ses propriétés peuvent être décrites par le champ $\vec{D}(\vec{x})$.

Il apparaît donc une nouveauté. Jusqu'ici nous n'avons considéré que des systèmes formés d'une collection d'objets physiques, alors que $\Sigma^{(el.)}$ est formé d'une *champ*. Désormais cette grandeur doit être considérée comme une réalité physique (au même titre que la masse par exemple) et non plus seulement comme un artifice mathématique.

Il faut bien remarquer que les sources du camp (les charges) n'appartiennent pas au système électrostatique $\Sigma^{(el.)}$, puisqu'elles constituent une propriété de la matière qui elle en est absente.

Comme nous le verrons tout au long de ce chapitre, définir un tel système n'est pas stérile, bien au contraire.

L'énergie de ce système doit être une fonctionnelle de $\vec{D}(\vec{x})$:

$$U^{(el.)} = U^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})].$$

L'énergie étant une grandeur extensive, elle peut s'écrire sous la forme

$$U^{(el.)}[\vec{D}(\cdot)] = \int_V dV(\vec{x}) u^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})], \quad (1.1.4)$$

où $u^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})]$ est la *densité d'énergie électrostatique*.

1.2 Conditions d'équilibre

Un système est en équilibre lorsque les grandeurs qui le caractérise sont indépendantes du temps. En particulier, d'après le premier principe de la thermodynamique, son énergie doit être constante (système fermé) et minimum, c'est-à-dire

$$\underline{\delta}^{(1)}U = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\delta}^{(2)}U \geq 0.$$

L'énergie de notre système électrostatique étant une fonctionnelle de $\vec{D}(\vec{x})$, nous allons imposer une variation $\delta\vec{D}(\vec{x})$ autour de la valeur de ce champ à l'équilibre et exprimer que son effet sur l'énergie est nul (en vertu du premier principe).

Cette variation $\delta\vec{D}(\vec{x})$ n'est toutefois pas arbitraire, car il faut toujours que le champ vérifie la loi d'induction :

$$(\text{div}\vec{D} - C_e q)(\vec{x}) = 0.$$

Nous sommes donc ramenés à rechercher les conditions rendant la fonctionnelle $U^{(el.)}[\vec{D}(\cdot)]$ minimum, la fonction $\vec{D}(\vec{x})$ étant soumise à la contrainte

$$(\text{div}\vec{D} - C_e q)(\vec{x}) = 0.$$

Or, nous le savons, un tel problème se résout facilement par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Mais alors, il faut bien remarquer qu'en fait il existe une infinité de contraintes : une en chaque point \vec{x} du système, et comme à chaque contrainte doit être associé un multiplicateur, nous aurons un champ scalaire $\phi(\vec{x})$ de multiplicateurs.

Définition du champ électrique

On appelle *champ électrique* $\overleftarrow{E}(\vec{x}) : \{E_i(x^1, x^2, x^3)\}$ le champ vectoriel covariant défini par

$$\frac{1}{C_e} E_i(\vec{x}) = \frac{\partial u^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})]}{\partial D^i(\vec{x})} \quad (1.2.1)$$

(ce qui constitue une *relation phénoménologique*).

Par suite :

$$\delta u^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})] = \frac{\partial u^{(el.)}}{\partial D^i} \delta D^i = \frac{1}{C_e} E_i \delta D^i,$$

c'est-à-dire :

$$\delta u^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})] = \frac{1}{C_e} (\overleftarrow{E}, \delta\vec{D}).$$

La méthode des multiplicateurs de Lagrange consiste d'abord à former la fonctionnelle :

$$\Psi[\vec{D}(\cdot)] = U^{(el.)}[\vec{D}(\cdot)] - \int_V dV(\vec{x}) \phi(\vec{x}) \left(\frac{1}{C_e} \text{div}\vec{D} - q \right) (\vec{x}),$$

puis à chercher les conditions de minimum de cette fonctionnelle.

a) *condition d'extremum* : $\underline{\delta}^{(1)}\Psi[\dots] = 0$:

$$\begin{aligned}\underline{\delta}^{(1)}\Psi[\dots] &= \underline{\delta} \int_V dV \left[u^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})] - \phi(\vec{x}) \left(\frac{1}{C_e} \operatorname{div} \vec{D} - q \right) \right] (\vec{x}) \\ &= \int_V dV(\vec{x}) \left[\delta u^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})] - \phi(\vec{x}) \left(\frac{1}{C_e} \operatorname{div} \delta \vec{D} - 0 \right) \right] (\vec{x}) \\ &= \int_V dV(\vec{x}) [(\overleftarrow{E}, \delta \vec{D}) - \phi \operatorname{div} \delta \vec{D}] (\vec{x}) \equiv 0.\end{aligned}$$

Pour continuer, il faut faire appel à *l'analyse vectorielle*.

A un champ scalaire $\varphi(\vec{x})$ nous pouvons associer le champ vectoriel $\overleftarrow{\operatorname{grad}} \varphi(\vec{x})$ défini par

$$\overleftarrow{\operatorname{grad}} \varphi(\vec{x}) = \lim_{\Delta V_0 \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V_0} \oint_{\Delta V_0} (d^{\leftarrow \sigma} \varphi)(\vec{y}_0).$$

Cherchons à transformer

$$\operatorname{div}(\varphi \vec{a})(\vec{x}_1) = \lim_{\Delta V_1 \rightarrow 0} \oint_{\Delta V_1} (d^{\leftarrow \sigma}, \varphi \vec{a})(\vec{y}_1).$$

Ecrivons : $\vec{a}(\vec{x}_1) = \vec{a}_{(1)}$ et $\varphi(\vec{x}_1) = \varphi_{(1)}$. Si \vec{y} est voisin de \vec{x} , nous avons la formule des accroissements finis

$$\begin{aligned}(\varphi \vec{a})(\vec{y}) &= \underbrace{\vec{a}_{(1)} \varphi_{(1)}}_{\text{cte}} + (\vec{a}(\vec{y}) - \vec{a}_{(1)}) \underbrace{\varphi_{(1)}}_{\text{cte}} + \underbrace{\vec{a}_{(1)}}_{\text{cte}} (\varphi(\vec{y}) - \varphi_{(1)}) \\ &\quad + \underbrace{(\vec{a}(\vec{y}) - \vec{a}_{(1)}) (\varphi(\vec{y}) - \varphi_{(1)})}_{2^{\text{e}} \text{ ordre}},\end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\varphi \vec{a})(\vec{x}_1) &= 0 + \varphi_{(1)} \lim_{\Delta V_1 \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V_1} \oint_{\Delta V_1} (d^{\leftarrow \sigma}, \vec{a})(\vec{y}_1) \\ &\quad + \left(\vec{a}_{(1)}, \lim_{\Delta V_1 \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V_1} \oint_{\Delta V_1} d^{\leftarrow \sigma} \varphi \right) (\vec{y}_1).\end{aligned}$$

On a donc

$$\operatorname{div}(\varphi \vec{a})(\vec{x}) = (\varphi \operatorname{div} \vec{a} + (\vec{a}, \overleftarrow{\operatorname{grad}} \varphi))(\vec{x})$$

et, sous forme intégrale,

$$\int_V (dV \operatorname{div} \varphi \vec{a})(\vec{x}) = \oint_V (d^{\leftarrow \sigma}, \varphi \vec{a})(\vec{y}) = \int_V (dV \varphi \operatorname{div} \vec{a})(\vec{x}) + \int_V (dV (\vec{a}, \overleftarrow{\operatorname{grad}} \varphi))(\vec{x}),$$

d'où le *théorème de Green* :

$$\int_V (dV \varphi \operatorname{div} \vec{a})(\vec{x}) = \oint_V (d^{\leftarrow \sigma}, \varphi \vec{a})(\vec{y}) - \int_V (dV (\overleftarrow{\operatorname{grad}} \varphi, \vec{a}))(\vec{x}).$$

Utilisons ce théorème dans l'expression trouvée pour $\underline{\delta}^{(1)}\Psi[\dots] \equiv 0$; il vient

$$\underline{\delta}\Psi[\dots] = \frac{1}{C_e} \int_V \left(dV(\overleftarrow{E} + \overleftarrow{\text{grad}}\phi, \delta\vec{D}) \right)(\vec{x}) - \frac{1}{C_e} \oint_V (d\overleftarrow{\sigma}, \phi \delta\vec{D})(\vec{y}) \equiv 0.$$

Nous choisissons $\delta\vec{D} = \vec{0}$ sur la surface limitant V (quitte à prendre s'il le faut $V = V_\infty$). Par suite :

$$\oint_{V_\infty} (d\overleftarrow{\sigma}, \phi \delta\vec{D})(\vec{y}) = 0,$$

et il reste

$$\underline{\delta}^{(1)}\Psi[\dots] = \frac{1}{C_e} \int_{V_\infty} \left(dV(\overleftarrow{E} + \overleftarrow{\text{grad}}\phi, \delta\vec{D}) \right)(\vec{x}) \equiv 0.$$

Or dans la méthode des multiplicateurs de Lagrange, $\delta\vec{D}(\vec{x})$ est tout à fait arbitraire dans V ; il s'ensuit que la condition d'extremum de $\Psi[\dots]$, équivalente à celle de $U^{(el.)}$, est donnée par :

$$\overleftarrow{E}(\vec{x}) = -\overleftarrow{\text{grad}}\phi(\vec{x}), \quad (1.2.2)$$

où $\phi(\vec{x})$ est le *potentiel scalaire*.

Nous voyons que dans un système électrostatique, le champ électrique $\overleftarrow{E}(\vec{x})$ dérive d'un potentiel scalaire $\phi(\vec{x})$.

b) Condition de minimum :

$\underline{\delta}^{(2)}\Psi[\dots] \geq 0$: $\Psi[\dots]$ étant une fonctionnelle extensive, nous pouvons écrire

$$\Psi[\dots] = \int_V (dV\psi)(\vec{x})$$

et

$$\underline{\delta}^{(1)}\Psi[\dots] = \int_V (dV\psi_i \delta D^i)(\vec{x})$$

avec

$$\psi_i = \frac{\partial\psi}{\partial D^i} = \frac{1}{C_e} (E_i + \overleftarrow{\text{grad}}_i\phi) = \frac{\partial u^{(el.)}}{\partial D^i} + \frac{1}{C_e} \overleftarrow{\text{grad}}_i\phi.$$

La deuxième variation est, puisque $\Psi[\dots]$ est une fonctionnelle extensive,

$$\underline{\delta}^{(2)}\Psi[\dots] = \int_V (dV\psi_{ik} \delta D^i \delta D^k)(\vec{x}) \geq 0$$

avec

$$\psi_{ik} = (\psi_i)_k = \frac{\partial^2 u^{(el.)}}{\partial D^i \partial D^k}.$$

Les variations δD^i et δD^k étant arbitraires, les conditions de minimum de $\Psi[\dots]$, équivalente à celle de $U^{(el.)}[\dots]$, sont données par :

$$\left\{ \frac{\partial^2 u^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})]}{\partial D^i(\vec{x}) \partial D^k(\vec{x})} \right\} \geq 0. \quad (1.2.3)$$

Electrostatique linéaire

L'électrostatique est dite linéaire, lorsque la densité d'énergie électrostatique est une forme quadratique en D^i :

$$u^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})] = \frac{1}{2C_e} \eta_{ik} D^i(\vec{x}) D^k(\vec{x}). \quad (1.2.4)$$

Dans ce cas particulier,

$$E_i = (\eta_{ik} D^k)(\vec{x}).$$

La condition de minimum de $U^{(el.)}$ s'écrit alors :

$$\left\{ \frac{1}{C_e} \eta_{ik}(\vec{x}) \right\} \geq 0.$$

Soit : $C_e > 0$; alors $\{\eta_{ik}(\vec{x})\} \geq 0$. De plus, puisqu'on a une forme quadratique, le tenseur η_{ik} est symétrique : $\eta_{ik} = \eta_{ki} = \eta_{(ik)}$.

Si $\det \eta \neq 0$, il existe un inverse $(\eta^{-1})^{ik}$ tel que $(\eta^{-1})^{ik} \eta_{k\ell} = \delta_k^i$. Nous écrivons généralement : $(\eta^{-1})^{ik} = \epsilon^{ik}$ et $\epsilon^{ik}(\vec{x})$ est appelé le *tenseur diélectrique*.

Dans le système $\Sigma^{(el.)}$, $\epsilon^{ik}(\vec{x})$ doit être considéré comme une propriété de l'espace. (ce n'est que dans un système matériel que $\epsilon^{ik}(\vec{x})$ caractérise une propriété de la matière, celle d'être « diélectrique » cf. sect. 1.7).

Nous pouvons alors écrire

$$D^k(\vec{x}) = \epsilon^{ki}(\vec{x}) E_i(\vec{x})$$

et vérifier que $\{\epsilon^{ik}(\vec{x})\} \geq 0$.

a) si l'espace est homogène, c'est-à-dire si

$$\eta_{ik}(\vec{x}) = \eta_{ik}(\vec{x} + \Delta\vec{x}) = \eta_{ik} \text{ et } \epsilon^{ik}(\vec{x}) = \epsilon^{ik}(\vec{x} + \Delta\vec{x}) = \epsilon^{ik},$$

alors η_{ik} et ϵ^{ik} sont des constantes.

b) si l'espace est isotrope, c'est-à-dire si

$$\eta_{ik}(\vec{x}) = g_{ik} \eta(\vec{x}) \text{ et } \epsilon^{ik}(\vec{x}) = g^{ik} \epsilon(\vec{x}),$$

alors : $\eta_{ik} \epsilon^{\ell k} = \delta_i^\ell = g_{ik} g^{\ell k} \eta \epsilon = \delta_i^\ell \eta \epsilon$ d'où $\eta = \epsilon^{-1}$.

Nous avons : $D^k(\vec{x}) = g^{ki} \epsilon E_i(\vec{x})$. Si nous choisissons un espace euclidien cartésien : $g_{ik} = \delta_{ik}$, alors :

$$\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon(\vec{x}) \vec{E}(\vec{x}).$$

Nous constatons que c'est uniquement dans le cas isotrope et homogène que nous avons la relation bien connue : $\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon \vec{E}(\vec{x})$ où ϵ est alors appelé « constante diélectrique ».

Pour simplifier certains problèmes, des auteurs considèrent $\eta_{ik}(\vec{x})$ comme la *métrique* d'espace du système $\Sigma^{(el.)}$.

Exprimons maintenant l'énergie électrostatique $U^{(el.)}[\dots]$ du système. La forme quadratique

$$u^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})] = \frac{1}{2C_e} \eta_{ik}(\vec{x}) D^i(\vec{x}) D^k(\vec{x})$$

peut s'écrire, puisque $E_i = \eta_{ik} D^k$,

$$u^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})] = \frac{1}{2C_e} (\overleftarrow{E}, \vec{D})(\vec{x}),$$

et alors

$$U^{(el.)}[\dots] = \frac{1}{2C_e} \int_V (dV (\overleftarrow{E}, \vec{D}))(\vec{x}).$$

En vertu du théorème de Green, puisque $\overleftarrow{E} = -\overleftarrow{\text{grad}}\phi$, l'on a

$$\begin{aligned} U^{(el.)} &= -\frac{1}{2C_e} \int_V (dV (\overleftarrow{\text{grad}}\phi, \vec{D}))(\vec{x}) \\ &= \frac{1}{2C_e} \left\{ \int_V (dV \phi \text{div} \vec{D})(\vec{x}) + \oint_V (d\overleftarrow{\sigma}, \phi \vec{D})(\vec{y}) \right\}. \end{aligned}$$

Par normalisation, nous posons $\phi(\infty) = 0$ ce qui ne change en rien les propriétés électriques du système car, de par sa définition, $\overleftarrow{E} = -\overleftarrow{\text{grad}}\phi$, le potentiel n'est défini qu'à une constante près, que l'on peut se donner arbitrairement.

Il s'ensuit que pour $V = V_\infty$, le second terme est nul et il reste

$$U^{(el.)} = \frac{1}{2C_e} \int_{V_\infty} (dV \phi \text{div} \vec{D})(\vec{x}).$$

Comme $\text{div} \vec{D}(\vec{x}) = C_e q(\vec{x})$, l'expression de l'énergie électrostatique est donnée par

$$U^{(el.)} = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} (dV \phi q)(\vec{x}). \quad (1.2.5)$$

Au vu de ce résultat, on serait tenté de croire que la densité d'énergie électrostatique du système peut s'écrire

$$u^{(el.)} = \frac{1}{2} (\phi q)(\vec{x})$$

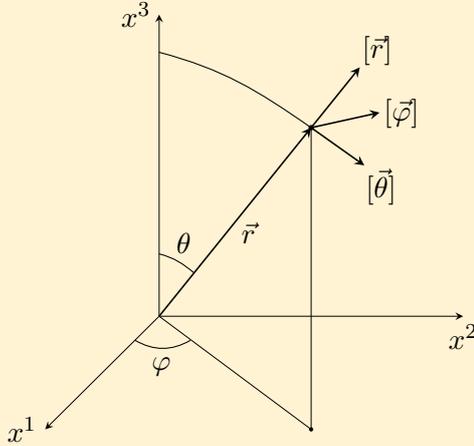
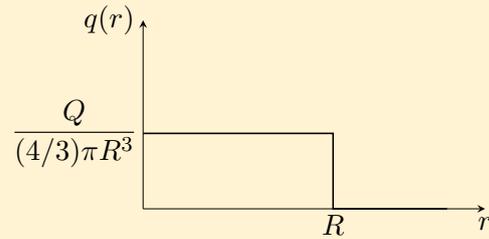
bien qu'elle soit différente de

$$u^{(el.)} = \frac{1}{2C_e} (\overleftarrow{E}, \vec{D})(\vec{x}).$$

En fait seule cette dernière doit être considérée comme valable car la première s'exprime à l'aide de grandeurs étrangère au système (telles que $q(\vec{x})$ par exemple).

EXEMPLE : BOULE CHARGÉE DE RAYON R

Calculer les champs $\vec{D}(\vec{x})$ et $\vec{E}(\vec{x})$, ainsi que l'énergie électrostatique créés par une boule de charge Q répartie de façon homogène et isotrope placée dans le vide.

**Fig. 1.2.1** Coordonnées sphériques**Fig. 1.2.2**

Prenons les coordonnées sphériques $\{r, \theta, \varphi\}$, alors

$$\vec{D} = [\vec{r}]D_r + [\vec{\theta}]D_\theta + [\vec{\varphi}]D_\varphi.$$

Grâce à l'homogénéité de la distribution de charges, il n'y a pas de position privilégiée parmi les rotations : il y a symétrie sphérique et \vec{D} est radial et alors

$$\vec{D} = [\vec{r}]D_r(r).$$

La distribution de charge est

$$q(r) = \begin{cases} \frac{Q}{(4/3)\pi R^3} & \text{pour } r \leq R \\ 0 & \text{pour } r > R. \end{cases}$$

La loi d'induction

$$\oint_V (d\vec{\sigma}, \vec{D}) = C_e \int_V dV q$$

donne, lorsque V est une sphère de rayon r ,

$$4\pi r^3 D_r[\vec{r}] = C_e \int_0^r 4\pi r^2 dr q(r).$$

Cela conduit à

$$D_r(r) = \frac{C_e}{4\pi r^2} \int_0^r 4\pi r^2 dr q(r)$$

et nous obtenons

$$D_r(r) = \begin{cases} \frac{C_e Q}{4\pi} \frac{r}{R^3} & \text{pour } r \leq R \\ \frac{C_e Q}{4\pi} \frac{1}{r^2} & \text{pour } r > R. \end{cases}$$

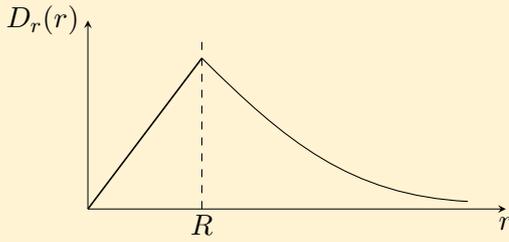


Fig. 1.2.3

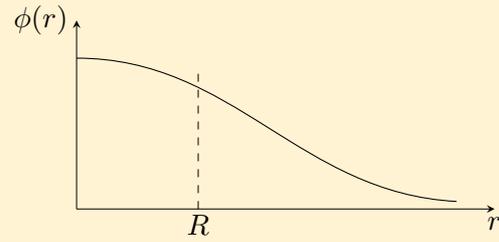


Fig. 1.2.4

Nous supposons que $\vec{E} = (1/\epsilon)\vec{D}$; $\epsilon = \text{cte}$ et l'on a alors

$$E_r = \begin{cases} \frac{C_e Q}{4\pi\epsilon} \frac{r}{R^3} & \text{pour } r \leq R \\ \frac{C_e Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} & \text{pour } r > R. \end{cases}$$

Pour le calcul du potentiel, on utilise la loi : $\vec{E} = -\overleftarrow{\text{grad}}\phi$. Grâce à la symétrie sphérique, elle se réduit à : $E_r = -(d/dr)\phi(r)$. D'où :

a) pour $r \geq R$,

$$\phi(r) = - \int_{+\infty}^r dr E_r = - \frac{C_e Q}{4\pi\epsilon} \int_{+\infty}^r \frac{dr}{r^2} = - \frac{C_e Q}{4\pi\epsilon} \left(-\frac{1}{r} \right),$$

b) pour $r \leq R$,

$$\begin{aligned} \phi(r) - \phi(R) &= \phi(r) - \frac{C_e Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{R} = - \int_R^r dr E_r \\ &= - \frac{C_e Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{R^3} \int_R^r dr r = - \frac{C_e Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{R^3} \frac{1}{2} (r^2 - R^2) \end{aligned}$$

et donc

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{C_e Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{2R^3} (3R^2 - r^2) & \text{si } r \leq R \\ \frac{C_e Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} & \text{si } r > R. \end{cases}$$

Calculons l'énergie électrostatique créée par cette boule :

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} (dV \phi q)(\vec{x}) \quad \text{si } \phi(\infty) = 0.$$

Puisque $q(r \leq R) = Q/(4/3)\pi R^3$,

$$\phi(r \leq R) = \frac{C_e Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{2R^3} (3R^2 - r^2)$$

et alors

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^R 4\pi r^2 dr \frac{C_e Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{2R^3} (3R^2 - r^2) \frac{3Q}{4\pi R^3} \\ &= \frac{3}{4} \frac{C_e Q^2}{4\pi\epsilon R^6} \left[3R^2 \int_0^R dr r^2 - \int_0^R dr r^4 \right] = \frac{3}{4} \frac{C_e Q^2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{R^6} \left(R^5 - \frac{R^5}{5} \right). \end{aligned}$$

L'énergie électrostatique de la boule est donc :

$$U^{(el.)} = \frac{3}{5} \frac{C_e}{4\pi\epsilon} \frac{Q^2}{R}.$$

Cette relation montre qu'en électrostatique linéaire, il ne peut pas exister de charge ponctuelle ($R = 0$).

1.3 Force sur une charge rigide

Nous avons vu que les charges électriques, sources du champ de déplacement $\vec{D}(\vec{x})$ sont intimement liées à la matière.

Par la loi d'induction, nous constatons que si nous modifions la distribution de charges (en déformant la matière par exemple) il s'ensuit une modification du champ $\vec{D}(\vec{x})$ et par suite une modification de l'énergie électrostatique. Il y a donc un échange d'énergie entre le système matériel et le système électrostatique ; du point de vue de ce dernier système, le premier principe de la thermodynamique s'écrit

$$\delta U^{(el.)} = \delta \mathcal{A}^{(inc.)},$$

où $\delta \mathcal{A}^{(inc.)}$ est le travail fourni par le système matériel au système électrostatique.

Supposons que la distribution de charges est fixée dans un bloc de matière rigide. Pour modifier cette distribution, nous allons déplacer ce bloc de $\delta \vec{r}$ en lui appliquant une force $\overleftarrow{K}^{(inc.)}$; nous aurons alors

$$\delta \mathcal{A}^{(inc.)} = (\overleftarrow{K}^{(inc.)}, \delta \vec{r}).$$

La variation d'énergie électrostatique correspondante se calcule de la même façon qu'à la section précédente par la méthode des multiplicateurs de Lagrange ; nous construisons la fonctionnelle

$$\Psi[\dots] = \int_V dV(\vec{x}) \left[u^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})] - \phi(\vec{x}) \left(\frac{1}{C_e} \operatorname{div} \vec{D}(\vec{x}) - q(\vec{x}) \right) \right]$$

et nous aurons : $\underline{\delta} \Psi[\dots] = \delta \mathcal{A}^{(inc.)}$.

En supposant l'espace homogène :

$$u^{(el.)} = u^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})] \quad \text{donc} \quad \delta u^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})] = \frac{1}{C_e} (\overleftarrow{E}, \delta \vec{D})$$

En d'autres termes, cela signifie que toutes les propriétés de la matière se confinent à la présence de la charge $q(\vec{x})$. Alors

$$\begin{aligned} \delta \Psi[\dots] &= \int_V dV(\vec{x}) \left[\frac{1}{C_e} (\overleftarrow{E}, \delta \vec{D}) - \phi \frac{1}{C_e} \operatorname{div} \delta \vec{D} \right](\vec{x}) \\ &+ \int_V dV(\vec{x}) (\phi \delta q)(\vec{x}) = (\overleftarrow{K}^{(inc.)}, \delta \vec{r}), \end{aligned}$$

où $\delta q(\vec{x})$ est la variation de charge au point \vec{x} due au déplacement.

En appliquant le théorème de Green à la première intégrale, nous obtenons

$$\begin{aligned} \underline{\delta\Psi}[\dots] &= \frac{1}{C_e} \int_{V_\infty} \left(dV(\overleftarrow{E} + \overleftarrow{\text{grad}}\phi, \delta\vec{D}) \right)(\vec{x}) + \underbrace{\oint_{V_\infty} \left(d\overleftarrow{\sigma}, \frac{1}{C_e}\phi\delta\vec{D} \right)(\vec{y})}_{=0} \\ &+ \int_{V_\infty} (dV\phi\delta q)(\vec{x}) = (\overleftarrow{K}^{(inc.)}, \delta\vec{r}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\int_{V_\infty} (dV\phi\delta q)(\vec{x}) = (\overleftarrow{K}^{(inc.)}, \delta\vec{r}).$$

Calculons $\delta q(\vec{x})$, connaissant la distribution $q(\vec{x})$ et sachant que le bloc de matière est rigide.

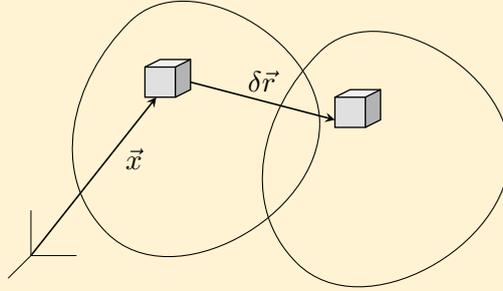


Fig. 1.3.1

Au point \vec{x} , avant le déplacement nous avons $q^{(in.)}(\vec{x})$; après le déplacement, nous avons $q^{(fin.)}(\vec{x})$. Donc $\delta q(\vec{x}) = q^{(fin.)}(\vec{x}) - q^{(in.)}(\vec{x})$.

Mais $q^{(fin.)}(\vec{x})$ était la distribution au point $(\vec{x} - \delta\vec{r})$ avant le déplacement, donc $\delta q(\vec{x}) = q^{(in.)}(\vec{x} - \delta\vec{r}) - q^{(in.)}(\vec{x})$.

Or, par la formule des accroissements finis et en négligeant les termes d'ordre supérieur à un, nous obtenons

$$q^{(in.)}(\vec{x} - \delta\vec{r}) = q^{(in.)}(\vec{x}) - \partial_i q^{(in.)}(\vec{x}) \delta r^i.$$

Par identification (et en supprimant les indices devenus inutiles) nous obtenons enfin

$$\delta q(\vec{x}) = -(\overleftarrow{\text{grad}}q, \delta\vec{r}). \quad (1.3.1)$$

Il vient alors :

$$- \int_{V_\infty} (dV(\vec{x})\phi(\vec{x})\overleftarrow{\text{grad}}q(\vec{x}), \delta\vec{r}) = (\overleftarrow{K}^{(inc.)}, \delta\vec{r}).$$

Comme $\delta\vec{r}$ est un déplacement de \vec{x} , on peut le sortir de l'intégrale et obtenir

$$\left(- \int_{V_\infty} (dV\phi\overleftarrow{\text{grad}}q)(\vec{x}), \delta\vec{r} \right) = (\overleftarrow{K}^{(inc.)}, \delta\vec{r}).$$

Puisque $\delta\vec{r}$ est un déplacement arbitraire, nous avons

$$-\int_{V_\infty} (dV \phi \overleftarrow{\text{grad}} q)(\vec{x}) = \overleftarrow{K}^{(inc.)}.$$

(Remarquons que l'intégration peut se faire uniquement sur le volume V du bloc de matière puisqu'en dehors $q(\vec{x}) = 0$.)

L'équilibre ne peut être atteint que si le système électrostatique oppose à la force $\overleftarrow{K}^{(inc.)}$ une force, $\overleftarrow{K}^{(el.)}$ telle que :

$$\overleftarrow{K}^{(inc.)} + \overleftarrow{K}^{(el.)} = \overleftarrow{0}.$$

Par conséquent,

$$\overleftarrow{K}^{(el.)} = \int_{V_\infty} (dV \phi \overleftarrow{\text{grad}} q)(\vec{x}).$$

En appliquant le théorème de Green, on a

$$\overleftarrow{K}^{(el.)} = -\int_{V_\infty} (dV q \overleftarrow{\text{grad}} \phi)(\vec{x}) + \underbrace{\oint_{V_\infty} (d\vec{\sigma} q \phi)(\vec{y})}_{=0}.$$

Or $\overleftarrow{\text{grad}} \phi = -\overleftarrow{E}$, donc

$$\overleftarrow{K}^{(el.)} = -\overleftarrow{K}^{(inc.)} = \int_{V_\infty} (dV q \overleftarrow{E})(\vec{x}). \quad (1.3.2)$$

Le champ \overleftarrow{E} est responsable de la force électrostatique.

1.4 Loi de Coulomb

Considérons deux boules Q_1 et Q_2 chargées de façon homogène placées dans un milieu pour lequel l'électrostatique linéaire isotrope et homogène est valable ($\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon \vec{E}(\vec{x})$).

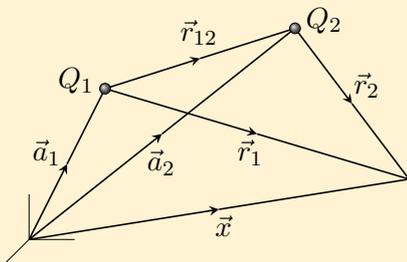


Fig. 1.4.1

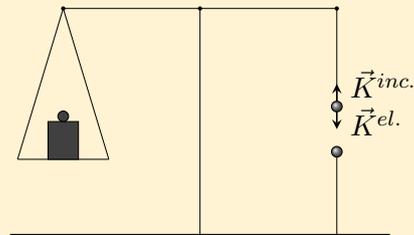


Fig. 1.4.2

Chaque boule crée un champ : le champ total au point \vec{x} est (addition vectorielle)

$$\vec{D}(\vec{x}) = \vec{D}_1(\vec{x}) + \vec{D}_2(\vec{x}).$$

Les boules de l'exemple de la section 1.2 donnent, pour tout point extérieur aux boules,

$$\vec{D}(\vec{x}) = \frac{C_e}{4\pi} \left(\frac{Q_1}{r_1^2} [\vec{r}_1] + \frac{Q_2}{r_2^2} [\vec{r}_2] \right) (\vec{x})$$

et

$$\overleftarrow{E}(\vec{x}) = \overleftarrow{E}_1(\vec{x}) + \overleftarrow{E}_2(\vec{x}) \text{ avec } \begin{cases} \overleftarrow{E}_1(\vec{x}) = \frac{C_e}{4\pi} \frac{Q_1}{r_1^2} [\vec{r}_1](\vec{x}) \\ \overleftarrow{E}_2(\vec{x}) = \frac{C_e}{4\pi} \frac{Q_2}{r_2^2} [\vec{r}_2](\vec{x}). \end{cases}$$

La force électrique exercée sur la boule Q_1 vaut

$$\overleftarrow{K}^{(el.)} = \int_{B_2} (dV q_2 \overleftarrow{E})(\vec{x}),$$

où $q_2(\vec{x})$ est la densité de charge dans la boule B_2 qui vaut q_2 si la distribution est homogène ; dans ce cas

$$\overleftarrow{K}^{(el.)} = \int_{B_2} (dV q_2 \overleftarrow{E}_1)(\vec{x}) + \underbrace{\int_{B_2} (dV q_2 \overleftarrow{E}_2)(\vec{x})}_{=0 \text{ car } q_2 \text{ et } \overleftarrow{E}_2 \text{ sont à symétrie sphérique}}$$

Sous ces hypothèses, nous voyons que le champ crée par une boule homogène n'a pas d'influence sur elle.

Si la dimension des boules est petite en regard de leur distance, nous pouvons écrire

$$\overleftarrow{K}^{(el.)} = Q_2 \overleftarrow{E}_1(\vec{a}_2) \text{ avec } \overleftarrow{E}_1(\vec{x}) = \frac{C_e}{4\pi\epsilon} \frac{Q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} [\vec{r}_{12}].$$

En remplaçant $\overleftarrow{E}_1(\vec{a}_2)$ par son expression, nous obtenons la *loi de Coulomb*

$$\overleftarrow{K}_{(1 \rightarrow 2)}^{(el.)} = \frac{C_e}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} [\overleftarrow{r}_{12}]. \quad (1.4.1)$$

Cette loi exprime la force électrique exercée par la boule B_1 sur la boule B_2 . Historiquement, ce fut la première loi de l'électrostatique découverte par Coulomb.

Cette loi, du type newtonien, correspondait parfaitement à la conception mécaniste du monde en vigueur à l'époque : force dépendant de la distance seulement et par suite s'exerçant à distance. Ce ne fut que par l'étude des courants électriques et de l'électrodynamique en général, que cette conception dut être abandonnée au profit de celle du champ.

Exprimons cette loi dans le système C.G.S. ($C_e = 4\pi$ et $\epsilon_{\text{vide}} = 1$) ; il vient

$$\overleftarrow{K}_{1 \rightarrow 2}^{(el.)} = \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} [\overleftarrow{r}_{12}].$$

Dans ce système, la charge électrique a comme dimension : $[Q] = \text{g}^{1/2} \text{cm}^{3/2} \text{s}^{-1}$.

1.5 Déplacement conservatif de la charge

Nous allons reprendre le problème de la section 1.4 mais en supposant cette fois, comme c'est généralement le cas dans la nature, un corps déformable et non plus rigide. Mais alors, le déplacement des charges liés à ce corps n'est plus donné par un unique vecteur $\delta\vec{r}$, mais par un champ vectoriel $\delta\vec{r}(\vec{x})$ ⁽¹⁾.

Le travail fourni au système électrostatique sera alors :

$$\mathcal{A}^{(inc.)} = \int_V (d^3\overleftarrow{K}^{(inc.)}, \delta\vec{r})(\vec{x})$$

mais nous aurons toujours

$$\int_V (dV\phi q)(\vec{x}) = \delta\mathcal{A}^{(inc.)}.$$

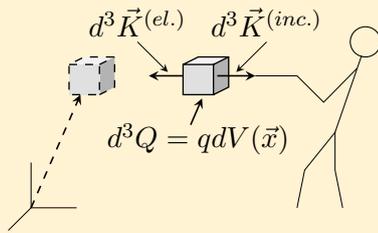


Fig. 1.5.1

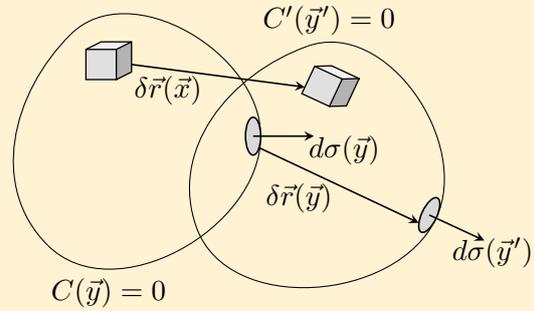


Fig. 1.5.2

Calculons $\delta q(\vec{x})$ sous la nouvelle hypothèse d'un corps déformable. Il est assez naturel de supposer que la charge totale

$$Q_V = \int_V (dVq)(\vec{x})$$

contenue dans le corps se *conserve* au cours d'un déplacement, cela signifie qu'aucune charge ne peut s'annuler ou sortir du corps⁽²⁾. Il s'ensuit alors que $\delta Q_V = 0$. Nous avons :

$$\delta Q_V = \int_V (dV\delta q)(\vec{x}) + \int_V (\delta Vq)(\vec{x}).$$

Or $\delta V = (d^3\overleftarrow{\sigma}, \delta\vec{r})$, donc :

$$\delta Q_V = \int_V (dV\delta q)(\vec{x}) + \oint_V (\overleftarrow{\sigma}, \delta\vec{r}q)(\vec{y}) = 0.$$

N'ayant fait aucune hypothèse sur le volume V , nous devons avoir :

$$\delta q(\vec{x}) = -\text{div}(\delta\vec{r}q)(\vec{x}), \quad (1.5.1)$$

⁽¹⁾Ici la distribution déformée peut constituer l'unique source de \vec{D} .

⁽²⁾Pas du volume V qui lui est fixe! (c.f. tome I).

ce qui exprime la variation totale de charge lorsque la charge totale est conservée.

Nous avons alors

$$- \int_V (dV \phi \operatorname{div} \delta \vec{r} q)(\vec{x}) = \int_V (d^3 \overleftarrow{K}^{(inc.)}, \delta \vec{r}).$$

En appliquant le théorème de Green au premier membre, nous obtenons

$$\int_{V_\infty} (dV q \overleftarrow{\operatorname{grad}} \phi, \delta \vec{r})(\vec{x}) - \underbrace{\oint_{V_\infty} (d^3 \overleftarrow{\sigma}, \phi q \delta \vec{r})(\vec{y})}_{=0 \text{ car le corps est de dimension finie}} = \int_{V_\infty} (d^3 \overleftarrow{K}^{(inc.)}, \delta \vec{r})(\vec{x}).$$

Puisque $\overleftarrow{\operatorname{grad}} \phi = -\overleftarrow{E}$, il vient

$$- \oint_{V_\infty} (dV q \overleftarrow{E}, \delta \vec{r})(\vec{x}) = \int_{V_\infty} (d^3 \overleftarrow{K}^{(inc.)}, \delta \vec{r})(\vec{x}).$$

Comme le champ de déplacement $\delta \vec{r}(\vec{x})$ est choisi arbitrairement, nous devons avoir

$$(d^3 \overleftarrow{K}^{(inc.)} = dV q \overleftarrow{E})(\vec{x})$$

et, puisque $(dV q = d^3 Q)(\vec{x})$,

$$d^3 \overleftarrow{K}^{(inc.)}(\vec{x}) = -d^3 Q \overleftarrow{E}(\vec{x}).$$

L'équilibre n'étant réalisé que lorsque

$$\overleftarrow{K}^{(el.)} + \overleftarrow{K}^{(inc.)} = \overleftarrow{0},$$

nous obtenons

$$d^3 \overleftarrow{K}^{(el.)}(\vec{x}) = (d^3 Q \overleftarrow{E})(\vec{x}). \quad (1.5.2)$$

Ces lois de force permettent d'affirmer qu'un corps contenant des charges et les conservant est à l'équilibre sous l'action de deux forces égales et opposées. L'une d'origine électrique $\overleftarrow{K}^{(el.)}$ tend à modifier la distribution de charge et l'autre, d'origine matérielle $\overleftarrow{K}^{(inc.)}$ tend à la conserver ou inversement.

1.6 Conducteurs

Pour le système électrostatique $\Sigma^{(el.)}$, un conducteur est un trou dans l'espace, c'est-à-dire que c'est un volume de l'espace dans lequel n'existe aucune propriété électrique. Par contre, la surface du conducteur (du trou) n'est pas soumise à cette restriction. Considérons un conducteur a , limité par la surface $C_a(\vec{y}) = 0$. La loi d'induction appliquée à ce conducteur donne :

$$C_e Q_a = - \oint_{C_a(\vec{y})=0} (d^3 \overleftarrow{\sigma}, \vec{D})(\vec{y}_a). \quad (1.6.1)$$

Le signe $-$ provient du fait que nous avons pris un élément de surface *intérieur* $d\vec{\sigma}(\vec{y})$. La loi d'induction donnant en quelque sorte une correspondance entre le système électrostatique et le système matériel, nous pouvons en déduire que la charge Q_a d'un conducteur matériel ne peut exister que *sur la surface*; en effet, si elle était répartie à l'intérieur, elle constituerait une source du champ \vec{D} , ce qui ne peut être puisqu'à l'intérieur du conducteur \vec{D} est nul, par définition du conducteur.

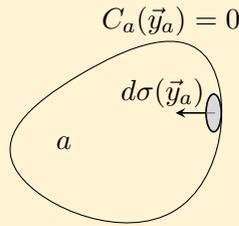


Fig. 1.6.1

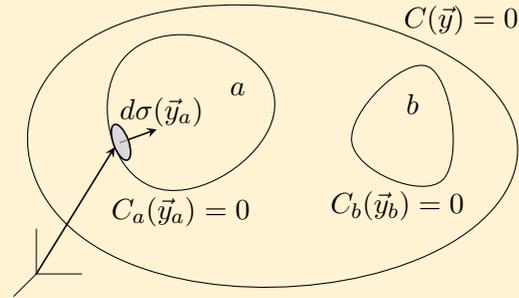


Fig. 1.6.2

Remarque.

Le terme « conducteur » n'a guère de signification en électrostatique. Par contre il prend tout son sens en électrodynamique : un conducteur est alors un corps dans lequel les charges électriques peuvent se déplacer à peu près librement sous l'action de la force électrique $\vec{K}^{(el.)}$ ($\vec{K}^{(el.)} \approx 0$). Remarquons encore que si à l'extérieur du conducteur il existe des propriétés électriques, la charge superficielle Q_a est nécessaire et doit être répartie de façon à annuler dans le conducteur les propriétés électriques provoquées par le milieu extérieur.

Considérons un système constitué de conducteurs a, b, \dots portant une charge superficielle Q_a, Q_b, \dots et entre lesquelles existe une distribution de charge caractérisées par la densité $q(\vec{x})$. Nous allons déformer les conducteurs et la matière portant les charges selon le champ de déplacement $\delta\vec{r}(\vec{x})$. Le travail fourni au système électrostatique par cette opération sera

$$\delta\mathcal{A}^{(inc.)} = \int_V \left(d^3\vec{K}^{(inc.)}, \delta\vec{r} \right) (\vec{x}) + \sum_a \oint_{C_a} \left(d^2\vec{K}^{(inc.)}, \delta\vec{r} \right) (\vec{y}_a).$$

Comme le champ $\vec{D}(\vec{x})$ est soumis à diverses contraintes, le premier principe de la thermodynamique appliqué au système électrostatique s'écrit

$$\underline{\delta}\Psi[\dots] = \delta\mathcal{A}^{(inc.)},$$

où $\Psi[\dots]$ est la fonctionnelle auxiliaire

$$\begin{aligned} \Psi[\vec{D}(\cdot), C_a(\cdot)] &= \int_V dV(\vec{x}) \left[u^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})] - \phi(\vec{x}) \left(\frac{1}{C_e} \operatorname{div} \vec{D}(\vec{x}) - q(\vec{x}) \right) \right] \\ &+ \sum_a \phi_a \left(\frac{1}{C_e} \oint_{C_a} (d\vec{\sigma}, \vec{D})(\vec{y}_a) + Q_a \right), \end{aligned}$$

où ϕ_a est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte

$$C_e Q_a = - \oint_{C_a} (d^{\leftarrow} \sigma, \vec{D})(\vec{y}_a).$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} \underline{\delta} \Psi[\dots] &= \int_V \left(dV \left(\frac{1}{C_e} (\overleftarrow{E}, \delta \vec{D}) - \phi \left(\frac{1}{C_e} \operatorname{div} \delta \vec{D} - \delta q \right) \right) (\vec{x}) \right. \\ &\quad + \sum_a \oint_{C_a} (d^{\leftarrow} \sigma, \delta \vec{r}) \left[(u^{(el.)}) - \phi \left(\frac{1}{C_e} \operatorname{div} \vec{D} - q \right) \right] (\vec{y}_a) \\ &\quad \left. + \sum_a \phi_a \frac{1}{C_e} \underline{\delta} \left(\oint_{C_a} (d^{\leftarrow} \sigma, \vec{D})(\vec{y}_a) + C_e Q_a \right) \right). \end{aligned}$$

1. — Occupons-nous d'abord de la première intégrale. Nous avons vu, d'une part que

$$\delta q(\vec{x}) = -\operatorname{div}(q \delta \vec{r})(\vec{x}),$$

et d'autre part que

$$-\phi \operatorname{div} \delta \vec{D} = -\operatorname{div}(\phi \delta \vec{D}) + (\delta \vec{D}, \overleftarrow{\operatorname{grad}} \phi)$$

et

$$\phi \delta q = -\phi \operatorname{div}(q \delta \vec{r}) = -\operatorname{div}(\phi q \delta \vec{r}) + (q \delta \vec{r}, \overleftarrow{\operatorname{grad}} \phi).$$

Cette première intégrale s'écrit alors

$$\int_V dV(\vec{x}) \left[\frac{1}{C_e} (\delta \vec{D}, \overleftarrow{E} + \overleftarrow{\operatorname{grad}} \phi) - \frac{1}{C_e} \operatorname{div}(\phi \delta \vec{D}) + q (\delta \vec{r}, \overleftarrow{\operatorname{grad}} \phi) - \operatorname{div}(\phi \delta \vec{r}) \right] (\vec{x}).$$

En appliquant le théorème de Gauss sur les termes constitués par une divergence, nous obtenons :

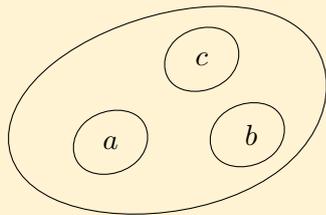


Fig. 1.6.3

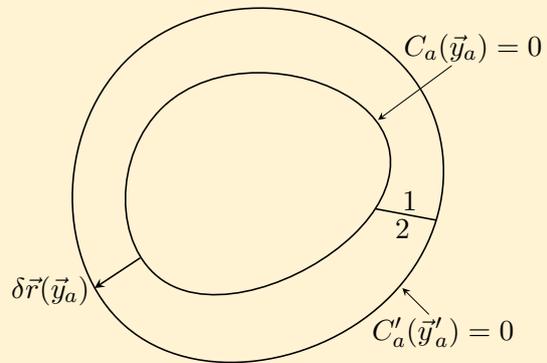


Fig. 1.6.4

$$\int_V dV(\vec{x}) \left[\frac{1}{C_e} (\delta \vec{D}, \overleftarrow{E} + \overleftarrow{\text{grad}} \phi) + (q \delta \vec{r}, \overleftarrow{\text{grad}} \phi) \right] (\vec{x})$$

$$- \underbrace{\oint_V \dots}_{=0 \text{ cf. remarque finale}} - \sum_a \oint_{C_a} \left(d\overleftarrow{\sigma}, \left[\frac{1}{C_e} \phi \delta \vec{D} + \phi q \delta \vec{r} \right] \right) (\vec{y}_a).$$

2. — Considérons maintenant la troisième intégrale de l'expression $\underline{\delta}\Psi[\dots]$

$$\sum_a \phi_a \frac{1}{C_e} \underline{\delta} \left(\oint_{C_a} (d\overleftarrow{\sigma}, \vec{D})(\vec{y}_a) + C_e Q_a \right).$$

Tout d'abord, nous supposons que la charge superficielle ne diffuse pas : $\delta Q_a = 0$. Soient $C_a(\vec{y}_a) = 0$ la surface limitant le conducteur a et $C'_a(\vec{y}_a) = 0$ la surface déformée par $\delta \vec{r}(\vec{y}_a)$ du conducteur a . Nous avons

$$\underline{\delta} \oint_{C_a} (d\overleftarrow{\sigma}, \vec{D})(\vec{y}_a) = \left\{ \oint_{C'_a} (d\overleftarrow{\sigma}', \vec{D}) - \oint_{C_a} (d\overleftarrow{\sigma}, \vec{D})(\vec{y}_a) \right\} + \oint_{C_a} (d\overleftarrow{\sigma}, \delta \vec{D})(\vec{y}_a).$$

Introduisons la surface fermée Σ formée de $C_a(\vec{y}_a) = 0$, de $C'_a(\vec{y}_a) = 0$, de 1 et de 2. Alors :

$$\left\{ \oint_{C'_a} (d\overleftarrow{\sigma}', \vec{D})(\vec{y}_a) - \oint_{C_a} (d\overleftarrow{\sigma}, \vec{D})(\vec{y}_a) \right\} = \oint_{\Sigma} (d\overleftarrow{\sigma}, \vec{D})(\vec{y}_{\Sigma}).$$

En effet, la contribution des surfaces 1 et 2 se compensent. En appliquant le théorème de Gauss, nous obtenons

$$\oint_{\Sigma} (d\overleftarrow{\sigma}, \vec{D})(\vec{y}_{\Sigma}) = \int_{V_{\Sigma}} (dV_{\Sigma} \text{div} \vec{D})(\vec{x}_{\Sigma})$$

et

$$\sum_a \phi_a \frac{1}{C_e} \underline{\delta} \left(\oint_{C_a} (d\overleftarrow{\sigma}, \vec{D})(\vec{y}_a) + C_e Q_a \right)$$

$$= \sum_a \phi_a \frac{1}{C_e} \left\{ \oint_{C_a} ((d\overleftarrow{\sigma}, \delta \vec{r}) \text{div} \vec{D})(\vec{y}_a) + \oint_{C_a} (d\overleftarrow{\sigma}, \delta \vec{D})(\vec{y}_a) \right\}.$$

3. — Finalement, la variation $\underline{\delta}\Psi[\dots]$ peut s'écrire

$$\underline{\delta}\Psi[\dots] = \int_V dV(\vec{x}) \left[\frac{1}{C_e} (\delta \vec{D}, \overleftarrow{E} + \overleftarrow{\text{grad}} \phi) + (q \delta \vec{r}, \overleftarrow{\text{grad}} \phi) \right] (\vec{x})$$

$$- \sum_a \oint_{C_a} \left(d\overleftarrow{\sigma}, \left[\frac{1}{C_e} \phi \delta \vec{D} + \phi q \delta \vec{r} \right] \right) (\vec{y}_a)$$

$$+ \sum_a \oint_{C_a} (d\overleftarrow{\sigma}, \delta \vec{r}) \left[u^{(el.)} - \phi \left(\frac{1}{C_e} \text{div} \vec{D} - q \right) \right] (\vec{y}_a)$$

$$+ \sum_a \phi_a \frac{1}{C_e} \left\{ \oint_{C_a} ((d\overleftarrow{\sigma}, \delta \vec{r}) \text{div} \vec{D})(\vec{y}_a) + \oint_{C_a} (d\overleftarrow{\sigma}, \delta \vec{D})(\vec{y}_a) \right\}.$$

Ou encore, en regroupant certains termes,

$$\begin{aligned}
\delta\Psi[\dots] &= \int_V dV(\vec{x}) \left(\delta\vec{D}, \frac{1}{C_e} (\overleftarrow{E} + \overleftarrow{\text{grad}}\phi) \right) (\vec{x}) \\
&+ \sum_a \oint_{C_a} \frac{1}{C_e} (d\overleftarrow{\sigma}, \delta\vec{D}) (\phi_a - \phi) (\vec{y}_a) + \int_V dV(\vec{x}) \left(\delta\vec{r}, q \overleftarrow{\text{grad}}\phi \right) (\vec{x}) \\
&+ \sum_a \oint_{C_a} (d\overleftarrow{\sigma}, \delta\vec{r}) \left[u^{(el.)} - \frac{1}{C_e} \phi \text{div}\vec{D} + \frac{1}{C_e} \phi_a \text{div}\vec{D} \right] (\vec{y}_a) \\
&= \int_V (d^3\overleftarrow{K}^{(inc.)}, \delta\vec{r}) (\vec{x}) + \sum_a \oint_{C_a} (d^2\overleftarrow{K}^{(inc.)}, \delta r) (\vec{y}_a).
\end{aligned}$$

Comme les variations $\delta\vec{D}$ et $\delta\vec{r}$ sont arbitraire, nous devons annuler leurs coefficients dans chacun des types d'intégrales, ce qui donne :

- 1) le coefficient de $\delta\vec{D}$ dans l'intégrale de volume,

$$\overleftarrow{E} + \overleftarrow{\text{grad}}\phi = 0,$$

- 2) le coefficient de $\delta\vec{D}$ dans chacune des intégrales de surface d'un conducteur,

$$\phi_a - \phi = 0,$$

- 3) le coefficient de $\delta\vec{r}$ dans l'intégrale de volume,

$$dV q \overleftarrow{\text{grad}}\phi - d^3\overleftarrow{K}^{(inc.)} = \overleftarrow{0}, \text{ c'est-à-dire } -d^3Q\overleftarrow{E} - d^3\overleftarrow{K}^{(inc.)} = \overleftarrow{0},$$

- 4) le coefficient de $\delta\vec{r}$ dans chacune des intégrales de surface d'un conducteur,

$$d\overleftarrow{\sigma} \left[u^{(el.)} + \frac{1}{C_e} \text{div}\vec{D}(\phi_a - \phi) \right] - d^2\overleftarrow{K}^{(inc.)} = \overleftarrow{0}.$$

Ce très long calcul de variations nous apporte deux nouvelles lois fondamentales pour l'étude des conducteurs :

- 1) Une propriété importante :

$$\phi(\vec{y} \in C_a) = \phi_a. \quad (1.6.2).$$

Le potentiel sur la surface d'un conducteur est constant. : on dit que la surface d'un conducteur est une *équipotentielle*. Puisque $\overleftarrow{E} = -\overleftarrow{\text{grad}}\phi$, alors on voit que *le champ électrique est normal à la surface d'un conducteur.*

- 2) Comme $\phi(\vec{y}_a) = \phi_a$, le coefficient 4) s'écrit :

$$(d\overleftarrow{\sigma} u^{(el.)})(\vec{y}_a) = d^3\overleftarrow{K}^{(inc.)}(\vec{y}_a).$$

Il n'y a équilibre que lorsque cette force est compensée par une force d'origine électrique $d^3\overleftarrow{K}^{(el.)}(\vec{y}_a)$ telle que $d^3\overleftarrow{K}^{(inc.)} + d^3\overleftarrow{K}^{(el.)} = \overleftarrow{0}$, d'où

$$d^3\overleftarrow{K}^{(el.)}(\vec{y}_a) = -d\overleftarrow{\sigma} u^{(el.)}[\vec{y}_a, \vec{D}(\vec{y}_a)]. \quad (1.6.3)$$

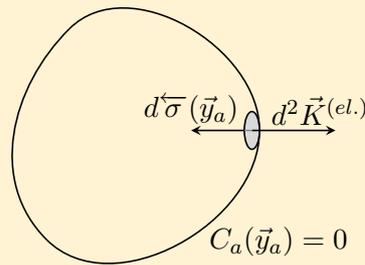


Fig. 1.6.5

La force électrique est normale au conducteur et tend à le *dilater* car $u^{(el.)} > 0$. Puisque le potentiel est constant à la surface d'un conducteur, nous pouvons toujours remplacer la condition $\phi = 0$ à l'infini par la condition $\phi = \text{cte}$ sur *un* conducteur qui isole tout le système étudié. Par exemple,

$$\oint_{C_a} \left(d^2\vec{\sigma}, \frac{1}{C_e} \phi \delta \vec{D} \right) (\vec{y}_a) = \frac{\phi}{C_e} \oint_{C_a} (d^2\vec{\sigma}, \delta \vec{D}) = \frac{1}{C_e} \phi_0 \delta Q_0.$$

1.7 Force sur un diélectrique rigide

Pour notre système électrostatique, un diélectrique est un volume de l'espace caractérisé par une « constante » diélectrique isotrope $\epsilon(\vec{x})$ non nulle.

La notion de diélectrique n'a donc de sens qu'en électrostatique linéaire. Mais alors, contrairement à ce que nous avons supposé aux sections 1.3, 1.5 et 1.6, l'espace n'est plus homogène quant à ses propriétés électriques et la densité électrostatique doit dépendre explicitement de \vec{x} :

$$u^{(el.)} = u^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})],$$

c'est-à-dire, puisque nous sommes en électrostatique linéaire et isotrope,

$$u^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})] = \frac{1}{2C_e} \frac{1}{\epsilon(\vec{x})} |\vec{D}|^2(\vec{x}).$$

Pour simplifier, nous allons admettre que nous ignorons quelle relation peut exister entre l'état électrique d'une substance et sa densité de masse ; par conséquent, tous les corps diélectriques envisagés seront *rigides*.

Si nous modifions l'état diélectrique en un point \vec{x} (par déplacement du corps par exemple) nous modifions $\epsilon(\vec{x})$ et par suite l'énergie électrostatique du système. Il y a donc, en vertu de la thermodynamique un échange d'énergie entre le système électrostatique et le système matériel.

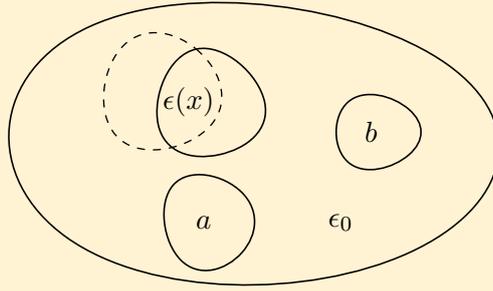


Fig. 1.7.1

Considérons un système formé d'un diélectrique rigide et de conducteurs a, b, \dots enfermés dans un milieu contenant des charges. Le premier principe de la thermodynamique appliqué à ce système est

$$\underline{\delta\Psi}[\dots] = \delta\mathcal{A}^{(inc.)},$$

où $\Psi[\dots]$ est la fonctionnelle auxiliaire

$$\begin{aligned} \Psi[\dots] = & \int_V dV(\vec{x}) \left[\frac{1}{2C_e} \frac{1}{\epsilon(\vec{x})} |\vec{D}|^2(\vec{x}) - \phi(\vec{x}) \left(\frac{1}{C_e} \operatorname{div} \vec{D}(\vec{x}) - q(\vec{x}) \right) \right] \\ & + \sum_a \phi_a \left(\oint_{C_a} (d\vec{\sigma}, \vec{D})(\vec{x}) + C_e Q_a \right) \end{aligned}$$

Il est parfaitement inutile de reprendre le long calcul de variation fait au paragraphe précédent (l'hypothèse de linéarité et d'isotropie ne modifie pas la forme des lois trouées). Nous pouvons nous contenter d'examiner les termes additionnels dus à la présence supplémentaire d'un diélectrique rigide.

Nous constatons facilement qu'il n'y a qu'un seul terme additionnel : il provient de la variation de la densité d'énergie électrostatique :

$$\begin{aligned} \delta u^{(el.)} = & \delta \left(\frac{1}{2C_e} \frac{1}{\epsilon(\vec{x})} |\vec{D}|^2(\vec{x}) \right) = \frac{1}{C_e} (\overleftarrow{E}, \delta \vec{D})(\vec{x}) + \frac{1}{2C_e} |\vec{D}|^2(\vec{x}) \delta \frac{1}{\epsilon(\vec{x})} \\ = & \frac{1}{C_e} (\overleftarrow{E}, \delta \vec{D})(\vec{x}) - \underbrace{\frac{1}{2C_e} \left(|\vec{D}|^2 \frac{1}{\epsilon^2} \delta \epsilon \right)(\vec{x})}_{\text{terme additionnel}}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\underline{\delta\Psi}_{\text{additionnel}}[\dots] = -\frac{1}{2C_e} \int_V \left(dV |\vec{D}|^2 \frac{1}{\epsilon^2} \delta \epsilon \right)(\vec{x}).$$

Le diélectrique étant rigide, le seul déplacement envisagé est $\delta \vec{r}(\vec{x})$. Alors il vient (cf. section 1.3) :

$$\epsilon(\vec{x}) = \epsilon(\vec{x} - \delta \vec{r}) - \epsilon(\vec{x}) = -\partial_i \epsilon(\vec{x}) \delta r^i,$$

d'où :

$$\delta \epsilon(\vec{x}) = -(\delta \vec{r}, \overleftarrow{\operatorname{grad}} \epsilon)(\vec{x}) \quad (1.7.1)$$

(expression formelle, à moins d'imposer une certaine différentiabilité à la fonction $\epsilon(\vec{x})$).

En remplaçant dans $\underline{\delta\Psi}_{\text{add.}}[\dots]$, $\delta\epsilon(\vec{x})$ par cette expression, nous obtenons

$$\underline{\delta\Psi}_{\text{add.}}[\dots] = \frac{1}{2C_e} \int_V \left(dV |\vec{D}|^2 \frac{1}{\epsilon^2} (\delta\vec{r}, \overleftarrow{\text{grad}}\epsilon) \right) (\vec{x}).$$

Avec $\vec{E} = (1/\epsilon)\vec{D}$, on a

$$\underline{\delta\Psi}_{\text{add.}}[\dots] = \frac{1}{2C_e} \int_V \left(dV |\overleftarrow{E}|^2 (\delta\vec{r}, \overleftarrow{\text{grad}}\epsilon) \right) (\vec{x}).$$

Le travail additionnel fourni au système électrostatique est

$$\delta\mathcal{A}_{\text{add.}}^{(inc.)} = (\overleftarrow{K}^{(inc.)}, \delta\vec{r}).$$

Les autres relations étant conservées, nous devons avoir

$$\begin{aligned} \underline{\delta\Psi}_{\text{add.}} &= \delta\mathcal{A}_{\text{add.}}^{(inc.)} \\ \left(\frac{1}{2C_e} \int_V (dV |\overleftarrow{E}|^2 \overleftarrow{\text{grad}}\epsilon) (\vec{x}), \delta\vec{r} \right) &= (\overleftarrow{K}^{(inc.)}, \delta\vec{r}). \end{aligned}$$

Il y a équilibre si une force $\overleftarrow{K}^{(el.)}$ s'oppose à $\overleftarrow{K}^{(inc.)}$. Nous avons donc, puisque $\delta\vec{r}$ est arbitraire :

$$\overleftarrow{K}^{(el.)} = -\overleftarrow{K}^{(inc.)} = -\frac{1}{2C_e} \int_V (dV |\overleftarrow{E}|^2 \overleftarrow{\text{grad}}\epsilon) (\vec{x}). \quad (1.7.2)$$

Nous pouvons intégrer uniquement sur le volume V_d du diélectrique rigide, puisqu'à l'extérieur $\overleftarrow{\text{grad}}\epsilon_0 = \overleftarrow{0}$.

Exemple : force exercée par un condensateur sur un diélectrique.

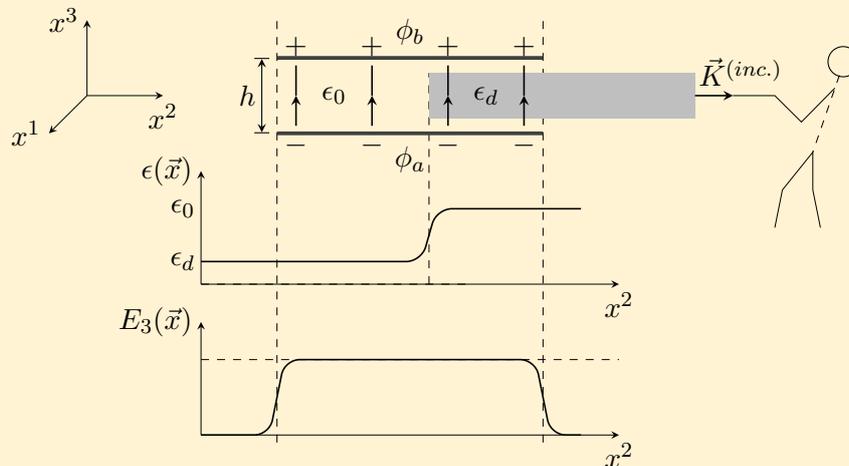


Fig. 1.7.2

De la loi : $\overleftarrow{E} = \overleftarrow{\text{grad}}\phi$, nous tirons

$$|\overleftarrow{E}| = |E_3| = \left| \frac{\phi_0 - \phi_b}{h} \right|.$$

La seule dissymétrie de $\epsilon(\vec{x})$ se situe le long de l'axe x^3 . Par suite une seule composante de $\overleftarrow{\text{grad}}\epsilon$ intervient dans l'expression de la force : $\text{grad}_2\epsilon = \partial_2\epsilon$. Ainsi nous avons :

$$K_3^{(inc.)} = \frac{1}{2C_e} \int_{\sigma} dx^1 dx^2 \int_{\epsilon=\epsilon_0}^{\epsilon=\epsilon_d} dx^3 |E_3|^2 \partial_2\epsilon(x^3)$$

et donc

$$K_2^{(inc.)} = -K_2^{(el.)} = \frac{1}{2C_e} \sigma |\overleftarrow{E}|^2 (\epsilon_d - \epsilon_0),$$

où σ est la section du diélectrique.

Si $\epsilon > \epsilon_0$, alors $K_2^{(el.)}$ est négative, ce qui signifie que le diélectrique est attiré dans le condensateur.

Nous avons établi ci-dessus la loi de force sous forme intégrale. Nous voulons maintenant calculer la force locale exercée en chaque point du diélectrique afin de le maintenir en équilibre. Le diélectrique étant rigide, nous ne pouvons pas choisir un champ de déplacement $\delta\vec{r}(\vec{x})$ arbitraire, car il ne doit en aucune circonstance déformer le diélectrique. La mécanique des solides indéformables nous apprend que le mouvement le plus général d'un solide peut toujours se décomposer en une translation et une rotation.

Si le déplacement du diélectrique est une translation $\delta\vec{r}$, l'expression de la force cherchée se déduit immédiatement de la loi intégrale : nous obtenons

$$d^3\overleftarrow{K}^{(inc.)}(\vec{x}) = \frac{1}{2C_e} (dV |\overleftarrow{E}|^2 \overleftarrow{\text{grad}}\epsilon)(\vec{x}).$$

Reste la rotation : un tel champ de déplacement peut être défini par

$$\delta\vec{r}(\vec{x}) = [\delta\vec{\omega} \wedge \vec{x}],$$

**Fig. 1.7.3**

où $\delta\vec{\omega}$ est un vecteur axial de rotation. Alors :

$$\underline{\delta\Psi}_{\text{add.}[...]} = \frac{1}{2C_e} \int_V dV(\vec{x}) |\overleftarrow{E}|^2(\vec{x}) ([\delta\vec{\omega} \wedge \vec{x}], \overleftarrow{\text{grad}}\epsilon(\vec{x})).$$

Cherchons à exprimer $\delta\mathcal{A}_{\text{add.}}^{(inc.)}$ à l'aide du vecteur axial $\delta\vec{\omega}$.

En mécanique, on définit le moment des forces (*Drehmoment*) par

$$\vec{D} = \int \vec{x} \wedge d^3\overleftarrow{K}(\vec{x}), \quad \text{d'où} \quad \delta\mathcal{A}_{\text{add.}}^{(inc.)} = (\vec{D}^{(inc.)}, \delta\vec{\omega}).$$

Avec la formule de calcul vectoriel $([\vec{a} \wedge \vec{b}], \vec{c}) = ([\vec{b} \wedge \vec{c}], \vec{a})$, il vient alors :

$$([\delta\vec{\omega} \wedge \vec{x}], \overleftarrow{\text{grad}}\epsilon) = ([\vec{x} \wedge \overleftarrow{\text{grad}}\epsilon], \delta\vec{\omega})$$

et

$$\delta\Psi_{\text{add.}}[\dots] = \frac{1}{2C_e} \int_V (dV |\overleftarrow{E}|^2 ([\vec{x} \wedge \overleftarrow{\text{grad}}\epsilon], \delta\vec{\omega}))(\vec{x}) = (\vec{D}, \delta\vec{\omega}).$$

Comme $\delta\vec{\omega}$ est arbitraire et indépendant de \vec{x} , nous devons avoir

$$\frac{1}{2C_e} \int_V (dV |\overleftarrow{E}|^2 [\vec{x} \wedge \overleftarrow{\text{grad}}\epsilon])(\vec{x}) = \vec{D}^{(inc.)} = \int_V [\vec{x} \wedge d^3\overleftarrow{K}^{(inc.)}(\vec{x})],$$

d'où :

$$\int_V \left[\vec{x} \wedge \left(\frac{1}{2C_e} dV |\overleftarrow{E}|^2 \overleftarrow{\text{grad}}\epsilon - d^3\overleftarrow{K}^{(inc.)} \right) (\vec{x}) \right] = \overleftarrow{0}.$$

N'ayant fait aucune hypothèse sur V , nous avons obligatoirement

$$\left(\frac{1}{2C_e} dV |\overleftarrow{E}|^2 \overleftarrow{\text{grad}}\epsilon - d^3\overleftarrow{K}^{(inc.)} \right) (\vec{x}) = \overleftarrow{0},$$

ce qui est la même expression que lors d'une translation.

Par conséquent, la force locale exercée en chaque point d'un diélectrique rigide pour maintenir l'équilibre est

$$d^3\overleftarrow{K}^{(inc.)} = -d^3\overleftarrow{K}^{(el.)} = \frac{1}{2C_e} (dV |\overleftarrow{E}|^2 \overleftarrow{\text{grad}}\epsilon)(\vec{x}). \quad (1.7.3)$$

Il faut bien remarquer que la force n'existe que si la « constante » diélectrique n'est pas constante en chaque point. Dans bien des cas, et nous en avons vu un dans l'exemple, les forces s'exerçant sur un diélectrique de « constante » diélectrique constante ne s'exercent que sur la surface de séparation d'avec un autre diélectrique.

1.8 Tenseur de Maxwell

Considérons un système électrostatique comprenant des conducteurs, des diélectriques rigides et des charges.

La force électrique totale créée par ce système est de la forme

$$\overleftarrow{K}^{(el.)} = \int_V d^3\overleftarrow{K}^{(el.)}(\vec{x}) + \sum_a \oint_{C_a} d^2\overleftarrow{K}^{(el.)}(\vec{y}_a).$$

Cherchons à remplacer toutes ces forces par des forces n'agissant que sur l'enceinte $C(\vec{y}) = 0$ et dont l'effet global soit le même ; son expression sera

$$\overleftarrow{K}^{(el.)} = \oint_C d^2 \overleftarrow{K}^{(el.)}(\vec{y}).$$

Posons : $d^2 K_i^{(el.)} = d\sigma_k \tau_i^{k(el.)}$; cette expression devient alors

$$K_i^{(el.)} = \oint_C (d\sigma_k \tau_i^{k(el.)})(\vec{y}). \quad (1.8.1)$$

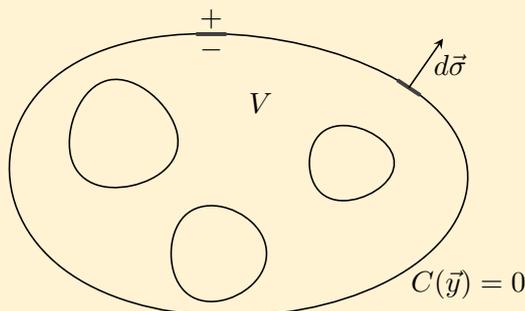


Fig. 1.8.1

Elle définit le *tenseur des tensions électrostatiques* (le *tenseur de Maxwell* $\tau_i^{k(el.)}$).

En vertu du théorème de Gauss, on a

$$K_i^{el.} = \int_V (dV \partial_k \tau_i^{k(el.)})(\vec{x}) = \int_V d^3 K_i^{(el.)}(\vec{x}), \quad \text{donc} \quad d^3 K_i^{(el.)}(\vec{x}) = (dV \partial_k \tau_i^{k(el.)})(\vec{x}).$$

Nous avons vu aussi que :

- pour les charges,

$$d^3 K_i^{(el.)}(\vec{x}) = (d^3 Q E_i)(\vec{x}),$$

- pour les diélectriques rigides (électrostatique linéaire et isotrope),

$$d^3 K_i^{(el.)}(\vec{x}) = -\frac{1}{2C_e} (dV |\overleftarrow{E}|^2 \partial_i \epsilon)(\vec{x}).$$

Si le système ne contient que des conducteurs, alors

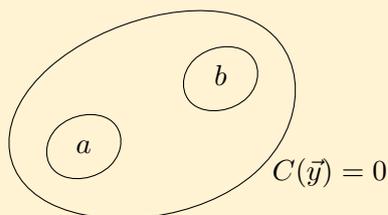


Fig. 1.8.2

$$\oint_C (d\sigma_k \tau_i^{k(el.)})(\vec{y}) = \sum_a \oint_{C_a} (d\sigma_k \tau_i^{k(el.)})(\vec{y}_a),$$

à condition de prendre un élément de surface *extérieure* par rapport au conducteur :

$$d^2 K_i^{(el.)}(\vec{y}_a) = +(d\sigma_i u^{(el.)})(\vec{y}_a).$$

Nous avons donc

$$d^2 K_i^{(el.)}(\vec{y}) = (d\sigma_k \tau_i^{k(el.)})(\vec{y}).$$

Il nous faut maintenant donner l'expression du tenseur de Maxwell. Considérons la *transformation de Legendre* :

$$\ell \left[\vec{x}, \frac{\partial u^{(el.)}}{\partial D^i} \right] = -u^{(el.)}[\vec{x}, D^i] + D^i \frac{\partial u^{(el.)}}{\partial D^i}.$$

Puisque $(\partial u^{(el.)}/\partial D^i) = (1/C_e)E_i$, nous obtenons

$$\ell[\vec{x}, \overleftarrow{E}(\vec{x})] = -u^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})] + \frac{1}{C_e}(\vec{D}, \overleftarrow{E})(\vec{x}). \quad (1.8.2)$$

où $\ell[\vec{x}, \overleftarrow{E}(\vec{x})]$ est la *transformée de Legendre* de $u^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})]$; on l'appelle *densité lagrangienne* $\mathcal{L}[\dots]$.

Opérons la « variation de Legendre » ($\delta \vec{x} = \vec{0}$) :

$$\begin{aligned} \delta \ell_{\delta \vec{x} = \vec{0}} &= -\delta u^{(el.)} + \frac{1}{C_e}(\vec{D}, \delta \overleftarrow{E}) + \frac{1}{C_e}(\delta \vec{D}, \overleftarrow{E}) \\ &= -\frac{1}{C_e}(\overleftarrow{E}, \delta \vec{D}) + \frac{1}{C_e}(\vec{D}, \delta \overleftarrow{E}) + \frac{1}{C_e}(\delta \vec{D}, \overleftarrow{E}), \end{aligned}$$

d'où :

$$\delta \ell_{\delta \vec{x} = \vec{0}}[\vec{x}, \overleftarrow{E}(\vec{x})] = \frac{1}{C_e}(\vec{D}, \delta \overleftarrow{E}).$$

On a donc :

$$\frac{\partial \ell}{\partial E_i} = \frac{1}{C_e} D^i.$$

Nous affirmons que le *tenseur de Maxwell* est :

$$\tau_i^{k(el.)}(\vec{x}) = \frac{1}{C_e} D^k E_i - \delta_i^k \ell[\vec{x}, \overleftarrow{E}(\vec{x})]. \quad (1.8.3)$$

Pour démontrer cette affirmation, il suffit de vérifier que nous retrouvons l'expression des forces électrostatiques.

1. — Nous avons $d^3 K_i^{(el.)} = dV \partial_k \tau_i^{k(el.)}$ puis

$$\begin{aligned} \partial_k \tau_i^{k(el.)} &= \partial_k \left(\frac{1}{C_e} D^k E_i - \delta_i^k \ell[\vec{x}, \overleftarrow{E}(\vec{x})] \right) \\ &= \frac{1}{C_e} (\partial_k D^k) E_i + \frac{1}{C_e} D^k \partial_k E_i - \frac{d}{dx^i} \ell[\vec{x}, \overleftarrow{E}] \\ &= \frac{1}{C_e} (\partial_k D^k) E_i + \frac{1}{C_e} D^k \partial_k E_i - \partial_i \ell[\vec{x}, \overleftarrow{E}] - \frac{\partial \ell}{\partial E_k} \partial_i E_k. \end{aligned}$$

Or on a

$$\partial_k D^k = \operatorname{div} \vec{D} = C_e q, \quad E_i = -\partial_i \phi, \quad \text{et} \quad \partial_k E_i = -\partial_k \partial_i \phi,$$

ce qui conduit à

$$\partial_k \tau_i^{k(el.)} = q E_i - \frac{1}{C_e} D^k \partial_k \partial_i \phi - \partial_i \ell[\vec{x}, \overleftarrow{E}] + \frac{1}{C_e} D^k \partial_i \partial_k \phi,$$

et donne finalement

$$d^3 K_i^{(el.)}(\vec{x}) = (dV q E_i)(\vec{x}) - dV(\vec{x}) \partial_i \ell[\vec{x}, \overleftarrow{E}(\vec{x})]. \quad (1.8.4)$$

Nous constatons que le premier terme correspond à la force sur une charge ; vérifions si le second terme donne bien, dans le cas de l'électrostatique linéaire et isotrope, l'expression de la force sur un diélectrique.

$$\ell[\vec{x}, \overleftarrow{E}] = -\frac{1}{2C_e}(\overleftarrow{E}, \vec{D}) + \frac{1}{C_e}(\overleftarrow{E}, \vec{D}) = \frac{1}{2C_e}(\overleftarrow{E}, \vec{D})$$

Numériquement : $u^{(el.)} = \ell$, qui implique

$$\ell[\vec{x}, \overleftarrow{E}(\vec{x})] = \frac{1}{2C_e} \epsilon(\vec{x}) |\overleftarrow{E}|^2(\vec{x}).$$

Il s'ensuit

$$\partial_i \ell[\vec{x}, \overleftarrow{E}(\vec{x})] = \frac{1}{2C_e} (|\overleftarrow{E}|^2 \partial_i \epsilon)(\vec{x})$$

et nous avons bien

$$-dV(\vec{x}) \partial_i \ell[\vec{x}, \overleftarrow{E}(\vec{x})] = d^3 K_i^{(el.)} = -\frac{dV}{2C_e} (|\overleftarrow{E}|^2 \partial_i \epsilon)(\vec{x}).$$

2. — Vérifions encore que le tenseur de Maxwell donne également l'expression de la force sur un conducteur :

$$d^2 K_i^{(el.)} = d\sigma_k \tau_i^{k(el.)},$$

c'est-à-dire

$$d^2 K_i^{(el.)}(\vec{y}) = d\sigma_k \left(\frac{1}{C_e} D^k E_i \right)(\vec{y}) - d\sigma_k \delta_i^k \ell[\vec{x}, \overleftarrow{E}(\vec{x})],$$

et donc

$$d^2 K_i^{(el.)} = \frac{1}{C_e} (d\overleftarrow{\sigma}, \vec{D})(\vec{y}) - d\sigma_k \delta_i^k \ell[\dots].$$

Nous savons que sur un conducteur, le champ \overleftarrow{E} est perpendiculaire à la surface de celui-ci, c'est-à-dire que $d\overleftarrow{\sigma} \parallel \overleftarrow{E}$; nous avons alors le droit d'écrire

$$\frac{1}{C_e} (d\overleftarrow{\sigma}, \vec{D}) E_i = \frac{1}{C_e} (\overleftarrow{E}, \vec{D}) d\sigma_i,$$

d'où

$$d^2 K_i^{(el.)} = d\sigma_i \left(\frac{1}{C_e} (\overleftarrow{E}, \vec{D}) - \ell[\dots] \right) = d\sigma_i u^{(el.)}[\dots],$$

ce qui est bien l'expression de la force sur un conducteur.

L'avantage du tenseur de Maxwell est de donner une expression de la force électrique agissant sur un système donné sous la forme d'une intégrale de surface, ce qui permet d'éviter les discontinuités qui pourraient se trouver à l'intérieur.

Electrostatique linéaire et théorie du potentiel

Présentation

Nous commençons par discuter les discontinuités du champ d'induction et du champ électrique (section 1) puis nous démontrons l'unicité du potentiel lorsque ϵ est constant (section 2). Nous donnons ensuite à la section 3 l'expression du laplacien en coordonnées curvilignes orthogonales avec les exemples des coordonnées cylindro-polaires et sphériques. Les polynômes de Legendre sont alors introduits à la section suivante (section 4) ainsi que la distribution de Dirac ; les potentiels dipolaire et quadripolaire sont alors examinés. La section 5 traite d'une charge ponctuelle à l'intérieur d'un conducteur sphérique, ce qui nous permet de parler de fonction de Green pour une sphère. Le potentiel de Coulomb est ensuite donné en termes de fonction de Green à la section 7. Le potentiel de double couche fait ensuite l'objet de la section 8 et la surface à polarisation constante est introduite à la section 9. Le corps polarisé avec son modèle dipolaire est alors donné à la section 10 et la capacité d'un condensateur est finalement introduite à la section 11.

2.1 Discontinuité de $\epsilon(\vec{x})$

Nous voulons examiner le comportement des champs $\vec{D}(\vec{x})$ et $\overleftarrow{E}(\vec{x})$ à la surface de séparation de deux milieux de constantes diélectriques ϵ' et ϵ'' .

2.1.1 Conditions aux limites pour $\vec{D}(\vec{x})$

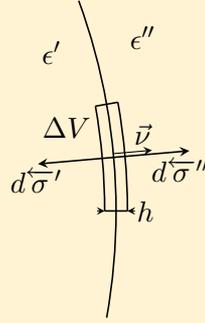


Fig. 2.1.1

Hypothèse : $0 < \epsilon' < \epsilon''$.

Introduisons le vecteur normal à la surface $|\vec{\nu}|$ tel que $|\vec{\nu}| = 1$. Nous avons

$$d\overleftarrow{\sigma}(\vec{y}) = (\overleftarrow{\nu} d\sigma)(\vec{y}),$$

donc

$$d\overleftarrow{\sigma}'' = d\sigma \overleftarrow{\nu} \quad \text{et} \quad d\overleftarrow{\sigma}' = -d\sigma \overleftarrow{\nu}.$$

Considérons le volume ΔV infiniment petit (du 2^e ordre) sur la surface de séparation. La loi d'induction s'écrit

$$C_e \Delta Q = \oint_{\Delta V} (d\overleftarrow{\sigma}, \vec{D})(\vec{y}),$$

c'est-à-dire, aux infiniments petits du 2^e ordre près,

$$\begin{aligned} C_e \Delta Q &= (d\overleftarrow{\sigma}'', \vec{D})(\vec{y}) + (d\overleftarrow{\sigma}', \vec{D})(\vec{y}) \\ &= d\sigma (D''_{\nu} - D'_{\nu}). \end{aligned}$$

La grandeur $(D''_{\nu} - D'_{\nu})$ est appelé divergence superficielle de \vec{D} et sera notée : $(\text{div}_S \vec{D})$.

Par définition on appelle *densité superficielle de charge*, la grandeur :

$$\omega(\vec{y}) = \frac{d^2 Q(\vec{y})}{d\sigma(\vec{y})}. \quad (2.1.1)$$

Nous constatons que la composante normale du champ \vec{D} , notée D_{ν} , subit une discontinuité sur la surface de séparation

$$D''_{\nu} - D'_{\nu} = C_e \omega.$$

En résumé, nous avons pour \vec{D} :

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{D}(\vec{x}) &= C_e q(\vec{x}) \\ (D''_{\nu} - D'_{\nu})(\vec{y}) &= C_e \omega(\vec{y}). \end{aligned}$$

2.1.2 Conditions aux limites pour $\overleftarrow{E}(\vec{x})$

Puisque $\overleftarrow{E} = -\overleftarrow{\text{grad}} \phi$ la circulation de \overleftarrow{E} le long d'un contour fermé est nulle :

$$\oint_C (\overleftarrow{E}(\vec{x}), d\vec{x}) = 0.$$

En effet :

$$\oint_C (\overleftarrow{E}, d\vec{x}) = - \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} dx^i \partial_i \phi(\vec{x}) = \phi(\vec{x}_1) - \phi(\vec{x}_2) \longrightarrow 0 \text{ si } \vec{x}_1 \longrightarrow \vec{x}_2.$$

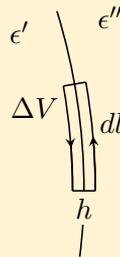


Fig. 2.1.2

Considérons un chemin fermé C formé d'un rectangle de grand côté dl et de petit côté h (infiniment petit du 2^e ordre). Alors on a

$$\oint_C (\overleftarrow{E}, d\vec{x}) = (d\vec{\ell}'', \overleftarrow{E})(\vec{y}) + (d\vec{\ell}', \overleftarrow{E})(\vec{y}) = 0.$$

Posons $\overleftarrow{E}(\vec{y}) = (\nu E_\nu + \overleftarrow{E}_1)(\vec{y})$; puisque $(d\vec{\ell}, \overleftarrow{\nu}) = 0$, il vient

$$\oint_C (\overleftarrow{E}, d\vec{x}) = (d\vec{\ell}'', \overleftarrow{E}_1)(\vec{y}) + (d\vec{\ell}', \overleftarrow{E}_1)(\vec{y}) = 0.$$

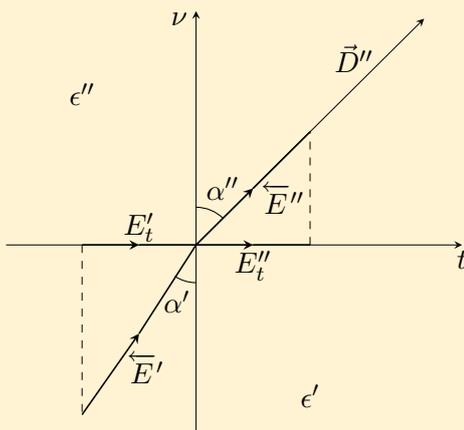


Fig. 2.1.3

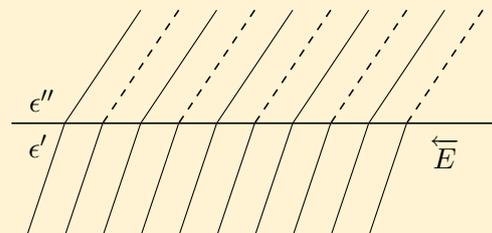


Fig. 2.1.4

Nous constatons que la composante tangentielle (à la surface) du champ \overleftarrow{E} est conservée :

$$(E''_1 - E'_1)(\vec{y}) = 0. \tag{2.1.3}$$

Le comportement de \vec{D} et de \overleftarrow{E} peut se représenter au moyen de la figure 2.1.3.

Cette figure 2.1.3, contrairement aux résultats obtenus ci-dessus qui sont valables dans le cas général, implique l'électrostatique linéaire et isotrope. Nous avons dans ce cas (cf. fig. 2.1.3) :

$$\begin{aligned} E'' \sin \alpha'' &= E' \sin \alpha', \\ D'' \cos \alpha'' &= D' \cos \alpha'. \end{aligned}$$

Donc, s'il n'y a pas de charges superficielles, nous obtenons la *loi de réfraction des lignes de champ* (valable en électrostatique linéaire et isotrope) :

$$E'' \epsilon'' \cos \alpha'' = E' \epsilon' \cos \alpha',$$

ce qui peut s'écrire, en éliminant E'' et E' ,

$$\frac{\text{tg } \alpha''}{\text{tg } \alpha'} = \frac{\epsilon''}{\epsilon'}.$$

Par exemple, considérons deux diélectriques homogènes tel que : $\epsilon' = 1$ et $\epsilon'' = 2$. Les lignes de champ de \vec{D} sont deux fois plus "denses" que les lignes de champ de \overleftarrow{E} dans le diélectrique ϵ'' (fig. 2.1.4).

2.2 Démonstration de l'unicité de $\phi(\vec{x})$ lorsque $\epsilon = \text{cte}$

Considérons une enceinte conductrice, contenant des charges et des conducteurs plongés dans un milieu diélectrique homogène : $\epsilon = \text{cte}$.

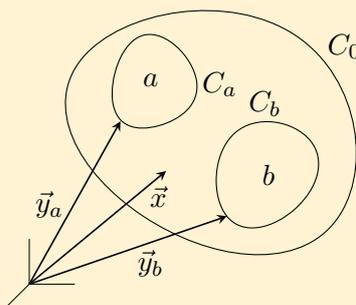


Fig. 2.2.1

La loi d'induction : $\text{div } \vec{D} = C_e q$ peut s'écrire, grâce à la relation $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$,

$$\text{div } \vec{E} = \frac{C_e}{\epsilon} q.$$

Or $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} \phi$, donc on a

$$\text{div } \vec{E} = -\text{div } \overrightarrow{\text{grad}} \phi = -\Delta \phi = \frac{C_e}{\epsilon} q.$$

Ainsi le potentiel ϕ dans l'enceinte est solution de l'équation de Poisson :

$$\Delta\phi(\vec{x}) = -\frac{C_e}{\epsilon} q(\vec{x}) \quad (2.2.1)$$

et doit satisfaire à la surface des conditions aux limites

$$\phi(\vec{y}_a) = \phi_a. \quad (2.2.2)$$

Ce problème (de Dirichlet) n'admet qu'une seule solution.

Démonstration.

Supposons qu'il y ait deux solutions $\phi'(\vec{x})$ et $\phi''(\vec{x})$; alors

$$\psi(\vec{x}) = \phi''(\vec{x}) - \phi'(\vec{x})$$

est harmonique par linéarité du laplacien :

$$\Delta\psi(\vec{x}) = 0.$$

De plus, elle satisfait les conditions aux limites

$$\psi(\vec{y}_a) = 0.$$

En vertu des conditions aux limites, nous avons

$$\oint_{C_a} (d\overleftarrow{\sigma}, \psi \overleftarrow{\text{grad}} \psi)(\vec{y}_a) = 0.$$

Par le théorème de Gauss, cette expression peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} \int_V (dV \text{div}(\psi \overleftarrow{\text{grad}} \psi))(\vec{y}_a) &= \int_V (dV [(\overleftarrow{\text{grad}} \psi)^2 + \underbrace{\psi \Delta\psi}_{=0}]) (\vec{x}) = 0 \\ &= \int_V (dV (\overleftarrow{\text{grad}} \psi)^2) (\vec{x}) = 0, \end{aligned}$$

ce qui implique que $\overleftarrow{\text{grad}} \psi = 0$, donc $\psi = \text{cte}$. Mais $\psi(\vec{y}_a) = 0$, d'où $\psi(\vec{x}) = 0$, ce qui signifie que les deux solutions sont identiques :

$$\phi'(\vec{x}) = \phi''(\vec{x}),$$

et donc la solution est unique.

2.3 Laplacien en coordonnées curvilignes orthogonales

Considérons un système de coordonnées curvilignes orthogonales $\{\xi, \eta, \zeta\}$ d'origine P dans l'espace euclidien à trois dimensions. Le repère naturel au point P est le repère formé des trois vecteurs unités $[\vec{\xi}]$, $[\vec{\eta}]$, $[\vec{\zeta}]$ tangents au point P aux axes ξ , η , ζ .

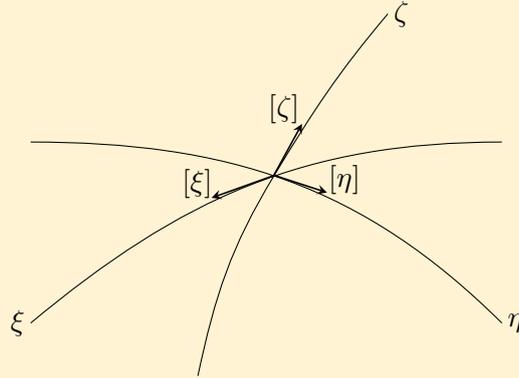


Fig. 2.3.1

La condition d'orthogonalité s'écrit

$$([\vec{\xi}], [\vec{\eta}]) = ([\vec{\xi}], [\vec{\zeta}]) = ([\vec{\eta}], [\vec{\zeta}]) = 0.$$

Dans ce repère naturel, le déplacement élémentaire $d\vec{x}$ attaché au point P s'écrit

$$d\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \zeta} d\zeta = \vec{\xi} d\xi + \vec{\eta} d\eta + \vec{\zeta} d\zeta,$$

c'est-à-dire :

$$d\vec{x} = \Xi(\xi, \eta, \zeta) d\xi[\vec{\xi}] + H(\xi, \eta, \zeta) d\eta[\vec{\eta}] + Z(\xi, \eta, \zeta) d\zeta[\vec{\zeta}],$$

où

$$\begin{cases} d\xi & \text{composante tensorielle du vecteur } d\vec{x}, \\ \Xi(\)d\xi & \text{composante vectorielle du vecteur } d\vec{x}. \end{cases}$$

Pour trouver l'expression du laplacien dans ces coordonnées, nous partons de l'expression :

$$d\phi(\xi, \eta, \zeta) = (\overleftarrow{\text{grad}} \phi, d\vec{x})(\xi, \eta, \zeta),$$

c'est-à-dire,

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} d\zeta,$$

qui peut encore s'écrire

$$d\phi = \Xi^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Xi d\xi + H^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} H d\eta + Z^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} Z d\zeta.$$

Puisque

$$d\phi = (\overleftarrow{\text{grad}} \phi, d\vec{x}) = \text{grad}_\xi \Xi d\xi + \text{grad}_\eta H d\eta + \text{grad}_\zeta Z d\zeta,$$

nous obtenons par identification

$$\overleftarrow{\text{grad}} \phi = \frac{1}{\Xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} [\overleftarrow{\xi}] + \frac{1}{H} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} [\overleftarrow{\eta}] + \frac{1}{Z} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} [\overleftarrow{\zeta}].$$

Considérons un volume V de l'espace, limité par la surface fermée C et faisons varier ϕ dans V et en le maintenant constant sur C . Calculons la variation

$$\underline{\delta}I = \underline{\delta} \left\{ \frac{1}{2} \int_V (dV |\overleftarrow{\text{grad}} \phi|^2)(\vec{x}) \right\}.$$

Nous avons alors

$$\underline{\delta}I = \int_V (dV \overleftarrow{\text{grad}} \phi, \overrightarrow{\text{grad}} \delta\phi)(\vec{x})$$

puisque, sur C , $\phi = \text{cte}$.

Transformons cette intégrale au moyen du théorème de Green :

$$\underline{\delta}I = \underbrace{\oint_C (d\vec{\sigma}, \delta\phi \overleftarrow{\text{grad}} \phi)(\vec{y})}_{=0 \text{ car } \delta\phi(\vec{y})=0} - \int_V (dV \delta\phi \underbrace{\text{div} \overleftarrow{\text{grad}} \phi}_{\Delta\phi})(\vec{x}).$$

En coordonnées curvilignes, le volume élémentaire s'écrit

$$dV = \Xi H Z d\xi d\eta d\zeta.$$

Transcrivons l'égalité

$$\underline{\delta}I = \underline{\delta} \left\{ \int_V (dV |\overleftarrow{\text{grad}} \phi|^2)(\vec{x}) - \int_V (dV \Delta\phi \delta\phi)(\vec{x}) \right\}$$

en coordonnées curvilignes. Pour la première expression de $\underline{\delta}I$ nous obtenons

$$\begin{aligned} & \underline{\delta} \left\{ \iiint d\xi d\eta d\zeta \left(\frac{HZ}{\Xi} (\partial_\xi \phi)^2 + \frac{\Xi Z}{H} (\partial_\eta \phi)^2 + \frac{\Xi H}{Z} (\partial_\zeta \phi)^2 \right) \right\} \\ &= \iiint d\xi d\eta d\zeta \left(\frac{HZ}{\Xi} \partial_\xi \phi \partial_\xi \delta\phi + \frac{\Xi Z}{H} \partial_\eta \phi \partial_\eta \delta\phi + \frac{\Xi H}{Z} \partial_\zeta \phi \partial_\zeta \delta\phi \right), \end{aligned}$$

où nous avons posé : $\partial_\xi \phi = (\partial\phi/\partial\xi)$, etc. ; nous réécrivons cette expression sous la forme

$$\begin{aligned} &= \iint d\eta d\zeta \int d\xi \left(\frac{HZ}{\Xi} \partial_\xi \phi \right) \partial_\xi \delta\phi + \iint d\xi d\zeta \int d\eta \left(\frac{\Xi Z}{H} \partial_\eta \phi \right) \partial_\eta \delta\phi \\ &+ \iint d\xi d\eta \int d\zeta \left(\frac{\Xi H}{Z} \partial_\zeta \phi \right) \partial_\zeta \delta\phi, \end{aligned}$$

soit encore en faisant une intégration par partie et en négligeant les termes de surface puisque $\delta\phi(\vec{y}) = 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} &= - \iint \int d\eta d\zeta \int d\xi \partial_\xi \left(\frac{HZ}{\Xi} \partial_\xi \phi \right) \delta\phi - \iint d\xi d\zeta \int d\eta \partial_\eta \left(\frac{\Xi Z}{H} \partial_\eta \phi \right) \delta\phi \\ &- \iint d\xi d\eta \int d\zeta \partial_\zeta \left(\frac{\Xi H}{Z} \partial_\zeta \phi \right) \delta\phi, \end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore

$$= - \iiint \underbrace{d\xi d\eta d\zeta}_{dV} \frac{\Xi H Z}{\Xi H Z} \frac{1}{\Xi H Z} \\ \times \left(\partial_\xi \left(\frac{H Z}{\Xi} \partial_\xi \phi \right) + \partial_\eta \left(\frac{\Xi Z}{H} \partial_\eta \phi \right) + \partial_\zeta \left(\frac{\Xi H}{Z} \partial_\zeta \phi \right) \right) \delta\phi.$$

Mais ceci doit être égal à la deuxième expression de δI , c'est-à-dire $-\int_V dV \Delta\phi \delta\phi$. Nous obtenons alors l'expression du *laplacien en coordonnées curvilignes orthogonales*

$$\Delta\phi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{\Xi H Z} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{H Z}{\Xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\Xi Z}{H} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\Xi H}{Z} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) \right].$$

EXEMPLE : COORDONNÉES SPHÉRIQUES

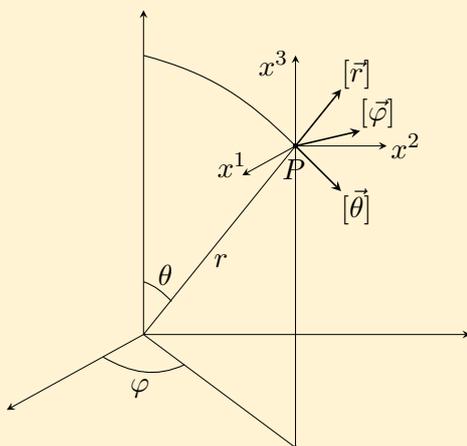


Fig. 2.3.2

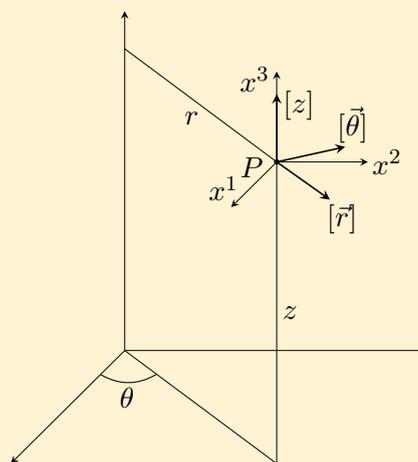


Fig. 2.3.3

Ces coordonnées sont définies à partir d'un repère cartésien $\{x^1, x^2, x^3\}$ par les transformations :

$$\begin{cases} x^1 = r \sin \theta \sin \varphi \\ x^2 = r \sin \theta \cos \varphi \\ x^3 = r \cos \theta \end{cases}$$

et par le calcul de

$$d\vec{x} = dr[\vec{r}] + r d\theta[\vec{\theta}] + r \sin \theta d\varphi[\vec{\varphi}].$$

Il en résulte l'expression du laplacien :

$$\Delta\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} r^2 \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right],$$

soit encore

$$\Delta\phi(r, \theta, \varphi) = \left[\frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \right] \phi.$$

EXEMPLE : COORDONNÉES CYLINDRO-POLAIRES

Ces coordonnées sont définies à partir d'un repère cartésien $\{x^1, x^2, x^3\}$ par les transformations :

$$\begin{cases} x^1 = r \cos \theta \\ x^2 = r \sin \theta \\ x^3 = z \end{cases}$$

et par le calcul de

$$d\vec{x} = dr[\vec{r}] + r d\theta[\vec{\theta}] + dz[\vec{z}].$$

Il en résulte l'expression du laplacien

$$\Delta\phi(r, \theta, z) = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \phi.$$

2.4 Polynômes de Legendre

Cherchons une fonction $\phi(r)$, isotrope, solution de l'équation de Laplace

$$\Delta\phi = 0.$$

Puisqu'il y a isotropie, $\Delta\phi$ est simplement constituée du premier terme du laplacien en coordonnées sphériques

$$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \phi) = 0.$$

Si $r \neq 0$: nous avons $r^2(d\phi(r)/dr) = a$. La fonction cherchée est de la forme :

$$\phi(r) = -\frac{a}{r} + b$$

Cette fonction est harmonique dans le complémentaire de l'origine et possède une singularité du type $1/r$ en ce point.

Pour examiner le comportement de $\phi(r) = \frac{1}{r}$ à l'origine, considérons l'intégrale

$$\int_V dV \Delta \phi,$$

où V est une boule contenant l'origine. Cette intégrale peut encore s'écrire

$$\int_V dV \Delta \phi = \int_V dV \operatorname{div} \overleftarrow{\operatorname{grad}} \phi = \oint_V (d\overleftarrow{\sigma}, \overrightarrow{\operatorname{grad}} \phi).$$

L'élément de surface sur la sphère est

$$d\overleftarrow{\sigma} = r^2 d\Omega[\overleftarrow{r}] \quad \text{avec} \quad d\Omega = d\varphi d(\cos \theta).$$

où $d\Omega$: élément d'angle solide. D'autre part on a

$$\overrightarrow{\text{grad}} \phi = \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} [\vec{r}],$$

ce qui donne

$$\int_V dV \Delta \phi = \oint_V (d\vec{\sigma}, \overrightarrow{\text{grad}} \phi) = \int r^2 d\Omega [\vec{r}] \frac{1}{r^2} [\vec{r}] = - \int_V d\Omega = -4\pi.$$

Nous avons donc :

$$\Delta \frac{1}{r} = 0 \text{ si } r \neq 0 \quad \text{et} \quad \int_{V \ni \vec{0}} dV \Delta \frac{1}{r} = -4\pi.$$

Introduisons la *distribution de Dirac* :

$$\delta(\vec{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{x} \neq \vec{0} \\ +\infty & \text{si } \vec{x} = \vec{0} \end{cases} \quad \text{telle que} \quad \int_{V \ni \vec{0}} dV \delta(\vec{x}) = 1.$$

Alors :

$$\int_V dV \Delta \frac{1}{r} + 4\pi = \int_V dV \left(\Delta \frac{1}{r} + 4\pi \delta(\vec{x}) \right) = 0.$$

La fonction $\phi(r) = 1/r = 1/|\vec{x}|$ est solution de l'équation de Poisson

$$\Delta \frac{1}{|\vec{x}|} = -4\pi \delta(\vec{x}). \quad (2.4.1)$$

Un système formé d'une charge placée à l'origine peut être caractérisé par la densité de charge

$$q(\vec{x}) = -4\pi \delta(\vec{x}).$$

Le potentiel créé par cette charge est solution de l'équation de Poisson

$$\Delta \phi(\vec{x}) = -\frac{C_e}{\epsilon} q(\vec{x}) = -\frac{C_e}{\epsilon} Q \delta(\vec{x}).$$

Puisque $\Delta 1/|\vec{x}| = -4\pi \delta(\vec{x})$, si nous plaçons la charge ponctuelle en \vec{x} mais imposons les conditions aux limites $\phi(\vec{x} \rightarrow \infty) = 0$, nous obtenons :

$$\phi(\vec{x}) = \frac{C_e Q}{4\pi \epsilon} \frac{1}{|\vec{x}|}.$$

Si nous plaçons la charge ponctuelle en \vec{a} mais conservons les conditions aux limites, nous obtenons :

$$\phi(\vec{x}) = \frac{C_e Q}{4\pi \epsilon} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|}. \quad (2.4.2)$$

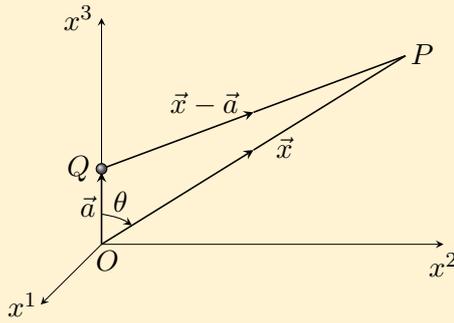


Fig. 2.4.1

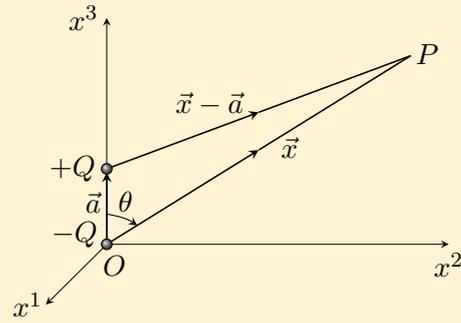


Fig. 2.4.2

Posons $|\vec{x}| = r$ et $\cos \theta = z$, alors

$$|\vec{x} - \vec{a}|^{-1} = (x^2 - 2(\vec{x}, \vec{a}) + a^2)^{-1/2} = (x^2 - 2arz + a^2)^{-1/2}.$$

Nous pouvons développer cette expression en série de puissances de a/r si $r > a$ ou en série de puissance de r/a si $r < a$.

1. — $r > a$

$$|\vec{x} - \vec{a}|^{-1} = \frac{1}{r} \left(1 - 2\left(\frac{a}{r}\right)z + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right)^{-1/2}$$

est une expression du type $(1 + A)^{-1/2}$ et nous avons donc le développement

$$\begin{aligned} |\vec{x} - \vec{a}|^{-1} &= \frac{1}{r} \left\{ 1 + \binom{-1/2}{1} \left[-2\frac{a}{r}z + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right]^1 + \binom{-1/2}{2} \left[-2\frac{a}{r}z + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right]^2 + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{a}{r}z - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \frac{(-1/2)(-3/2)}{1 \cdot 2} \cdot 4\left(\frac{a}{r}\right)^2 z^2 + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{a}{r}z + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}z^2 \right] + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Posons

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n P_n(z) \text{ si } r > a, \quad (2.4.3)$$

où nous avons introduit

$$\begin{aligned} P_0(z) &= 1 \\ P_1(z) &= z \\ P_2(z) &= \frac{1}{2}(-1 + 3z^2) \\ &\vdots \\ P_n(z) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n, \end{aligned}$$

et où $P_n(z)$ est le *polynôme de Legendre* de degré n en z .

APPLICATIONS

Dipôle.

Considérons deux charges ponctuelles $+Q$ et $-Q$ distantes de \vec{a} . Si $|\vec{x}| > a$ et $\phi(\vec{x} \rightarrow \infty) = 0$, le potentiel créé par cette distribution de charges est en vertu de la linéarité du laplacien :

$$\phi(\vec{x}) = \frac{C_e}{4\pi\epsilon} \left(\frac{Q}{|\vec{x} - \vec{a}|} - \frac{Q}{|\vec{x}|} \right).$$

Mais en vertu de ce qui vient d'être vu :

$$\phi(\vec{x}) = \frac{C_e Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n P_n(z) - \frac{1}{r} \right) = \frac{C_e Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n P_n(z).$$

Un *dipôle* est un ensemble de deux charges de signes opposés telles que :

$$Q \rightarrow \infty ; |\vec{a}| = a \rightarrow 0 \quad \text{avec} \quad Q \overleftarrow{a} = \overleftarrow{p} = p[\overleftarrow{a}] = \text{nombre fini}$$

et p est appelé le *moment dipolaire*. On remarque que $a^n p = 0$, $n = 1, 2, \dots$

Le potentiel créé par un dipôle à l'origine ou *potentiel dipolaire* est alors :

$$\phi_p(\vec{x}) = \frac{C_e p}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} P_1(z).$$

Mais $z = P_1(z) = ([\vec{x}], [\vec{a}]) = \cos \theta$ et $\overleftarrow{p} = p[\overleftarrow{a}]$: par conséquent ce potentiel s'écrit

$$\phi_p(\vec{x}) = \frac{C_e}{4\pi\epsilon} \frac{(\overleftarrow{p}, [\vec{x}])}{r^2}. \quad (2.4.4)$$

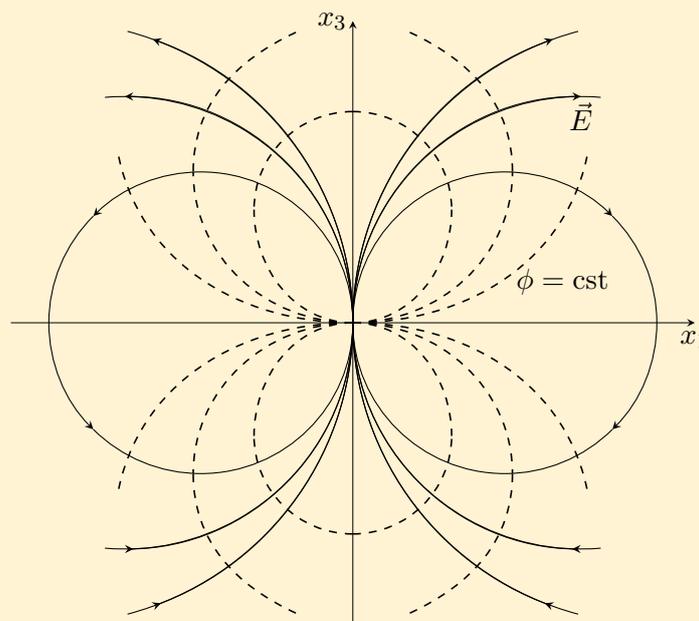


Fig. 2.4.3

Le champ électrique créé par ce dipôle est

$$\vec{E} = -\overleftarrow{\text{grad}}\phi = \frac{C_e p}{4\pi\epsilon} \left(-\frac{[\overleftarrow{x^3}]}{r^3} + \frac{3x^3[\overleftarrow{x}]}{r^4} \right).$$

Quadripôle.

Si en plus des deux charges de l'exemple précédent, nous plaçons un dipôle de moment $-p$ à l'origine, le potentiel s'écrit

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \frac{C_e}{4\pi\epsilon} \left(\frac{Q}{|\vec{x} - \vec{a}|} - \frac{Q}{|\vec{x}|} - p \frac{1}{r^2} P_1(z) \right) \\ &= \frac{C_e}{4\pi\epsilon} \left(\frac{Q a}{r^2} P_1(z) + \frac{Q a^2}{r^3} P_2(z) + \dots - \frac{p}{r^2} P_1(z) \right). \end{aligned}$$

Par définition le *quadripôle* est un ensemble de deux dipôles de moments dipolaires opposés et tels que :

$$Q \longrightarrow \infty ; |\vec{a}| = a \longrightarrow 0 \text{ avec } pa = Q a^2 = q = \text{nombre fini}$$

où q est le *moment quadripolaire*. On remarque que $a^n q = 0$, $n = 1, 2, \dots$

Le potentiel créé par un quadripôle à l'origine ou *potentiel quadripolaire* est

$$\phi(\vec{x}) = \frac{C_e q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^3} P_2(z). \quad (2.4.5)$$

On remarque enfin que, en groupant $Q, -Q, p, -p, q, -q, \dots$ on obtient des pôles d'ordre de plus en plus élevé.

2. — $a > r$

$$|\vec{x} - \vec{a}|^{-1} = \frac{1}{a} \left(1 - 2\frac{r}{a}z + \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right)^{-1/2}.$$

Nous procédons de façon analogue au cas où $r > a$ et nous avons

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(z) \text{ si } r < a. \quad (2.4.6)$$

Ainsi le potentiel créé par une charge $+Q$ placée à une distance $|\vec{a}|$ de l'origine sur l'axe Ox^3 est donné pour les points \vec{x} tels que $|\vec{x}| < a$ par

$$\phi(\vec{x}) = \frac{C_e Q}{4\pi\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{a^{n+1}} P_n(z).$$

APPLICATIONS

1. Pôles à l'infini

$$n = 0 ; p'_0 = \frac{Q}{a} = \text{nombre fini } (Q \rightarrow \infty ; a \rightarrow \infty)$$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{C_e p'_0}{4\pi\epsilon} P_0(z) = \frac{C_e p'_0}{4\pi\epsilon} = \text{cte}$$

$$\text{alors } \overleftarrow{E} = -\overleftarrow{\text{grad}} \phi = \overleftarrow{0}.$$

2. Dipôle à l'infini

$$n = 1 ; p'_1 = \frac{Q}{a^2} = \text{nombre fini } (Q \rightarrow \infty ; a \rightarrow \infty)$$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{C_e p'_1}{4\pi\epsilon} r P_1(z) = \frac{C_e p'_1}{4\pi\epsilon} r \cos \theta = A_1 x^3$$

$$\text{alors } \overleftarrow{E} = -\overleftarrow{\text{grad}} \phi = -A_1 [\overleftarrow{x^3}].$$

Ce champ constant peut être réalisé par un condensateur plan, figure 2.4.4.

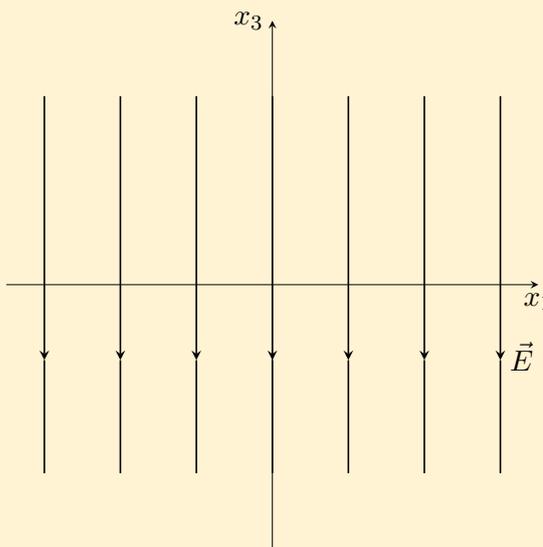


Fig. 2.4.4

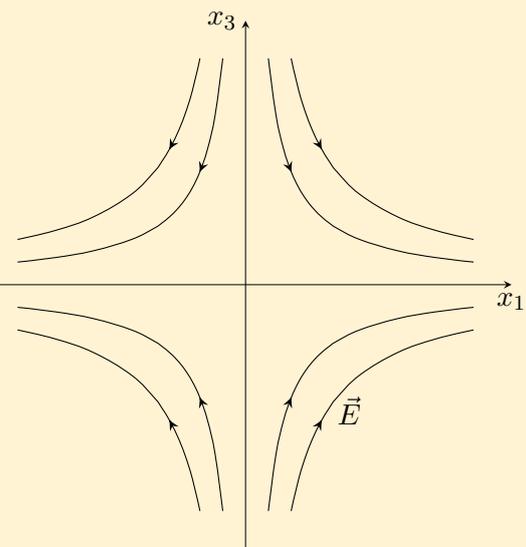


Fig. 2.4.5

3. Quadripôle à l'infini

$$n = 2, p'_2 = \frac{Q}{a^3} = \text{nombre fini}$$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{C_e p'_2}{4\pi\epsilon} r^2 P_2(z) = \frac{C_e p'_2}{4\pi\epsilon} \frac{r^2}{2} (-1 + 3 \cos^2 \theta) = A_2 \left(\frac{3}{2} (x^3)^2 - \frac{r^2}{2} \right)$$

$$\text{alors } \overleftarrow{E} = -\overleftarrow{\text{grad}} \phi = A_2 \left(\overleftarrow{x} - \frac{3}{2} x^3 [\overleftarrow{x^3}] \right).$$

Les lignes de champ sont représentées sur la figure 2.4.5. Puisque :

$$\Delta \left(\frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n P_n(z) \right) = 0, \text{ si } r > a \quad \text{et} \quad \Delta \left(\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^n P_n(z) \right) = 0 \text{ si } r < a,$$

alors, par la linéarité du laplacien, nous avons les deux cas suivants.

Cas a)

$$\Delta \left(\frac{1}{r^{n+1}} P_n(z) \right) = 0 \text{ pour } r \neq 0.$$

Exprimons ce laplacien en coordonnées sphériques en supposant une symétrie axiale :

$$\left(\frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta \right) \frac{1}{r^{n+1}} P_n(z) = 0.$$

Comme $z = \cos \theta$, nous avons

$$\partial_\theta = \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) = - \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \sin \theta = -\sqrt{1-z^2} \frac{\partial}{\partial z}$$

et alors

$$\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \sqrt{1-z^2} \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{1-z^2} \sqrt{1-z^2} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (1-z^2) \frac{\partial}{\partial z},$$

ce qui donne successivement

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial z} (1-z^2) \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{r^{n+1}} P_n(z) &= 0 \\ \frac{1}{r^{n+3}} \left(\frac{\partial}{\partial z} (1-z^2) \frac{\partial}{\partial z} + n(n+1) \right) P_n(z) &= 0 \\ \frac{1}{r^{n+3}} (P_n''(z)(1-z^2) - 2zP_n'(z) + n(n+1)P_n(z)) &= 0. \end{aligned}$$

Donc, $P_n(z)$ est solution de l'équation différentielle de Legendre

$$P_n''(z)(1-z^2) - 2zP_n'(z) + n(n+1)P_n(z) = 0. \quad (2.4.7)$$

Cas b)

$$\Delta r^n P_n(z) = 0, \quad r < \infty.$$

En coordonnées sphériques, et s'il y a symétrie axiale, on a

$$\begin{aligned} \Delta r^n P_n(z) &= P_n(z) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 n r^{n-1}) + r^{n-2} \frac{\partial}{\partial z} (1-z^2) \frac{\partial}{\partial z} P_n(z) \\ &= r^{n-2} \left(n(n+1)P_n(z) + \frac{\partial}{\partial z} (1-z^2) \frac{\partial}{\partial z} P_n(z) \right) = 0. \end{aligned}$$

On retrouve l'équation différentielle de Legendre.

Tout ceci permet d'affirmer que la série infinie

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + B_n \frac{1}{r^{n+1}} \right) P_n(z),$$

où A_n et B_n sont des constantes déterminées par les conditions aux limites, est solution de l'équation de Laplace $\Delta \phi = 0$ pour $r \neq 0$.

Les polynômes de Legendre ont les propriétés remarquables suivantes.

- Ils forment une famille orthogonale :

$$\int_{-1}^{+1} P_n(z)P_m(z)dz = \frac{2}{2n+1}\delta_{m n}.$$

- Ils ont des valeurs particulières en -1 et 1 :

$$P_n(+1) = 1 \quad \text{et} \quad P_n(-1) = (-1)^n.$$

- Dans cette section, nous n'avons considéré que les multipôles à orientation particulière : sur l'axe Ox^3 . Pour traiter les problèmes relatifs à des orientations quelconques, l'emploi des polynômes de Legendre ne suffit pas, il faut introduire les harmoniques sphériques.

2.5 Charge ponctuelle à l'intérieur d'un conducteur sphérique

Considérons une sphère conductrice de rayon R , dont le centre se trouve à une distance a d'une charge ponctuelle Q .

a) $a < R$

Soit ϕ_0 , le potentiel sur la sphère; cherchons le potentiel $\phi(\vec{x})$ créé par un tel système dans le domaine $|\vec{x}| \leq R$ (à l'intérieur de la sphère).

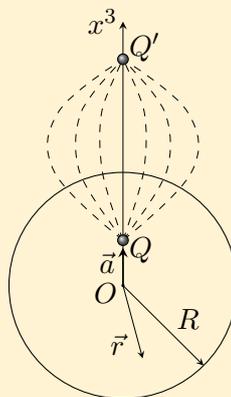


Fig. 2.5.1

En l'absence du conducteur et si nous posons $\phi(\vec{x} \rightarrow \infty) = 0$, nous savons que le potentiel dû à la charge ponctuelle Q est

$$\phi(\vec{x}) = \frac{C_e Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|},$$

ce qui constitue une solution particulière de l'équation de Poisson

$$\Delta\phi(\vec{x}) = -\frac{C_e}{\epsilon} Q\delta(\vec{x} - \vec{a}).$$

En vertu de la linéarité du laplacien, nous pouvons écrire

$$\phi = \frac{C_e Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} + \chi(\vec{x}, \vec{a}) \quad \text{avec} \quad \Delta_x \chi(\vec{x}, \vec{a}) = 0. \quad (2.5.1)$$

Il s'agit de déterminer $\chi(\vec{x}, \vec{a})$ de façon à satisfaire la condition imposée par le conducteur $\phi(\vec{y}) = \phi_0$. La solution, si elle existe est unique en vertu du théorème d'unicité.

Nous savons que pour $r > a$ nous avons

$$\frac{C_e Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} = \frac{C_e Q}{4\pi\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{a}{r}\right)^n P_n(z).$$

Or, nous avons vu qu'une solution de l'équation de Poisson pouvait s'écrire au moyen des polynômes de Legendre ; il est possible d'écrire en général

$$\phi(\vec{x}) = \frac{C_e Q}{4\pi\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_n}{r^{n+1}} + A_n r^n \right) P_n(z),$$

d'où, par identification,

$$a_n = a^n \quad \text{et} \quad \chi(\vec{x}, \vec{a}) = \frac{C_e Q}{4\pi\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(z).$$

On vérifie que $\Delta\chi(\vec{x}, \vec{a}) = 0$. Sur la sphère, où $\phi(\vec{y}) = \phi_0$, nous devons avoir

$$\phi_0 = \frac{C_e Q}{4\pi\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_n}{R^{n+1}} + A_n R^n \right) P_n(z).$$

Le coefficient a_n du polynôme $P_n(z)$ est donné par

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^{+1} \phi_0 P_n(z) dz.$$

Comme $\phi_0 = \text{cte}$, nous obtenons

$$\frac{1}{R} + A_0 = \phi_0 \frac{4\pi\epsilon}{C_e Q} \quad (P_0(z) = 1) \quad \text{et} \quad \frac{a^n}{R^{n+1}} + A_n R^n = 0$$

d'où :

$$A_0 = \phi_0 \frac{4\pi\epsilon}{C_e Q} - \frac{1}{R}$$

$$A_n = -\frac{a^n}{R^{2n+1}} \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Nous pouvons alors construire $\chi(\vec{x}, \vec{a})$. Posons pour simplifier $\phi_0 = 0$, et alors :

$$\chi(\vec{x}, \vec{a}) = -\frac{C_e Q}{4\pi\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{R^{2n+1}} r^n P_n(z).$$

Posons $b = R^2/a$, d'où $1/b^n = a^n/R^{2n}$ et $b > R$ (car $a < R$); alors :

$$\begin{aligned}\chi(\vec{x}, \vec{a}) &= -\frac{C_e Q}{4\pi\epsilon R} \sum_n \left(\frac{r}{b}\right)^n P_n(z) = -\frac{C_e Q}{4\pi\epsilon} \frac{b}{R} \sum_n \frac{1}{b} \left(\frac{r}{b}\right)^n P_n(z) \\ &= -\frac{C_e Q}{4\pi\epsilon} \frac{b}{R} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{b}|}.\end{aligned}$$

La solution cherchée est alors

$$\phi(\vec{x}) = \frac{C_e}{4\pi\epsilon} \left(\frac{Q}{|\vec{x} - \vec{a}|} - \left(\frac{b}{R}Q\right) \frac{1}{|\vec{x} - \vec{b}|} \right).$$

En posant $Q' = -(b/R)Q$, nous avons

$$\phi(\vec{x}) = \frac{C_e}{4\pi\epsilon} \left(\frac{Q}{|\vec{x} - \vec{a}|} + \frac{Q'}{|\vec{x} - \vec{b}|} \right) \quad \text{pour } |\vec{x}| \leq R. \quad (2.5.2)$$

Nous constatons, que du fait de la présence de la sphère conductrice, la charge Q créée *par influence* une charge virtuelle $Q' = -(b/R)Q = -(R/a)Q$ située en \vec{b} , $b > R$.

b) $a > R$

La charge se trouve à l'extérieur de la sphère. La solution en termes de polynômes de Legendre s'écrit dans ce cas

$$\phi(\vec{x}) = \frac{C_e Q}{4\pi\epsilon} \sum_n \left(\frac{1}{a} \left(\frac{r}{a}\right)^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(z).$$

La condition $\phi(\vec{y}) = \phi_0$ détermine la valeur des constantes B_n

$$\begin{aligned}B_0 &= \phi_0 R \frac{4\pi\epsilon}{C_e Q} - \frac{R}{a} \\ B_n &= -\frac{R^{2n+1}}{a^{n+1}} \quad \text{pour } n \geq 1.\end{aligned}$$

Donc :

$$\phi(\vec{x}) = \frac{C_e}{4\pi\epsilon} \sum_n \left(\frac{1}{a} \left(\frac{r}{a}\right)^n Q - \frac{R^{2n+1}}{a^{n+1}} \frac{1}{r^{n+1}} Q \right) P_n(z) + \phi_0 \frac{R}{r}.$$

Posons comme ci-dessus $b = R^2/a$, d'où $b < R$, et $Q' = -(R/a)Q$; nous obtenons

$$\phi(\vec{x}) = \phi_0 \frac{R}{r} + \frac{C_e}{4\pi\epsilon} \sum_n \left(\frac{1}{a} \left(\frac{r}{a}\right)^n Q + \frac{1}{r} \left(\frac{b}{r}\right)^n Q' \right) P_n(z),$$

c'est-à-dire

$$\phi(\vec{x}) = \frac{C_e}{4\pi\epsilon} \left(\frac{Q}{|\vec{x} - \vec{a}|} + \frac{Q'}{|\vec{x} - \vec{b}|} \right) + \phi_0 \frac{R}{r},$$

qui est le potentiel à l'extérieur du conducteur ($|\vec{x}| \geq R$).

c) Fonction de Green à l'intérieur de la sphère $C_0(\vec{y}) = \vec{y}^2 - R^2 = 0$

Cette fonction, définie par

$$\psi(\vec{y}, \vec{a}) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} + \chi(\vec{x}, \vec{a}),$$

vérifie les conditions suivantes

$$\begin{aligned} \Delta_x \psi(\vec{x}, \vec{a}) &= -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{a}) & (a^2 < R^2) \\ \psi(\vec{y}, \vec{a}) &= 0 \quad \text{sur} \quad C_0(\vec{y}) = 0 \\ \chi(\vec{x}, \vec{a}) &= -\frac{b}{R} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{b}|} & (b = \frac{R^2}{a} > R). \end{aligned}$$

Elle est définie dans la sphère, et possède une singularité au point $\vec{x} = \vec{a}$. Démontrons que $\psi(\vec{x}, \vec{a}) = \psi(\vec{a}, \vec{x})$:

1) d'abord, nous avons évidemment $(1/|\vec{x} - \vec{a}|) = (1/|\vec{a} - \vec{x}|)$

2) Ensuite, nous avons successivement

$$\begin{aligned} \chi(\vec{x}, \vec{a}) &= -\frac{b}{R} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{b}|} = -\frac{R}{a} \frac{1}{|\vec{x} - (R^2/a^2)\vec{a}|} \\ &= \frac{-1}{|(a/R)\vec{x} - (R/a)\vec{a}|} = -\left| \left(\frac{a}{R}\vec{x}\right)^2 - 2(\vec{x}, \vec{a}) + \left(\frac{R}{a}\vec{a}\right)^2 \right|^{-1/2} \\ &= -\left(\underbrace{\frac{1}{R^2} a^2 x^2}_{\text{sym.}} - 2 \underbrace{(\vec{x}, \vec{a})}_{\text{sym.}} + R^2 \right)^{-1/2} = \chi(\vec{a}, \vec{x}). \end{aligned}$$

Calculons encore : $\lim_{R \rightarrow \infty} \psi(\vec{x}, \vec{a})$. Nous avons

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}, \vec{a}) &= \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} - \frac{R}{a} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{b}|} = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} - \frac{R}{a} \frac{1}{|\vec{x} - (R^2/a^2)\vec{a}|} \\ &= \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} - \frac{R}{a} \left(\frac{a}{R}\right)^2 \frac{1}{|\vec{a} - (a^2/R^2)\vec{x}|} = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} - \frac{a}{R} \frac{1}{|\vec{a} - (a^2/R^2)\vec{x}|} \\ &= \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} - \frac{1}{R} \left(1 - 2\frac{a^2}{R^2}(\vec{x}, \vec{a}) + \left(\frac{a^2}{R^2}\right)^2 x^2 \right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} - \underbrace{\frac{1}{R} \left(1 + \frac{a}{R^2}(\vec{x}, \vec{a}) + \frac{a^2}{R^2} + \dots \right)}_{\rightarrow 0 \text{ si } R \rightarrow \infty} \end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \psi(\vec{x}, \vec{a}) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|}.$$

2.6 Cas général – Théorème de Green II

Au début du chapitre 1, nous avons démontré le théorème de Green I :

$$\int_V (dV \phi \operatorname{div} \vec{a})(\vec{x}) = \oint_V (d\vec{\sigma}, \phi \vec{a})(\vec{y}) - \int_V (dV (\vec{a}, \overleftarrow{\operatorname{grad}} \phi))(\vec{x}).$$

Si nous posons $\vec{a} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \psi$, alors le théorème ci-dessus s'écrit

$$\int_V (dV \phi \Delta \psi)(\vec{x}) = \oint_V (d\vec{\sigma}, \overrightarrow{\operatorname{grad}} \psi)(\vec{y}) - \int_V (dV (\overrightarrow{\operatorname{grad}} \psi, \overleftarrow{\operatorname{grad}} \phi))(\vec{x}).$$

De même on a

$$\int_V (dV \psi \Delta \psi)(\vec{x}) = \oint_V (d\vec{\sigma}, \psi \overrightarrow{\operatorname{grad}} \phi)(\vec{y}) - \int_V (dV \overleftarrow{\operatorname{grad}} \phi, \overleftarrow{\operatorname{grad}} \psi)(\vec{x}).$$

Par différence, nous obtenons le *théorème de Green II*

$$\int_V (dV (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi))(\vec{x}) = \oint_V (d\vec{\sigma}, (\phi \overrightarrow{\operatorname{grad}} \psi - \psi \overrightarrow{\operatorname{grad}} \phi))(\vec{y}).$$

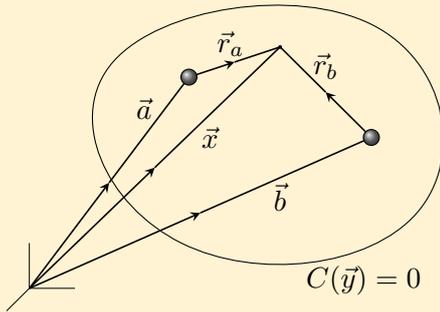


Fig. 2.6.1

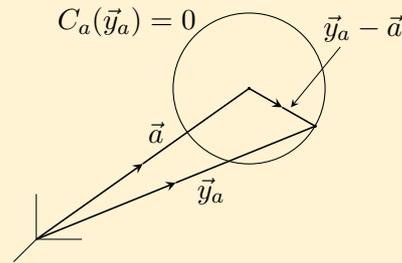


Fig. 2.6.2

Considérons un volume V quelconque, limité par la surface fermée $C(\vec{y}) = 0$ et introduisons les deux fonctions de Green $\psi(\vec{x}, \vec{a})$ et $\psi(\vec{x}, \vec{b})$ qui, par définition, vérifient les conditions suivantes :

$$\psi(\vec{x}, \vec{a}) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} + \chi(\vec{x}, \vec{a}) ; \quad \begin{cases} \Delta_x \psi(\vec{x}, \vec{a}) = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{a}) \\ \Delta_x \chi(\vec{x}, \vec{a}) = 0 \\ \psi(\vec{y}, \vec{a}) = 0 \end{cases}$$

$$\psi(\vec{x}, \vec{b}) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{b}|} + \chi(\vec{x}, \vec{b}) ; \quad \begin{cases} \Delta_x \psi(\vec{x}, \vec{b}) = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{b}) \\ \Delta_x \chi(\vec{x}, \vec{b}) = 0 \\ \psi(\vec{y}, \vec{b}) = 0. \end{cases}$$

Démontrons que, dans le cas général (volume V quelconque), les fonctions de Green sont symétriques :

$$\psi(\vec{a}, \vec{b}) = \psi(\vec{b}, \vec{a}).$$

Excluons du volume V les deux points \vec{a} et \vec{b} au moyen de deux petites sphères $C_a(\vec{y}_a) = 0$ et $C_b(\vec{y}_b) = 0$ centrée en ces deux points. Alors, dans tout le volume restant V' , nous avons par définition des fonctions de Green :

$$\Delta_x \psi(\vec{x}, \vec{a}) = \Delta_x \psi(\vec{x}, \vec{b}) = 0.$$

Nous avons donc, par le théorème de Green II :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{V'} dV(\vec{x}) \left[\psi(\vec{x}, \vec{a}) \underbrace{\Delta_x \psi(\vec{x}, \vec{b})}_{=0} - \psi(\vec{x}, \vec{b}) \underbrace{\Delta_x \psi(\vec{x}, \vec{a})}_{=0} \right] \\ &= \left(\underbrace{\oint_C}_{=0 \text{ par définition}} + \oint_{C_a} + \oint_{C_b} \right) \left[d\overleftarrow{\sigma}(\vec{y}), \left(\psi(\vec{y}, \vec{a}) \overrightarrow{\text{grad}}_y \psi(\vec{y}, \vec{b}) - \psi(\vec{y}, \vec{b}) \overrightarrow{\text{grad}}_y \psi(\vec{y}, \vec{a}) \right) \right]. \end{aligned}$$

Posons : $\vec{r}_a = \vec{x} - \vec{a}$; $\vec{r}_b = \vec{x} - \vec{b}$; l'élément de surface sur la sphère C_a s'écrit alors

$$d\overleftarrow{\sigma}_a(\vec{y}_a) = -[\vec{r}_a] r_a^2 d\Omega_a,$$

où $d\Omega_a$ est l'élément d'angle solide; on introduit la notation correspondante pour la sphère C_b . Alors :

$$\begin{aligned} \psi(\vec{y}_a, \vec{a}) &= \frac{1}{r_a} + \underbrace{\chi(\vec{y}_a, \vec{a})}_{\text{fonction régulière}} \\ \overleftarrow{\text{grad}}_y \psi(\vec{y}_a, \vec{a}) &= -\frac{[\vec{r}_a]}{r_a^2} + \underbrace{\overrightarrow{\text{grad}}_y \chi(\vec{y}_a, \vec{a})}_{\text{fonction régulière}}. \end{aligned}$$

Et de même pour $\psi(\vec{y}, \vec{b})$.

Faisons tendre r_a et r_b vers 0; nous avons alors

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\oint_{C_a} + \oint_{C_b} \right) \left[d\overleftarrow{\sigma}(\vec{y}), \left(\psi(\vec{y}, \vec{a}) \overrightarrow{\text{grad}}_y \psi(\vec{y}, \vec{b}) - \psi(\vec{y}, \vec{b}) \overrightarrow{\text{grad}}_y \psi(\vec{y}, \vec{a}) \right) \right] \\ &= \lim_{r_a \rightarrow 0} \oint_{C_a} \left[-d\Omega_a r_a^2 [\vec{r}_a], \left(\left[\frac{1}{r_a} + \chi(\vec{y}, \vec{a}) \right] \overrightarrow{\text{grad}}_y \psi(\vec{y}, \vec{b}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \psi(\vec{y}_a, \vec{b}) \left[-\frac{[\vec{r}_a]}{r_a^2} + \overrightarrow{\text{grad}}_y \chi(\vec{y}_a, \vec{a}) \right] \right) \right] \\ &\quad + \lim_{r_b \rightarrow 0} \oint_{C_b} \left[-d\Omega_b r_b^2 [\vec{r}_b], \left(\psi(\vec{y}_b, \vec{a}) \left[-\frac{[\vec{r}_b]}{r_b^2} + \overrightarrow{\text{grad}}_y \chi(\vec{y}_b, \vec{b}) \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left[\frac{1}{r_b} + \chi(\vec{y}_b, \vec{b}) \right] \overrightarrow{\text{grad}}_y \psi(\vec{y}_b, \vec{a}) \right) \right]. \end{aligned}$$

La seule singularité de $\psi(\vec{x}, \vec{a})$ étant $(1/r_a)$ en \vec{a} et celle de $\psi(\vec{x}, \vec{b})$ étant $(1/r_b)$ en \vec{b} , nous avons :

$$0 = \lim_{r_a \rightarrow 0} \oint_{C_a} d\Omega_a \psi(\vec{y}_a, \vec{b}) + \lim_{r_b \rightarrow 0} \oint_{C_b} d\Omega_b \psi(\vec{y}_b, \vec{a}),$$

c'est-à-dire :

$$0 = -4\pi\psi(\vec{a}, \vec{b}) + 4\pi\psi(\vec{b}, \vec{a}),$$

soit encore

$$\psi(\vec{a}, \vec{b}) = \psi(\vec{b}, \vec{a}).$$

Montrons encore que pour un problème donné la fonction de Green $\psi(\vec{x}, \vec{a})$ est unique.

Supposons qu'il en existe deux $\psi'(\vec{x}, \vec{a})$ et $\psi''(\vec{x}, \vec{a})$. Considérons

$$\eta(\vec{x}, \vec{a}) = \psi'(\vec{x}, \vec{a}) - \psi''(\vec{x}, \vec{a}).$$

Il vient alors

$$\eta(\vec{x}, \vec{a}) = \chi'(\vec{x}, \vec{a}) - \chi''(\vec{x}, \vec{a})$$

et cette fonction ne possède aucune singularité dans V donc :

$$\Delta\eta(\vec{x}, \vec{a}) = 0 \quad \text{et} \quad \eta(\vec{y}, \vec{a}) = 0.$$

Par le théorème de Green I :

$$\oint_V (d\vec{\sigma}, \eta \overrightarrow{\text{grad}}\eta)(\vec{y}) = \int_V (dV(|\overrightarrow{\text{grad}}\eta|^2 + \eta \underbrace{\Delta\eta}_{=0}))(\vec{x}),$$

d'où

$$\overrightarrow{\text{grad}}\eta(\vec{x}, \vec{a}) = 0 \quad \text{donc} \quad \eta(\vec{x}, \vec{a}) = \text{cte} = 0 \quad \text{car} \quad \eta(\vec{y}, \vec{a}) = 0,$$

ce qui entraîne

$$\psi'(\vec{x}, \vec{a}) = \psi''(\vec{x}, \vec{a}).$$

2.7 Potentiel de Coulomb

Soit un volume V , limité par une surface conductrice $C(\vec{y}) = 0$. Dans ce volume, nous supposons l'existence d'une distribution de charges répartie selon la densité $q(\vec{x})$.

Nous savons (cf. sect. 2.2) que le potentiel créé $\phi(\vec{x})$ doit satisfaire l'équation de Poisson

$$\Delta\phi(\vec{x}) = -\frac{C_e}{\epsilon}q(\vec{x}) \quad \text{avec} \quad \epsilon = \text{cte.}$$

Nous imposons la condition aux limites :

$$\phi(\vec{y}) = 0.$$

Pour le calcul du potentiel $\phi(\vec{x})$, nous introduisons la fonction de Green $\psi(\vec{x}, \vec{a})$, telle que

$$\begin{cases} \Delta\psi(\vec{x}, \vec{a}) = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{a}) \\ \psi(\vec{y}, \vec{a}) = 0. \end{cases}$$

Excluons de V la petite sphère de centre \vec{a} .

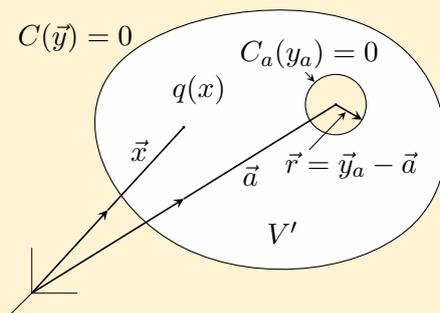


Fig. 2.7.1

Dans le volume restant V' , nous avons $\Delta\psi(\vec{x}, \vec{a}) = 0$. Par le théorème de Green II, nous avons

$$\int_{V'} \left(dV \underbrace{(\phi \Delta\psi - \psi \Delta\phi)}_{=0} \right) (\vec{x}) = \left(\oint_C + \oint_{C_a} \right) \left(d\overleftarrow{\sigma}, \overrightarrow{\text{grad}}\psi - \psi \overrightarrow{\text{grad}}\phi \right) (\vec{y}_a).$$

En procédant comme au paragraphe précédent, l'intégrale de surface s'écrit

$$\lim_{r \rightarrow 0} \oint_{C_a} \left[-[\overleftarrow{r}] r^2 d\Omega, \phi(\vec{y}_a) \left(-\frac{[\overleftarrow{r}]}{r^2} + \underbrace{\overrightarrow{\text{grad}}_y \chi(\vec{y}_a, \vec{a})}_{\text{f. régulière}} \right) - \overrightarrow{\text{grad}}_y \phi(\vec{y}_a) \left(\frac{1}{r} + \underbrace{\chi(\vec{y}_a, \vec{a})}_{\text{f. régulière}} \right) \right] \\ = 4\pi\phi(\vec{a}),$$

en supposant $\phi(\vec{x})$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\phi(\vec{x})$ régulières.

Nous obtenons alors l'*identité de Green*

$$\phi(\vec{a}) = \frac{1}{4\pi} \int_V dV(\vec{x}) (-\Delta\phi(\vec{x})\psi(\vec{x}, \vec{a})).$$

En remplaçant $\Delta\phi(\vec{x})$ par sa valeur tirée de l'équation de Poisson : $-(C_e/\epsilon)q(\vec{x})$, nous obtenons l'expression du *potentiel de Coulomb* au point \vec{a} :

$$\phi(\vec{a}) = \frac{C_e}{4\pi\epsilon} \int_V (dV q)(\vec{x})\psi(\vec{x}, \vec{a}). \quad (2.7.1)$$

Lorsque $V \rightarrow V_\infty$, alors nous avons vu que $\psi(\vec{x}, \vec{a}) \rightarrow 1/|\vec{x} - \vec{a}|$; il s'en suit

$$\phi(\vec{a}) = \frac{C_e}{4\pi\epsilon} \int_{V_\infty} \frac{(dV q)(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{a}|} \quad \text{avec} \quad \phi(\vec{x} \rightarrow \infty) = 0. \quad (2.7.2)$$

Dans ce cas, on peut calculer le champ \vec{E} au point \vec{a} . En effet, nous savons que $\overleftarrow{E} = -\overleftarrow{\text{grad}}_a \phi(\vec{a})$. Comme $\vec{r}_a = \vec{x} - \vec{a}$,

$$\overleftarrow{\text{grad}}_a \frac{1}{r_a} = \overleftarrow{\text{grad}}_a \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} = -\frac{[\overleftarrow{a} - \overleftarrow{x}]}{|\vec{a} - \vec{x}|^2},$$

et alors, avec ($d^3Q = dVq$), on obtient

$$\overleftarrow{E}(\vec{a}) = \frac{C_e}{4\pi\epsilon} \int_{V_\infty} d^3Q(\vec{x}) \frac{[\overleftarrow{a} - \overleftarrow{x}]}{|\vec{a} - \vec{x}|^2}. \quad (2.7.3)$$

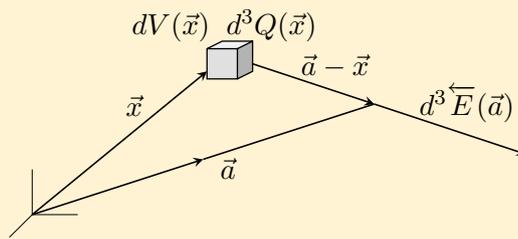


Fig. 2.7.2

Remarque.

Les fonctions de Green ne constituent pas un bon moyen pour la résolution pratique de problèmes concrets, car il est très difficile de les construire, sauf dans les cas simples, comme celui vu à la section 2.5.

2.8 Potentiel de double couche

Rappelons les résultats de la section 2.1 concernant les surfaces chargées :

$$(1) \quad \oint_{\Delta V} (d^3\sigma, \vec{D})(\vec{y}) = C_e \Delta Q = C_e \omega \Delta \sigma$$

$$(2) \quad (E''_\nu - E'_\nu)(\vec{y}) = \frac{C_e}{\epsilon} \omega(\vec{y}).$$

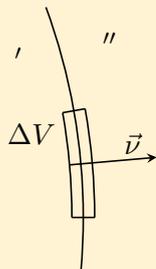


Fig. 2.8.1

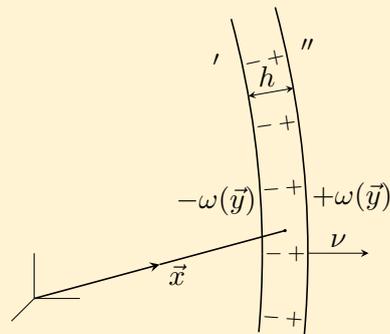


Fig. 1.8.2

Considérons maintenant deux surfaces chargées distantes de h . La surface (+) est chargée avec une densité de charge positive $+\omega$, et l'autre (-) est chargée avec une densité de charge négative $-\omega$.

La loi (2) nous donne immédiatement les propriétés d'un tel système :

$$E_\nu - E'_\nu = \frac{C_e}{\epsilon} (-\omega)$$

$$E''_\nu - E_\nu = \frac{C_e}{\epsilon} (+\omega).$$

De là, nous tirons :

$$E''_{\nu} - E'_{\nu} = \frac{C_e}{\epsilon} = 0.$$

La composante normale du champ \overleftarrow{E} ne subit aucune discontinuité (alors qu'il en existe une s'il n'y a qu'une seule surface chargée).

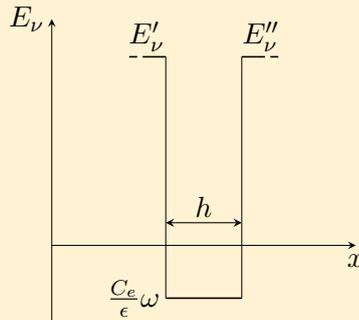


Fig. 2.8.3

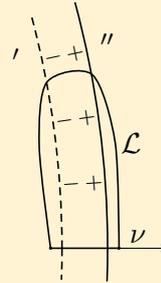


Fig. 2.8.4

Evaluons la circulation du champ \overleftarrow{E} . Nous savons que :

$$\oint_C (\overleftarrow{E}, d\vec{x}) = 0.$$

On a donc successivement, cf. figure 2.2.3,

$$\begin{aligned} \int_{C'} (\overleftarrow{E}, d\vec{x}) &= + \int_{C'} E_{\nu} dx = -\frac{C_e}{\epsilon} \omega h \\ \int_{C''} (\overleftarrow{E}, d\vec{x}) &= - \int_{C''} (\overleftarrow{\text{grad}} \phi, d\vec{x}) = - \int_{C''} d\phi = \phi' - \phi''. \end{aligned}$$

Densité de polarisation.

Si $h \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow \infty$ avec $\omega h = \text{nbre fini}$ alors : $\eta = \omega h$ est appelé *densité de polarisation*. Alors, avec cette définition, on a

$$(\phi'' - \phi')(\vec{y}) = \frac{C_e}{\epsilon} \eta(\vec{y}). \quad (2.8.1)$$

L'interprétation de cette densité de polarisation est la suivante. Lorsque $h \rightarrow 0$, les deux surfaces peuvent être considérées comme les deux côtés d'une surface bilatère. Cette surface est chargée positivement d'un côté (+) et négativement de l'autre (-). On admet alors que cette surface est formée de dipôles élémentaires orientés selon la normale $\vec{\nu}$ avec une densité $\eta(\vec{y})$: on l'appelle *surface polarisée à double couche*.

Calculons maintenant le potentiel créé par une double couche. Nous allons procéder de la même façon que lors de la recherche du potentiel de Coulomb. Considérons un volume V limité par la surface fermée $C_0(\vec{y}_0) = 0$, formée d'un conducteur sur lequel $\phi(\vec{y}_0) = 0$.

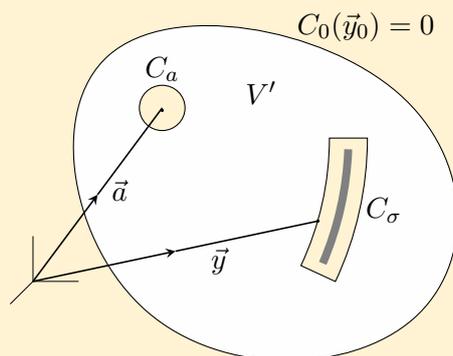


Fig. 2.8.5

Excluons de V la petite sphère C_a de centre \vec{a} et le volume limité par la surface fermée C_σ contenant la double couche. Par le théorème de Green II, nous avons

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{V'} \left(dV \underbrace{(\phi \Delta \psi)}_0 - \psi \underbrace{(\Delta \phi)}_0 \right) \\
 &= \left(\underbrace{\oint_{C_0}}_{=0 \text{ par définition}} + \oint_{C_a} + \oint_{C_\sigma} \right) \left(d\vec{\sigma}, \phi \overrightarrow{\text{grad}} \psi - \psi \overrightarrow{\text{grad}} \phi \right) (\vec{y}).
 \end{aligned}$$

Nous avons vu au paragraphe précédent que

$$\lim_{r_a \rightarrow 0} \oint_{C_a} \left(d\vec{\sigma}, \phi \overrightarrow{\text{grad}} \psi - \psi \overrightarrow{\text{grad}} \phi \right) (\vec{y}_a) = 4\pi \phi(\vec{a}).$$

Pour la surface C_σ , nous choisissons $d\vec{\sigma}$ normal à la surface extérieure (et non plus normal à la surface intérieure ainsi qu'il l'a été fait dans l'expression ci-dessus du théorème de Green II).

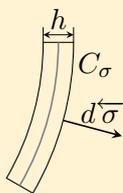


Fig. 2.8.6

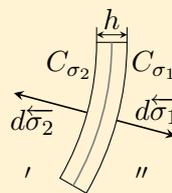


Fig. 2.8.7

Donc : $d\vec{\sigma}$ devient $-d\vec{\sigma}$ et alors

$$0 = 4\pi \phi(\vec{a}) + \oint_{C_\sigma} \left(-d\vec{\sigma}, \phi \overrightarrow{\text{grad}} \psi + \psi \overrightarrow{\text{grad}} \phi \right) (\vec{y}_\sigma).$$

Si $h \rightarrow 0$, donc si le volume contenu dans C_σ tend vers 0, alors on peut considérer C_{σ_1} et C_{σ_2} comme les deux côtés d'une même surface Σ , qui correspond précisément à la surface polarisée.

Nous avons (aux termes du 2^e ordre près) :

$$4\pi\phi(\vec{a}) = \int_{C_{\sigma_1}} \left(d\overleftarrow{\sigma}, \phi' \overrightarrow{\text{grad}} \psi - \psi \overrightarrow{\text{grad}} \phi' \right) (\vec{y}_1) + \int_{C_{\sigma_2}} \left(d\overleftarrow{\sigma}, \phi'' \overrightarrow{\text{grad}} \psi - \psi \overrightarrow{\text{grad}} \phi'' \right) (\vec{y}_2).$$

Si $h \rightarrow 0$ et $d\overleftarrow{\sigma}_2 = -d\overleftarrow{\sigma}_1$, on a alors

$$4\pi\phi(\vec{a}) = \int_{\Sigma} \left(d\overleftarrow{\sigma}, (\phi'' \overrightarrow{\text{grad}} \psi - \psi \overrightarrow{\text{grad}} \phi'' - \phi' \overrightarrow{\text{grad}} \psi + \psi \overrightarrow{\text{grad}} \phi') \right) (\vec{y}_{\Sigma}),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} 4\pi\phi(\vec{a}) &= \int_{\Sigma} \left(d\overleftarrow{\sigma}, \overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{y}} \psi(\vec{y}, \vec{a}) (\phi'' - \phi') \right) (\vec{y}) \\ &\quad + \int_{\Sigma} \left(d\overleftarrow{\sigma}, \psi(\vec{y}, \vec{a}) (-\overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{y}} \phi'' + \overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{y}} \phi') \right) (\vec{y}). \end{aligned}$$

Or nous avons vu que

$$(\phi'' - \phi')(\vec{y}) = \frac{C_e}{\epsilon} \eta(\vec{y}) \quad \text{et} \quad |-\overrightarrow{\text{grad}} \phi'' + \overrightarrow{\text{grad}} \phi'|_{\nu} = E''_{\nu} - E'_{\nu} = 0,$$

ce qui conduit à

$$\phi(\vec{a}) = \frac{C_e}{4\pi\epsilon} \int_{\Sigma} \left(d\overleftarrow{\sigma}, \overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{y}} \psi(\vec{y}, \vec{a}) \right) \eta(\vec{y}).$$

Si $V \rightarrow V_{\infty}$, alors $\psi(\vec{y}, \vec{a}) \rightarrow (1/|\vec{y} - \vec{a}|)$, donc $\overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{y}} \psi(\vec{y}, \vec{a}) \rightarrow -([\vec{r}_a]/r_a^2)$ avec $\vec{r}_a = \vec{y} - \vec{a}$. Il en résulte que le *potentiel créé par une double couche* est alors si $\phi(\vec{x} \rightarrow \infty) :$

$$\phi(\vec{a}) = \frac{C_e}{4\pi\epsilon} \int_{\Sigma} \frac{-(d\overleftarrow{\sigma}(\vec{y}), [\vec{y} - \vec{a}])}{|\vec{y} - \vec{a}|^2} \eta(\vec{y}). \quad (2.8.2)$$

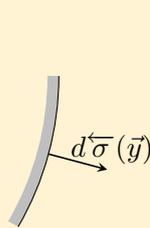


Fig. 2.8.8

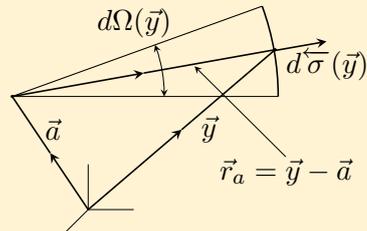


Fig. 2.8.9

Grâce à la convention suivante :

$$\begin{cases} d\Omega(\vec{y}) = \frac{([\vec{r}_a], d\overleftarrow{\sigma})}{r_a^2} = \text{élément d'angle solide} \\ d\Omega(\vec{y}) > 0 \text{ si } \vec{a} \text{ voit la surface négative} \\ d\Omega(\vec{y}) < 0 \text{ si } \vec{a} \text{ voit la surface positive,} \end{cases}$$

le potentiel de double couche s'écrit

$$\phi(\vec{a}) = \frac{C_e}{4\pi\epsilon} \int_{\Sigma} (d\Omega \eta(\vec{y})) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \text{ si } \vec{a} \text{ voit la surface } \begin{matrix} + \\ - \end{matrix}. \quad (2.8.3)$$

Remarque : cas où la surface polarisée a aussi des charges superficielles.

Si $|\omega_{(+)} - \omega_{(-)}| = \omega_1 \neq 0$, la surface Σ , en plus de la polarisation η , possède une distribution de charges superficielle de densité ω_1 . Alors

$$E''_{\nu} - E'_{\nu} = \frac{C_e}{\epsilon} \omega_1 \neq 0$$

et le potentiel dû à cette distribution est

$$\phi_1(\vec{a}) = \frac{C_e}{4\pi\epsilon} \int_{\Sigma} (d^{\leftarrow}\sigma \omega_1, \vec{\nu}(\vec{y}, \vec{a})).$$

Comme $|d^{\leftarrow}\sigma \omega_1| = d^2Q$, $d^{\leftarrow}\sigma \parallel \vec{\nu}$ et $|\vec{\nu}| = 1$, ce potentiel s'écrit donc

$$\phi_1(\vec{a}) = \frac{C_e}{4\pi\epsilon} \int_{\Sigma} d^2Q(\vec{y}) \psi(\vec{y}, \vec{a}).$$

2.9 Surface à polarisation constante

Pour une telle surface, nous avons :

$$\phi(\vec{x}) = \frac{C_e \eta}{4\pi\epsilon} \Omega_a$$

où

$$\Omega_a = \int_{\Sigma} d\Omega_a(\vec{y}) \text{ avec } d\Omega_a(\vec{y}) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \text{ si } \vec{a} \text{ voit la surface } \begin{matrix} + \\ - \end{matrix}.$$

1. — Couche quelconque.

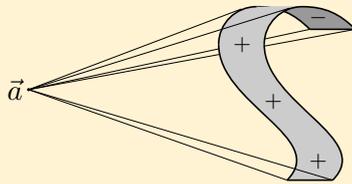


Fig. 2.9.1

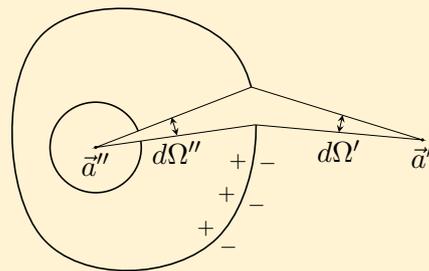


Fig. 2.9.2

2. — Couche fermée. Le potentiel est donné par

$$\phi(\vec{a}'') \rightarrow \frac{C_e \eta}{4\pi\epsilon} 4\pi = \frac{C_e}{\epsilon} \text{ à l'intérieur}$$

$$\phi(\vec{a}') \rightarrow 0 \text{ à l'extérieur}$$

et l'on retrouve bien $\phi(\vec{a}'') - \phi(\vec{a}') = (\phi'' - \phi')(\vec{y}) = (C_e/\epsilon)\eta$.

Le champ $\overleftarrow{E}(\vec{a})$

Cherchons à déterminer le champ $\overleftarrow{E}(\vec{a})$ dû à une surface à polarisation constante. Par la formule des accroissements finis, on a

$$\phi(\vec{a} + \delta\vec{a}) - \phi(\vec{a}) = \frac{\partial\phi(\vec{a})}{\partial a^i} \delta a^i = (\overleftarrow{\text{grad}}\phi(\vec{a}), \delta\vec{a}).$$

Or $\overleftarrow{\text{grad}}\phi(\vec{a}) = -\overleftarrow{E}(\vec{a})$, il en résulte donc

$$\phi(\vec{a} + \delta\vec{a}) - \phi(\vec{a}) = -(\overleftarrow{E}(\vec{a}), \delta\vec{a}).$$

Mais au lieu de déplacer le point \vec{a} , nous pouvons déplacer la couche double de $-\delta\vec{a}$ et obtenir :

$$(\overleftarrow{E}(\vec{a}), \delta\vec{a}) = \phi(\vec{a}) - \phi_{-\delta\vec{a}}(\vec{a}).$$

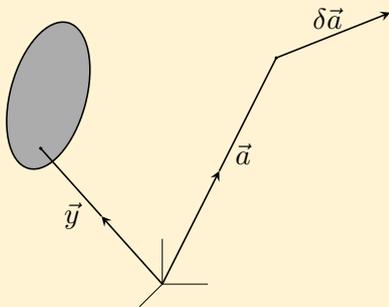


Fig. 2.9.3

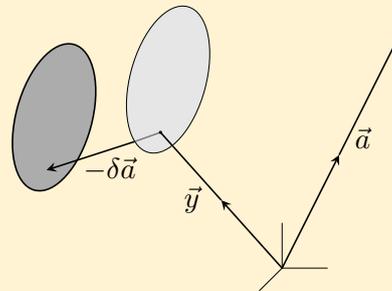


Fig. 2.9.4

En changeant le signe de la polarisation sur la couche déplacée de $-\delta\vec{a}$, nous obtenons

$$(\overleftarrow{E}(\vec{a}), \delta\vec{a}) = \phi^+(\vec{a}) + \phi_{-\delta\vec{a}}^-(\vec{a}).$$

Appelons δS , l'anneau reliant les deux surfaces et $\delta\phi(\vec{a})$ le potentiel qu'il crée en \vec{a} .

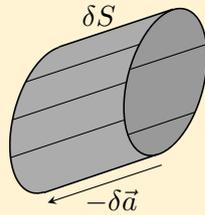


Fig. 2.9.5

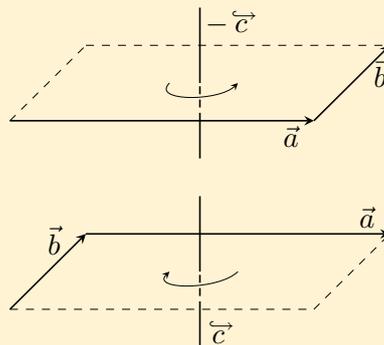


Fig. 2.9.6

Alors, le potentiel dû à la *couche double* ($S + S_{-\delta a} + \delta S$) est nul au point \vec{a} , puisque celui-ci se trouve à l'extérieur de la couche fermée :

$$\phi^+(\vec{a}) + \phi_{-\delta\vec{a}}^-(\vec{a}) + \delta\phi(\vec{a}) = 0,$$

et donc

$$-(\overleftarrow{E}(\vec{a}), \delta\vec{a}) = \delta\phi(\vec{a}).$$

En vue de simplifier les calculs ultérieurs, rappelons les notions suivantes.

Produit vectoriel et de vecteur axial

Dans un espace euclidien et cartésien (*), formons à partir des deux vecteurs \vec{a} ($a^i \doteq a_i$) et \vec{b} ($b^k \doteq b_k$) le tenseur :

$$c^{ik} \doteq c_{ik} = a^i b^k - a^k b^i.$$

Considérons alors le tenseur antisymétrique

$$\epsilon^{ikl} = \epsilon_{ikl} = \begin{cases} +1 & \text{si } i k l = \text{permutation paire de } 1\ 2\ 3 \\ -1 & \text{si } i k l = \text{permutation impaire de } 1\ 2\ 3. \end{cases}$$

alors :

$$\dot{c}^i \doteq \dot{c}_i = \frac{1}{2!} \epsilon_{ikl} c^{kl}.$$

On dit que $\dot{c}^i \doteq \dot{c}_i$ est un *vecteur axial* et il est appelé le *produit vectoriel* de \vec{a} par \vec{b} .

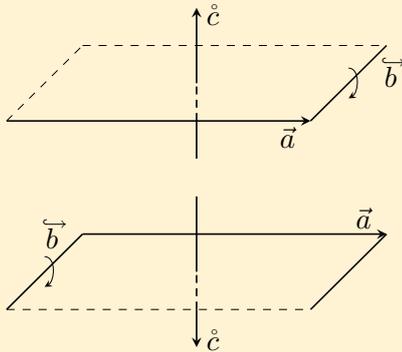


Fig. 2.9.7

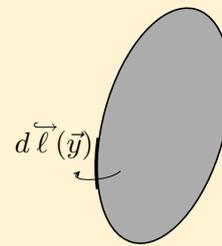


Fig. 2.9.8

Nous avons alors la figure 2.9.8 sur laquelle $d\vec{\ell}(\vec{y})$ désigne l'élément de « ligne » bordant la couche. Il est possible d'écrire

$$\delta d\overleftarrow{\sigma}(\vec{y}) = [\delta\vec{a} \wedge \delta\vec{\ell}(\vec{y})]$$

en convenant que $\delta d\overleftarrow{\sigma} = d\delta\overleftarrow{\sigma}$ et nous avons

$$d\delta\overleftarrow{\sigma}(\vec{y}) = [d\vec{\ell}(\vec{y}) \wedge \delta\vec{a}].$$

Le potentiel $\phi(\vec{a})$ de la couche S est, en vertu de ce qui a été vu au paragraphe précédent :

$$\phi(\vec{a}) = \int_S \frac{-(d\overleftarrow{\sigma}, [\vec{y} - \vec{a}])}{|\vec{y} - \vec{a}|^2}.$$

Sa variation est :

$$\delta\phi(\vec{a}) = \frac{C_e \eta}{4\pi\epsilon} \int_{\delta S} \frac{-(d\overleftarrow{\sigma}(\vec{y}), [\vec{y} - \vec{a}])}{|\vec{y} - \vec{a}|^2},$$

où δS est la surface du cylindre défini plus haut, figure 2.9.5.

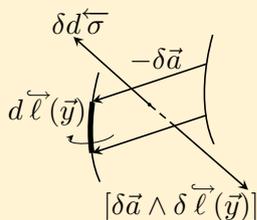


Fig. 2.9.9

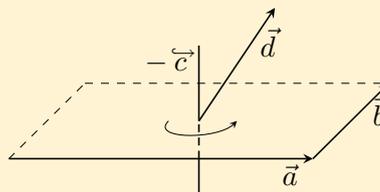


Fig. 2.9.10

En remplaçant $\delta d\overleftarrow{\sigma}$ par sa valeur, nous obtenons :

$$\delta\phi(\vec{a}) = -\frac{C_e \eta}{4\pi\epsilon} \oint_{\text{contour}} \frac{[d\vec{\ell}(\vec{y}) \wedge \delta\vec{a}], [\vec{r}_a]}{r_a^2},$$

où $\vec{r}_a = \vec{y} - \vec{a}$.

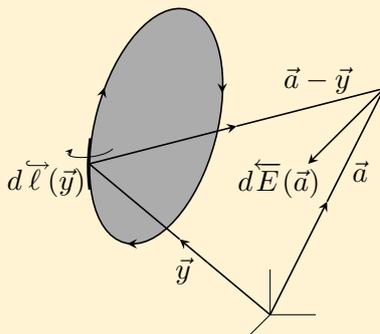


Fig. 2.9.11

Utilisons la propriété du produit mixte

$$(\vec{d}, \vec{c}) = (\vec{d}, [\vec{a} \wedge \vec{b}]) = \mathring{V} \geq 0,$$

où \mathring{V} est le volume pseudo-scalaire du parallépipède formé de \vec{a} , \vec{b} et \vec{d} . D'autre part, comme $\delta\vec{a}$ est un vecteur constant, nous pouvons écrire

$$\delta\phi(\vec{a}) = -\frac{C_e \eta}{4\pi\epsilon} \left(\oint_{\text{contour}} \frac{[\vec{r}_a] \wedge d\vec{\ell}(\vec{y})}{r_a^2}, \delta\vec{a} \right).$$

Or $\delta\phi(\vec{a}) = -(\overleftarrow{E}(\vec{a}), \delta\vec{a})$ et puisque $\delta\vec{a}$ est un déplacement (constant) arbitraire, nous avons

$$\overleftarrow{E}(\vec{a}) = -\frac{C_e \eta}{4\pi\epsilon} \oint_{\text{contour}} \frac{-d\vec{\ell}(\vec{y}) \wedge [\vec{r}_a]}{r_a^2}.$$

Comme $\vec{r}_a = \vec{y} - \vec{a}$, alors $-\vec{r}_a = \vec{a} - \vec{y}$ et le *champ créé par une surface à polarisation constante* s'écrit

$$\overleftarrow{E} = \frac{C_e \eta}{4\pi\epsilon} \oint_C \frac{[d\vec{\ell}(\vec{y}) \wedge [\vec{a} - \vec{y}]]}{|\vec{a} - \vec{y}|^2}. \quad (2.9.1)$$

Il ne dépend donc que du contour de la surface.

2.10 Corps polarisé

En électrostatique linéaire, nous avons vu au chapitre 1 que les propriétés diélectriques d'un système étaient caractérisées par le tenseur diélectrique $\epsilon^{ik}(\vec{x})$ tel que

$$D^i(\vec{x}) = \epsilon^{ik}(\vec{x}) E_k(\vec{x}).$$

Dans ce paragraphe, nous allons étudier des milieux diélectriques pour lesquels la relation ci-dessus peut toujours s'écrire :

$$\vec{D}(\vec{x}) = \vec{D}_0(\vec{x}) + C_e \vec{P}(\vec{x}) \quad \text{où} \quad \vec{D}_0(\vec{x}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}). \quad (2.10.1),$$

où ϵ_0 et C_e sont des constantes dépendant du système d'unité choisi. Le champ $\vec{P}(\vec{x})$ ainsi défini est le *champ de polarisation*. Dans le système de Gauss par exemple : $\epsilon_0 = 1$ et $C_e = 4\pi$.

La *loi d'induction* s'écrit alors

$$\text{div} \vec{D}(\vec{x}) = \text{div} \vec{D}_0(\vec{x}) + C_e \text{div} \vec{P}(\vec{x}) = C_e q(\vec{x}),$$

donc

$$\text{div} \vec{D}_0(\vec{x}) = C_e (q - \text{div} \vec{P})(\vec{x}) = C_e q'(\vec{x}), \quad (2.10.2)$$

où $q'(\vec{x})$ est appelé *densité de charges apparentes* et $-\text{div} \vec{P}(\vec{x})$ est appelé *densité de charges fictives*. Considérons encore les *conditions aux limites* de deux diélectriques dont l'un (notation ') est celui défini par la relation ci-dessus.

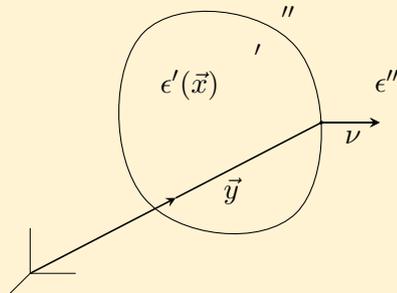


Fig. 2.10.1

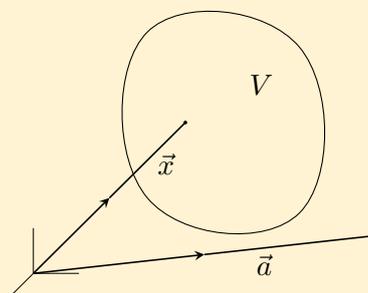


Fig. 2.10.2

Nous savons que :

$$(D''_\nu - D'_\nu)(\vec{y}) = C_e \omega(\vec{y}),$$

donc

$$(D''_{\nu} - (D'_{0\nu} + C_e P_{\nu}))(\vec{y}) = C_e \omega(\vec{y}).$$

Lorsque $\epsilon'' = \epsilon_0$ (ce qui correspond *au vide*) on peut écrire

$$(D''_{0\nu} - D'_{0\nu})(\vec{y}) = C_e(\omega + P_{\nu})(\vec{y}) = C_e \omega'(\vec{y}), \quad (2.10.3)$$

où $\omega'(\vec{y})$ est appelé *densité de charges superficielles apparentes* et $P_{\nu}(\vec{y})$ est appelé *densité de charges superficielles fictives*. En électrostatique linéaire et isotrope, nous savons que

$$\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon(\vec{x})\vec{E}(\vec{x}),$$

et alors

$$\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon(\vec{x})\vec{E}(\vec{x}) = \epsilon_0\vec{E}(\vec{x}) + C_e\vec{P}(\vec{x}).$$

Nous pouvons poser

$$\vec{P}(\vec{x}) = \alpha(\vec{x})\vec{E}(\vec{x}),$$

où $\alpha(\vec{x})$ est la polarisabilité du corps. Puisque : $\epsilon(\vec{x}) = \epsilon_0 + C_e \alpha(\vec{x})$, sa valeur est donnée par

$$\alpha(\vec{x}) = \frac{\epsilon(\vec{x}) - \epsilon_0}{C_e}.$$

L'hypothèse d'isotropie n'est nullement nécessaire pour les calculs qui vont suivre. Puisque $\vec{D}(\vec{a}) = \epsilon_0\vec{E}(\vec{a})$ avec $\epsilon_0 = \text{cte}$ et $\vec{E}(\vec{a}) = -\overrightarrow{\text{grad}}\phi(\vec{a})$, nous sommes ramenés, pour la recherche du potentiel $\phi(\vec{a})$ au calcul du potentiel de Coulomb créé par une distribution spatiale de densité $q'(\vec{x})$ et par une distribution superficielle de densité $\omega'(\vec{y})$. Le *potentiel* $\phi(\vec{a})$ en un point \vec{a} extérieur au diélectrique s'écrit alors

$$\phi(\vec{a}) = \frac{C_e}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_V \frac{(dV(q - \text{div } \vec{P}))(\vec{x})}{r_a} + \oint_V \frac{d\sigma(\omega + P_{\nu})(\vec{y})}{r_a} \right\}, \quad (2.10.4)$$

avec $\vec{r}_a(\vec{x}) = \vec{x} - \vec{a}$ et $\vec{r}_a(\vec{y}) = \vec{y} - \vec{a}$.

Calculons maintenant la charge fictive contenue dans le corps polarisé :

$$Q' - Q = \int_V (dV(q' - q))(\vec{x}) + \oint_V (d\sigma(\omega' - \omega))(\vec{y}).$$

Mais $q' - q = \text{div } \vec{P}$, $\omega' - \omega = P_{\nu}$, donc

$$Q' - Q = - \int_V (dV \text{div } \vec{P})(\vec{x}) + \oint_V (d\sigma, \vec{P})(\vec{y}) = 0$$

(en vertu du théorème de Gauss). Par conséquent

$$Q' = Q.$$

Le corps polarisé ne contient pas d'autre charge que celle donnée par les densités de charges $q(\vec{x})$ et $\omega(\vec{y})$.

Si le corps est parfaitement isolant, alors $q(\vec{x}) = 0$ et $\omega(\vec{y}) = 0$, et il ne possède pas de charge.

Interprétation physique : le modèle dipolaire.

Afin d'interpréter physiquement $\vec{P}(\vec{x})$, nous allons montrer que le potentiel créé par des dipôles répartis dans le diélectrique avec une densité de moment dipolaire

$$\vec{P}(\vec{x}) = \lim_{\vec{d} \rightarrow \vec{0}, q \rightarrow \infty} (q\vec{d})(\vec{x})$$

est précisément le potentiel trouvé plus haut.

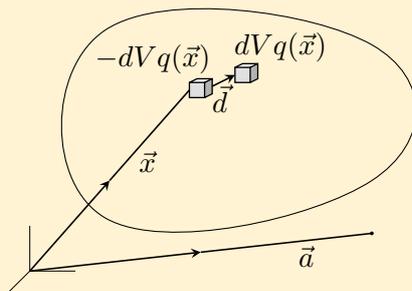


Fig. 2.10.3

Remarquons d'abord que

$$(dVq)(\vec{x} + \vec{d}) - (dVq)(\vec{x}) \rightarrow 0 \text{ quand } \vec{d} \rightarrow \vec{0}.$$

Le corps dipolaire a une densité de charge nulle : $q(\vec{x}) = 0$.

En généralisant le calcul fait pour un seul dipôle (cf. sect. 2.4), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \phi(\vec{a}) &= \frac{C_e}{4\pi\epsilon_0} \lim \int_V dV(\vec{x}) \left\{ \frac{q(\vec{x} - \vec{d})}{|\vec{a} - \vec{x} + \vec{d}|} - \frac{q(\vec{x})}{|\vec{a} - \vec{x}|} \right\} \\ &= \frac{C_e}{4\pi\epsilon_0} \lim \int_V (dVq)(\vec{x}) \left\{ \frac{1}{|\vec{a} - \vec{x} + \vec{d}|} - \frac{1}{|\vec{a} - \vec{x}|} \right\} \\ &= \frac{C_e}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV(\vec{x}) \left(\vec{P}(\vec{x}), \overleftarrow{\text{grad}} \frac{1}{|\vec{a} - \vec{x}|} \right), \end{aligned}$$

ce qui devient, en utilisant le théorème de Green I,

$$\phi(\vec{a}) = \frac{C_e}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_V dV(\vec{x}) \frac{-\text{div} \vec{P}(\vec{x})}{|\vec{a} - \vec{x}|} + \oint_V \frac{(d\vec{\sigma}, \vec{P})(\vec{y})}{|\vec{a} - \vec{y}|} \right\},$$

ce qui est bien le potentiel trouvé plus haut dans le cas d'un isolant ($q = \omega = 0$).

Pour un diélectrique isotrope et isolant, le potentiel $\phi(\vec{x})$ n'est donné que par l'intégrale de surface

$$\phi(\vec{a}) = \frac{C_e}{4\pi\epsilon_0} \oint_V \frac{(d\vec{\sigma}, \vec{P})(\vec{y})}{|\vec{y} - \vec{a}|}$$

car $\text{div} \vec{P} = 0$. En effet :

$$\text{div} \vec{D} = \text{div} \vec{D}_0 + C_e \text{div} \vec{P} = (\epsilon_0 + C_e \alpha) \text{div} \vec{E} = 0,$$

donc $\text{div } \vec{E} = 0$ et, puisque $\vec{P} = \alpha \vec{E}$, on a $\text{div } \vec{P} = 0$.

Le champ électrique $\vec{E}(\vec{a})$ en un point \vec{a} extérieur au diélectrique est donné par

$$\vec{E}(\vec{a}) = -\overrightarrow{\text{grad}} \phi(\vec{a}),$$

où $\phi(\vec{a})$ est le potentiel calculé plus haut.

Par convention, nous appelons potentiel et champ diélectrique en un point \vec{a} situé à l'intérieur d'un diélectrique les grandeurs :

$$\begin{aligned} \phi(\vec{a}) &= \frac{C_e}{4\pi\epsilon} \left\{ \int_V \frac{(dV(q - \text{div } \vec{P}))(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{a}|} + \oint_V \frac{(d\sigma(\omega + P_\nu))(\vec{y})}{|\vec{y} - \vec{a}|} \right\} \\ \vec{E}(\vec{a}) &= -\overrightarrow{\text{grad}} \phi(\vec{a}) \end{aligned}$$

Il apparaît une certaine part d'arbitraire, en raison du caractère fictif des densités $-\text{div } \vec{P}$ et P_ν .

Lorsqu'on calcule le potentiel et le champ à l'intérieur d'une cavité réelle creusée dans le diélectrique et que nous faisons tendre celle-ci vers 0, le potentiel tend vers la valeur définie conventionnellement, par contre, la valeur du champ dépend de la forme de la cavité et de la façon dont celle-ci tend vers 0. Mais, si nous considérons une cavité fictive, nous retrouvons la valeur conventionnelle. Ces faits amusants tiennent au caractère fictif des densités $-\text{div } \vec{P}$ et P_ν .

Application particulière.

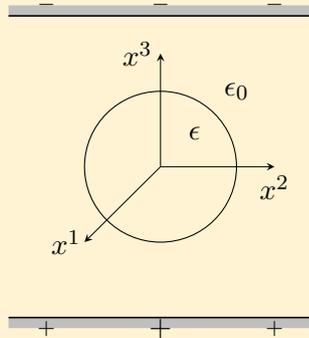


Fig. 2.10.4

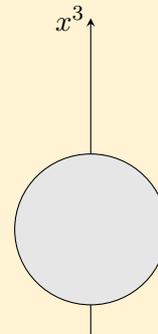


Fig. 2.10.5

Considérons une sphère diélectrique placée dans un champ homogène tel que $\overleftarrow{E}_\infty : (0, 0, E_\infty)$ et calculons le champ qui règne à l'intérieur du diélectrique. Rappelons d'abord les résultats obtenus à la section 1.3 pour une sphère chargée de façon homogène avec la densité : $q = (4/(3\pi R^3))Q = \text{cte}$. Le potentiel, est solution de l'équation de Poisson $\Delta\phi = -(C_e/\epsilon_0)q$ et nous avons trouvé à l'intérieur de la sphère l'expression

$$\phi^{\text{int.}}(\vec{x}) = -\frac{C_e}{\epsilon_0} \frac{1}{6} q |\vec{x}|^2 + \underbrace{\text{cte}}_{=0 \text{ condition limite}}.$$

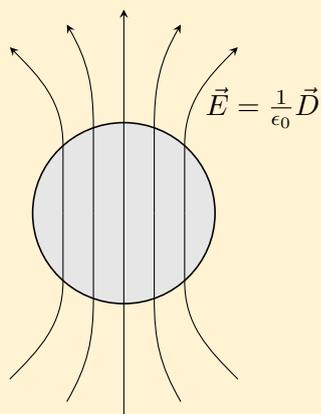


Fig. 2.10.6

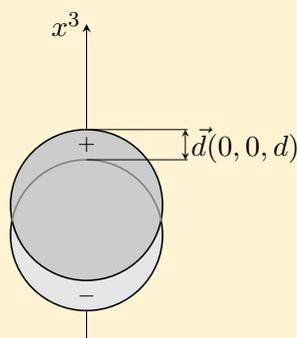


Fig. 2.10.7

Considérons maintenant notre sphère diélectrique caractérisée par une densité homogène de moments dipolaires.

Par analogie avec le cas précédent où $(dV q)(\vec{x} + \vec{d}) - (dV q)(\vec{x}) \rightarrow 0$ quand $\vec{d} \rightarrow \vec{0}$, nous pouvons écrire :

$$\phi^{int.}(\vec{x}) = -\frac{C_e}{\epsilon_0} \frac{1}{6} \lim_{d \rightarrow 0} q(|\vec{x} - \vec{d}|^2 + |\vec{d}|^2 - |\vec{x}|^2).$$

Lorsque $d \rightarrow 0$ et $q \rightarrow \infty$ (hypothèse dipolaire), on a

$$\phi^{int.}(\vec{x}) = \frac{C_e}{\epsilon} \frac{1}{6} \lim_{d \rightarrow 0} (|\vec{x}|^2 + \underbrace{|\vec{d}|^2}_{=0} - 2(\vec{x}, \vec{d}) - |\vec{x}|^2) = \frac{C_e}{\epsilon_0} \frac{1}{6} \lim_{d \rightarrow 0} 2(q \vec{d}, \vec{x}) = \frac{C_e}{\epsilon_0} \frac{1}{3} (\vec{P}, \vec{x}).$$

Or le déplacement \vec{d} des charges de signes opposés est dû au champ \vec{E}_∞ , donc $\vec{P} \parallel \vec{E}_\infty \parallel [\vec{x}^3]$ et donc

$$\phi^{int.}(\vec{x}) = \frac{C_e}{\epsilon_0} \frac{1}{3} P x^3.$$

D'autre part, $\phi_\infty = -E_\infty x^3$ et $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} \phi$ conduisent à

$$\vec{E}^{(int. total)} = [\vec{x}^3] \left(E_\infty - \frac{C_e}{\epsilon_0} \frac{1}{3} P \right).$$

Mais comme $\vec{P} = \alpha \vec{E}^{(int. total)}$, on a donc

$$\vec{E}^{(int. total)} = [\vec{x}^3] \left(E_\infty - \frac{C_e}{\epsilon_0} \frac{\alpha}{3} E^{(int. total)} \right),$$

d'où

$$E^{(int. total)} = \frac{E_\infty}{1 + \frac{C_e}{\epsilon_0} \frac{1}{3} \alpha}.$$

Mais comme $\alpha = (\epsilon - \epsilon_0 / C_e)$, il vient

$$E^{(int. total)} = \frac{E_\infty}{1 + \frac{C_e}{\epsilon} \frac{1}{3} \frac{\epsilon - \epsilon_0}{C_e}} = \frac{E_\infty}{1 + \frac{1}{3} \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_0}}.$$

Finalement, nous obtenons l'expression du champ électrique à l'intérieur de la sphère :

$$E^{(int. total)} = \frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon} E_\infty.$$

Comme $\epsilon > \epsilon_0$, $E^{(int. total)} < E_\infty$.

Dans la sphère, le champ électrique est homogène, mais il est plus faible que le champ homogène qui lui a donné naissance. On dit alors que le champ \vec{P} induit par E_∞ est « dépolarisant ».

Nous constatons que la surface extérieure de la sphère agit comme un dipôle de moment \vec{p} égal à

$$\vec{p} = \int_V (dV \vec{P})(\vec{x}),$$

c'est-à-dire

$$p[\vec{x}^3] = [\vec{x}^3] \frac{4}{3} \pi R^3 P = [\vec{x}^3] \frac{4}{3} \pi R^3 \alpha E^{(int. total)},$$

où encore, en remplaçant α et $E^{(int. total)}$ par leurs valeurs,

$$p = \frac{4\pi\epsilon_0}{C_e} \frac{\epsilon - \epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon} R^3 E_\infty.$$

On dit que le champ E_∞ est le champ inducteur du noment dipolaire p . Le champ de ce dipôle (à l'extérieur de la sphère) s'écrit, en vertu de ce qui a été vu à la section 2.4,

$$\vec{E}_d(\vec{x}) = -\frac{C_e}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} \frac{p \cos \theta}{r^2}.$$

Par conséquent, le champ total régnant à l'intérieur de la sphère est :

$$\vec{E}^{(int. total)}(\vec{x}) = [\vec{x}^3] E_\infty - \frac{C_e}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} \frac{p \cos \theta}{r^2}.$$

2.11 Capacité d'un condensateur

Soient deux conducteurs a et b de charge Q_a et Q_b .

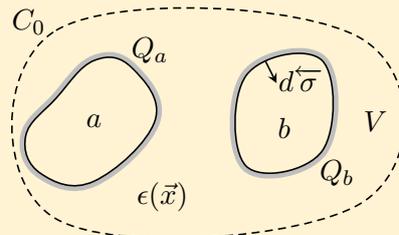


Fig. 2.11.1

Choisissons pour simplifier : $Q_a = -Q_b = Q$ et $\epsilon(\vec{x}) = \epsilon = \text{cte}$. L'énergie de ce système est

$$U = \int_V \left(\frac{1}{2C_e} \overleftarrow{E}, \vec{D} \right) dV(\vec{x}),$$

et donc, puisque $\overleftarrow{E} = -\overleftarrow{\text{grad}} \phi$,

$$U = -\frac{1}{2C_e} \int_V (dV(\overleftarrow{\text{grad}} \phi, \vec{D}))(\vec{x}).$$

Par le théorème de Green I on obtient

$$U = \frac{1}{2C_e} \left\{ - \oint_V (d\overleftarrow{\sigma}, \vec{D})(\vec{y}) + \underbrace{\int_V (dV(\phi \text{ div } \vec{D}))(\vec{y})}_{=0 \text{ car } \text{div } \vec{D}=0 \text{ dans } V} \right\}.$$

Posons $\phi_{C_0} = 0$. Alors l'intégration sur la surface extérieure C_0 est nulle ; il reste les intégrations sur la surface des deux conducteurs. En se rappelant que sur un conducteur $\phi = \text{cte}$, nous avons

$$U = -\frac{1}{2} \left\{ \phi_a \frac{1}{C_e} \oint_{C_a} (d\overleftarrow{\sigma}, \vec{D})(\vec{y}_a) + \phi_b \frac{1}{C_e} \oint_{C_b} (d\overleftarrow{\sigma}, \vec{D})(\vec{y}_b) \right\}.$$

Par par définition, on a

$$\frac{1}{C_e} \oint_{C_a \text{ ou } b} (d\overleftarrow{\sigma}, \vec{D})(\vec{y}_{C_a \text{ ou } b}) = Q_{C_a \text{ ou } b} \quad \text{et} \quad Q_a = -Q_b = Q,$$

ce qui conduit à

$$U = \frac{1}{2} Q (\phi_a - \phi_b).$$

On remarque que ϕ est proportionnel à Q car si on double ϕ , alors $\vec{D} = -\epsilon_0 \overrightarrow{\text{grad}} \phi$ double et $Q = -(1/C_e) \oint_C (d\overleftarrow{\sigma}, \vec{D})$ double également. Ceci nous suggère de poser :

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{K} \quad \text{avec} \quad K > 0, \quad (2.11.1)$$

où K est, par définition, la *capacité des deux conducteurs*.

On a alors

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{K} = \frac{1}{2} Q (\phi_a - \phi_b),$$

et nous en déduisons

$$\phi_a - \phi_b = \frac{1}{K} Q.$$

Capacité du condensateur sphérique.

Soit un condensateur formé de deux sphères concentriques. Calculons sa capacité K .

On a :

$$\oint (d\vec{\sigma}, \vec{D}) = C_e Q \quad \text{et} \quad 4\pi r^2 D_r = C_e Q.$$

Les composantes (radiales) de \vec{E} et de \vec{D} sont donc

$$D_r = \frac{C_e Q}{4\pi r^2} \quad \text{et} \quad E_r = \frac{1}{\epsilon} D_r.$$

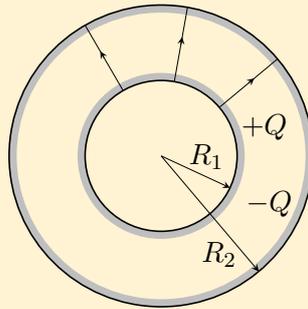


Fig. 2.11.2

L'énergie vaut

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2C_e} \int_V dV E_r D_r = \frac{1}{2C_e} 4\pi \int_{R_1}^{R_2} dr r^2 \left(\frac{C_e}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\epsilon r^4} Q^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{C_e}{4\pi\epsilon} Q^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2} Q^2 \frac{C_e}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\ &= \frac{1}{2} Q^2 \frac{C_e}{4\pi\epsilon} \left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \right), \quad \text{donc} \quad K = \frac{4\pi\epsilon}{C_e} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \end{aligned}$$

Si $R_2 - R_1 = d \rightarrow 0$, alors $4\pi R_1 R_2 \rightarrow 4\pi R^2 = \sigma$ et

$$K = \frac{\epsilon}{C_e} \frac{\sigma}{d},$$

formule applicable aux condensateurs plans. En unité de Gauss (C.G.S.),

$$C_e = 4\pi[\epsilon] = 1, [K] = \text{cm}^2[d] = \text{cm}.$$

Généralisation au cas de plusieurs conducteurs.

Pour un système contenant plusieurs conducteurs, nous pouvons écrire par généralisation

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}^{-1} Q_\alpha Q_\beta.$$

On voit facilement que $K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha} = K_{(\alpha\beta)}$ et que $\{K_{(\alpha\beta)}^{-1}\} \geq 0$. Les $K_{\alpha\neq\beta}$ sont appelés *coefficients d'influence* et les $K_{\alpha\alpha}$ sont les *capacités*.

On remarque que dans le cas traité de deux conducteurs portant des charges égales et de signes contraires, le coefficient K correspond à

$$K^{-1} = (K_{\alpha\alpha}^{-1} - 2K_{\alpha\beta}^{-1} + K_{\beta\beta}^{-1}).$$

Courants stationnaires – Aimants

Présentation

La section 1 introduit la loi de production au moyen du champ magnétique et de la densité de courant ; il explique ensuite que les courants stationnaires ne sont pas une répétition de l'électrostatique ; une analogie formelle entre les courants stationnaires et les couches à polarisation constante est alors introduite. A l'aide du rotationnel, le théorème de Stokes permet ensuite à la section 2 d'exprimer la forme locale de la loi de production. La section 3 est purement mathématique, il introduit la notion de vecteur axial avec le champ magnétique comme exemple. L'équation de l'induction magnétique est alors introduite au moyen de la densité lagrangienne qui apparaît comme un faux principe de l'énergie qui sera modifié plus tard. Ce faux principe (section 4) permet pourtant par la méthode des multiplicateurs de Lagrange qui introduit le potentiel-vecteur, de trouver la loi de force. Cette section se termine par l'expression de la forme de la variation de la densité de courant. La loi de Biot-Savart est alors donnée à la section 5 par analogie avec le cas de l'électrostatique linéaire. La force entre deux éléments de courant est ensuite donnée à la section 6. La section 7 montre ensuite par des considérations de thermodynamique que le faux principe de l'énergie n'en n'est effectivement pas un. A la section 8, nous donnons le bon principe de l'énergie ce qui nous permet d'introduire la travail d'induction. Les aimants et la magnétostatique sont alors discutés à la section 9. Les forces entre courants et aimants font l'objet de la section 10. Le tenseur de Maxwell magnétostatique est introduit à la section 11 et le chapitre se termine par l'introduction des coefficients d'induction (section 12).

3.1 Loi de production

La création de courants électriques à travers des conducteurs formant un circuit fermé a été réalisé primitivement par Volta et leurs applications sont si connues qu'il est inutile d'y insister

Dans ce chapitre, nous n'allons étudier ni la nature de ces courants, ni la façon dont ils prennent naissance, pour nous, un circuit sera simplement constitué d'un tube fermé sur lui-même et le courant électrique y « circulant » sera défini de la façon suivante .

Pour toute surface $\tau(\vec{y}) = 0$, coupant le tube une seule fois, nous avons

$$J_\tau = \int_\tau (d\vec{\sigma}, \vec{j})(\vec{y}), \quad (3.1.1)$$

où J_τ est l'intensité de courant (scalaire) et $\vec{j}(\vec{y})$ est la densité de courant (champ vectoriel).

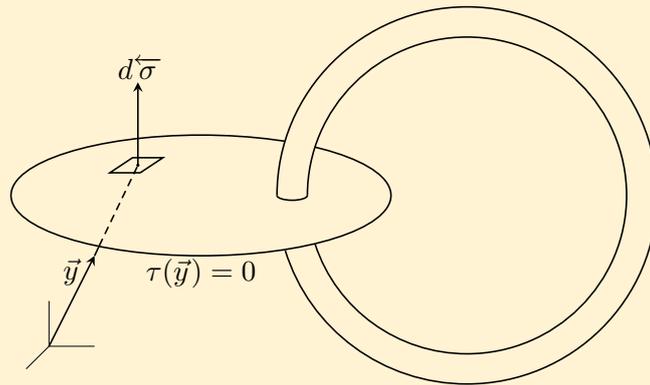


Fig. 3.1.1

La stationnarité du courant implique que $J_\tau = J$, c'est-à-dire que l'intensité du courant est la même pour chaque section du tube (cette affirmation s'expliquera très simplement au chapitre suivant lorsque nous connaîtrons la nature du courant ; pour l'instant nous devons la considérer comme une définition). Ceci a pour conséquence que le tube est un tube de courant pour $\vec{j}(\vec{x})$, donc si $\vec{\nu}$ est un vecteur normal à la surface du tube : $(\vec{\nu}, \vec{j}) = 0$.

Loi de production.

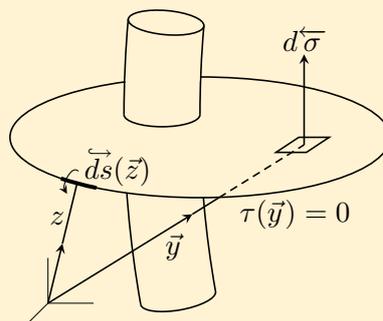


Fig. 3.1.2

Nous appelons *champ magnétique* et nous notons $\vec{H}(\vec{x}) : \{\dot{H}_i(x^1, x^2, x^3)\}$ le champ vectoriel axial et covariant défini par la loi

$$C_j J = \oint_\tau (\vec{ds}, \vec{H})(\vec{z}), \quad (3.1.2)$$

où C_j est une constante dépendant du système d'unités. Cette loi exprime que la circulation du champ magnétique $\vec{H}(\vec{x})$ le long d'une courbe fermée est égale à l'intensité du courant stationnaire situé à l'intérieur de celle-ci.

Il est possible d'exprimer cette loi sous forme locale (cf. sect. 3.2).

Remarque.

Nous constatons que la loi de production exige que \vec{H} soit un vecteur axial et covariant ; sa covariance implique naturellement qu'il n'a pas le caractère d'une induction puisque celle-ci devant (de par sa nature même) servir à exprimer une loi de flux, et non de circulation, doit être représentée par un vecteur contravariant.

Nous pourrions alors nous demander pourquoi nous n'avons pas, comme en électrostatique, choisi comme loi fondamentale une loi d'induction. Cela provient simplement du fait que la loi d'induction (il en existe effectivement une, cf. section 3.4) rendrait fort malaisée la poursuite de notre méthode déductive de recherche des lois régissant les courants stationnaires (et même les aimants) car elle ne relie pas, au contraire de ce qui se passe en électrostatique, des grandeurs physiques relatives au système matériel à celle relatives au système électromagnétique. Cela nous laisse déjà entrevoir que le magnétisme (et les courants stationnaires) ne constitue pas une répétition de l'électrostatique.

C'est pour des raisons historique que l'adjectif « magnétique » est attaché au champ \vec{H} : en effet, l'étude du magnétisme est antérieure à celle des courants et comme nous le verrons, \vec{H} est le champ de forces des « charges magnétiques ». Mais il est essentiel de remarquer que la loi de production exprime une *action magnétique exercée par les courants* (action découverte par Oersted).

Analogie formelle entre les courants stationnaires et les couches à polarisation constante

Couche à polarisation constante
(cf. section 2.9)

$$\oint_C (d\vec{s}, \vec{E})(\vec{z}) = \frac{C_e \eta}{\epsilon}.$$

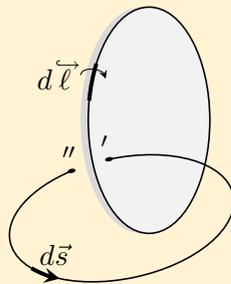


Fig. 3.1.3

Courants stationnaires
(cf. équation 3.1.2)

$$\oint_{\Gamma} (d\vec{s}, \vec{H})(\vec{z}) = C_j J.$$

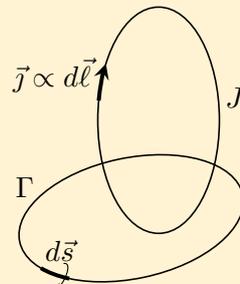


Fig. 3.1.5

Nous aurions pu établir (à la section 2.9) que deux couches à polarisation constante s'attirent :

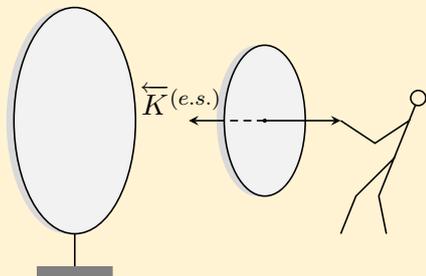


Fig. 3.14

Nous observons ici très facilement que deux courants stationnaires s'attirent :

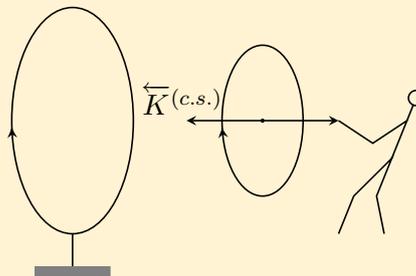


Fig. 3.1.5

3.2 Le théorème de Stokes

Pour exprimer la loi de production sous forme locale, il est nécessaire de rappeler quelques notions d'analyse vectorielle.

Rotationnel.

A un champ vectoriel $\vec{a}(\vec{x})$, nous pouvons associer le champ vectoriel $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{a}(\vec{x})$ défini par

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{a}(\vec{x}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta V} [d\overleftarrow{\sigma} \wedge \vec{a}](\vec{y}).$$

Théorème de Stokes.

$$\oint_{\tau} (\overrightarrow{ds}, \vec{a})(\vec{z}) = \int_{\tau} (d\overleftarrow{\sigma}, \overrightarrow{\text{rot}}\vec{a})(\vec{y}).$$

Démonstration.

Soit $\vec{\nu}$, tel que $(\overleftarrow{\nu}, \vec{\nu}) = 1$ et considérons le petit volume V tel que $\Delta V = \sigma \cdot h$.

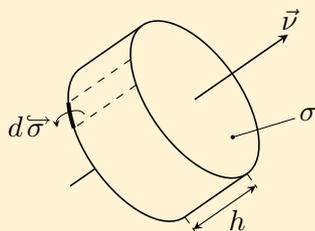


Fig. 3.2.1

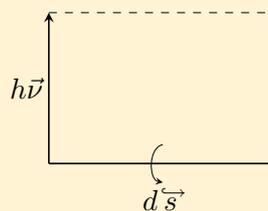


Fig. 3.2.3

D'après la définition du rotationnel, nous avons

$$(\vec{\nu}, \overrightarrow{\text{rot}}\vec{a})(\vec{x}) = \frac{1}{\sigma h} \oint_{\Delta V} h(\vec{\nu}, [[\overrightarrow{ds} \wedge \vec{\nu}] \wedge \vec{a}]),$$

en effet

$$d\vec{\sigma} = [\vec{ds} \wedge \vec{v}] \cdot h.$$

Sur la surface latérale du cylindre, les sections du cylindre n'interviennent pas puisque $d\vec{\sigma} \parallel \vec{v}$ implique $\vec{v} \perp [d\vec{\sigma} \wedge \vec{a}]$. D'autre part :

$$[[\vec{a} \wedge \vec{b}] \wedge \vec{c}] = (\overleftarrow{a}, \overrightarrow{c})\vec{b} - (\overleftarrow{b}, \overrightarrow{c})\vec{a},$$

et donc :

$$[[\vec{ds} \wedge \vec{v}] \wedge \vec{a}] = (\overrightarrow{ds}, \vec{a})\vec{v} - (\overleftarrow{v}, \vec{a})\vec{ds}.$$

Par conséquent

$$(\overleftarrow{v}, \overrightarrow{\text{rot}}\vec{a})(\vec{x}) = \frac{1}{\sigma} \oint_{\sigma} \left(\overleftarrow{v}, (\overrightarrow{ds}, \vec{a})\vec{v} - (\overleftarrow{v}, \vec{a})\vec{ds} \right)(\vec{z}) = \frac{1}{\sigma} \oint_{\sigma} (\overrightarrow{ds}, \vec{a})(\vec{z}).$$

Posons : $\overleftarrow{v}\sigma = d\overleftarrow{\sigma}$; il vient alors

$$(d\overleftarrow{\sigma}, \overrightarrow{\text{rot}}\vec{a})(\vec{x}) \lim_{\tau \rightarrow \sigma} \oint_{\tau} (\overrightarrow{ds}, \vec{a})(\vec{z}).$$

En sommant sur une surface finie $\tau(\vec{y}) = 0$, nous obtenons, puisque les contributions de tous les contours se compensent sauf celles du contour de la surface $\tau(\vec{y}) = 0$,

$$\int_{\tau} (d\overleftarrow{\sigma}, \overrightarrow{\text{rot}}\vec{a})(\vec{z}) = \oint_{\tau} (\overrightarrow{ds}, \overleftarrow{a})(\vec{z}).$$

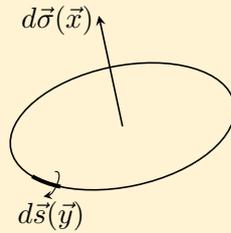


Fig. 3.2.3

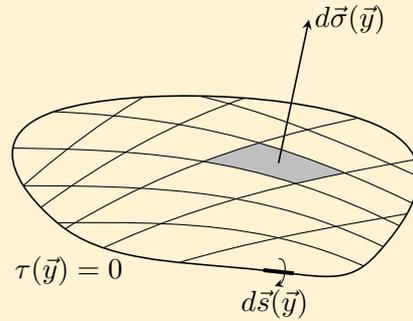


Fig. 3.2.4

Il est désormais possible d'exprimer la loi de production sous forme locale. Nous savons que :

$$\oint_{\tau} (\overrightarrow{ds}, \vec{H})(\vec{z}) = C_j J = C_j \int_{\tau} (\overleftarrow{d\sigma}, \vec{j})(\vec{z}).$$

En appliquant le théorème de Stokes sur le premier membre, nous obtenons

$$\oint_{\tau} (\overrightarrow{ds}, \vec{H})(\vec{z}) = \int_{\tau} (d\overleftarrow{\sigma}, \overrightarrow{\text{rot}}\vec{H})(\vec{y}) = C_j \int_{\tau} (d\overleftarrow{\sigma}, \vec{j})(\vec{y}).$$

La surface $\tau(\vec{y}) = 0$ étant arbitraire, nous en déduisons la *loi de production sous forme locale*

$$(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{H})(\vec{x}) = C_j \vec{j}(\vec{x}). \tag{3.2.1}$$

3.3 Vecteur axial

Dans un espace euclidien à d dimensions, considérons un tenseur a d'ordre $q \leq d$, complètement antisymétrique, de composantes $a^{[i_1 i_2 \dots i_q]}$ ou $a_{[i_1 i_2 \dots i_q]}$. On appelle *tenseur adjoint* de a , le tenseur a' complètement antisymétrique d'ordre $(d - q)$ obtenu par contraction de a avec :

$$\frac{1}{q!} \sqrt{g} \epsilon_{[i_1 i_2 \dots i_d]} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{q!} \sqrt{g} \epsilon^{[i_1 i_2 \dots i_d]} \quad \text{avec} \quad g = \det(g_{ij}),$$

où

$$\epsilon_{[\dots]} = \epsilon^{[\dots]} = \begin{cases} +1 & \text{si } [\dots] \text{ est une permutation paire de } 1, 2, \dots, d \\ -1 & \text{si } [\dots] \text{ est une permutation impaire de } 1, 2, \dots, d \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Les composantes de a' sont alors :

$$\begin{aligned} a'^{[i_{q+1} \dots i_d]} &= \frac{1}{q!} \sqrt{g} \epsilon^{[i_1 i_2 \dots i_d]} a_{[i_1 \dots i_q]} \\ a'_{[i_{q+1} \dots i_d]} &= \frac{1}{q!} \sqrt{g} \epsilon_{[i_1 i_2 \dots i_d]} a^{[i_1 \dots i_q]}. \end{aligned}$$

Si a est d'ordre d , alors a' est d'ordre zéro, et prend le nom de *pseudo-scalaire* \check{a}' (c'est un faux scalaire car il change de signe lorsque on passe d'un repère droit à un repère gauche).

Définition d'un vecteur axial.

Dans un espace euclidien et cartésien ($g = 1$) à trois dimensions, considérons un tenseur complètement antisymétrique d'ordre deux ; son tenseur adjoint sera d'ordre un, de composantes pseudo-scalaires :

$$\begin{aligned} \check{a}_i &= \frac{1}{2!} \epsilon_{[ik\ell]} a^{[k\ell]} \\ \check{a}^i &= \frac{1}{2!} \epsilon^{[ik\ell]} a_{[k\ell]}. \end{aligned}$$

Il prend alors le nom de *vecteur axial* a (c'est un faux vecteur car si on fait $\vec{x} = -{}'\vec{x}$, alors : $\vec{b} = -{}'\vec{b}$, mais $\vec{a} = {}'\vec{a}$).

EXEMPLES

- 1) Le champ magnétique est un tenseur antisymétrique de composantes $H^{[ik]}$, son adjoint est le vecteur axial \vec{H} de composantes

$$\check{H}_i = \frac{1}{2!} \epsilon_{ik\ell} H^{k\ell} \quad \text{donc} \quad \check{H}_1 = H^{23} \quad (123).$$

- 2) De même pour l'induction magnétique $B_{[ik]}$ (cf. sect. 3.4) :

$$\check{B}^i = \frac{1}{2!} \epsilon^{ik\ell} B_{k\ell} \quad \text{donc} \quad \check{B}^1 = B_{23} \quad (123).$$

3) Cas du rotationnel du champ magnétique :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H})^1 &= \partial_2 \overset{\circ}{H}_3 - \partial_3 \overset{\circ}{H}_2 = \partial_2 H^{12} - \partial_3 H^{31} \\ &= -\partial_2 H^{21} - \partial_3 H^{31} - \underbrace{\partial_1 H^{11}}_{=0}, \end{aligned}$$

d'où :

$$(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H})^i = -\partial_k H^{ki}.$$

Remarque.

Les vecteurs axiaux \vec{H} et \vec{B} ne sont que des artifices de calculs, commodes dans l'espace euclidien cartésien à trois dimensions. Seuls les tenseurs $H^{[ik]}$ et $B_{[ik]}$ ont une signification physique générale.

3.4 Etablissement des équations du champ et de la force

Dans cette section, nous allons procéder selon la même méthode déductive qui a été utilisée à la section 1.3 pour l'électrostatique. Rappelons que pour trouver les équations du champ et de la force électrostatiques, nous avons appliqué le premier principe de la thermodynamique

$$\delta U^{(es.)}[\vec{D}(\cdot)] = \delta \mathcal{A}^{(inc.geom.)}.$$

La loi d'induction $\text{div} \vec{D} - C_e q = 0$, considérée comme une contrainte de ce problème de variations nous avait conduit à poser

$$\delta \left(U^{(es.)}[\vec{D}(\vec{x})] - \frac{1}{C_e} \int_V dV(\vec{x}) \phi(\vec{x}) (\text{div} \vec{D} - C_e q)(\vec{x}) \right) = \delta \mathcal{A}^{(inc.geom.)}.$$

Le travail mécanique fourni valant : $\delta \mathcal{A}^{(inc.geom.)} = \int_V (d^3 \vec{K}^{(mec.)}, \delta \vec{r})(\vec{x})$.

De plus, la charge totale Q_V étant supposée conservative, nous en déduisons $\delta q(\vec{x}) = -\text{div} \delta \vec{r} q(\vec{x})$.

Pour les courants stationnaires nous allons admettre de façon analogue la conservation de l'intensité J lors d'un déplacement quelconque $\delta \vec{r}(\vec{x})$ des tubes.

Mais alors avons-nous le droit de poser

$$\delta U^{(c.s.)}[\vec{H}(\cdot)] = \delta \mathcal{A}^{(inc.geom.)},$$

où $\delta U^{(cs)}[\vec{H}(\cdot)]$ serait l'énergie du système de courants stationnaires ? En d'autres termes, la variation de cette forme, lorsque nous maintenons J constant, n'est-elle due qu'à un travail mécanique ? La conservation de J n'impose-t-elle pas qu'un travail de nature différente soit fourni ? Pour l'instant, nous ne pouvons rien affirmer,

l'intensité J n'ayant pas le même caractère extensif que la charge Q . Nous poserons donc

$$-\delta L[\vec{H}(\cdot)] = \delta \mathcal{A}^{(inc.geom.)},$$

quitte à poser par la suite $U^{(cs)} = -L$ si c'est bien le cas. En fait, nous verrons par des considérations thermodynamiques très simples que $U^{(es.)} \neq -L$.

Nous appelons L la *lagrangienne* de notre système (pour des raisons qui apparaîtront plus tard). D'après l'égalité ci-dessus elle doit être une grandeur extensive :

$$L[\vec{H}(\cdot)] = \int_V dV(\vec{x}) \ell[\vec{x}, \vec{H}(\vec{x})],$$

où $\ell[\vec{x}, \vec{H}(\vec{x})]$ est la densité de la lagrangienne.

Induction magnétique.

Nous appelons *induction magnétique* $\vec{B}(\vec{x}) : \{\dot{B}^i(x^1, x^2, x^3)\}$ le champ vectoriel axial et contravariant défini par

$$\frac{1}{C_m} \dot{B}^i = \frac{\partial \ell[\vec{x}, \vec{H}(\vec{x})]}{\partial \dot{H}_i}, \quad (3.4.1)$$

ou, sous forme tensorielle,

$$\frac{1}{2} \frac{1}{C_m} B_{[ik]} = \frac{\partial \ell[\vec{x}, \vec{H}(\vec{x})]}{\partial H^{[ik]}}, \quad (3.4.2)$$

ce qui constitue une relation phénoménologique. Par suite

$$\delta \ell[\vec{x}, \vec{H}(\vec{x})] = \frac{\partial \ell}{\partial \dot{H}_i} \delta \dot{H}_i = \frac{1}{C_m} \dot{B}^i \delta \dot{H}_i,$$

c'est-à-dire,

$$\delta \ell[\underbrace{\vec{x}}_{\delta \vec{x}=0}, \vec{H}(\vec{x})] = \frac{1}{C_m} (\vec{B}, \delta \vec{H})(\vec{x}).$$

Nous allons donc appliquer notre « *faux principe de l'énergie* » :

$$-\delta L = \delta \mathcal{A}^{(inc.geom.)}.$$

La variable $\vec{H}(\vec{x})$ devant vérifier la loi de production

$$(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} - C_j \vec{j})(\vec{x}) = 0$$

qui représente une contrainte pour notre problème de variation. La méthode des multiplicateurs de Lagrange nous conduit donc à poser :

$$\delta \left(-L[\vec{H}(\cdot)] + \int_V dV(\vec{x}) \frac{1}{C_m} (\overleftarrow{A}(\vec{x}), (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} - C_j \vec{j})(\vec{x})) \right) = \delta \mathcal{A}^{(inc.geom.)},$$

où $\vec{A}(\vec{x})$ est le multiplicateur de Lagrange ; il doit être vectoriel puisque la contrainte l'est.

Nous allons, comme à la section 1.3 supposer l'espace homogène, donc

$$\delta\ell[\vec{x}, \vec{H}(\vec{x})] = \frac{1}{C_m}(\vec{B}, \delta\vec{H})(\vec{x}),$$

et alors

$$\begin{aligned} \int_V dV(\vec{x}) \left(-\frac{1}{C_m}(\vec{B}, \delta\vec{H}) + \frac{1}{C_m}(\overleftarrow{A}, \overrightarrow{\text{rot}}\delta\vec{H}) - \frac{C_j}{C_m}(\overleftarrow{A}, \delta\vec{j}) \right)(\vec{x}) &= \delta\mathcal{A}^{(inc.geom.)} \\ &= \int_V (d^3\overleftarrow{K}^{(inc.)}, \delta\vec{r})(\vec{x}). \end{aligned}$$

Calculons $\delta\vec{j}(\vec{x})$ en considérant un déplacement rigide des tubes (nous montrerons à la fin de ce paragraphe que cette hypothèse est équivalente à celle exigeant $J = \text{cte}$). Nous avons donc

$$\delta\vec{j}(\vec{x}) = \vec{j}(\vec{x} - \delta\vec{r}) - \vec{j}(\vec{x}),$$

d'où, en passant aux composantes et en utilisant la formule des accroissements finis,

$$\begin{aligned} \delta j^1 &= j^1(\vec{x} - \delta\vec{r}) - j^1(\vec{x}) = -\delta r^i \partial_i j^1(\vec{x}) \\ &= -\delta r^1 \partial_1 j^1 - \delta r^2 \partial_2 j^1 - \delta r^3 \partial_3 j^1. \end{aligned}$$

Puisque $\delta\vec{r} = \text{cte}$,

$$\begin{aligned} \delta j^1(\vec{x}) &= \partial_2(\delta r^1 j^2 - \delta r^2 j^1) - \partial_3(\delta r^3 j^1 - \delta r^1 j^3) - \delta r^1 \partial_1 j^1 - \delta r^1 \partial_2 j^2 - \delta r^1 \partial_3 j^3 \\ &= \partial_2[\delta\vec{r} \wedge \vec{j}]^3 - \partial_3[\delta\vec{r} \wedge \vec{j}]^2 - \delta r^1 \text{div}\vec{j} \\ &= (\overrightarrow{\text{rot}}[\delta\vec{r} \wedge \vec{j}])^1 - \delta r^1 \text{div}\vec{j} \end{aligned}$$

et donc

$$\delta\vec{j}(\vec{x}) = \overrightarrow{\text{rot}}[\delta\vec{r} \wedge \vec{j}] - \delta\vec{r} \text{div}\vec{j}.$$

Comme : $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{H} = C_j \vec{j}$ et que $\text{div}\overrightarrow{\text{rot}} = 0$, on a

$$\text{div}\vec{j} = 0.$$

Pour continuer notre calcul de variation, il est nécessaire de faire un rappel.

Théorème de Green III.

Par le théorème de Gauss, nous avons :

$$\oint_V (d\vec{\sigma}, [\vec{a} \wedge \vec{b}]) = \int_V dV \text{div}[\vec{a} \wedge \vec{b}].$$

Transformons $\text{div}[\vec{a} \wedge \vec{b}]$, pour obtenir

$$\begin{aligned} \text{div}[\vec{a} \wedge \vec{b}] &= \partial_1[\vec{a} \wedge \vec{b}]^1 + \dots \\ &= \partial_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + \partial_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + \partial_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ &= b_3(\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1) + b_2(\partial_3 a_1 - \partial_1 a_3) + b_1(\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2) \\ &\quad - a_3(\partial_1 b_2 - \partial_2 b_1) - a_2(\partial_3 b_1 - \partial_1 b_3) - a_1(\partial_2 b_3 - \partial_3 b_2), \end{aligned}$$

et donc

$$\operatorname{div}[\vec{a} \wedge \vec{b}] = (\vec{b}, \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{a}) - (\vec{a}, \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{b}),$$

d'où le théorème de Green III

$$\oint_V (d\overleftarrow{\sigma}, [\overleftarrow{a} \wedge \overleftarrow{b}]) = \int_V dV ((\vec{b}, \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overleftarrow{a}) - (\overleftarrow{a}, \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{b})).$$

Nous aurons par conséquent

$$\int_V dV(\vec{x}) (\overleftarrow{A}, \overrightarrow{\operatorname{rot}} \delta \vec{H})(\vec{x}) = \oint_V (d\overleftarrow{\sigma}, -[\overleftarrow{A} \wedge \delta \vec{H}])(\vec{y}) + \int_V dV(\vec{x}) (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \overleftarrow{A}, \delta \vec{H})(\vec{x}).$$

Nous choisissons $\delta \vec{H} = \vec{0}$ sur la surface limitant V (quitte à prendre s'il le faut V_∞).

On a donc :

$$\oint_{V_\infty} (d\overleftarrow{\sigma}, -[\overleftarrow{A} \wedge \delta \vec{H}])(\vec{y}) = 0,$$

et nous obtenons

$$\int_{V_\infty} dV(\vec{x}) \left(\frac{1}{C_m} (\delta \vec{H}, -\vec{B} + \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overleftarrow{A}) - \frac{C_j}{C_m} (\overleftarrow{A}, \delta \vec{j}) \right)(\vec{x}) = \int_{V_\infty} (d^3 \overleftarrow{K}^{(inc.)}, \delta \vec{r})(\vec{x}),$$

d'où finalement, en remplaçant $\delta \vec{j}$ par son expression,

$$\begin{aligned} \int_{V_\infty} dV(\vec{x}) \left(\frac{1}{C_m} (\delta \vec{H}, -\vec{B} + \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overleftarrow{A}) - \frac{C_j}{C_m} (\overleftarrow{A}, \overrightarrow{\operatorname{rot}} [\delta \vec{r} \wedge \vec{j}]) \right)(\vec{x}) \\ = \int_{V_\infty} (d^3 \overleftarrow{K}^{(inc.)}, \delta \vec{r})(\vec{x}) \end{aligned}$$

Mais $(\vec{a}, [\vec{b} \wedge \vec{c}]) = (\vec{b}, [\vec{c} \wedge \vec{a}])$ et, puisque

$$\int_{V_\infty} dV(\vec{x}) (\overleftarrow{A}, \overrightarrow{\operatorname{rot}} [\delta \vec{r} \wedge \vec{j}]) (\vec{x}) = \int_{V_\infty} dV(\vec{x}) (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \overleftarrow{A}, [\delta \vec{r} \wedge \vec{j}]) (\vec{x}),$$

car le système est de dimension finie $\implies \vec{j}(\infty) = 0$, on arrive a

$$\begin{aligned} \int_{V_\infty} dV(\vec{x}) \frac{1}{C_m} (\delta \vec{H}, -\vec{B} + \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overleftarrow{A}) - \frac{C_j}{C_m} (\delta \vec{r}, [\vec{j} \wedge \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overleftarrow{A}]) (\vec{x}) \\ = \int_{V_\infty} (d^3 \overleftarrow{K}^{(inc.)}, \delta \vec{r})(\vec{x}). \end{aligned}$$

Comme les variations $\delta \vec{H}$ et $\delta \vec{r}$ sont arbitraires, nous devons annuler leurs coefficients :

- 1) coefficient de $\delta \vec{H}$: $-\vec{B} + \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overleftarrow{A} = \vec{0}$,
- 2) coefficient de $\delta \vec{r}$: $-dV \frac{C_j}{C_m} [\vec{j} \wedge \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overleftarrow{A}] - d^3 \overleftarrow{K}^{(inc.)} = \overleftarrow{0}$.

Nous obtenons par conséquent

$$\vec{B}(\vec{x}) = \overleftarrow{\text{rot}} \overleftarrow{A}(\vec{x}), \tag{3.4.3}$$

ou sous forme tensorielle

$$B_{[ik]}(\vec{x}) = (\partial_i A_k - \partial_k A_i)(\vec{x}) \tag{3.4.4}$$

et $\overleftarrow{A}(\vec{x})$ est appelé *potentiel-vecteur*.

Puisque $\text{div} \overleftarrow{\text{rot}} = 0$, nous en déduisons la *loi d'induction*

$$\text{div} \overleftarrow{B}(\vec{x}) = 0. \tag{3.4.5}$$

Le coefficient de $\delta \vec{r}$ nous donne la *loi de force*

$$-d^3 \overleftarrow{K}^{(inc.)}(\vec{x}) = d^3 \overleftarrow{K}^{(c.s.)}(\vec{x}) = + \frac{C_j}{C_m} [dV \vec{j} \wedge \overleftarrow{B}](\vec{x}). \tag{3.4.6}$$

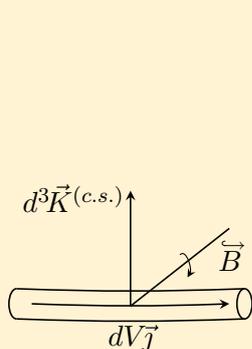


Fig. 3.4.1

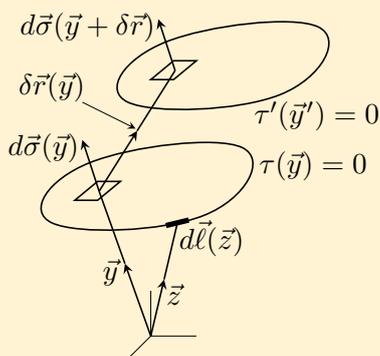


Fig. 3.4.2

Expression de la variation $\delta \vec{j}(\vec{x})$ lors d'un déplacement arbitraire $\delta \vec{r}(\vec{x})$.

Nous avons par définition

$$J_\tau = \int_\tau (d^{\leftarrow} \sigma, \vec{j})(\vec{y}) \quad \text{et} \quad \delta J = \int_\tau (d^{\leftarrow} \sigma, \delta \vec{j})(\vec{y}) + \oint_\tau (\delta d^{\leftarrow} \sigma, \vec{j})(\vec{z}),$$

où $\delta d^{\leftarrow} \sigma$ s'interprète comme étant l'élément de surface du cylindre reliant la surface $\tau'(\vec{y}') = 0$ à la surface $\tau(\vec{y}) = 0$ (cf. fig. 3.4.3).

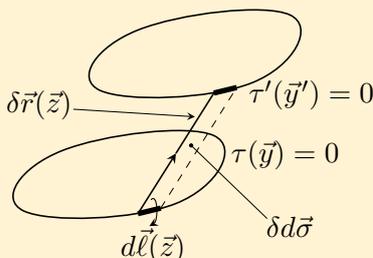


Fig. 3.4.3

Mais : $\delta d^{\leftarrow}\sigma = [\delta\vec{r} \wedge \vec{d}\vec{\ell}](\vec{z})$; par conséquent

$$\delta J = \int_{\tau} (d^{\leftarrow}\sigma, \delta\vec{j})(\vec{y}) + \oint_{\tau} ([\delta\vec{r} \wedge \vec{d}\vec{\ell}], \vec{j})(\vec{z}).$$

Comme $([\delta\vec{r} \wedge \vec{d}\vec{\ell}], \vec{j}) = (\vec{d}\vec{\ell}[\vec{j} \wedge \delta\vec{r}])$, on a

$$\delta J = \int_{\tau} (d^{\leftarrow}\sigma, \delta\vec{j})(\vec{y}) + \oint_{\tau} (\vec{d}\vec{\ell}, [\vec{j} \wedge \delta\vec{r}])(\vec{z}).$$

En appliquant le théorème de Stokes sur l'intégrale de ligne, nous obtenons

$$\delta J = \int_{\tau} \left(d^{\leftarrow}\sigma, (\delta\vec{j} + \overrightarrow{\text{rot}}[\vec{j} \wedge \delta\vec{r}]) \right)(\vec{y}).$$

En particulier si $J = \text{cte}$, alors $\delta J = 0$, et puisque la surface $\tau(\vec{y}) = 0$ est arbitraire nous obtenons

$$\delta\vec{j}(\vec{x}) = \overrightarrow{\text{rot}}[\delta\vec{r} \wedge \vec{j}](\vec{y}),$$

expression qui est bien de la même forme que celle obtenue en supposant un déplacement rigide.

Nous allons chercher maintenant l'expression de $\delta\vec{j}$ dans le cas général, c'est-à-dire sans supposer la conservation de J . Nous voyons d'après la figure 3.4.5 qu'il est possible d'écrire :

$$\delta J = J_{\tau'} + J_{\text{cylindre}} - J_{\tau} = J_{\text{surface extérieure fermée}}$$

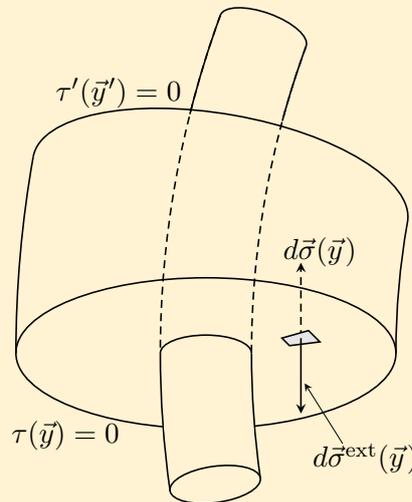


Fig. 3.4.5

donc

$$\delta J = \oint_{\text{surf. ext. fermée}} (-d^{\leftarrow}\sigma^{\text{ext}}, \vec{j})(\vec{y})$$

le signe $-$ se justifie du fait que : $d^{\leftarrow}\sigma(\vec{y}) = -d^{\leftarrow}\sigma^{\text{ext}}(\vec{y})$ et que nous considérons l'afflux de \vec{j} .

L'élément de volume du volume contenu dans la surface fermée extérieure est

$$\delta dV(\vec{y}) = (d\overleftarrow{\sigma}, \delta\vec{r})(\vec{y}).$$

Il est alors possible d'appliquer le théorème de Gauss :

$$\delta J = - \oint_{\text{surf.ext.}} (d\overleftarrow{\sigma}^{ext.}, \vec{j})(\vec{y}) = - \int_{\tau} ((d\overleftarrow{\sigma}, \delta\vec{r}) \text{div} \vec{j})(\vec{y}).$$

Par conséquent en identifiant les deux expressions donnant δJ , nous obtenons

$$\delta J = \int_{\tau} (d\overleftarrow{\sigma}, (\delta\vec{j} + \overrightarrow{\text{rot}}[\vec{j} \wedge \delta\vec{r}])(\vec{y})) = - \int_{\tau} ((d\overleftarrow{\sigma}, \delta\vec{r}) \text{div} \vec{j})(\vec{y}).$$

N'ayant fait aucune hypothèse sur la surface $\tau(\vec{y}) = 0$, nous pouvons identifier les coefficients de $d\overleftarrow{\sigma}$ dans les deux intégrales ; Nous obtenons

$$\delta\vec{j}(\vec{y}) = (\overrightarrow{\text{rot}}[\delta\vec{r} \wedge \vec{j}] - \delta\vec{r} \text{div} \vec{j})(\vec{y}). \tag{3.4.7}$$

Remarque.

Si $\text{div} \vec{j} \neq 0$, le flux de \vec{j} à travers une surface fermée n'est pas nul et par suite, le courant n'est plus stationnaire (d'où $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} \neq C_j \vec{j}$).

Cas linéaire et isotrope.

Nous allons définir ce cas pour les courants stationnaires par analogie avec celui de l'électrostatique (cf. sec. 1.7).

<p>Electrostatique</p> $u^{(es.)} = \frac{1}{2C_e} \frac{1}{\epsilon} \vec{D} ^2$ <p>où ϵ est la constante diélectrique.</p> $\delta u^{(es.)} = \frac{1}{C_e} (\overleftarrow{E}, \delta\vec{D}),$ <p>d'où :</p> $\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{D}.$	<p>Courants stationnaires</p> $\ell = \frac{1}{2C_m} \mu \vec{H} ^2$ <p>où μ est la perméabilité magnétique.</p> $\delta \ell = \frac{1}{C_m} (\overleftarrow{B}, \delta\vec{H}),$ <p>d'où :</p> $\overleftarrow{B} = \mu \vec{H}.$
--	---

(3.4.8)

3.5 Loi de Biot-Savart

Cette loi donne la valeur de l'induction magnétique $\overleftarrow{B}(\vec{a})$ créée par des courants stationnaires dans le cas linéaire et isotrope. Cette loi est l'analogie de la loi de Coulomb en électrostatique. Nous verrons que ces deux lois se déduisent d'un même calcul formel.

<p>Electrostatique</p> <p>Cas linéaire et isotrope</p>	<p>Courants stationnaires</p> <p>Cas linéaire et isotrope</p>
--	---

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{D}.$$

Nous avons la loi

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} \phi.$$

Puisque $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} = \vec{0}$,

nous en déduisons

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$$

et la loi d'induction

$$\text{div} \vec{D} = C_e \text{ ou}$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{C_e}{\epsilon} q$$

devient

$$\overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{E} = \frac{C_e}{\epsilon} \overrightarrow{\text{grad}} q,$$

soit encore

$$\Delta \vec{E} = \frac{C_e}{\epsilon} \overrightarrow{\text{grad}} q.$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}.$$

Nous avons la loi

$$\vec{B} = \overleftarrow{\text{rot}} \vec{A}.$$

Puisque $\text{div} \overleftarrow{\text{rot}} = 0$,

nous en déduisons

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

et la loi de production

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = C_j \vec{j} \text{ ou}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = C_j \mu \vec{j}$$

devient

$$\overleftarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = C_j \mu \overleftarrow{\text{rot}} \vec{j},$$

soit encore

$$\Delta \vec{B} = -C_j \mu \overleftarrow{\text{rot}} \vec{j}. \quad (3.4.8)$$

Pour obtenir l'avant dernière ligne de formules, nous avons utilisé la relation vectorielle

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overleftarrow{\text{rot}} \vec{a} = -\Delta \vec{a} + \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{a}.$$

Nous savons que l'équation de Poisson

$$\Delta \varphi(\vec{x}) = -\rho(\vec{x}) \quad \text{avec} \quad \varphi(\vec{x} \rightarrow \infty) = 0$$

admet la solution

$$\varphi(\vec{a}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{(dV\rho)(\vec{x})}{r}$$

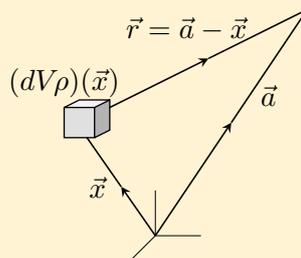


Fig. 3.5.1

En transposant ce résultat, nous obtenons

$$\vec{E}(\vec{a}) = -\frac{C_e}{4\pi\epsilon} \int_{V_\infty} \left(dV \frac{1}{r} \overrightarrow{\text{grad}} q \right) (\vec{x}).$$

$$\vec{B}(\vec{a}) = \frac{C_j \mu}{4\pi} \int_{V_\infty} \left(dV \frac{1}{r} \overleftarrow{\text{rot}} \vec{j} \right) (\vec{x}).$$

Par la relation vectorielle

$$\overrightarrow{\text{grad}} \varphi \psi = \overrightarrow{\text{grad}} \psi + \psi \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$$

Par la relation vectorielle

$$\overleftarrow{\text{rot}} \varphi \vec{b} = \varphi \overleftarrow{\text{rot}} \vec{b} + \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \wedge \vec{b}$$

et le théorème du gradient

$$\int_V dV \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \psi = \oint_V (d\vec{\sigma}, \varphi \psi),$$

nous en tirons

$$\int_{V_\infty} dV \frac{1}{r} \overrightarrow{\text{grad}} q = - \int_{V_\infty} dV q \overrightarrow{\text{grad}}_x \frac{1}{r} + \underbrace{\oint_{V_\infty} d\vec{\sigma} q \frac{1}{r}}_{=0}.$$

Donc

$$\vec{E}(\vec{a}) = \frac{C_e}{4\pi\epsilon} \int_{V_\infty} \left(dV q \overrightarrow{\text{grad}}_x \frac{1}{r} \right) (\vec{x}).$$

Nous obtenons alors

la loi de Coulomb

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{C_e}{4\pi\epsilon} \int_{V_\infty} \frac{dV(\vec{x}) q(\vec{x}) [\vec{a} - \vec{x}]}{r^2}.$$

et le théorème du rotationnel

$$\int_V dV \overleftrightarrow{\text{rot}} \varphi \vec{b} = \oint_V (d\vec{\sigma} \wedge \varphi \vec{b})$$

nous en tirons

$$\int_{V_\infty} dV \frac{1}{r} \overleftrightarrow{\text{rot}} \vec{j} = - \int_{V_\infty} dV \left(\overrightarrow{\text{grad}}_x \frac{1}{r} \wedge \vec{j} \right) + \underbrace{\oint_{V_\infty} (d\vec{\sigma} \wedge \frac{1}{r} \vec{j})}_{=0}.$$

Donc

$$\vec{B}(\vec{a}) = -\frac{C_j \mu}{4\pi} \int_{V_\infty} \left(dV [\overrightarrow{\text{grad}}_x \frac{1}{r} \wedge \vec{j}] \right) (\vec{x}).$$

Nous obtenons alors

la loi de Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{a}) = \frac{C_j \mu}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{[(dV \vec{j})(\vec{x}) \wedge [\vec{a} - \vec{x}]]}{r^2}.$$

Pour arriver à la dernière ligne de formules, on a utilisé la formule

$$\overrightarrow{\text{grad}}_x \frac{1}{r} = -\frac{[\vec{x} - \vec{a}]}{|\vec{x} - \vec{a}|^2} = \frac{[\vec{a} - \vec{x}]}{r^2}.$$

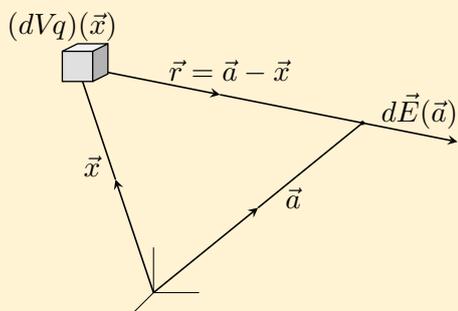


Fig. 3.5.2

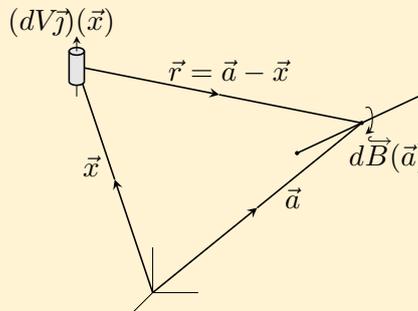


Fig. 3.5.3

Cette méthode qui consiste à chercher \vec{E} et \vec{B} directement sans passer par les potentiels ϕ et \vec{A} n'est pas très connue et méritait d'être signalée. La méthode classique consiste à calculer $\phi(\vec{a})$ puis $\vec{A}(\vec{a})$ et d'en déduire $\vec{E}(\vec{a})$ et $\vec{B}(\vec{a})$ au moyen des relations :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} \phi \quad \text{et} \quad \vec{B} = \overleftrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$$

3.6 Force entre deux éléments de courant

Poursuivons notre analogie des lois de forces (cf. sect. 1.4). Nous avons vu que :

Electrostatique $d^3 \overleftarrow{K}^{(es.)}(\vec{a}) = (dVq \overleftarrow{E})(\vec{a})$	Courants stationnaires $d^3 \overleftarrow{K}^{(c.s.)}(\vec{a}) = \frac{C_j}{C_m} [dV \vec{j} \wedge \overrightarrow{B}](\vec{a})$
--	---

Si maintenant nous considérons, non plus la force créée sur un élément de charge $dVq(\vec{a})$ (resp. un élément de courant $dV\vec{j}(\vec{a})$) par un champ électrique $\overrightarrow{E}(\vec{a})$ (resp. une induction magnétique $\overrightarrow{B}(\vec{a})$), mais la force créée sur un élément par un autre élément identique, nous obtenons

a) En *électrostatique* :

$$d^6 \overleftarrow{K}_{\text{sur } \vec{a}}^{(es.)} = \frac{C_e (dVq)(\vec{a})(dVq)(\vec{x})[\vec{a} - \vec{x}]}{4\pi\epsilon |\vec{a} - \vec{x}|^2}.$$

Pour avoir la force sur un élément (\vec{x}), il suffit de permuter $\vec{a} \rightarrow \vec{x}$ dans l'expression ci-dessus ; et, puisque celle-ci est antisymétrique en $[\vec{a}, \vec{x}]$, nous trouvons :

$$d^6 \overleftarrow{K}_{\text{sur } \vec{x}}^{(es.)} = -d^6 \overleftarrow{K}_{\text{sur } \vec{a}}^{(es.)}$$

ce qui est conforme au principe d'action et de réaction.

b) En *courants stationnaires* :

Soit $d^3 \overrightarrow{B}(\vec{x}, \vec{a})$, la contribution de la cause d'induction placée en \vec{x} sur le point \vec{a} . Cette contribution crée sur l'élément de courant $(dV\vec{j})(\vec{a})$ la force

$$d^6 \overleftarrow{K}_{\text{sur } \vec{a}}^{(c.s.)} = \frac{C_j}{C_m} [(dV\vec{j})(\vec{x}) \wedge d^3 \overrightarrow{B}(\vec{x}, \vec{a})].$$

Supposons un instant que

$$\overrightarrow{B}(\vec{a}) = \int_{V_\infty} d^3 \overrightarrow{B}(\vec{x}, \vec{a}), \quad (*)$$

alors, par identification avec la loi de Biot-Savart, on a

$$d^3 \overrightarrow{B}(\vec{x}, \vec{a}) = \frac{C_j \mu}{4\pi} \left[(dV\vec{j})(\vec{a}) \wedge \frac{[\vec{a} - \vec{x}]}{|\vec{a} - \vec{x}|^2} \right],$$

d'où

$$d^6 \overleftarrow{K}_{\text{sur } \vec{a}}^{(c.s.)} = \frac{C_j^2 \mu}{C_m 4\pi} \frac{1}{|\vec{a} - \vec{x}|^2} \left[(dV\vec{j})(\vec{a}) \wedge [(dV\vec{j})(\vec{x}) \wedge [\vec{a} - \vec{x}]] \right].$$

Mais $[\vec{a} \wedge [\vec{b} \wedge \vec{c}]] = \vec{b}(\overleftarrow{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\overleftarrow{a}, \vec{b})$, donc

$$d^6 \overleftarrow{K}_{\text{sur } \vec{a}}^{(c.s.)} = \frac{C_j^2 \mu}{C_m 4\pi} \frac{1}{|\vec{a} - \vec{x}|^2} \left\{ (dV\vec{j})(\vec{x}) \left((dV\vec{j})(\vec{a}), [\vec{a} - \vec{x}] \right) - [\vec{a} - \vec{x}] \left((dV\vec{j})(\vec{a}), (dV\vec{j})(\vec{x}) \right) \right\}.$$

La force $d^6 \overleftarrow{K}_{\text{sur } \vec{x}}^{(c.s.)}$ s'obtient en permutant dans cette expression $\vec{a} \longrightarrow \vec{x}$; nous obtenons

$$d^6 \overleftarrow{K}_{\text{sur } \vec{x}}^{(c.s.)} = \frac{C_j^2 \mu}{C_m 4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|^2} \left\{ (dV \vec{j})(\vec{a}) \left((dV \vec{j})(\vec{x}), [\vec{x} - \vec{a}] \right) - [\vec{x} - \vec{a}] \left((dV \vec{j})(\vec{x}), (dV \vec{j})(\vec{a}) \right) \right\} \neq -d^6 \overleftarrow{K}_{\text{sur } \vec{a}}^{(c.s.)},$$

ce qui est contraire au principe d'action et de réaction. Cette loi de force élémentaire ne constitue donc pas une loi physique : elle doit uniquement être considérée comme un *intermédiaire de calcul* dans la recherche de la loi de force intégrale entre deux courants. (Il faut d'ailleurs noter qu'elle n'est nullement contredite par l'expérience puisqu'il est impossible d'isoler des éléments de courants !)

Essayons de justifier ce curieux résultat : lorsque nous avons supposé l'expression (*) de $\vec{B}(\vec{a})$ nous n'avons pas examiné si $d^3 \vec{B}(\vec{x}, \vec{a})$ avait une signification physique, c'est-à-dire si nous avons bien $\text{div}_a B(\vec{x}, \vec{a}) = 0$ (loi d'induction), or il est facile de voir, en prenant la loi de Biot-Savart, que $\text{div}_a \vec{B}(\vec{x}, \vec{a}) = 0$ mais que $\text{div}_a d^3 \vec{B}(\vec{x}, \vec{a}) \neq 0$. En fait, nous n'avons pas le droit de considérer l'action de $dV \vec{j}(\vec{x})$ seul, mais nous devons prendre en compte tout le circuit.

Cas de deux courants parallèles.

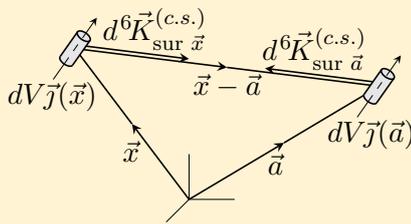


Fig. 3.6.1

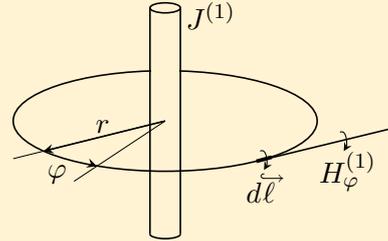


Fig. 3.6.2

Puisque dans ce cas $\vec{j}(\vec{x}) \parallel \vec{j}(\vec{a})$ alors :

$$d^6 \overleftarrow{K}_{\text{sur } \vec{x}}^{(c.s.)} = -d^6 \overleftarrow{K}_{\text{sur } \vec{a}}^{(c.s.)}.$$

Considérons alors le tube $J^{(1)}$, on a

$$\oint (\vec{dl}, \vec{H}^{(1)}) = C_j J^{(1)} = 2\pi r H_\phi^{(1)}$$

et la composante H_ϕ de \vec{H} est donc $H_\phi = \frac{C_j}{2\pi r} J^{(1)}$. La loi de force

$$d\overleftarrow{K}^{(c.s.)} = \frac{C_j}{C_m} [dV \vec{j} \wedge \vec{B}]$$

peut s'écrire, puisque $dV \vec{j} = d\vec{s} J^{(1)}$,

$$d\overleftarrow{K}^{(c.s.)} = \frac{C_j}{C_m} J^{(1)} [d\vec{s} \wedge \vec{B}].$$

La force s'exerçant sur le tube (2) sera ainsi

$$d\vec{K}_{(2)}^{(c.s.)} = \frac{C_j}{C_m} J^{(2)} [d\vec{s} \wedge \vec{B}^{(1)}].$$

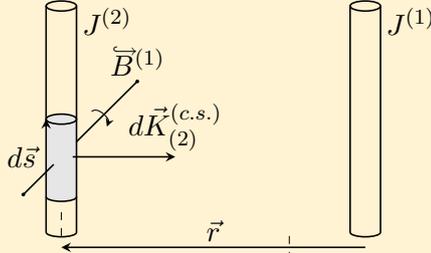


Fig. 3.6.3

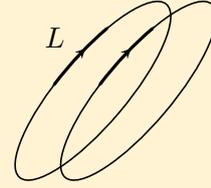


Fig. 3.6.4

Mais

$$[d\vec{s} \wedge \vec{B}^{(1)}] = -[\vec{r}] ds \mu \vec{H}_\phi^{(1)},$$

et donc

$$d\vec{K}_{(2)}^{(c.s.)} = -[\vec{r}] \frac{C_j}{C_m} \mu \frac{C_j}{C_m} J^{(1)} ds J^{(2)}.$$

Par suite, si les deux courants parallèles sont infiniment longs (mais fermés), l'intensité de force s'exerçant sur une longueur L sera

$$K^{(c.s.)} = \frac{C_j^2 \mu}{C_m 2\pi} (J^{(1)} J^{(2)}) \frac{L}{r}. \quad (3.6.1)$$

Les courants sont attractifs si $\mu > 0$. Cette loi est vérifiée expérimentalement. Elle sert d'ailleurs à définir légalement l'unité d'intensité $[J]$.

3.7 Couches doubles et courants

Nous savons par la thermodynamique qu'un système en équilibre est caractérisé par un minimum d'énergie, c'est-à-dire que l'énergie doit vérifier $\delta^{(2)}U \geq 0$. Considérons alors simultanément un système électrostatique $\Sigma^{(es.)}$ et un système de courants stationnaires $\Sigma^{(c.s.)}$, et examinons les conditions de minimum de l'énergie. Nous nous plaçons pour simplifier dans le cas linéaire et isotrope.

Electrostatique

Nous avons posé
(cf. sect. 1.1 et 1.2)

$$U^{(es.)} = \frac{1}{2C_e} \frac{1}{\epsilon} \int_{V_\infty} dV |\vec{D}|^2.$$

La condition de minimum

Courants stationnaires

Nous faisons l'hypothèse (provisoire)
que $U^{(c.s.)} = -L$ et alors

$$U^{(c.s.)} = -\frac{1}{2C_m} \mu \int_{V_\infty} dV |\vec{H}|^2.$$

La condition de minimum

d'énergie s'écrit

$$\delta^{(2)}U^{(es.)} = \frac{1}{2C_e} \frac{1}{\epsilon} \int_{V_\infty} dV \sum_i (\delta D^i)^2 \geq 0,$$

ce qui implique ($C_e > 0$)
 $\epsilon \geq 0$

d'énergie s'écrit

$$\delta^{(2)}U^{(c.s.)} = -\frac{1}{2C_m} \mu \int_{V_\infty} dV \sum_i (\delta \overset{\circ}{H}_i)^2 \geq 0,$$

ce qui implique ($C_m > 0$)
 $\underline{\mu} \leq 0$.

Examinons maintenant les conséquences de ces deux résultats. Choisissons (pour l'analogie qu'ils présentent entre eux) un système électrostatique formé de deux couches doubles parallèles et un système de courants stationnaires formés de deux tubes de courants parallèles.

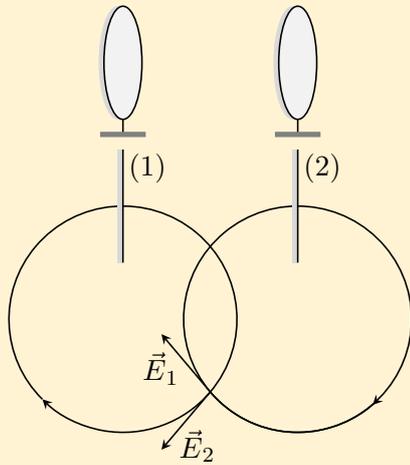


Fig. 3.7.1

Les deux champs *s'additionnent*.
 Par conséquent, en approchant les deux couches, nous avons

$$\int_{V_\infty} dV (\overleftarrow{D}, \delta \overrightarrow{D}) \geq 0.$$

Donc,
si nous approchons deux couches
 nous trouvons un $\delta U^{(es.)} \geq 0$.

Et puisque,

$$\delta U^{(e.s)} = \delta \mathcal{A}^{(inc.geom.)},$$

il est nécessaire de fournir du travail au système

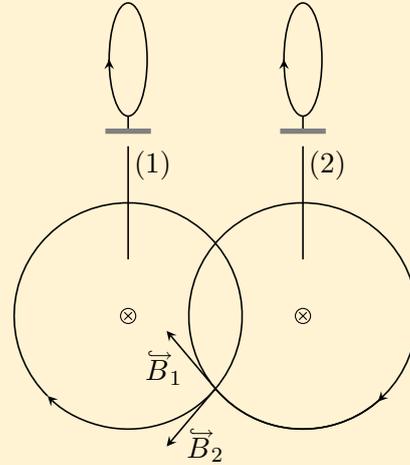


Fig. 3.7.2

Les deux champs *s'additionnent*.
 Par conséquent, en approchant les deux courants, nous avons

$$\int_{V_\infty} dV (\overrightarrow{H}, \delta \overleftarrow{H}) \geq 0.$$

Donc,
si nous approchons deux courants
 nous trouvons un $\delta U^{(c.s.)} \geq 0$.

Et puisque,

$$\delta U^{(c.s.)} = \delta \mathcal{A}^{(inc.geom.)},$$

il est nécessaire de fournir du travail au système

Or ces conclusions sont contraires à l'expérience car les couches doubles et les

courants *s'attirent*, donc le travail doit être fourni par le système : $\delta\mathcal{A}^{(inc.geom.)} \leq 0$. En fait, dans notre calcul nous avons négligé la *discontinuité* du champ qui existe comme nous le savons à l'intérieur des couches doubles, et lorsque nous en tenons compte, un calcul assez long (cf. l'ouvrage *Elektromagnetismus* de M. Planck) nous conduit à

$$\int_{V_\infty} dV (\overleftarrow{D}, \delta\overrightarrow{D}) \leq 0,$$

ce qui lève la contradiction dans le cas de l'électrostatique.

Par contre, pour les courants stationnaires, il n'existe pas de *discontinuité* du champ à l'intérieur des tubes (en vertu de la loi de production) et nous avons bien

$$\int_{V_\infty} dV (\overrightarrow{H}, \delta\overrightarrow{H}) \geq 0.$$

Il est nécessaire par conséquent pour lever cette contradiction de supposer que $\mu > 0$.

Mais alors un système de courants stationnaires en équilibre vérifie

$$\delta^{(2)}U^{(c.s.)} = -\frac{1}{2C_m}\mu \int dV \sum_i (\delta \overset{\circ}{H}_i)^2 \leq 0,$$

ce qui signifie que le système en équilibre n'a pas une énergie minimum, ce qui est contraire à la thermodynamique. Par suite notre hypothèse n'est pas justifiée et

$$U^{(c.s.)} \neq -L.$$

3.8 Travail d'induction

Puisque, comme nous l'avons vu : $U^{(c.s.)} \neq -L$, alors $\delta U^{(c.s.)} \neq \delta\mathcal{A}^{(inc.geom.)}$. Il est alors nécessaire pour satisfaire au premier principe de la thermodynamique $\delta U = \delta\mathcal{A}^{(inc.)}$ d'introduire une nouvelle forme de travail d'origine non mécanique que nous appellerons *travail d'induction* $\delta\mathcal{A}^{(inc.ind.)}$ tel que :

$$\delta U^{(c.s.)} = \delta\mathcal{A}^{(inc.)} = \delta\mathcal{A}^{(inc.geom.)} + \delta\mathcal{A}^{(inc.ind.)}.$$

Pour pouvoir exprimer sa valeur, il est nécessaire de connaître la forme de l'énergie d'un système de courants stationnaires $U^{(c.s.)}$.

Nous savons que ce système est caractérisé par les deux champs $\overrightarrow{H}(\vec{x})$ et $\overrightarrow{B}(\vec{x})$ reliés entre eux par une loi phénoménologique connue ; nous savons d'autre part qu'une partie de l'énergie $-\delta L$ se transforme en travail mécanique (et réciproquement) lorsque les courants J sont maintenus constants. Toutes ces données nous suggèrent, par induction des méthodes utilisées en thermodynamique, de définir la densité d'énergie $u^{(c.s.)}$ d'un système de courants stationnaires par une transformation de Legendre, soit

$$u^{(c.s.)}[\vec{x}, \frac{\partial \ell}{\partial \overset{\circ}{H}_i}] = \overset{\circ}{H}_i \frac{\partial \ell}{\partial \overset{\circ}{H}_i} - \ell[\vec{x}, \overrightarrow{H}].$$

Mais (cf. 3.4.1)

$$\frac{\partial \ell}{\dot{H}_i} = \frac{1}{C_m} \dot{B}^i,$$

donc

$$u^{(c.s.)}[\vec{x}, \vec{B}(\vec{x})] = \frac{1}{C_m} (\vec{H}, \vec{B})(\vec{x}) - \ell[\vec{x}, \vec{H}(\vec{x})]. \quad (3.8.1)$$

En opérant une « variation de Legendre » ($\delta \vec{x} = \vec{0}$), on obtient

$$\begin{aligned} \delta u^{(c.s.)}[\vec{x}, \vec{B}] &= \frac{1}{C_m} (\delta \vec{H}, \vec{B}) + \frac{1}{C_m} (\vec{H}, \delta \vec{B}) - \frac{1}{C_m} (\vec{B}, \delta \vec{H}) \\ &= \frac{1}{C_m} (\vec{H}, \delta \vec{B}), \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial u^{(c.s.)}[\vec{x}, \vec{B}(\vec{x})]}{\partial \dot{B}^i} = \frac{1}{C_m} \dot{H}_i. \quad (3.8.2)$$

Nous avons donc défini l'énergie d'un système de courants stationnaires comme une fonctionnelle de l'induction magnétique

$$U^{(c.s.)}[\vec{B}(\cdot)] = \int_V dV u^{(c.s.)}[\vec{x}, \vec{B}(\vec{x})].$$

En vertu de la transformation de Legendre, nous avons :

$$\delta U^{(c.s.)} = \frac{1}{C_m} \int_V dV \delta (\vec{H}, \vec{B})(\vec{x}) - \int_V dV \delta \ell[\vec{x}, \vec{H}(\vec{x})].$$

Mais

$$- \int_V dV \delta \ell[\vec{x}, \vec{H}(\vec{x})] = -\delta L[\vec{H}(\cdot)] = \delta \mathcal{A}^{(inc.geom.)},$$

ce qui donne par identification :

$$\delta \mathcal{A}^{(inc.ind.)} = \frac{1}{C_m} \int_V dV(\vec{x}) \left[(\vec{H}, \delta \vec{B}) + (\vec{B}, \delta \vec{H}) \right](\vec{x}).$$

Nous voyons que le travail d'induction sert d'une part à compenser le travail mécanique et d'autre part à accroître l'énergie de la quantité

$$\int_V dV \frac{1}{C_m} (\vec{H}, \delta \vec{B}).$$

Essayons de transformer cette première partie de $\delta \mathcal{A}^{(inc.ind.)}$ de façon à obtenir une forme plus facilement interprétable. Nous savons que $\vec{B} = \overleftrightarrow{\text{rot}} \overleftarrow{A}$, donc :

$$\frac{1}{C_m} \int_V dV (\vec{H}, \delta \vec{B}) = \frac{1}{C_m} \int_V dV (\vec{H}, \overleftrightarrow{\text{rot}} \delta \overleftarrow{A})$$

et, par le théorème de Green III, l'expression devient

$$\frac{1}{C_m} \int_{V_\infty} dV(\vec{H}, \vec{\text{rot}} \delta \overleftarrow{A}) = \frac{1}{C_m} \int_{V_\infty} dV(\vec{\text{rot}} \vec{H}, \delta \overleftarrow{A}) + \underbrace{\frac{1}{C_m} \int_{V_\infty} (\overleftarrow{d\sigma}, [\vec{H} \wedge \delta \overleftarrow{A}])}_{=0}.$$

Mais $\vec{\text{rot}} \vec{H} = C_j \vec{j}$, on a donc :

$$\frac{1}{C_m} \int_{V_\infty} dV(\vec{\text{rot}} \vec{H}, \delta \overleftarrow{A}) = \frac{C_j}{C_m} \int_{V_\infty} dV(\vec{j}, \delta \overleftarrow{A}).$$

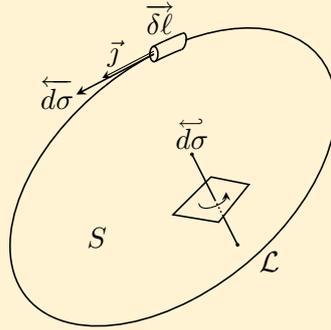


Fig. 3.8.1

D'après la figure 3.8.1, on a

$$dJ = (\vec{j}, \overleftarrow{d\sigma}) \quad \text{et} \quad dV = (d\vec{\ell}, \overleftarrow{d\sigma}),$$

donc :

$$dV \vec{j} = dJ d\vec{\ell}.$$

Par conséquent, nous pouvons intégrer le long d'un tube de courant élémentaire dJ puis sommer sur tous ces tubes contenus dans le système ; donc l'expression devient

$$\frac{C_j}{C_m} \int_{V_\infty} dV(\vec{j}, \delta \overleftarrow{A}) = \frac{C_j}{C_m} \int_J dJ \oint_{\mathcal{L}} (d\vec{\ell}, \delta \overleftarrow{A})$$

et, par le théorème de Stokes, ce terme devient

$$\frac{C_j}{C_m} \int_J dJ \int_S (\overleftarrow{d\sigma}, \vec{\text{rot}} \delta \overleftarrow{A}) = \frac{C_j}{C_m} \int_J dJ \int_S (\overleftarrow{d\sigma}, \delta \vec{B}), \quad (\text{I})$$

où S est la surface limitée par le tube de courant (fermé) dJ .

De manière analogue, nous trouvons pour le second terme de $\delta \mathcal{A}^{(inc.ind.)}$:

$$\frac{1}{C_m} \int_{V_\infty} dV(\vec{B}, \delta \vec{H}) = \frac{1}{C_m} \int_{V_\infty} dV(\vec{\text{rot}} \overleftarrow{A}, \delta \vec{H}) = \frac{1}{C_m} \int_{V_\infty} dV(\overleftarrow{A}, \vec{\text{rot}} \delta \vec{H})$$

et, puisque : $\vec{\text{rot}} \delta \vec{H} = C_j \delta \vec{j}$, ce terme devient

$$\frac{C_j}{C_m} \int_{V_\infty} dV(\overleftarrow{A}, \delta \vec{j}).$$

Or nous avons vu que lorsque les courants sont maintenus constants : $\delta\vec{j} = \overrightarrow{\text{rot}}[\delta\vec{r} \wedge \vec{j}]$, en conséquence, l'expression ci-dessus devient successivement

$$\frac{C_j}{C_m} \int_{V_\infty} dV (\overleftarrow{A}, \delta\vec{j}) = \frac{C_j}{C_m} \int_{V_\infty} dV (\overleftarrow{A}, \overrightarrow{\text{rot}}[\delta\vec{r} \wedge \vec{j}]),$$

ensuite, par le théorème de Green III,

$$\frac{C_j}{C_m} \int_{V_\infty} dV (\overrightarrow{\text{rot}} \overleftarrow{A}, [\delta\vec{r} \wedge \vec{j}]) = \frac{C_j}{C_m} \int_{V_\infty} dV (\overrightarrow{B}, [\delta\vec{r} \wedge \vec{j}]),$$

et enfin puisque $dV\vec{j} = dJd\vec{\ell}$,

$$\frac{C_j}{C_m} \int_J dJ \oint_{\mathcal{L}} (\overrightarrow{B}, [\delta\vec{r} \wedge d\vec{j}]).$$

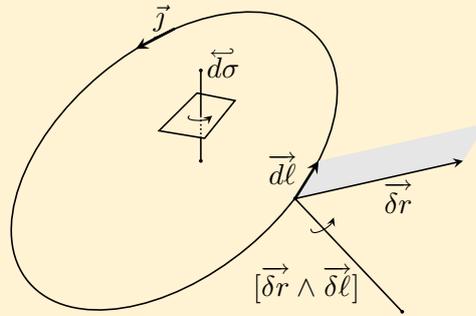


Fig. 3.8.2

Or d'après la figure 3.8.2 $[\delta\vec{r} \wedge d\vec{\ell}] = d\overleftarrow{\delta\sigma} = \delta\overleftarrow{d\sigma}$, ce qui permet d'obtenir l'expression

$$= \frac{C_j}{C_m} \int_J dJ \int_S (\overleftarrow{\delta\sigma}, \overrightarrow{B}). \quad (\text{II})$$

Alors, en tenant compte de (I) et de (II), on trouve

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A}^{(inc.ind.)} &= \frac{C_j}{C_m} \left\{ \int_J dJ \int_S (\overleftarrow{d\sigma}, \delta\overrightarrow{B}) + \int_J dJ \int_S (\delta\overleftarrow{d\sigma}, \overrightarrow{B}) \right\} \\ &= \frac{C_j}{C_m} \int_J dJ \int_S ((\overleftarrow{d\sigma}, \delta\overrightarrow{B}) + (\delta\overleftarrow{d\sigma}, \overrightarrow{B})) \\ &= \frac{C_j}{C_m} \int_J dJ \delta \int_S (\overleftarrow{d\sigma}, \overrightarrow{B}). \end{aligned}$$

Flux magnétique.

Nous appelons *flux magnétique* (pour le courant fermé dJ) à travers la surface S_{dJ} l'expression

$$\Psi_{dJ} = \int_{S_{dJ}} (\overleftarrow{d\sigma}, \overrightarrow{B})(\vec{x}). \quad (3.8.3)$$

Nous avons alors

$$\delta\mathcal{A}^{(inc.ind.)} = \frac{Cj}{C_m} \int_J dJ \delta\Psi_{dJ}. \quad (3.8.4)$$

Nous savons que des variations géométriques du système transforment une partie de l'énergie $U^{(c.s.)}$ en travail mécanique. Mais il est clair que des variations de courants doivent être également des causes de variations de $U^{(c.s.)}$. Nous sommes donc conduit à admettre que des variations de courants transforment une partie de l'énergie $U^{(c.s.)}$ en travail d'induction.

La formule ci-dessus nous permet de constater que $\delta\mathcal{A}^{(inc.ind.)}$ est lié aux variations du flux magnétique, comme $\delta\Psi$ est dû entre autre au déplacement des tubes. Nous en concluons que les courants doivent varier lors d'un déplacement. Il est donc nécessaire, pour maintenir les courants constants lors d'un déplacement de tubes, d'y insérer des générateurs de courants destinés à fournir au système le travail $\delta\mathcal{A}^{(inc.ind.)}$.

Dans le cas linéaire et isotrope, nous avons

$$u^{(c.s.)}[\vec{x}, \vec{B}(\vec{x})] = \frac{1}{2C_m} \frac{1}{\mu} |\vec{B}|^2$$

et nous constatons que

$$\begin{cases} \delta^{(2)}U^{(c.s.)} = \frac{1}{C_m} \frac{1}{\mu} \int_{V_\infty} dV \sum_i (\delta\dot{B}^i)^2 \\ \mu \geq 0. \end{cases}$$

Les contradictions sont levées : le système en équilibre possède bien une énergie minimum.

3.9 Aimants et magnétostatique

Classification.

Dans l'*approximation linéaire* et isotrope nous savons que

$$\vec{B}(\vec{x}) = \mu(\vec{x}) \vec{H}(\vec{x}),$$

$\mu(\vec{x})$ étant la *perméabilité magnétique* et μ_0 étant une constante universelle (comme ϵ_0), nous introduisons la classification suivante

- 1) $\frac{\mu}{\mu_0} \leq 1$ (1 à 10^{-9}) μ caractérise un milieu *diamagnétique*.
- 2) $\frac{\mu}{\mu_0} > 1$ (1 à 10^4) μ caractérise un milieu *paramagnétique*.
- 3) $\frac{\mu}{\mu_0} \geq 10^4 - 10^5$ μ caractérise un milieu *ferromagnétique*. Dans ce cas, on constate généralement un phénomène d'*hystérèse*, ce qui supprime la *réversibilité*.

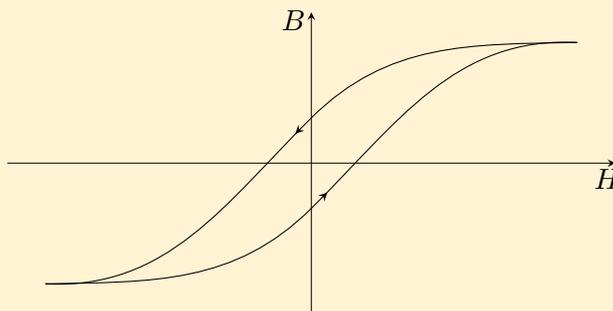


Fig. 3.9.1 Cycle d’hystérèse.

Remarque.

Il est bien entendu que le domaine de validité de la loi linéaire $\vec{B} = \mu \vec{H}$ peut être pour certains milieux fort limité, car en général μ est une fonction souvent fort compliquée (par exemple en ferromagnétisme) de \vec{H} . En fait, seule la loi phénoménologique $\partial u / \partial \vec{B}^i = \vec{H}_i$ a un caractère général. Nous allons donc dans ce paragraphe n’étudier que les cas les plus simples et nous négligeons en particulier le ferromagnétisme pour lequel \vec{B} n’est pas une fonction uniforme de \vec{H} .

A la section 2.10 de l’électrostatique linéaire, nous avons posé

$$\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon(\vec{x})\vec{E}(\vec{x}) = \epsilon_0\vec{E}(\vec{x}) + C_e\vec{P}(\vec{x}),$$

où $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$ était la polarisation (induite).

Par analogie nous pouvons également écrire :

$$\vec{B}(\vec{x}) = \mu(\vec{x})\vec{H}(\vec{x}) = \mu_0\vec{H}(\vec{x}) + C_m\vec{M}_{ind.}(\vec{x}),$$

où $\vec{M}_{ind.} = \vec{M}_{ind.}(H)$ est l’aimantation induite. Cette grandeur (comme la polarisation d’ailleurs) présente de par sa définition même une certaine ambiguïté : supposons en effet qu’en un point \vec{x} d’un milieu non magnétique règne un champ $\vec{H}_0(\vec{x})$, alors, si on remplace ce milieu par un milieu dia- ou paramagnétique, le champ au point \vec{x} devient $\vec{H}(\vec{x}) = \vec{H}_0(\vec{x}) + \vec{H}_{ind.}(\vec{x})$, ce champ induit étant provoqué par l’aimantation, or $\vec{M}_{ind.} = \vec{M}_{ind.}(H)$ donc l’aimantation est une fonction de son propre effet (elle doit encore vérifier la condition : $\vec{H}_0 = 0 \implies \vec{M}_{ind.} = 0$). Cette ambiguïté disparaît si on considère $\vec{M}_{ind.}$ et $\vec{H}_{ind.}$ comme les limites des sommes $\sum_i \vec{M}_{ind.}^{(i)}$ et $\sum_i \vec{H}_{ind.}^{(i)}$ construites grâce à l’argument : \vec{H}_0 induit $\vec{M}_{ind.}^{(1)}$ qui induit $\vec{H}_{ind.}^{(1)}$ qui induit $\vec{M}_{ind.}^{(2)}$ qui induit $\vec{H}_{ind.}^{(2)}$ qui induit ...

Il existe des corps qui présentent de la *rémanence*, c’est-à-dire qui présentent une aimantation indépendante de tout champ appliqué (le \vec{H}_0 de ci-dessus). C’est le cas d’un *aimant permanent idéal*.

Nous sommes alors conduit à écrire

$$\vec{B}(\vec{x}) = \mu(\vec{x})\vec{H}(\vec{x}) + C_m\vec{M}(\vec{x}) = \vec{B}_0(\vec{x}) + C_m\vec{M}(\vec{x}). \tag{3.9.1}$$

où $\vec{M}(\vec{x})$ est l'*aimantation permanente*. Cette grandeur n'est définie qu'à l'intérieur de l'aimant et est indépendante de $\vec{H}(\vec{x})$.

La loi d'induction : $\text{div} \vec{B} = 0$ donne dans ce cas

$$\text{div} \vec{B} = \text{div} \vec{B}_0 + C_m \text{div} \vec{M} = 0.$$

Posons :

$$\text{div} \vec{M} = -\overset{\circ}{q}, \quad (3.9.2)$$

où $\overset{\circ}{q}$ est la *densité de « charges magnétiques »* (pseudo-scalaire).

Par conséquent, en présence d'aimants, la loi d'induction est équivalente à

$$\text{div} \vec{B}_0 = C_m \overset{\circ}{q}. \quad (3.9.3)$$

Mais $\text{div} \vec{B} = 0$, ce qui signifie qu'il n'y a pas de source de magnétisme : $\overset{\circ}{q}$ est une densité de charges fictives et par analogie avec le corps polarisé, nous pouvons admettre que le magnétisme est dû à une distribution de dipôle élémentaires composés d'une charge positive et d'une charge négative qu'il est impossible de séparer.

La loi de production $\vec{\text{rot}} \vec{H} = C_j \vec{j}$ s'écrit, en l'absence de courant $\vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{0}$. Puisque $\vec{\text{rot}} \vec{\text{grad}} = \vec{0}$, elle est équivalente à :

$$\vec{H} = -\vec{\text{grad}} \overset{\circ}{\phi}, \quad (3.9.4)$$

et donc, le champ magnétique dû aux milieux magnétiques dérive d'un potentiel pseudo-scalaire $\overset{\circ}{\phi}$.

Remarque.

Les lois

$$\text{div} \vec{B}_0 = C_m \overset{\circ}{q}, \quad \vec{H} = -\vec{\text{grad}} \overset{\circ}{\phi} \quad \text{et} \quad \vec{B}_0 = \mu \vec{H}$$

nous permettent de déduire, si $\mu = \text{cte}$:

$$\Delta \overset{\circ}{\phi} = -\frac{C_m}{\mu} \overset{\circ}{q}.$$

Calculons maintenant l'*énergie magnétostatique* d'un système contenant des courants stationnaires et des aimants permanents idéaux. Nous savons que

$$\delta u = \frac{1}{C_m} (\vec{H}, \delta \vec{B}),$$

alors

$$u = \frac{1}{C_m} \int_{\vec{H}=\vec{0}}^{\vec{B}} (\vec{H}, \delta \vec{B}).$$

Puisque dans un aimant permanent et idéal \vec{M} est indépendant de \vec{H} :

$$\delta \vec{B} = \delta \vec{B}_0$$

donc :

$$u = \frac{1}{C_{m\mu}} \int_0^{\vec{B}_0} (\vec{B}_0, d\vec{B}_0),$$

où la limite inférieure d'intégration $\vec{H} = 0$, qui est équivalente à $\vec{B}_0 = 0$, est destinée à fixer la constante d'intégration. Alors en faisant $\delta \rightarrow d$, on a

$$u = \frac{1}{C_{m\mu}} \int_0^{\vec{B}_0} (\vec{B}_0, d\vec{B}_0) = \frac{1}{2C_{m\mu}} |\vec{B}_0|^2.$$

Donc :

$$u^{(m.)}[\vec{x}, \vec{B}_0(\vec{x})] = \frac{1}{2C_{m\mu}(\vec{x})} |\vec{B}_0(\vec{x})|^2, \tag{3.9.5}$$

ce qui suppose implicitement la réversibilité.

Nous voyons apparaître l'analogie parfaite entre la magnétostatique (sans courants stationnaires) et l'électrostatique linéaires :

Electrostatique	Magnétostatique
<p>On a les équations</p> $\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= C_e q \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= \vec{0} \\ \vec{E} &= -\overleftarrow{\operatorname{grad}} \phi \\ u[\vec{x}, \vec{D}] &= \frac{1}{2} \frac{1}{C_e} \vec{D} ^2, \end{aligned}$ <p>et, si $\epsilon = \text{cte}$, alors</p> $\overleftarrow{E}(\vec{a}) = \frac{C_e}{4\pi} \int \frac{(dVq)(\vec{x})}{ \vec{a} - \vec{x} ^2} [\vec{a} - \vec{x}]$ <p>et</p> $\overleftarrow{E}(\vec{a}) d^3Q(\vec{a}) = d^3 \overleftarrow{K}^{(es.)}(\vec{a}).$	<p>On a les équations</p> $\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B}_0 &= C_m \dot{q} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{0} \\ \vec{H} &= -\operatorname{grad} \phi \\ u[\vec{x}, B_0] &= \frac{1}{2} \frac{1}{C_{m\mu}} \vec{B}_0 ^2, \end{aligned}$ <p>et, si $\mu = \text{cte}$, alors</p> $\vec{H}(\vec{a}) = \frac{C_m}{4\pi} \int \frac{(dV\dot{q})(\vec{x})}{ \vec{a} - \vec{x} ^2} [\vec{a} - \vec{x}]$ <p>et</p> $\vec{H} d\dot{Q}(\vec{a}) = d^3 \overleftarrow{K}^{(m.)}(\vec{a}).$

Ecrivons encore la loi de force entre deux éléments de « charges magnétiques ». L'analogie nous permet immédiatement de poser

$$d^6 \overleftarrow{K}_{\text{sur } \vec{x}}^{(m.)} = \frac{C_m}{4\pi} \frac{d^3 \dot{Q}(\vec{x}) d^3 \dot{Q}(\vec{a})}{|\vec{a} - \vec{x}|^2} [\vec{x} - \vec{a}]. \tag{3.9.6}$$

C'est la *loi de Coulomb magnétostatique*. Comme il est impossible d'isoler deux charges magnétiques, cette loi n'est pas vérifiable. Par contre, macroscopiquement, elle se vérifie facilement :

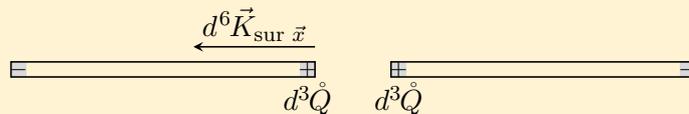


Fig. 3.9.2

Spectre.

a) Spectre de $\vec{B}_0(\vec{x})$.

Nous avons

$$\operatorname{div} \vec{B}_0 = C_m \dot{q}.$$

Une ligne de force de $\vec{B}_0(\vec{x})$ sera dirigée d'une charge $+\dot{Q}$ vers une charge $-\dot{Q}$.

Par contre, puisque

$$\operatorname{div} \vec{M} = -\dot{q},$$

une ligne de force de \vec{M} est dirigée en sens inverse (elle n'existe d'ailleurs qu'à l'intérieur de l'aimant).

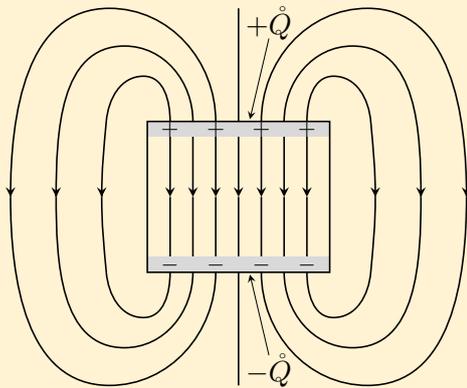


Fig. 3.9.3 Spectre de $\vec{B}_0 = \mu \vec{H}$.

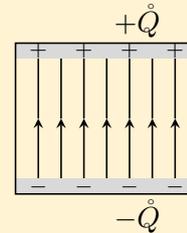


Fig. 3.9.4 Spectre de \vec{M} .

b) Spectre de $\vec{B}(\vec{x})$.

Nous avons

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0,$$

et donc une ligne de force de \vec{B} est donc fermée sur elle-même.

A l'extérieur de l'aimant $\vec{B} = \vec{B}_0$, les deux lignes de forces sont donc confondues. Par contre à l'intérieur de l'aimant \vec{B} est distinct de \vec{B}_0 . Dans notre exemple, où $\vec{B} \parallel \vec{M}$, \vec{B}_0 est dirigé en sens inverse de \vec{B} .

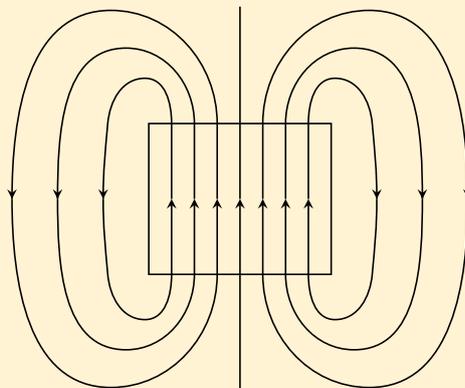


Fig. 3.9.5 Spectre de \vec{B} .

3.10 Forces entre aimants et courants

Considérons un système contenant des aimants et des courants stationnaires, pour lequel l'hypothèse du paragraphe précédent :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + C_m \vec{M} = \vec{B}_0 + C_m \vec{M}$$

est encore valable. La densité d'énergie est donc toujours donnée par

$$u^{(m.)}[\vec{x}, \vec{B}_0] = \frac{1}{2C_m \mu(\vec{x})} |\vec{B}_0|^2$$

et donc l'énergie totale est

$$U^{(m.)} = \int_V (dV u^{(m.)})(\vec{x}).$$

Le premier principe de la thermodynamique, $\delta U^{(m.)} = \delta \mathcal{A}^{(inc.geom.)} + \delta \mathcal{A}^{(inc.ind.)}$, va nous permettre de déduire les différentes forces qui s'exercent dans ce système.

Nous avons d'une part

$$\begin{aligned} \delta U^{(m.)} &= \delta \int_{V_\infty} dV(\vec{x}) \frac{1}{2C_m \mu(\vec{x})} |\vec{B}_0|^2 \\ &= \frac{1}{2C_m} \int_{V_\infty} dV(\vec{x}) \left[\delta \left(\frac{1}{\mu} \right) |\vec{B}_0|^2 + \frac{2}{\mu} (\vec{B}_0, \delta \vec{B}_0) \right]. \end{aligned}$$

Si nous supposons un déplacement rigide, nous avons

$$\delta \mu(\vec{x}) = (-\overleftarrow{\text{grad}} \mu(\vec{x}), \delta \vec{r}), \quad \text{donc} \quad \delta \left(\frac{1}{\mu} \right) = + \frac{1}{\mu^2} (\overleftarrow{\text{grad}} \mu, \delta \vec{r}).$$

D'autre part, puisque $|\vec{B}_0|^2 = \mu^2 |\vec{H}|^2$, il vient

$$\delta U^{(m.)} = \int_{V_\infty} dV(\vec{x}) \left[\frac{|\vec{H}|^2}{2C_m} (\overleftarrow{\text{grad}} \mu, \delta \vec{r}) + \frac{1}{C_m} (\vec{H}, \delta \vec{B} - C_m \delta \vec{M}) \right](\vec{x}).$$

Le premier terme correspond au travail des forces tenant en équilibre les corps dia- ou paramagnétique

$$-d^3 \overleftarrow{K}^{(geom.)}(\vec{x}) = +d^3 \overleftarrow{K}_{\text{dia. para.}}^{(m.)}(\vec{x}) = -\frac{1}{2C_m} (dV \overleftarrow{\text{grad}} \mu |\vec{H}|^2)(\vec{x}). \quad (3.10.1)$$

EXEMPLE

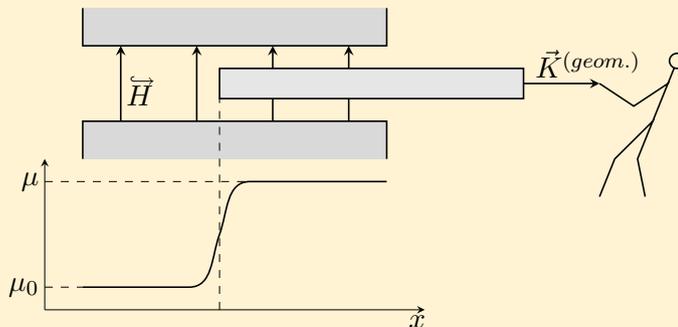


Fig. 3.10.1 Exemple où $\mu > \mu_0$: paramagnétisme.

Les corps paramagnétiques sont attirés dans le champ,.

Les corps diamagnétiques sont repoussés hors du champ..

Le deuxième terme de $\underline{\delta U}^{(m.)}$

$$\int_{V_\infty} dV \frac{1}{C_m} (\vec{H}, \delta \vec{B}) = \int_{V_\infty} dV \frac{1}{C_m} \delta(\vec{H}, \vec{B}) - \int_{V_\infty} dV \frac{1}{C_m} (\vec{B}, \delta \vec{B})$$

représente ainsi que nous l'avons vu à la section 3.8 le travail des forces tenant en équilibre les courants plus le travail d'induction, soit

$$-d^3 \overleftarrow{K}^{(geom.)}(\vec{x}) = d^3 \overleftarrow{K}_{dV\vec{j}}^{(m.)}(\vec{x}) = \frac{C_j}{C_m} [dV \vec{j} \wedge \vec{B}](\vec{x}),$$

terme auquel s'ajoute

$$\delta \mathcal{A}^{(inc.ind.)} = \frac{1}{C_m} \int_{V_\infty} dV \left((\vec{H}, \delta \vec{B}) + (\vec{B}, \delta \vec{H}) \right)(\vec{x}) = \frac{C_j}{C_m} \int_J dJ \underline{\delta \Psi}_{dJ}.$$

Reste le troisième terme

$$\int_{V_\infty} dV \frac{1}{C_m} (\vec{H}, -C_m \delta \vec{M}).$$

Calculons la variation $\delta \vec{M}(\vec{x})$ lors du même déplacement rigide $\delta \vec{r}$. Par analogie avec ce que nous avons fait pour $\delta \vec{j}(\vec{x})$, nous pouvons immédiatement écrire :

$$\delta \vec{M}(\vec{x}) = (\overrightarrow{\text{rot}}[\delta \vec{r} \wedge \vec{M}] - (\delta \vec{r}, \text{div} \vec{M}))(\vec{x}).$$

Alors

$$\begin{aligned} - \int_{V_\infty} dV (\vec{H}, \delta \vec{M}) &= - \int_{V_\infty} dV (\vec{H}, \overrightarrow{\text{rot}} \delta \vec{r} \wedge \vec{M}) + \int_{V_\infty} dV (\vec{H}, \delta \vec{r} \text{div} \vec{M}) \\ &= - \int_{V_\infty} dV (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H}, [\delta \vec{r} \wedge \vec{M}]) - \int_{V_\infty} dV (\vec{H} \hat{q}, \delta \vec{r}) \\ &= - \int_{V_\infty} dV \frac{C_j}{C_m} (\vec{j}, [\delta \vec{r} \wedge C_m \vec{M}]) - \int_{V_\infty} dV (\vec{H} \hat{q}, \delta \vec{r}) \\ &= - \int_{V_\infty} dV \frac{C_j}{C_m} (\delta \vec{r}, [C_m \vec{M} \wedge \vec{j}]) - \int_{V_\infty} dV (\vec{H} \hat{q}, \delta \vec{r}) \end{aligned}$$

Le second terme représente le travail des forces tenant en équilibre les aimants.

$$-d^3 \overleftarrow{K}^{(geom.)}(\vec{x}) = +d^3 \overleftarrow{K}_{\text{aimant}}^{(m.)}(\vec{x}) = (d^3 \hat{Q} \vec{H})(\vec{x}). \quad (3.10.2)$$

Quant au premier terme, il représente le travail des forces tenant en équilibre les courants situés dans les aimants, forces qui compensent les forces créées par l'aimantation \vec{M} .

Par conséquent, la force totale s'exerçant sur les courants sera :

$$d^3 \overleftarrow{K}_{dV\vec{j}}^{(m.)} \text{total}(\vec{x}) = \frac{C_j}{C_m} [dV \vec{j} \wedge \underbrace{(\vec{B} - C_m \vec{M})}_{B_0}](\vec{x})$$

et donc :

$$-d^3\overleftarrow{K}^{(geom)}(\vec{x}) = +d^3\overleftarrow{K}_{dV\vec{j}\text{ total}}^{(m.)}(\vec{x}) = \frac{C_j}{C_m}[dV\vec{j} \wedge \vec{B}_0](\vec{x}). \quad (3.10.3)$$

Par conséquent, si nous faisons passer un courant à travers un tube constitué par un aimant permanent, ce tube ne subit aucune force en l'absence de champ dû à des causes extérieures. Sur les courants, n'agit que \vec{B}_0 et non \vec{B} .

La loi de force totale va donc s'écrire

$$d^3\overleftarrow{K}^{(m.)}(\vec{x}) = \left(-dV \overleftarrow{\text{grad}} \mu \frac{|\vec{H}|^2}{2C_m} + d^3\overset{\circ}{Q}\vec{H} + \frac{C_j}{C_m}[dV\vec{j} \wedge \vec{B}_0] \right)(\vec{x}). \quad (3.10.4)$$

3.11 Tenseur de Maxwell

Ainsi que nous l'avons fait en électrostatique à la section 1.8, cherchons à construire un tenseur $\tau_k^{i(m.)}$, tel que la force totale $K_i^{(m.)}$ s'exerce sur le système contenu dans un volume V puisse s'écrire :

$$K_i^{(m.)} = \oint_V (d\sigma_k \tau_i^{k(m.)})(\vec{y}) = \int_V (dV \partial_k \tau_i^{k(m.)})(\vec{x}).$$

A) *En termes de vecteurs axiaux*

$$\vec{B}_0 = \{\dot{B}_0^i\} \quad \text{et} \quad \vec{H} = \{\dot{H}_i\}$$

Nous prétendons que ce tenseur est

$$\tau_k^{i(m.)} = \frac{1}{C_m} \dot{B}_0^i \dot{H}_k - \delta_k^i \ell[\vec{x}, \vec{H}]. \quad (3.11.1)$$

Vérifions que cette définition nous permet de retrouver l'expression des forces magnétostatiques. Nous supposons *l'approximation linéaire* :

$$\ell[\vec{x}, \vec{H}] = \frac{1}{2C_m} \mu(\vec{x}) |\vec{H}|^2.$$

Par conséquent, en se souvenant que $\dot{B}_0^i = \mu \dot{H}^i$,

$$\partial_i \tau_k^{i(m.)} = \frac{1}{C_m} (\partial_i \dot{B}_0^i) \dot{H}_k + \frac{1}{C_m} \dot{B}_0^i (\partial_i \dot{H}_k - \partial_k \dot{H}_i) - \partial_k \mu \frac{|\vec{H}|^2}{2C_m}.$$

Avec $\partial_i \dot{B}_0^i = \text{div } \vec{B}_0 = C_m \overset{\circ}{q}$ le premier terme devient $\overset{\circ}{q} \dot{H}_k$. Le deuxième terme s'écrit

$$\dot{B}_0^i (\partial_i \dot{H}_k - \partial_k \dot{H}_i) = (\text{s.s.}) \left(\dot{B}_0^i (\partial_i \dot{H}_k - \partial_k \dot{H}_i) + 0 + \dot{B}_0^\ell (\partial_\ell \dot{H}_k - \partial_k \dot{H}_\ell) \right)$$

où la notation (s.s.) signifie « sans sommation » (aucun indice n'est muet ! $ik\ell$ désigne une permutation cyclique des indices 123). Ce deuxième terme devient, grâce à $\partial_i \dot{H}_k - \partial_k \dot{H}_i = (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H})^\ell = C_j j^\ell$,

$$\dot{B}_0^i (\partial_i \dot{H}_k - \partial_k \dot{H}_i) = \dot{B}_0^i C_j j^\ell - \dot{B}_0^\ell C_j j^i = -[\vec{B} \wedge \vec{j}]_k.$$

Par conséquent la force s'écrira

$$d^3 K_k^{(m.)} = dV \partial_i \tau_k^{i(m.)} = dV \dot{q} \dot{H}_k + \frac{C_j}{C_m} [dV \vec{j} \wedge \vec{B}_0]_k - dV \partial_k \mu \frac{|\vec{H}|^2}{2C_m}.$$

Si nous l'écrivons sous forme vectorielle, nous retrouvons bien le résultat du paragraphe précédent

$$d^3 \overleftarrow{K}^{(m.)} = d^3 \dot{Q} \vec{H} + \frac{C_j}{C_m} [dV \vec{j} \wedge \vec{B}_0] - dV \overleftarrow{\text{grad}} \mu \frac{|\vec{H}|^2}{2C_m}.$$

B) En termes de tenseurs

$$\vec{B}_0 : \{B_{0[ik]}\} \quad \text{et} \quad \vec{H} : \{H^{[ik]}\}.$$

Le tenseur de Maxwell magnétostatique s'écrira alors

$$\tau_k^{i(m.)} = \frac{1}{C_m} H^{i\ell} B_{0\ell k} + \delta_k^i u[\vec{x}, \vec{B}_{0[.]}]. \quad (3.11.2)$$

Comme précédemment, nous allons vérifier cette expression en calculant $\partial_i \tau_k^{i(m.)}$. Comme $u[\dots]$ est la densité d'énergie, nous avons :

$$\delta u[\vec{x}, \vec{B}_0] = \frac{1}{C_m} (\vec{H}, \delta \vec{B}_0) + \delta u[\vec{x}, \vec{B}_0].$$

Dans l'approximation linéaire

$$u[\vec{x}, \vec{B}_0] = \frac{1}{2C_m} \frac{1}{\mu(\vec{x})} |\vec{B}_0|^2 \implies \delta u[\vec{x}, \vec{B}_0] = \delta \left(\frac{1}{\mu} \right) \frac{|\vec{B}_0|^2}{2C_m}.$$

Cherchons à exprimer δu sous forme tensorielle. Nous savons que

$$(\vec{H}, \delta \vec{B}_0) = \dot{H}_i \delta \dot{B}_0^i, \quad \dot{H}_i = \frac{1}{2!} \epsilon_{ik\ell} H^{k\ell} \quad \text{et} \quad \dot{B}_0^i = \frac{1}{2!} \epsilon^{ik\ell} B_{0k\ell},$$

donc

$$\begin{aligned} \dot{H}_i \delta \dot{B}_0^i &= \frac{1}{2!} \frac{1}{2!} \epsilon_{ik\ell} \epsilon^{imn} H^{k\ell} \delta B_{0mn} \\ &= \frac{1}{4} (H^{k\ell} \delta B_{0k\ell} - H^{\ell k} \delta B_{0\ell k}) = \frac{1}{2} H^{k\ell} \delta B_{0k\ell}. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\delta u[\vec{x}, \vec{B}_0] = \frac{1}{C_m} \frac{1}{2} H^{k\ell} \delta B_{0k\ell} + \delta \left(\frac{1}{\mu} \right) \frac{|\vec{B}_0|^2}{2C_m},$$

où nous pourrions écrire : $|\vec{B}_0|^2 = B_0^i B_{0i} = (1/2) B_0^{k\ell} B_{0k\ell} = (1/2) B^2$.

Il est désormais possible de calculer $\partial_i \tau_k^{i(m.)}$. Nous avons

$$\partial_i \tau_k^{i(m.)} = \frac{1}{C_m} (\partial_i H^{i\ell}) B_{0\ell k} + \frac{1}{C_m} H^{i\ell} \partial_i B_{0\ell k} + \delta_k^i \partial_k u,$$

mais

$$\partial_k u = \frac{1}{C_m} \frac{1}{2} H^{k\ell} \partial_k B_{0k\ell} + \partial_k \left(\frac{1}{\mu} \right) \frac{|\vec{B}_0|^2}{2C_m},$$

donc

$$\partial_i \tau_k^{i(m.)} = \frac{1}{C_m} (\partial_i H^{i\ell}) B_{0\ell k} + \frac{1}{C_m} H^{i\ell} (\partial_i B_{0\ell k} + \frac{1}{2} \partial_k B_{0i\ell}) - \frac{1}{\mu^2} \partial_k \mu \frac{|\vec{B}_0|^2}{2C_m}.$$

Transformons le premier terme du second membre. Nous savons que : $\vec{\text{rot}} \vec{H} = C_j \vec{j}$ et que

$$\begin{aligned} (\vec{\text{rot}} \vec{H})_{ik} &= (\partial_i H_k - \partial_k H_i) = \text{s.s.} \left(\partial_i H^{li} - \partial_k H^{ki} \right) \\ &= (\text{s.s.}) \left(-\partial_i H^{i\ell} - \partial_k H^{k\ell} \right) = -\partial_i H^{i\ell}, \end{aligned}$$

d'où $\partial_i H^{i\ell} = -C_j j^\ell$; en outre

$$\begin{aligned} -C_j j^\ell B_{0\ell k} &= \text{s.s.} C_j (-j^i B_{0ik} - 0 - j^\ell B_{0\ell k}) \\ &= C_j (-j^i \hat{B}_0^\ell + j^\ell \hat{B}_0^i) = C_j [\vec{j} \wedge \vec{B}_0]_k, \end{aligned}$$

d'où enfin

$$\frac{1}{C_m} (\partial_i H^{i\ell}) B_{0\ell k} = \frac{C_j}{C_m} [\vec{j} \wedge \vec{B}_0]_k.$$

Cherchons également à transformer le deuxième terme. Nous avons

$$H^{i\ell} \partial_i B_{0\ell k} = H^{i\ell} \frac{1}{2} (\partial_i B_{0\ell k} - \partial_\ell B_{0ik}),$$

donc

$$\frac{1}{C_m} H^{i\ell} (\partial_i B_{0\ell k} + \frac{1}{2} \partial_k B_{0i\ell}) = \frac{1}{C_m} H^{i\ell} \frac{1}{2} (\partial_i B_{0\ell k} + \partial_k B_{0i\ell} + \partial_\ell B_{0ki}).$$

Mais

$$\text{div} \vec{B}_0 = \partial_1 \hat{B}_0^1 + \partial_2 \hat{B}_0^2 + \partial_3 \hat{B}_0^3 = \partial_1 B_{023} + \partial_2 B_{031} + \partial_3 B_{012} = \widetilde{ik\ell} \partial_i B_{0k\ell},$$

où $\widetilde{ik\ell}$ désigne une sommation avec permutations circulaires ; puisque $\text{div} \vec{B}_0 = C_m \hat{q}$, on a

$$\widetilde{ik\ell} \partial_i B_{0k\ell} = C_m q_{[ik\ell]} \quad (= C_m \hat{q}).$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2C_m} H^{il} (\vec{\tilde{i}k\ell} \partial_i B_{0\ell k} + \frac{1}{2} \partial_k B_{0il}) &= \frac{1}{2C_m} H^{il} (ik\ell \partial_i B_{0kl}) \\ &= \frac{1}{2C_m} H^{il} C_m q_{ilk} = \frac{1}{2} H^{il} q_{ilk} \\ &= \frac{1}{2} (\text{s.s.}) (H^{il} q_{ilk} + H^{li} q_{lik}) = \frac{1}{2} \text{s.s.} (\dot{H}_k \dot{q} + \dot{H}_k \dot{q}), \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{1}{C_m} H^{il} (\partial_i B_{0\ell k} + \frac{1}{2} \partial_k B_{0il}) = \dot{H}_k \dot{q}.$$

Quant au troisième terme, il peut s'écrire puisque : $\partial_k \mu = \overleftarrow{(\text{grad} \mu)}_k$ et $\vec{B}_0 = \mu \vec{H}$,

$$-\frac{1}{\mu^2} \partial_k \mu \frac{|\vec{B}_0|^2}{2C_m} = -\overleftarrow{(\text{grad} \mu)}_k \frac{|\vec{H}|^2}{2C_m}.$$

Par conséquent :

$$d^3 K_k^{(m.)} = dV \partial_i \tau_k^{i(m.)} = dV \dot{q} \dot{H}_k + \frac{C_j}{C_m} [dV \vec{j} \wedge \vec{B}_0]_k - dV \overleftarrow{(\text{grad} \mu)}_k \frac{|\vec{H}|^2}{2C_m},$$

ou, en conservant la *forme tensorielle*,

$$d^3 K_k^{(m.)} = dV \partial_i \tau_k^{i(m.)} = dV \left(H^{il} q_{ilk} - \frac{C_j}{C_m} j^\ell B_{0\ell k} - \partial_k \mu \frac{|\vec{H}|^2}{2C_m} \right),$$

Les expressions en notations axiales et celles en notations tensorielles sont donc équivalentes ; cependant les expressions sous forme tensorielle sont plus générales car elles ne sont pas uniquement valables dans un espace euclidien cartésien à trois dimensions.

Remarque.

Il est souvent commode, particulièrement en relativité, d'exprimer la divergence du tenseur de Maxwell uniquement à l'aide des champs (sans introduire le courant ou la charge magnétique). On a alors

$$\partial_i \tau_k^{i(m.)} = \frac{1}{C_m} (\text{div} \vec{B}_0) \dot{H}_k + \frac{1}{C_m} [\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} \wedge \vec{B}_0]_k - \overleftarrow{(\text{grad} \mu)}_k \frac{|\vec{H}|^2}{2C_m},$$

et de même pour le tenseur de Maxwell de l'électrostatique (cf. sect. 1.8)

$$\partial_i \tau_k^{i(es.)} = \frac{1}{C_e} (\text{div} \vec{D}) E_k + \frac{1}{C_e} [\overleftarrow{\text{rot}} \vec{E} \wedge \vec{D}]_k - \overleftarrow{(\text{grad} \epsilon)}_k \frac{|\vec{E}|^2}{2C_e}.$$

3.12 Coefficients d'induction

Cette section est l'analogie de la section 2.11 de l'électrostatique, concernant les coefficients d'influence.

Considérons un système contenant des tubes de courants fermés et calculons son énergie non plus comme fonctionnelle de $\vec{B} : U[\vec{B}(\cdot)]$ mais comme fonctionnelle de $\vec{j} : U[\vec{j}(\cdot)]$. Ce calcul se réalise facilement dans le cas linéaire en utilisant le potentiel-vecteur \overleftarrow{A} . Nous avons $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \overleftarrow{A}$; donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} &= \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \overleftarrow{A} \\ &= \frac{1}{\mu} (-\Delta + \overrightarrow{\text{grad}} \text{div}) \overleftarrow{A} = C_j \vec{j}. \end{aligned}$$

Remarque.

Comme $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} \Lambda = \vec{0}$ et $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \overleftarrow{A}$ (définition de \overleftarrow{A}), alors le potentiel-vecteur n'est défini qu'à un gradient près

$$\overleftarrow{A} \rightarrow \overleftarrow{A}' + \overrightarrow{\text{grad}} \Lambda.$$

Cette expression constitue une *transformation de jauge*.

Choisissons pour notre problème une jauge particulière telle que :

$$\text{div} \overleftarrow{A}(\vec{x}) = 0.$$

Alors

$$\Delta \overleftarrow{A}(\vec{x}) = -C_j \mu \vec{j}(\vec{x}), \quad (3.12.1)$$

équation qui est l'analogie de l'équation de Poisson de l'électrostatique : $\Delta \phi(\vec{x}) = -(C_e/\epsilon)q(\vec{x})$. Nous savons que la solution générale de cette équation qui s'évanouit à l'infini est :

$$\overleftarrow{A}(\vec{a}) = \frac{C_j \mu}{4\pi} \int_V \frac{(dV \vec{j})(\vec{x})}{|\vec{a} - \vec{x}|}. \quad (3.12.2)$$

Vérifions que cette solution respecte la condition $\text{div} \overleftarrow{A}(\vec{x}) = 0$:

$$\begin{aligned} \text{div}_a \overleftarrow{A} &= \frac{C_j \mu}{4\pi} \int_V \left((dV \vec{j})(\vec{x}), \overrightarrow{\text{grad}}_a \frac{1}{|\vec{a} - \vec{x}|} \right) \\ &= \frac{C_j \mu}{4\pi} \int_V \left((dV \vec{j})(\vec{x}), -\overrightarrow{\text{grad}}_x \frac{1}{|\vec{a} - \vec{x}|} \right). \end{aligned}$$

Puisque les courants sont fermés et que, par conséquent, aucun ne coupe la surface extérieure de V , nous pouvons intégrer par partie et obtenir :

$$\operatorname{div}_a \vec{A}(\vec{a}) = \frac{C_j \mu}{4\pi} \int_V (dV \underbrace{\operatorname{div} \vec{j}}_{=0})(\vec{x}) \frac{1}{|\vec{a} - \vec{x}|} = 0.$$

Nous pouvons alors calculer l'énergie de ce système

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2C_m} \int_V dV (\vec{B}, \vec{H}) = \frac{1}{2C_m} \int_V dV (\operatorname{rot} \vec{A}, \vec{H}) = \frac{1}{2C_m} \int_V dV (\overleftarrow{A}, \overrightarrow{\operatorname{rot} \vec{H}}) \\ &= \frac{C_j}{2C_m} \int_V (dV (\overleftarrow{A}, \vec{j}))(\vec{x}). \end{aligned}$$

Utilisons pour $\vec{A}(\vec{x})$ l'expression trouvée ci-dessus. Nous obtenons alors l'expression cherchée de l'énergie, à savoir

$$U[\vec{j}(\cdot)] = \frac{1}{2} \frac{C_j^2 \mu}{4\pi C_m} \iint \frac{((dV \vec{j})(\vec{x}), (dV \vec{j})(\vec{y}))}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (3.12.3)$$

Lorsque les tubes de courant sont de section constante, cette formule nous permet d'écrire

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} L_{\alpha\beta} J_{\alpha} J_{\beta}, \quad (3.12.4)$$

où, par définition,

- les $L_{\alpha\alpha}$ sont les coefficients de self-induction,
- les $L_{\alpha\beta}$ sont les coefficients d'induction mutuelle.

Ces coefficients étant définis par une forme quadratique en J , seules leurs parties symétriques $L_{(\alpha\beta)}$ interviennent.

La condition de minimum de l'énergie s'écrit

$$\delta^{(2)}U = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} L_{(\alpha\beta)} \delta J_{\alpha} \delta J_{\beta} \geq 0,$$

ce qui implique

$$\{L_{(\alpha\beta)}\} \geq 0.$$

On peut interpréter $U[\vec{j}(\cdot)]$ comme étant l'énergie qu'il a fallu fournir au système matériel pour établir et maintenir les courants qu'il contient.

PROBLÈME

Calculer le coefficient de self-induction L d'un circuit enroulé en toroïde, avec $\sigma \ll \ell^2$.

Pour des raisons de symétries évidente, les composantes du champ \vec{H} seront H_{ℓ} et H_{φ} . Soit J_1 le courant dans le circuit. La loi de production

$$\int_{\tau} (\overrightarrow{ds}, \vec{H}) = C_j J$$

donne pour H_φ :

$$2\pi r H_\varphi = C_j J'.$$

Si les spires sont très serrées, on peut prendre la limite $N \rightarrow \infty$, $J \rightarrow 0$, NJ restant fini. Ainsi le circuit peut être assimilé à une nappe de courant toroïdale et, dans cette limite, $H_\varphi \rightarrow 0$.

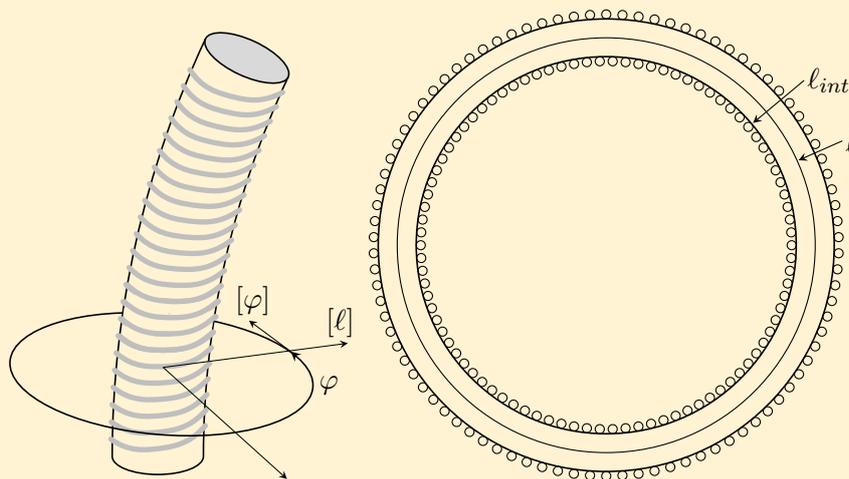


Fig. 3.12.1

Pour H_ℓ la loi de production donne, si ℓ soit à l'intérieur du toroïde,

$$\ell H_\ell = C_j N J \quad (N : \text{nombre de spires}),$$

Sinon la surface τ coupe soit aucune spire, soit deux fois la même spire et dans les deux cas le courant la traversant est nul. Alors :

$$H_{\ell(int.)} = \frac{NC_j J}{\ell_{(int.)}}.$$

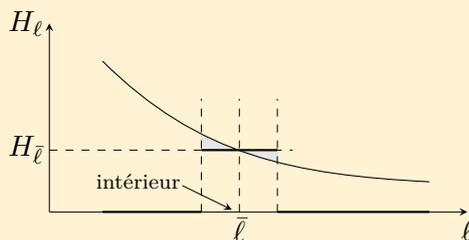


Fig. 3.12.2

Sous ces hypothèses ($\sigma \ll \ell^2$, N grand), on peut affirmer que \vec{H} est nul partout sauf à l'intérieur du toroïde.

Calculons l'énergie; nous avons

$$U = \frac{1}{2} \frac{\mu}{C_m} \int dV |\vec{H}|^2.$$

Sans introduire d'erreur importante, il est possible de supposer que H_ℓ est constant dans tout le toroïde et vaut

$$\bar{H}_\ell = \frac{NC_j J}{\bar{\ell}},$$

où $\bar{\ell}$ est la : circonférence moyenne. L'expression de l'énergie devient

$$U = \frac{1}{2} \frac{\mu}{C_m} \sigma \bar{\ell} \frac{N^2 C_j^2 J^2}{\bar{\ell}^2},$$

et, en introduisant le coefficient de self-induction

$$U = \frac{1}{2} L J^2,$$

on trouve par identification :

$$L = \frac{C_j^2 \mu_{int} \sigma}{C_m \bar{\ell}} N^2.$$

Electrodynamique

Présentation

On commence par donner l'équation de continuité pour la densité d'énergie électromagnétique dont les causes sont le vecteur de Poynting et la densité de puissance ; on suppose que les milieux restent au repos (section 1). La section 2 expose les équations de Maxwell. Nous réduisons ensuite les constantes de l'électromagnétisme et on en déduit l'équation de continuité pour la charge et l'expression de la densité de puissance à la section 3. Les deux équations d'onde dans l'approximation linéaire sont ensuite données avec comme solutions particulières les ondes planes (section 4). La quantité de mouvement électromagnétique est ensuite exposée ainsi que sa relation avec le vecteur de Poynting à la section 5. Les systèmes d'unités sont alors discutés à la section 6. La relativité restreinte dans son formalisme quadridimensionnel, le tenseur de Maxwell et la force de Lorentz sont ensuite exposés à la section 7. La loi d'Ohm pour un conducteur au repos est alors déduite du premier principe de la thermodynamique puis la loi de Kirchhoff est donnée ce qui permet d'introduire la force électromotrice (sections 8 et 9). Le circuit oscillant est alors exposé à la section 10. Les formules pour les champs retardés et avancés sont ensuite données (section 11) et les expressions du rayonnement dipolaire électrique et magnétique sont alors finalement déduites aux sections 12 et 13.

4.1 Equation de continuité

L'électromagnétisme ou électrodynamique réunit la description des phénomènes de déséquilibre électrique et de leurs relations avec le magnétisme.

Le déséquilibre, impliquant l'évolution, nécessite du temps ; cependant pour ne pas compliquer dès l'abord notre étude, nous admettrons que les milieux restent au repos : par conséquent, les grandeurs les caractérisant seront indépendantes du temps

$$\epsilon = \epsilon(\vec{x}) \quad \text{et} \quad \mu = \mu(\vec{x})$$

(ϵ et μ ne dépendent pas du temps).

Nous allons considérer un système électromagnétique $\Sigma_C^{(em.)}$, limité par la surface fermée $C(\vec{y}) = 0$. Essayons de définir pour ce système une densité d'énergie électromagnétique $u^{(em.)}$.

Comme nous ne désirons pas introduire de nouvelles grandeurs physiques, nous pouvons poser par généralisation

$$u^{(em.)} = u[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x}, t), \vec{B}(\vec{x}, t)]. \quad (4.1.1)$$

où $u^{(em.)}$ ne dépend pas explicitement de t puisque les milieux sont supposés être au repos. Sous ces hypothèses, l'énergie électromagnétique du système sera

$$U^{(em.)}(t) = \int_{C(\vec{y})=0} dV(\vec{x}) u^{(em.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x}, t), \vec{B}(\vec{x}, t)].$$

Appliquons à ce système le premier principe de la thermodynamique qui, nous le savons, s'exprime par un bilan et traduit l'évolution des grandeurs extensives du système. Puisque les milieux sont au repos, la fluxion de $U^{(em.)}(t)$ s'écrit simplement

$$\dot{U}^{(em.)} = \frac{d}{dt} U^{(em.)} = \int_{C(\vec{y})=0} dV(\vec{x}) \partial_t u^{(em.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x}, t), \vec{B}(\vec{x}, t)].$$

En toute généralité, les *causes* de cette fluxion sont de deux sortes :

- 1) existence d'un courant conductif (afflux à travers la surface $C(\vec{y}) = 0$) : $-\vec{S}(\vec{x}, t)$,
- 2) existence d'une densité de sources internes : $p^{(int.)}(\vec{x}, t)$.

Le bilan s'écrit donc :

$$\dot{U}^{(em.)} = \oint_{C(\vec{y})=0} (\overleftarrow{d\sigma}, -\vec{S})(\vec{y}, t) + \int_{C(\vec{y})=0} dV(\vec{x}) p^{(int.)}(\vec{x}, t).$$

On définit :

- $\vec{S}(\vec{x}, t)$: vecteur de Poynting (densité de courant d'énergie).
- $p(\vec{x}, t)$: densité de puissance.

En remplaçant dans le bilan $\dot{U}^{(em.)}$ par son expression, nous obtenons

$$\int_{C(\vec{y})=0} dV(\vec{x}) \partial_t u^{(em.)}[\dots] = - \oint_{C(\vec{y})=0} (\overleftarrow{d\sigma}, \vec{S})(\vec{y}, t) + \int_{C(\vec{y})=0} (dV p^{(int.)})(\vec{x}, t).$$

En appliquant le théorème de Gauss sur l'intégrale de surface, nous obtenons

$$\int_{C(\vec{y})=0} dV(\vec{x}) \left[\partial_t u^{(em.)}[\dots] + \text{div } \vec{S}(\vec{x}, t) \right] = \int_{C(\vec{y})=0} dV(\vec{x}) p^{(int.)}(\vec{x}, t).$$

Comme nous n'avons fait aucune hypothèse sur le volume limité par $C(\vec{y}) = 0$, cette égalité doit être valable sous le signe intégrale. On obtient alors l'équation de continuité inhomogène pour la densité d'énergie électromagnétique :

$$(\partial_t u^{(em.)} + \text{div } \vec{S})(\vec{x}, t) = p^{(int.)}(\vec{x}, t). \quad (4.1.2)$$

Nous écrirons souvent pour simplifier l'écriture :

$$u^{(em.)}(\vec{x}, t) \quad \text{pour} \quad u^{(em.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x}, t), \vec{B}(\vec{x}, t)].$$

4.2 Equations de Maxwell

Nous allons chercher à établir les équations de mouvement des variables d'état $\vec{D}(\vec{x}, t)$ et $\vec{B}(\vec{x}, t)$ par déduction de l'équation de continuité de $u^{(em.)}$.

Calculons d'abord $\partial_t u^{(em.)}$. Les milieux étant supposés immobiles, nous avons

$$\underline{\delta}u^{(em.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x}, t), \vec{B}(\vec{x}, t)] = \left(\frac{\partial u^{(em.)}}{\partial D^i} \delta D^i \right) (\vec{x}, t) + \left(\frac{\partial u^{(em.)}}{\partial \overset{\circ}{B}^i} \delta \overset{\circ}{B}^i \right) (\vec{x}, t).$$

Par généralisation, nous posons

$$\frac{\partial u^{(em.)}}{\partial D^i} = \frac{1}{C_e} E_i ; \quad \frac{\partial u^{(em.)}}{\partial \overset{\circ}{B}^i} = \frac{1}{C_m} \overset{\circ}{H}_i .$$

Nous avons alors

$$\underline{\delta}u^{(em.)}[\cdot] = \left(\frac{1}{C_e} (\overleftarrow{E}, \delta \vec{D}) + \frac{1}{C_m} (\overrightarrow{H}, \delta \vec{B}) \right) (\vec{x}, t),$$

d'où :

$$\partial_t u^{(em.)}[\cdot] = \left(\frac{1}{C_e} (\overleftarrow{E}, \partial_t \vec{D}) + \frac{1}{C_m} (\overrightarrow{H}, \partial_t \vec{B}) \right) (\vec{x}, t).$$

L'équation de continuité homogène (en faisant $p^{(int.)} = 0$) de $u^{(em.)}$ s'écrit alors

$$\frac{1}{C_e} (\overleftarrow{E}, \partial_t \vec{D}) + \frac{1}{C_m} (\overrightarrow{H}, \partial_t \vec{B}) (\vec{x}, t) = -\text{div} \vec{S}(\vec{x}, t).$$

Nous allons essayer d'exprimer $\partial_t \vec{D}$ et $\partial_t \vec{B}$ en terme des grandeurs \overleftarrow{E} et \overrightarrow{H} ; dès lors, l'équation ci-dessus ne possède que trois inconnues $\partial_t \vec{D}$, $\partial_t \vec{B}$ et $\text{div} \vec{S}$.

Il est clair que cette équation seule ne nous permet pas d'établir les équations de mouvement cherchées. D'un point de vue purement mathématique, il faut introduire deux nouvelles équations de façon à obtenir un système de trois équations indépendantes. Nous sommes donc dans l'obligation de formuler deux hypothèses.

La première concerne $\text{div} \vec{S}$. Pour évaluer cette grandeur, nous pouvons nous guider d'après la forme de l'équation de continuité ; nous constatons :

- 1) que le membre de gauche représente l'expression d'une divergence.
- 2) que les grandeurs \overleftarrow{E} et \overrightarrow{H} y figurent linéairement, une dans chaque terme.

La seule relation vectorielle satisfaisant ces deux conditions est :

$$\text{div}[\vec{a} \wedge \vec{b}] = (\overrightarrow{b}, \overleftarrow{\text{rot}} \vec{a}) - (\vec{a}, \overleftarrow{\text{rot}} \vec{b}).$$

Ces considérations nous conduisent à poser

$$\text{div} \vec{S}(\vec{x}, t) = C \text{div}[\overleftarrow{E} \wedge \overrightarrow{H}](\vec{x}, t).$$

Sous cette hypothèse, l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{1}{C_e}(\overleftarrow{E}, \partial_t \vec{D}) + \frac{1}{C_m}(\overrightarrow{H}, \partial_t \vec{B}) = -C(\overrightarrow{\text{rot}} \overleftarrow{E}, \overrightarrow{H}) + C(\overleftarrow{E}, \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{H}),$$

donc

$$\left(\overleftarrow{E}, \left(\frac{1}{C_e} \partial_t \vec{D} - C \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{H} \right) \right) + \left(\overrightarrow{H}, \left(\frac{1}{C_m} \partial_t \vec{B} + C \overrightarrow{\text{rot}} \overleftarrow{E} \right) \right) = 0.$$

La seconde hypothèse que nous formulerons concerne l'indépendance des deux variables d'état $\vec{D}(\vec{x}, t)$ et $\vec{B}(\vec{x}, t)$; par suite, l'équation ci-dessus n'est vérifiée que si les coefficients de \overleftarrow{E} et de \overrightarrow{H} sont nuls (condition d'indépendance).

Nous obtenons donc finalement les équations de mouvement déduites de l'équation de continuité de $u^{(em.)}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_m} \partial_t \vec{B} &= -C \overrightarrow{\text{rot}} \overleftarrow{E} \\ \frac{1}{C_e} \partial_t \vec{D} &= C \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{H}. \end{aligned}$$

En introduisant les constantes

$$C_1 = \frac{1}{CC_m} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{1}{CC_e},$$

nous avons

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \overleftarrow{E} &= -C_1 \partial_t \vec{B} \\ \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{H} &= C_2 \partial_t \vec{D} \end{aligned}$$

La thermodynamique nous avait conduit à poser : $C_e > 0$ et $C_m > 0$; par conséquent $C_1/C_2 > 0$, donc C_1 et C_2 ont même signe.

La constante de proportionnalité, introduite dans la définition de $\text{div} \vec{S}$ peut s'écrire :

$$C = \frac{1}{C_1 C_m} = \frac{1}{C_2 C_e}.$$

L'expression du *vecteur de Poynting* s'écrit alors (à un terme de divergence nulle près) :

$$\vec{S}(\vec{x}, t) = C[\overleftarrow{E} \wedge \overrightarrow{H}](\vec{x}, t) = \frac{1}{C_1 C_m} [\overleftarrow{E} \wedge \overrightarrow{H}](\vec{x}, t) = \frac{1}{C_2 C_e} [\overleftarrow{E} \wedge \overrightarrow{H}](\vec{x}, t) \quad (4.2.1)$$

(En toute rigueur : $\vec{S} + \vec{S}_0 = C[\overleftarrow{E} \wedge \overrightarrow{H}]$ avec $\text{div} \vec{S}_0 = 0$.)

Les équations de mouvement doivent encore être vérifiées dans le cas stationnaire; nous trouvons :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \overleftarrow{E} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{H} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

La première équation est bien vérifiée par les lois de l'électrostatique, mais la deuxième équation ne l'est pas par celles de la magnétostatique car nous avons :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overleftarrow{H} = C_j \vec{j}.$$

Nous devons donc modifier les équations de mouvement en posant :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \overleftarrow{E} &= -C_1 \partial_t \overleftarrow{B} \\ \overrightarrow{\text{rot}} \overleftarrow{H} &= C_2 \partial_t \overleftarrow{D} + C_j \vec{j}. \end{aligned}$$

Mais alors nous constatons que l'équation de continuité homogène de $u^{(em.)}$ est incapable de nous fournir des équations de mouvement suffisamment générales.

Sans modifier les hypothèses faites plus haut, formons à posteriori $\text{div} \vec{S}$ à l'aide des équations modifiées

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{S} &= \text{div} \left(\frac{1}{C_1 C_m} [\overleftarrow{E} \wedge H] \right) = \frac{1}{C_1 C_m} (\overrightarrow{\text{rot}} \overleftarrow{E}, \overleftarrow{H}) - \frac{1}{C_2 C_e} (\overrightarrow{\text{rot}} \overleftarrow{H}, \overleftarrow{E}) \\ &= -\frac{1}{C_m} (\partial_t \overleftarrow{B}, \overleftarrow{H}) - \frac{1}{C_e} (\partial_t \overleftarrow{D}, \overleftarrow{E}) - \frac{C_j}{C_2 C_e} (\overleftarrow{E}, \vec{j}) \end{aligned}$$

et l'on obtient :

$$\text{div} \vec{S} = -\partial_t u^{(em.)} - \frac{C_j}{C_2 C_e} (\overleftarrow{E}, \vec{j}).$$

Nous voyons apparaître une équation de continuité inhomogène de $u^{(em.)}$

$$\partial_t u^{(em.)} + \text{div} \vec{S} = p^{(int.)}.$$

Nous posons donc

$$p^{(int.)}(\vec{x}, t) = -\frac{C_j}{C_2 C_e} (\overleftarrow{E}, \vec{j})(\vec{x}, t), \quad (4.2.2)$$

ce qui *postule* bien entendu qu'il n'y a pas d'autre densité de source. Ce postulat nous permet d'affirmer que les équations de mouvement modifiées constituent les *équations générales*. Celles-ci plus celles définissant les variables \overleftarrow{D} et \overleftarrow{B} constituent les *équations de Maxwell* :

Equations homogènes

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \overleftarrow{E} &= -C_1 \partial_t \overleftarrow{B} \\ \text{div} \overleftarrow{B} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Equations inhomogènes

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \overleftarrow{H} &= C_2 \partial_t \overleftarrow{D} + C_j \vec{j} \\ \text{div} \overleftarrow{D} &= C_e q \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Remarque.

Habituellement les équations de Maxwell s'établissent de manière très différentes, mais quelle que soit la méthode utilisée, elles nécessitent au moins autant d'hypothèses. En physique générale, les hypothèses sont issues de résultats expérimentaux.

4.3 Relations entre q et \vec{j}

Nous savons que $\overrightarrow{\text{rot}} = 0$. Alors :

$$\begin{aligned}\text{div } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = 0 &= C_2 \text{div } \partial_t \vec{D} + C_j \text{div } \vec{j} \\ &= C_2 \partial_t \text{div } \vec{D} + C_j \text{div } \vec{j} \\ &= C_2 C_e \partial_t q + C_j \text{div } \vec{j}\end{aligned}$$

et nous avons la relation entre densité de charge et densité de courant

$$C_2 C_e \left(\partial_t q + \frac{C_j}{C_2 C_e} \text{div } \vec{j}_Q \right) = 0.$$

Cette équation de continuité nous permet de définir une densité de courant en termes de charges \vec{j}_Q . Par souci de simplicité, nous posons : $\vec{j}_Q = \vec{j}$, alors

$$C_j = C_2 C_e,$$

et l'équation de continuité du courant, conséquence des équations de Maxwell, s'écrit

$$(\partial_t q + \text{div } \vec{j})(\vec{x}, t) = 0. \quad (4.3.1)$$

Cette équation nous permet de conclure que le courant est constitué de charges en mouvement ; elle exprime aussi la conservation des charges. En effet, nous avons

$$\int_{C(\vec{y})=0} (dV (\partial_t q + \text{div } \vec{j}))(\vec{x}, t) = 0$$

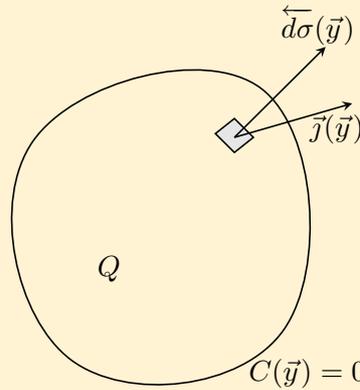


Fig. 4.3.1

et, par le théorème de Gauss puisque $C(\vec{y}) = 0$ est une surface fermée,

$$\int_{C(\vec{y})=0} (dV \partial_t q)(\vec{x}, t) = \dot{Q} = - \oint_{C(\vec{y})=0} (\overleftarrow{d\sigma}, \vec{j})(\vec{y}, t) = 0.$$

Puisque $C_j = C_2 C_e$, l'expression de la densité de puissance devient

$$p^{(int.)}(\vec{x}, t) = -(\overleftarrow{E}, \vec{j})(\vec{x}, t) \leq 0 \text{ si } 0 \leq \text{angle } \langle \vec{j}, \overleftarrow{E} \rangle \leq \frac{\pi}{2}. \quad (4.3.2)$$

Cherchons à interpréter $p^{(int.)}$. L'équation de continuité du courant est équivalente à l'équation différentielle $q\delta\vec{r} - \vec{j}\delta t = 0$ parce que $\partial_t q = -\text{div}\vec{j} = -\partial_{\vec{r}}\vec{j}$ (cf. équations aux dérivées partielles). Alors on a

$$P^{(int.)}(t) = - \int_{C(\vec{y})=0} dV(\vec{x})(\overleftarrow{E}, \vec{j})(\vec{x}, t)$$

et donc

$$P^{(int.)}(t)\delta t = - \int_{C(\vec{y})=0} dV(\vec{x})(\overleftarrow{E}, \vec{j}\delta t)(\vec{x}, t) = - \int_{C(\vec{y})=0} dV(\vec{x})(\overleftarrow{E}, \delta\vec{r}q)(\vec{x}, t).$$

Or nous avons vu au chapitre 1 que

$$\int_{C(\vec{y})=0} dV(\vec{x})(\overleftarrow{E}q, \delta\vec{r})(\vec{x}, t) = -\delta\mathcal{A}^{(inc.)},$$

où $\delta\mathcal{A}^{(inc.)}$ est le *travail des forces extérieures* fourni à $\Sigma_C^{(em.)}$ donc : $P^{(inc.)}\delta t = -\delta\mathcal{A}^{(inc.)}$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \vec{j} \text{ et } \overleftarrow{E} \text{ de même sens : } \Sigma_C^{(em.)} \text{ subit une } \textit{perte d'énergie}, \\ \vec{j} \text{ et } \overleftarrow{E} \text{ de sens opposés : } \Sigma_C^{(em.)} \text{ subit un } \textit{gain d'énergie}. \end{aligned}$$

(Nous reviendrons plus loin sur ces résultats.)

Résumé

Equations de Maxwell. (grâce à la réduction des constantes)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \overleftarrow{E} &= -C_1 \partial_t \overrightarrow{B} \\ \text{div} \overrightarrow{B} &= 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{H} &= C_2 (\partial_t \overrightarrow{D} + C_e \vec{j}) \\ \text{div} \overrightarrow{D} &= C_e q \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

Equations de conservation.

$$\begin{aligned} \partial_t u^{(em.)} + \text{div} \overrightarrow{S} &= -(\overleftarrow{E}, \vec{j}) \quad (\text{énergie}) \\ \partial_t q + \text{div} \vec{j} &= 0 \quad (\text{charge}) \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Relations phénoménologiques. (par généralisations)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{(em.)}[\vec{x}, \overrightarrow{D}(\vec{x}, t), \overrightarrow{B}(\vec{x}, t)]}{\partial D^i(\vec{x}, t)} &= \frac{1}{C_e} E_i(\vec{x}, t) \\ \frac{\partial u^{(em.)}[\vec{x}, \overrightarrow{D}(\vec{x}, t), \overrightarrow{B}(\vec{x}, t)]}{\partial \dot{B}^i(\vec{x}, t)} &= \frac{C_1}{C_2} \frac{1}{C_e} \dot{H}_i(\vec{x}, t) \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Relations de l'électrodynamique linéaire.

$$\begin{aligned}\vec{D}(\vec{x}, t) &= \epsilon(\vec{x})\vec{E}(\vec{x}, t) \\ \vec{B}(\vec{x}, t) &= \mu(\vec{x})\vec{H}(\vec{x})\end{aligned}\quad (4.3.6)$$

Et dans ce cas particulier, la densité d'énergie électromagnétique a la forme

$$u^{(em.)} = u^{(e.)} + u^{(m.)} = \frac{1}{2C_e\epsilon}|\vec{D}|^2 + \frac{C_1}{2C_2C_e\mu}|\vec{B}|^2. \quad (4.3.7)$$

4.4 Les deux équations d'onde

Nous voulons établir les équations d'onde pour \vec{E} et pour \vec{H} , dans l'approximation linéaire et sans nous servir des potentiels. Nous supposons de plus que ϵ et μ ne dépendent pas du temps et de l'espace.

a) En prenant le $\overrightarrow{\text{rot}}$ de la première équation de Maxwell, on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} &= \overrightarrow{\text{grad}}\text{div}\vec{E} - \Delta\vec{E} = -C_1\partial_t\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} \\ &= -C_1\mu\partial_t\overrightarrow{\text{rot}}\vec{H}.\end{aligned}$$

En remplaçant $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{H}$ par sa valeur tirée de la troisième équation de Maxwell, il vient

$$\overrightarrow{\text{grad}}\text{div}\vec{E} - \Delta\vec{E} = -C_1C_2\mu\epsilon\partial_t^2\vec{E} - C_1C_2C_e\mu\partial_t\vec{j}.$$

Comme $\text{div}\vec{E} = (1/\epsilon)C_eq$, nous obtenons l'équation d'onde inhomogène pour $\vec{E}(\vec{x}, t)$:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\epsilon}C_e(\overrightarrow{\text{grad}}q + \frac{1}{c^2}\partial_t\vec{j})(\vec{x}, t) \quad (4.4.1),$$

où $(1/c^2) = C_1C_2\epsilon\mu > 0$, c étant la vitesse de la lumière dans le vide ($\epsilon, \mu = \text{cte}$) ; c 'est la vitesse de propagation de l'onde.

b) Cherchons maintenant l'équation d'onde pour $\vec{H}(\vec{x}, t)$. En prenant le $\overrightarrow{\text{rot}}$ de la troisième équation de Maxwell, on obtient

$$\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{\text{rot}}\vec{H} = \overrightarrow{\text{grad}}\text{div}\vec{H} - \Delta\vec{H} = C_2\epsilon\partial_t\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} + C_2C_e\overrightarrow{\text{rot}}\vec{j}.$$

En remplaçant $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}$ par sa valeur tirée de la première équation de Maxwell, il vient

$$\overrightarrow{\text{grad}}\text{div}\vec{H} - \Delta\vec{H} = -C_1C_2\mu\epsilon\partial_t^2\vec{H} + C_2C_e\overrightarrow{\text{rot}}\vec{j}$$

or : $\text{div}\vec{H} = 0$ et nous obtenons l'équation d'onde inhomogène pour $\vec{H}(\vec{x}, t)$:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\vec{H}(\vec{x}, t) = -C_2C_e\overrightarrow{\text{rot}}\vec{j}(\vec{x}, t). \quad (4.4.2)$$

Les solutions satisfaisant ces deux équations aux dérivées partielles nous fournissent la forme des ondes électrique et magnétique créés par le système $\Sigma_C^{(em.)}$.

Il est commode d'introduire le symbole appelé *d'Alembertien* pour désigner l'opérateur suivant :

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 = \sum_{i=1}^3 \partial_i^2 - \left(\frac{1}{c} \partial_t\right)^2.$$

Cas particulier : équations d'onde dans le vide

Considérons un système électromagnétique $\Sigma_C^{(em.)}$ ne contenant aucune inhomogénéité : $q = 0$; $\vec{j} = \vec{0}$. C'est par exemple le cas du vide.

Dans ce système, les deux équations d'onde se réduisent simplement à :

$$\square \vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \square \vec{H}(\vec{x}, t) = 0.$$

Ces équations peuvent admettre une solution non nulle ; cela signifie qu'un champ électromagnétique peut exister même en l'absence de charges et de courant, il prend alors le nom d'ondes électromagnétiques. Ces équations aux dérivées partielles admettent pour solution particulière les équations des ondes planes. On peut les calculer et obtenir deux équations transversales planes se propageant dans la direction \vec{v} parallèle au vecteur de Poynting et perpendiculaires l'une à l'autre :

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}, t) &= \vec{\pi} f((\vec{v}, \vec{x}) - ct) \\ \vec{H}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{C_1 c \mu} [\vec{v} \wedge \vec{\pi}] f((\vec{v}, \vec{x}) - ct), \end{aligned}$$

où \vec{v} et $\vec{\pi}$ sont des vecteurs unités tels que $(\vec{v}, \vec{\pi}) = 0$. D'autre part, sachant que

$$u^{(el.)} = \frac{\epsilon}{2C_e} |\vec{E}|^2 \quad \text{et} \quad u^{(m.)} = \frac{C_1 \mu}{2C_2 C_e} |\vec{H}|^2,$$

on voit que

$$u^{(em.)} = u^{(el.)} + u^{(m.)} = 2u^{(el.)} \implies u^{(m.)} = u^{(el.)},$$

et

$$\vec{S} = \frac{1}{C_2 C_e} [\vec{E} \wedge \vec{H}] \implies \vec{S}(\vec{x}, t) = \vec{v} c u^{(em.)}(\vec{x}, t).$$

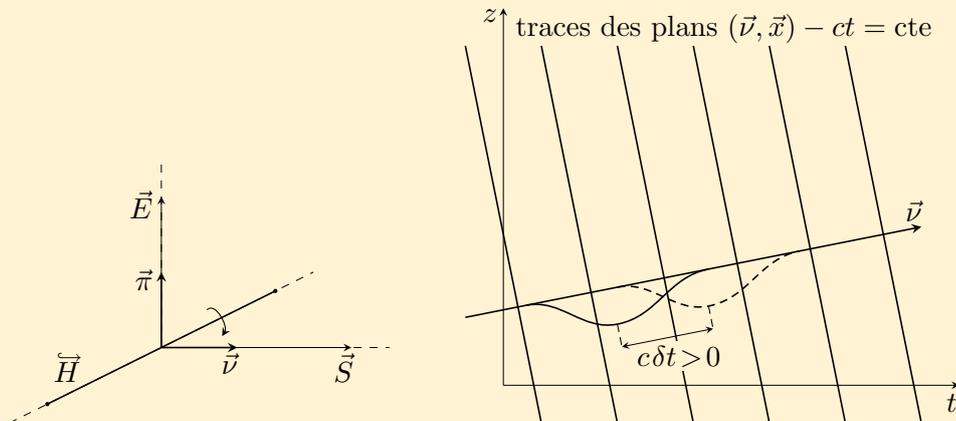


Fig. 4.4.1

4.5 Quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'un système est une fonctionnelle extensive : elle possède donc une densité de quantité de mouvement π_i , telle que :

$$\Pi_i = \Pi_i[C(\cdot), \pi_i(\cdot)] = \int_{C(\vec{y})=0} (dV \pi_i)(\vec{x}, t).$$

Nous allons définir deux sortes de quantités de mouvement.

Quantité de mouvement pour un corps substantiel

Considérons un corps substantiel limité par la surface fermée $C(\vec{y}, t) = 0$ en mouvement.

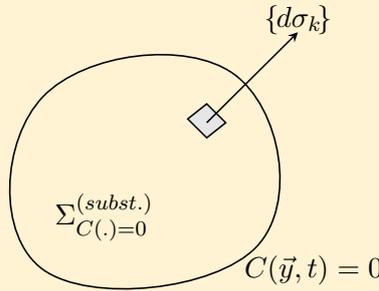


Fig. 4.5.1

Cherchons à établir l'équation de continuité pour la quantité de mouvement substantielle $\Pi_i^{(subst.)}$. En toute généralité, la fluxion de $\Pi_i^{(subst.)}$ est :

$$\dot{\Pi}_i^{(subst.)} = \int_{C(\vec{y}, t)=0} (dV \partial_t \pi_i^{(subst.)})(\vec{x}, t) + \oint_{C(\vec{y}, t)=0} (d\sigma_k v^k \pi_i^{(subst.)})(\vec{y}, t).$$

où $\{v^k\}$ est la vitesse de l'enceinte $C(\vec{y}, t) = 0$. Les causes de cette fluxion sont de deux sortes :

- 1) existence d'un courant conductif $\tau_i^{k(subst.)}$ appelé tenseur des tensions.
- 2) existence d'une densité de source $k_i^{(subst.)}$ appelée densité de force incidente substantielle.

En faisant le bilan, $\dot{\Pi}_i^{(subst.)}$ s'écrit

$$\int_{C(\vec{y}, t)=0} (dV k_i^{(subst.)})(\vec{x}, t) + \oint_{C(\vec{y}, t)=0} (d\sigma_k \tau_i^{k(subst.)})(\vec{y}, t),$$

soit encore en appliquant le théorème de Gauss à l'intégrale de surface, nous obtenons :

$$\int_{C(\vec{y}, t)=0} (dV k_i^{(subst.)})(\vec{x}, t) + \int_{C(\vec{y}, t)=0} (dV \partial_k \tau_i^{k(subst.)})(\vec{x}, t).$$

Comme nous n'avons fait aucune hypothèse sur $C(\vec{y}, t) = 0$, cette égalité doit encore exister sous le signe intégrale, d'où l'équation de continuité cherchée

$$\partial_t \pi_i + \partial_k (v^k \pi_i^{(subst.)} - \tau_i^k)^{(subst.)}(\vec{x}, t) = k_i^{(subst.)}(\vec{x}, t). \quad (4.5.1)$$

L'axiome de Newton $\pi_i^{(subst.)} = mv_i$ nous permet d'interpréter $\{v^k\}(\vec{x}, t)$ comme étant la vitesse de l'élément de masse $(dVm)(\vec{x}, t)$ et $m(\vec{x}, t)$ étant la *densité de masse inerte*, grandeur (extensive) fortement conservatrice, ce qui implique l'équation de continuité

$$(\partial_t m + \partial_k v^k m)(\vec{x}, t) = 0.$$

On peut écrire le bilan de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_i(t) &= \int_{C(\vec{y}, t)=0} \left(dV k_i^{(subst.)} \right) (\vec{x}, ta) + \oint_{C(\vec{y}, t)=0} \left(d\sigma_k \tau_i^k \right) (\vec{y}, t) \\ &= \int_{C(\vec{y}, t)=0} d^d K_i^{(subst.)} (\vec{x}, t) + \int_{C(\vec{y}, t)=0} d^{d-1} K_i^{(subst.)} (\vec{y}, t) \\ &= K_i^{(inc. subst.)} (t) \end{aligned}$$

donc : $\dot{\Pi}_i^{(subst.)} = K_i^{(inc. subst.)}$ avec $\{K_i^{(inc. subst.)}\}$: résultante des forces incidentes substantielle.

Quantité de mouvement pour un champ électromagnétique

Un système électromagnétique $\Sigma_C^{(em.)}$ au sens restrictif doit être considéré comme immobile, donc la surface le limitant doit être invariable au cours du temps c'est-à-dire définie par $C(\vec{y}) = 0$.

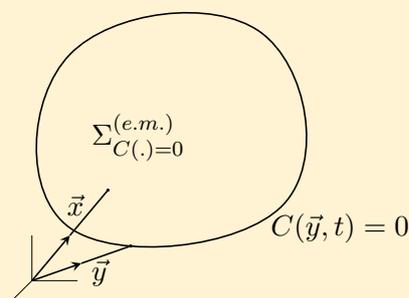


Fig. 4.5.2

Cette hypothèse est effectivement nécessaire, car nous ne savons pas définir de vitesse $\{v^k\}(\vec{x}, t)$. Il est bien entendu possible de définir une vitesse de l'enceinte $C(\vec{y}, t) = 0$ notée $\{v^k\}(\vec{y}, t)$, mais alors que représente $\{v^k\}(\vec{x}, t)$?

On pourrait d'abord penser que c'est la vitesse d'un élément de charge $(dVq)(\vec{x}, t)$ ou d'un élément de courant $(dV\vec{j})(\vec{x}, t)$, mais ce n'est pas le cas, car rappelons-le : charge et courant n'ont de sens que dans la matière et par conséquent, la vitesse de ceux-ci s'identifie avec celle de la masse (substantielle) qui n'existe que dans $\Sigma_C^{(subst.)}$ et non dans $\Sigma_C^{(em.)}$ au sens restrictif (par définition de celui-ci). Peut-être serait-on tenté d'introduire, ainsi que Maxwell l'a fait, un milieu non substantiel mais cependant matériel de façon à pouvoir lui attacher un champ de vitesse ? Mais nous savons que cette hypothèse d'un milieu non substantiel (appelé éther) est rejeté par la physique. Ce ne peut pas non plus être la vitesse de propagation des causes, car une « cause » (en soi) n'est pas une grandeur physique.

Nous posons :

$$\Pi_i^{(em.)}(t) = \int_{C(\vec{y})=0} (dV \pi_i^{(em.)})(\vec{x}, t).$$

Par un calcul analogue à celui fait pour le cas substantiel (mais cependant un peu plus simple), nous obtenons l'équation de continuité pour la quantité de mouvement électromagnétique

$$\left(\partial_t \pi_i^{(em.)} - \partial_k \tau_i^{k(em.)} = k_i^{(inc.em.)} \right) (\vec{x}, t). \quad (4.5.2)$$

où l'on a introduit :

- $\tau_i^{k(em.)}$: densité de courant conductif, appelé tenseur de Maxwell électromagnétique,
- $k_i^{(inc.em.)}$: densité de source, appelé densité de force incidente électromagnétique.

Quantité de mouvement pour un système complet : substance et champ

Le système comprend maintenant $\Sigma_C^{(subst.)}$ et $\Sigma_C^{(em.)}$. Lorsqu'on veut se limiter à l'étude des interactions matière substantielle et électromagnétisme, on pose :

$$(k_i^{(inc.subst.)} = -k_i^{(inc.em.)})(\vec{x}, t).$$

On exclut donc les forces de gravitation... etc.

Avec cette condition, l'équation de continuité pour la quantité de mouvement totale s'écrit :

$$\left(\partial_t \left(\pi_i^{(subst.)} + \pi_i^{(em.)} \right) + \partial_k \left(v^k \pi_i^{(subst.)} - (\tau_i^{k(subst.)} + \tau_i^{k(em.)}) \right) \right) (\vec{x}, t) = 0. \quad (4.5.3)$$

Essayons maintenant d'exprimer $\pi_i^{(em.)}(\vec{x}, t)$ à l'aide de nos variables électromagnétiques. Exprimons le tenseur $\tau_i^{k(em.)}$ à l'aide des deux tenseurs de Maxwell établis aux sections 1.8 et 3.11. En toute généralité, nous avons trouvé

$$\begin{aligned} \tau_i^{k(el.)} &= \frac{1}{C_e} D^k E_i - \delta_i^k \ell[\vec{x}, \overleftarrow{E}] \\ \tau_i^{k(m.)} &= \frac{1}{C_m} H^{k\ell} B_{0\ell i} + \delta_i^k u[\vec{x}, \overrightarrow{B}]. \end{aligned}$$

En prenant leur divergence et en nous restreignant au cas linéaire, nous avons établi

$$\begin{aligned} \partial_k \tau_i^{k(el.)} &= \frac{1}{C_e} (\operatorname{div} \overrightarrow{D}) E_i + \frac{1}{C_e} [\overrightarrow{\operatorname{rot}} \overleftarrow{E} \wedge \overrightarrow{D}]_i - \frac{|\overrightarrow{E}|^2}{2C_e} \partial_i \epsilon \\ \partial_k \tau_i^{k(m.)} &= \frac{1}{C_m} (\operatorname{div} \overrightarrow{B}_0) \overset{\circ}{H}_i + \frac{1}{C_m} [\overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{H} \wedge \overrightarrow{B}_0]_i - \frac{|\overrightarrow{H}|^2}{2C_m} \partial_i \mu. \end{aligned}$$

Posons, d'après le principe de superposition des effets,

$$\tau_i^{k(em.)} = \tau_i^{k(el.)} + \tau_i^{k(m.)}.$$

En utilisant les lois

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= C_e q & \overleftarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} &= -C_1 \partial_t \overleftarrow{\vec{B}} \\ \operatorname{div} \overleftarrow{\vec{B}}_0 &= C_m \dot{q} & \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{H} &= C_2 \partial_t \vec{D} + C_j \vec{j} \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \partial_t \tau_i^{k(em.)} &= q E_i + \dot{q} \dot{H}_i - \frac{C_1}{C_e} [\partial_t \overleftarrow{\vec{B}} \wedge \vec{D}]_i + \frac{C_2}{C_m} [\partial_t \vec{D} \wedge \overleftarrow{\vec{B}}_0]_i \\ &+ C_1 [\vec{j} \wedge \overleftarrow{\vec{B}}_0]_i - \frac{|\vec{E}|^2}{2C_e} \partial_i \epsilon - \frac{|\vec{H}|^2}{2C_m} \partial_i \mu. \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

L'équation de continuité pour la quantité de mouvement électromagnétique peut s'écrire :

$$\partial_k \tau_i^{k(em.)} = -k_i^{(inc.em.)} + \partial_t \pi_i^{(em.)}.$$

Or nous avons supposé que $k_i^{(inc.em.)} = -k_i^{(inc.subst.)}$, donc

$$\partial_k \tau_i^{k(em.)} = k_i^{(inc.subst.)} + \partial_t \pi_i^{(em.)}.$$

En remplaçant $\partial_t \tau_i^{k(em.)}$ par son expression, nous obtenons

$$\begin{aligned} \partial_t \tau_i^{k(em.)} &= q E_i + \dot{q} \dot{H}_i + C_1 [\vec{j} \wedge \overleftarrow{\vec{B}}_0]_i - \frac{|\vec{E}|^2}{2C_e} \partial_i \epsilon - \frac{|\vec{H}|^2}{2C_m} \partial_i \mu \\ &+ \frac{C_1}{C_e} ([\partial_t \vec{D} \wedge \overleftarrow{\vec{B}}_0]_i - [\partial_t \overleftarrow{\vec{B}} \wedge \vec{D}]_i) \\ &= k_i^{(inc.subst.)} + \partial_t \pi_i^{(em.)}. \end{aligned}$$

Les résultats établis aux sections 1.8 et 3.10 nous permettent de poser⁽¹⁾ :

$$k_i^{(inc.subst.)} = q E_i + \dot{q} \dot{H}_i + C_1 [\vec{j} \wedge \overleftarrow{\vec{B}}_0]_i - \frac{|\vec{E}|^2}{2C_e} \partial_i \epsilon - \frac{|\vec{H}|^2}{2C_m} \partial_i \mu.$$

Par identification des termes dans l'équation de continuité ci-dessus, nous voyons que les deux derniers termes du premier membre doivent représenter $\partial_t \pi_i^{(em.)}$.

Mais là surgit une petite difficulté ; le terme

$$\frac{C_1}{C_e} ([\partial_t \vec{D} \wedge \overleftarrow{\vec{B}}_0]_i - [\partial_t \overleftarrow{\vec{B}} \wedge \vec{D}]_i)$$

ne représente une dérivée par rapport au temps (∂_t) que si les pôles magnétiques (fictifs) restent au repos. En effet si nous considérons les équations relatives aux aimants

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + C_m \vec{M} = \vec{B}_0 + C_m \vec{B} \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \vec{M} = -\dot{q},$$

⁽¹⁾ $k_i^{(em.)}$ est dans une équation de continuité une densité de forces *extérieures*.

alors $\partial_t \vec{B} \equiv \partial_t \vec{B}_0$ seulement si $\partial_t \vec{M} = 0$, donc si $\partial_t \vec{q} = 0$ et cela n'est réalisé que si les pôles magnétiques restent au repos.

Si cette condition est vérifiée, alors

$$\frac{C_1}{C_e} ([\partial_t \vec{D} \wedge \vec{B}_0]_i - [\partial_t \vec{B} \wedge \vec{D}]_i) = \frac{C_1}{C_e} \partial_t [\vec{D} \wedge \vec{B}_0]_i.$$

Par conséquent, la densité de quantité de mouvement électromagnétique est

$$\pi_i^{(em.)}(\vec{x}, t) = \frac{C_1}{C_e} [\vec{D} \wedge \vec{B}_0]_i(\vec{x}, t). \quad (4.5.5)$$

L'hypothèse de linéarité n'ayant été utilisée que pour exprimer certains termes de la densité de force incidente, cette expression de $\pi_i^{(em.)}$ doit être considérée comme valable dans le cas général.

Dans le cas linéaire, nous avons

$$\pi_i^{(em.)}(\vec{x}, t) = C_1 C_2 \epsilon \mu \frac{1}{C_2} \frac{1}{C_e} [\vec{E} \wedge \vec{H}]_i,$$

donc :

$$\vec{\pi}^{(em.)}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c^2(\vec{x})} \vec{S}(\vec{x}, t).$$

Il faut cependant se garder de confondre $\vec{\pi}^{(em.)}$ avec la densité de courant d'énergie \vec{S} (cf. sect. 4.7).

Interprétation et remarque.

En considérant l'équation de continuité totale, nous voyons qu'une onde incidente, absorbée (ou réfléchiée) par une surface substantielle, transmet à travers la surface une quantité de mouvement $\Pi_i^{(subst.)}$ dans ce corps.

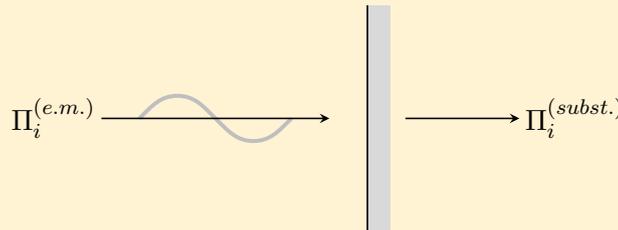


Fig. 4.5.3

4.6 Systèmes d'unités

Nous allons dans ce paragraphe donner des valeurs numériques aux cinq constantes électromagnétiques

$$C_1, C_2, C_e, \epsilon_0, \mu_0.$$

Quatre d'entre elles sont reliées par la relation

$$C_1 C_2 \mu_0 = \frac{1}{c_0^2} > 0,$$

où c_0 est la vitesse de la lumière dans le vide :

$$c_0 = (2.998 \pm 0.001) \cdot 10^{10} \text{ cm sec}^{-1} \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ cm sec}^{-1}.$$

1. Les systèmes C.G.S.

Dans ces systèmes, on convient de choisir trois grandeurs fondamentales Longueur, Masse, Temps et de leur associer les *unités*

$$[x] = \text{cm} \quad [M] = \text{g} \quad [t] = \text{sec}.$$

a) Système de Gauss

Les cinq constantes électromagnétiques sont définies sur la base de trois expériences fondamentales.

1. — Loi de Coulomb électrique.

$$K^{(el.)} = \frac{C_e}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r^2}.$$

2. — Loi de Coulomb magnétique.

$$K^{(m.)} = \frac{C_m}{4\pi\mu_0} \frac{\dot{Q}^2}{r^2}.$$

3. — Loi de Rowland. Un anneau, en révolution autour de son axe et portant une charge Q , crée le courant $J = Q/t_{\text{révolution}}$ où $t_{\text{révolution}} = 2\pi r/v$. On a alors $J = Q/2\pi r v$. Cela conduit à

$$|\vec{H}| = \left| \frac{C_2 C_e}{4\pi} \int \frac{[dV \vec{j} \wedge [\vec{r}]]}{r^2} \right| = \frac{C_2 C_e}{4\pi} J \frac{2\pi r}{r^2} = C_2 C_e \frac{1}{4\pi} \frac{Qv}{r^2}.$$

La force de Rowland (force exercée par l'anneau sur un barreau aimanté) est alors

$$K^{(Row.)} = \dot{Q} \dot{H} = \frac{C_2 C_e}{4\pi} v \frac{\dot{Q} Q}{r^2}.$$

Dans le *système de Gauss* on pose :

$$\begin{aligned} K^{(el.)} &= \frac{Q^2}{r^2} & \text{d'où } C_e &= 4\pi ; \epsilon_0 = 1 \\ K^{(m.)} &= \frac{\dot{Q}^2}{r^2} & \text{d'où } C_m &= 4\pi ; \mu_0 = 1 \\ K^{(Row.)} &= \frac{v}{c_0} \frac{Q\dot{Q}}{r^2} & \text{d'où } C_2 &= \frac{1}{c_0}. \end{aligned}$$

et, puisque $C_1 C_2 \epsilon_0 \mu_0 = 1/c_0^2$, on a $C_1 = \frac{1}{c_0}$.

b) Système de Gauss rationnel ou système de Heaviside.

Ce système est dit rationnel, en ce sens qu'il exprime le facteur 4π dans les deux lois de production exprimées dans le système de Gauss présenté ci-dessus. Donc :

$$C_e = C_m = 1.$$

on pose d'autre part :

$$\mu_0 = \epsilon_0 = 1 \quad \text{et} \quad C_1 = C_2 = \frac{1}{c_0}.$$

Mais alors on a la relation

$$[\dot{Q}]_{\text{Heavi.}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} [\dot{Q}]_{\text{Gauss}}$$

c) Système magnétique (intérêt historique).

Ce système réalise :

$$[\dot{Q}]_{\text{m.}} = [\dot{Q}]_{\text{Gauss}}$$

D'autre part on pose

$$C_e = C_m = 4\pi \text{ (système non rationnel)}, \quad C_2 = C_1 = 1$$

d'où $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c_0^2}$ qui implique $\mu_0 = 1$; $\frac{1}{\epsilon_0} = c_0^2$ et par conséquent

$$[Q]_{\text{m.}} = c_0 [Q]_{\text{Gauss}}$$

d) Système technique (complètement périmé).

De ce système, nous ne retiendrons que la définition du *Coulomb* :

$$[Q]_{\text{techn.}} = \text{Coulomb} = \frac{1}{10} [Q]_{\text{m.}} = \frac{c_0}{10} [Q]_{\text{Gauss}}$$

et de l'*Ampère* :

$$[J]_{\text{techn.}} = \text{Ampère}$$

2. Systèmes M.K.S.

Dans ces systèmes, les unités fondamentales sont :

$$[x] = \text{m.} \quad [M] = \text{Kg} \quad [t] = \text{sec.}$$

et alors : $c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m sec}^{-1}$. Nous ne considérerons que le *système Giorgi*.

Les équations s'écrivent :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}} \overleftarrow{E} &= -\partial_t \overleftarrow{B} \\ \text{div} \overleftarrow{B} &= 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{H} &= \partial_t \overrightarrow{D} + \overrightarrow{j} \\ \text{div} \overrightarrow{D} &= q.\end{aligned}$$

C'est donc un système rationnel. Il s'ensuit que :

$$C_1 = C_2 = C_e = C_m = 1$$

Notations.

Une grandeur physique G exprimée dans un système d'unité est composée d'une mesure $G_{\text{syst.}}$ et d'une unité $[G]_{\text{syst.}}$, c'est-à-dire :

$$\underline{G} = G_{\text{syst.}} [G]_{\text{syst.}}$$

Dans le système M.K.S. , l'unité de force est le Newton : $[K] = \text{Newton}$.

Dans le système C.G.S. , c'est la dyne : $[K] = \text{dyne}$.

On a la correspondance : $[K]_{\text{M.K.S.}} = 10^5 [K]_{\text{C.G.S.}} = 10^5 \text{dyne}$ donc :

$$K_{\text{M.K.S.}} (= K_{\text{Giorgi}}) = 10^{-5} K_{\text{C.G.S.}} (= 10^{-5} K_{\text{Gauss}}).$$

La loi de Coulomb électrique s'écrit :

$$\begin{aligned}K_{\text{Gauss}} &= 9 \cdot 10^{20} \frac{Q_{\text{cm}}^2}{r_{\text{cm}}^2} = 9 \cdot 10^{18} \frac{Q_{\text{techn.}}^2}{r_{\text{cm}}^2} = 9 \cdot 10^{14} \frac{Q_{\text{techn.}}^2}{r_{\text{m}}^2} \\ K_{\text{Giorgi}} &= 10^{-5} K_{\text{Gauss}} = 9 \cdot 10^9 \frac{Q_{\text{techn.}}^2}{r_{\text{m}}^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{Giorgi}}^2}{r_{\text{m}}^2}\end{aligned}$$

On pose : $Q_{\text{techn.}} = Q_{\text{Giorgi}}$, donc

$$[Q]_{\text{techn.}} = \text{Coulomb} = [Q]_{\text{Giorgi}},$$

et par conséquent et grâce à $C_1 C_2 \epsilon_0 \mu_0 = \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{9 \cdot 10^{16}}$, on a

$$4\pi\epsilon_0 = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \quad \text{et} \quad \mu_0 = 4\pi 10^{-7}$$

Dans le système Giorgi, l'expérience fondamentale est la mesure de la force s'exerçant entre deux courants parallèles.

$$K_{\text{Giorgi}} = \frac{\mu_0}{2\pi} J^2 \left(\frac{\ell}{r} \right) = 2 \cdot 10^{-7} J_{\text{Giorgi}}^2 \left(\frac{\ell}{r} \right)$$

$$[J]_{\text{Giorgi}} = \text{Ampère} = [Q]_{\text{techn.}} \cdot \text{sec}^{-1} = \text{Coulomb} \cdot \text{sec}_{-1}$$

Autre unité : pour le *potentiel* ϕ : $[\phi] = \text{Volt}$.

Tableau récapitulatif.

	Système	C_1	C_2	ϵ_0	μ_0	$C_e = C_m$
C.G.S.	Gauss	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-10}$	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-10}$	1	1	4π
	Heaviside	"	"	"	"	1
	Magnétique	1	1	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-20}$	1	1
	Technique	?	?	?	?	?
M.K.S	Giorgi	1	1	$\frac{1}{4\pi 9} \cdot 10^{-9}$	$4\pi 10^{-7}$	1

4.7 Relativité restreinte.

La théorie de la relativité restreinte est traitée en détail dans le cours de physique théorique (livre III). Dans ce paragraphe nous voulons simplement faire ressortir la simplification qu'apporte la théorie de la relativité dans la conception des phénomènes électromagnétiques, et montrer l'unité qui se révèle sous la diversité des actions électriques et magnétiques.

Nous allons tout d'abord transcrire les équations de Maxwell sous forme tensorielle.

Choisissons le système d'unité de Heaviside et posons $c_0 t_{\text{sec}} = t_{\text{cm}} = x^4$ donc $[t] = \text{cm}$. (C'est en fait le temps mis par la lumière pour parcourir 1 cm dans le vide). Nous aurons :

$$\left(\frac{1}{c_0} \partial_t\right)_{\text{Heavi.}} = \partial_t = \partial_4 = \frac{\partial}{\partial x^4}.$$

Par conséquent

$$c_0 = 1 \quad ([v] = 1), \quad C_1 = C_2 = C_e = C_m = 1 \quad \text{et} \quad \epsilon_0 = \mu_0 = 1.$$

Equation homogène

$$\begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{E} + \partial_4 \vec{B} = 0 \\ \text{div} \vec{B} = 0. \end{cases}$$

La deuxième équation s'écrit

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{B} &= \partial_\ell \overset{\circ}{B}^\ell = (\text{s.s.})(\partial_\ell B_{ik} + \partial_i B_{k\ell} + \partial_k B_{\ell i}) = 0 \\ &= \overset{\circ}{ik\ell} \partial_i B_{k\ell} = 0, \quad (\text{une équation}) \end{aligned}$$

où $\overset{\circ}{ik\ell}$ signifie : somme avec permutations circulaires sur les trois indices.

La première équation s'écrit

$$(\overleftarrow{\text{rot}} \overleftarrow{E})_{ik} + \partial_4 B_{ik} = \partial_i E_k - \partial_k E_i + \partial_4 B_{ik} = 0.$$

Posons $E_k = B_{k4} = -B_{4k}$, ce qui donne

$$\partial_i B_{k4} + \partial_k B_{4i} + \partial_4 B_{ik} = \vec{i}k4 \partial_i B_{k4} = 0. \quad (i, k = 1, 2, 3 \text{ trois équations}).$$

En groupant ces quatre équations, le *groupe homogène des équations de Maxwell* s'écrit sous forme condensée :

$$\widetilde{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha B_{\beta\gamma} = 0. \quad (4.7.1)$$

Equations inhomogènes

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{H} - \partial_4 \overrightarrow{D} = \vec{j} \\ \text{div} \overrightarrow{D} = q. \end{cases}$$

La première équation s'écrit

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{H} - \partial_4 \overrightarrow{D})^\ell &= \partial_i \dot{H}_k - \partial_k \dot{H}_i - \partial_4 D^\ell = j^\ell \\ &= \partial_i H^{ki} - \partial_k H^{ki} - \partial_4 D^\ell = j^\ell. \end{aligned}$$

Posons $D^\ell = H^{4\ell} = -H^{\ell 4}$, ce qui donne

$$(\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{H} - \partial_4 \overrightarrow{D})^\ell = (\text{s.s.}) (-\partial_i H^{i\ell} - \partial_k H^{k\ell} - \partial_4 H^{4\ell}) = -\partial_\alpha H^{\alpha\ell} = j^\ell. \quad (\text{trois équations})$$

La deuxième équation s'écrit

$$\text{div} \overrightarrow{D} = \partial_i D^i = -\partial_i H^{i4} = q.$$

Posons $q = j^4$, ce qui donne

$$-\partial_i H^{i4} = j^4. \quad (\text{une équation})$$

En groupant ces quatre équations, le *groupe inhomogène des équations de Maxwell* s'écrit sous forme condensée

$$-\partial_\alpha H^{\alpha\beta} = j^\beta. \quad (4.7.2)$$

De cette équation, nous tirons immédiatement l'*équation de conservation de la charge*; en effet :

$$-\partial_\beta \partial_\alpha H^{\alpha\beta} = -\partial_{(\beta\alpha)} H^{[\alpha\beta]} = \partial_{(\beta\alpha)} H^{[\beta\alpha]} = \partial_{(\alpha\beta)} H^{[\beta\alpha]} = 0 = \partial_\beta j^\beta,$$

et donc

$$\partial_\alpha j^\alpha = 0. \quad (4.7.3)$$

Conséquence

Tout d'abord, remarquons que les définitions $E_k = B_{k4}$, $D^\ell = H^{4\ell}$ et $q = j^4$ sont les seules qui rendent possible la transcription tensorielle des équations de Maxwell. Nous avons donc des équations tensorielles, établies indépendamment de toute métrique ; il est donc possible d'affirmer qu'elles sont *covariantes pour le groupe affine* de l'espace à quatre dimensions (x^1, x^2, x^3, x^4) .

Restreignons-nous maintenant à l'électromagnétisme dans le vide. Nous savons que dans le cours de physique théorique (tome I) la thermodynamique impose une métrique de l'espace $\{g_{ik}\}$ définie positive, soit pour simplifier : $g_{ik} \stackrel{*}{=} \delta_{ik}$ donc $g_{ii} \stackrel{*}{=} g^{ii} = 1$, $g^{i \neq k} \stackrel{*}{=} 0$. Dans le vide et puisque $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$, nous avons

$$\begin{aligned} D^i &= g^{ii} D_i \stackrel{*}{=} D_i \stackrel{\text{def}}{=} E_i \quad (\epsilon_0 = 1) \\ H^{ik} &= g^{ii} g^{kk} H_{ik} \stackrel{*}{=} H_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} B_{ik}. \quad (\mu_0 = 1.) \end{aligned}$$

Mais

$$D^i = H^{4i} = \underline{-H^{i4}} \stackrel{*}{=} D_i \equiv E_i = \underline{B_{i4}}$$

et donc

$$B_{i4} \equiv H_{i4} \stackrel{*}{=} g_{ii} g_{44} H^{i4} = -H^{i4}.$$

Par conséquent

$$g_{44} \stackrel{*}{=} g^{44} = -1 ; \quad g^{\alpha \neq 4} \stackrel{*}{=} 0.$$

Et nous voyons que les équations de l'électrodynamique imposent pour l'espace (x^1, x^2, x^3, x^4) la métrique

$$\{g^{\alpha\beta} \stackrel{*}{=} g_{\alpha\beta}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.7.4)$$

qui constitue la métrique d'un *espace pseudo-euclidien* (c'est une métrique non définie).

Récapitulation.

Nous avons montré que les équations de Maxwell sont covariantes pour le groupe affine : $\{A\}$:

$$\{A\} : \quad 'x'^\alpha = A'^\alpha_\alpha (x^\alpha + A^\alpha)$$

et d'autre part, nous avons établi, grâce aux équations phénoménologiques de l'électromagnétisme dans le vide, que le 4-*space* envisagé possédait une métrique $\{g_{\alpha\beta}\}$ pseudo-euclidienne.

Cette propriété limite les transformations du groupe affine à celle conservant la métrique.

Par suite, les équations de l'électromagnétisme sont covariantes par rapport aux transformations :

$$\begin{aligned} 'g'^{\alpha'\beta} &= L'^\alpha_\alpha L'^\beta_\beta g^{\alpha\beta} = g'^{\alpha'\beta} \\ 'x'^\alpha &= L'^\alpha_\alpha (x^\alpha + L^\alpha). \end{aligned} \quad (4.7.5)$$

On peut vérifier qu'elles constituent un groupe : le *groupe de Lorentz-Poincaré*. On appelle *groupe de Lorentz* : $\{L\}$, le groupe des transformations homogènes

$$'x^\alpha = L^\alpha_\alpha x^\alpha ; L^\alpha = 0. \quad (4.7.6)$$

Cas particuliers.

Rotation spatiale dans un plan 12.

Dans ce cas $'x^3 = x^3, 'x^4 = x^4 (t = t)$. Puisque la forme quadratique fondamentale est un invariant tensoriel :

$$x_\alpha x^\alpha = g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = \text{invariant.}$$

Alors, si $g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}$, on a

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 = ('x^1)^2 + ('x^2)^2 + ('x^3)^2 - ('x^4)^2,$$

et il reste

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = ('x^1)^2 + ('x^2)^2,$$

ce qui représente l'équation d'un cercle dans le plan 12. La transformation peut donc s'écrire :

$$\begin{cases} 'x^1 = x^1 \cos \omega + x^2 \sin \omega \\ 'x^2 = -x^1 \sin \omega + x^2 \cos \omega \\ 'x^3 = x^3 \\ 'x^4 = x^4. \end{cases}$$

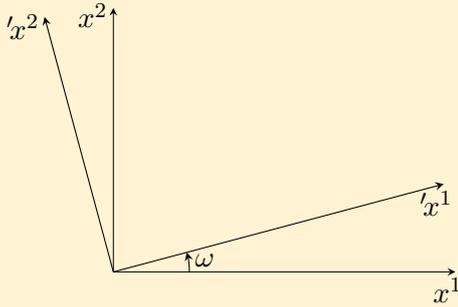


Fig. 4.7.1

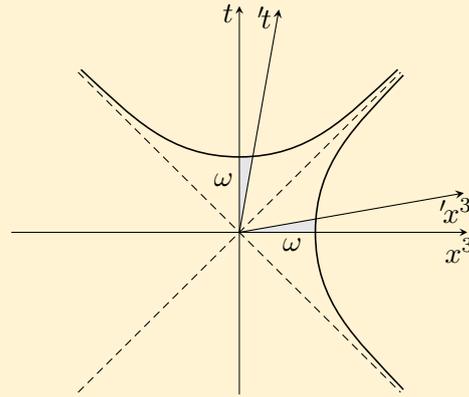


Fig. 4.7.2

Rotation spatio-temporelle.

On choisit $'x^1 = x^1, 'x^2 = x^2$ et donc

$$('x^3)^2 - ('x^4)^2 = (x^3)^2 - (x^4)^2,$$

ce qui représente l'équation d'une hyperbole dans le plan 34. La transformation peut donc s'écrire :

$$\begin{cases} 'x^1 = x^1 \\ 'x^2 = x^2 \\ 'x^3 = x^3 \operatorname{ch} \omega - x^4 \operatorname{sh} \omega \\ 'x^4 = -x^3 \operatorname{sh} \omega + x^4 \operatorname{ch} \omega. \end{cases}$$

On peut aussi écrire

$$\begin{cases} 'x^3 = \operatorname{ch} \omega (x^3 - \beta t) \\ 'x^4 = \operatorname{ch} \omega (-\beta x^3 + t) \end{cases}$$

avec : $x^4 = t$ et $\beta = \operatorname{sh} \omega / \operatorname{ch} \omega = \operatorname{th} \omega$ avec $-1 < \operatorname{th} \omega < 1$ (strictement si ω est fini). Donc β s'interprète facilement lorsqu'on considère la formule de transformation

$$'x^3 = \operatorname{ch} \omega (x^3 - \beta t).$$

Dans l'espace usuel à trois dimensions spatiales, β représente la vitesse du référentiel ($'x$) par rapport au référentiel (x) et cette vitesse est constante puisque $\beta = \operatorname{th} \omega$ ($\omega = \text{cte}$ caractérise une transformation spatio-temporelle), donc $\beta = v < 1$ et, en revenant à un système d'unité plus connu, cela signifie que

$$\beta = \frac{v}{c_0} \quad \text{avec} \quad v < c_0.$$

où c_0 est une *vitesse limite*.

Remarque.

Puisque ω caractérise une transformation spatio-temporelle, nous écrivons symboliquement

$$'x^3 = L(\omega) x^3.$$

Si nous opérons une nouvelle transformation, nous avons : $''x^3 = L(\omega') 'x^3$. Il est facile de vérifier que : $''x^3 = L(\omega'') x^3$ avec $\omega'' = \omega + \omega'$. Nous en déduisons immédiatement la *loi de composition des vitesses*; en effet :

$$\beta = \operatorname{th}(\omega) = \operatorname{th}(\omega_1 + \omega_2) = \frac{\operatorname{th} \omega_1 + \operatorname{th} \omega_2}{1 + \operatorname{th} \omega_1 \operatorname{th} \omega_2}$$

d'où

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}.$$

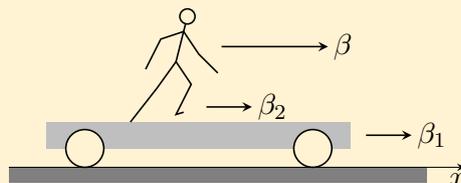


Fig. 4.7.3

Tenseur de Maxwell

Nous allons construire le tenseur de Maxwell électromagnétique sous forme tensorielle pour le 4-espace défini plus haut. Rappelons que

$$\begin{aligned}\tau_k^{i(es.)} &= D^i E_k - \delta_k^i \ell(\overleftarrow{E}) \\ \tau_k^{i(m.)} &= H^{i\ell} B_{\ell k} + \delta_k^i u(\overleftarrow{B})\end{aligned}$$

et, dans le vide, nous avons (cf. sect. 4.5)

$$\begin{aligned}\partial_i \tau_k^{i(es.)} &= qE_k - [\partial_t \overleftarrow{B} \wedge \overleftarrow{D}]_k \\ \partial_i \tau_k^{i(m.)} &= [\vec{j} \wedge \overleftarrow{B}]_k + [\partial_t \overleftarrow{D} \wedge \overleftarrow{B}]_k.\end{aligned}$$

Le tenseur de Maxwell électromagnétique est (principe de superposition)

$$\theta_k^i = \tau_k^{i(em.)} = \tau_k^{i(el.)} + \tau_k^{i(m.)}. \quad (4.7.7)$$

Par conséquent

$$\partial_i \theta_k^i = qE_k + [\vec{j} \wedge \overleftarrow{B}]_k + \partial_t [\overleftarrow{D} \wedge \overleftarrow{B}]_k.$$

Or

$$qE_k + [\vec{j} \wedge \overleftarrow{B}]_k = k_k^L, \quad (4.7.8)$$

où $\{k_k^L\}$ est la densité de force de Lorentz et

$$[\overleftarrow{D} \wedge \overleftarrow{B}]_k = \pi_k \quad (4.7.9)$$

où $\{\pi_k\}$ est la densité de quantité de mouvement électromagnétique. Ainsi on a la relation

$$\partial_i \theta_k^i = k_k^L + \partial_t \pi_k.$$

Posons

$$\pi_k = -\theta_k^4 \quad (4.7.10),$$

alors il vient

$$\partial_\alpha \theta_k^\alpha = -k_k^L. \quad (4.7.11)$$

Cherchons à exprimer θ_k^α . Nous avons

$$\begin{aligned}\tau_k^{i(es.)} &= H^{4i} B_{k4} - \delta_k^i \ell(\overleftarrow{E}) \\ \tau_k^{4(es.)} &= H^{44} B_{k4} = 0 \\ \tau_k^{4(m.)} &= H^{4\ell} B_{\ell k} = -D^\ell B_{\ell k} = -[\overleftarrow{D} \wedge \overleftarrow{B}]_k = -\pi_k.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que, si on définit $\ell[B_{\mu\nu}] = \ell(\overleftarrow{E}) - u(\overleftarrow{B})$, alors

$$\theta_k^\alpha = H^{\alpha\rho} B_{\rho k} - \delta_k^\alpha (\ell(\overleftarrow{E}) - u(\overleftarrow{B})),$$

d'où

$$\theta_k^\alpha = H^{\alpha\rho} B_{\rho k} - \delta_k^\alpha \ell[B_{\mu\nu}]. \quad (4.7.12)$$

Puisque $\partial_\alpha \theta^\alpha_k = k_k^L$ avec $k_k^L = qE_k - j^\ell B_{\ell k} = j^4 B_{k4} - j^\ell B_{\ell k}$, on a alors

$$\partial_\alpha \theta_k^\alpha = k_k^L = -j^\alpha B_{\alpha k}.$$

Théorème de l'énergie.

$$\partial_t u + \text{div } \vec{S} = -(\vec{j}, \overleftarrow{E})$$

qui donne

$$\begin{aligned} \partial_t u &= -(\vec{j}, \overleftarrow{E}) - \text{div} [\overleftarrow{E} \wedge \overrightarrow{H}] = -j^i E_i - \partial_i [\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{H}]^i \\ &= -j^i B_{i4} - \partial_i (E_k H^{ik}) = -j^i B_{i4} + \partial_k (H^{ik} B_{i4}). \end{aligned}$$

Nous remarquons que

$$-S^k = H^{ik} B_{i4} = -\theta_4^k \quad (4.7.13)$$

et posons, par définition :

$$-j^i B_{i4} = k_4^L. \quad (4.7.14)$$

Alors, avec $k_4^L = \partial_\alpha \theta_4^\alpha$, on a

$$\partial_t u = k_4^L - \partial_k \theta_4^k = \partial_t u = \partial_4 u = \partial_\alpha \theta_4^\alpha - \partial_k \theta_4^k = \partial_4 \theta_4^4$$

et nous sommes conduit à poser :

$$u = \theta_4^4. \quad (4.7.15)$$

Vérifions si cette définition est compatible : il vient

$$\begin{aligned} u = \theta_4^4 &= H^{4i} B_{i4} - \ell[B_{\mu\nu}] = D^i E_i - \ell(\vec{E}) + u(\vec{B}) \\ &= u^{(es.)} + u^{(m.)}. \end{aligned}$$

En résumé nous avons construit le *tenseur de Maxwell* (covariant par rapport à $\{A\}$)

$$\begin{aligned} \theta_\beta^\alpha &= H^{\alpha\rho} B_{\rho\beta} - \delta_\beta^\alpha \ell[B_{\mu\nu}] \\ \theta_k^i &= \tau_k^{i(em.)} \quad ; \quad \theta_4^i = S^i \\ \theta_k^4 &= -\pi_k \quad ; \quad \theta_4^4 = u \end{aligned} \quad (4.7.16)$$

et le *tenseur force de Lorentz* (également covariant par rapport à $\{A\}$)

$$\begin{aligned} k_\alpha^L &= -j^\beta B_{\beta\alpha} \\ k_k^L &= qE_k + [\vec{j} \wedge \overleftarrow{B}]_k \\ k_4^L &= -(\vec{j}, \overleftarrow{E}) \end{aligned} \quad (4.7.17)$$

4.8 Loi d'Ohm pour un conducteur au repos

Jusqu'ici nous n'avons considéré que des transformations d'énergie électromagnétique en énergie mécanique, mais il est possible d'envisager bien d'autres types de transformations. En particulier, nous allons voir que dans tout système une partie de l'énergie électromagnétique se transforme constamment en chaleur par l'intermédiaire du système substantiel $\Sigma^{(subst.)}$. Ceci nous ramène à la thermodynamique.

Puisque nous allons étudier des transformations irréversibles (chaleur), nous devons introduire l'entropie comme nouvelle variable d'état.

Nous allons considérer un système Σ constitué du système substantiel au repos $\Sigma^{(subst.)}$ et du système électromagnétique $\Sigma^{(em.)}$ (On pourra, si l'on veut, interpréter Σ comme étant un système substantiel au repos possédant une partie de son énergie interne sous forme d'énergie électromagnétique).

Par conséquent, l'expression de la densité d'énergie de ce système s'écrira, en accord avec les résultats établis en thermodynamique

$$u[\vec{x}, t] = u[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x}, t), \vec{B}(\vec{x}, t), s(\vec{x}, t)].$$

où $s(\vec{x}, t)$ est la densité d'entropie, qui rappelons-le vérifie l'équation de continuité

$$(\partial_t s + \text{div} \vec{j}_s)(\vec{x}, t) = i(\vec{x}, t) \geq 0,$$

le système étant *supposé au repos*. Dans cette équation, $\vec{j}_s(\vec{x}, t)$ est la densité de courant conductif d'entropie et $i(\vec{x}, t)$ est la densité de source d'irréversibilité.

Pour un système quelconque, le premier principe de la thermodynamique appliqué à l'énergie totale H , s'exprime au moyen de l'équation de continuité

$$(\partial_t h + \partial_k (v^k h + j_H^k))(\vec{x}, t) = \rho_H(\vec{x}, t),$$

où \vec{j}_H est densité de courant d'énergie et $\rho_H = \rho_A$ est la densité de courant de travail.

Le système Σ que nous avons défini étant repos, son énergie totale H se confond avec son énergie non cinétique U ; d'autre part, et pour la même raison, il n'y a pas d'échange de travail. Par conséquent nous pouvons écrire

$$\vec{j}_H = \vec{S} + \vec{q} \quad \text{et} \quad \rho_H = \rho_A = 0,$$

où \vec{S} est le vecteur de Poynting et \vec{q} est la densité de courant de chaleur.

On a alors

$$(\partial_t u + \text{div} (\vec{S} + \vec{q}))(\vec{x}, t) = 0.$$

Exprimons $\partial_t u$:

$$\partial_t u[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x}, t), \vec{B}(\vec{x}, t), s(\vec{x}, t)] = \frac{\partial u}{\partial D^i} \partial_t D^i + \frac{\partial u}{\partial \dot{B}^i} \partial_t \dot{B}^i + \frac{\partial u}{\partial s} \partial_t s.$$

Or par définition, T étant la température absolue,

$$\frac{\partial u}{\partial D^i} = \frac{1}{C_e} E_i ; \quad \frac{\partial u}{\partial \dot{B}^i} = \frac{1}{C_m} \dot{H}_i ; \quad \frac{\partial u}{\partial s} = T,$$

donc

$$\partial_t u[\cdot] = \frac{1}{C_e} E_i \partial_t D^i + \frac{1}{C_m} \dot{H}_i \partial_t \dot{B}^i + T \partial_t s.$$

Mais nous avons vu à section 4.2 que

$$\frac{1}{C_e} E_i \partial_t D^i + \frac{1}{C_m} \dot{H}_i \partial_t \dot{B}^i = \partial_t u^{(em.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x}, t), \vec{B}(\vec{x}, t)],$$

et d'autre part

$$\partial_t u^{(em.)} = -\operatorname{div} \vec{S} - (\vec{j}, \overleftarrow{E}),$$

alors

$$\partial_t u[\cdot] = \partial_t u^{(em.)} + T \partial_t s = -\operatorname{div} \vec{S} - (\vec{j}, \overleftarrow{E}) + T \partial_t s.$$

En remplaçant dans l'équation de continuité $\partial_t u[\dots]$ par cette expression, il vient

$$-\operatorname{div} \vec{S} - (\vec{j}, \overleftarrow{E}) + T \partial_t s + \operatorname{div}(\vec{S} + \vec{q}) = 0.$$

Donc

$$-(\vec{j}, \overleftarrow{E}) + T \partial_t s + \operatorname{div} \vec{q} = 0.$$

Dans le cours de thermodynamique (livre I), nous avons posé

$$\vec{q}(\vec{x}, t) = (T \vec{j}_S)(\vec{x}, t).$$

Alors

$$\operatorname{div} \vec{q} = \operatorname{div} T \vec{j}_S = T \operatorname{div} \vec{j}_S + (\overleftarrow{\operatorname{grad}} T, \vec{j}_S)$$

et l'équation de continuité donne lieu à la relation

$$-(\vec{j}, \overleftarrow{E}) + T(\partial_t s + \operatorname{div} \vec{j}_S) + (\overrightarrow{\operatorname{grad}} T, \frac{1}{T} \vec{q}) = 0.$$

Comme $\partial_t s + \operatorname{div} \vec{j}_S = i \geq 0$, nous obtenons l'inégalité thermodynamique

$$i = \frac{1}{T} (\vec{j}, \overleftarrow{E}) + \frac{1}{T^2} (-\operatorname{grad} T, \vec{q}) \geq 0.$$

La seule possibilité simple pour que cette inégalité soit vraie dans tous les cas est que chaque terme soit non négatif indépendamment de l'autre. Par conséquent nous posons :

$$\vec{j} = \kappa_e \overleftarrow{E} \quad \text{avec} \quad \frac{\kappa_e}{T} \geq 0. \quad (4.8.1)$$

où κ_e est la *conductibilité électrique* ; elle a toujours le même signe que T . D'autre part

$$\vec{q} = -\kappa_c \overrightarrow{\operatorname{grad}} T \quad \text{avec} \quad \kappa_c \geq 0. \quad (4.8.2)$$

où κ_c est la *conductibilité calorique*; elle est toujours positive.

Ces deux lois étant vérifiées expérimentalement, notre hypothèse de simplicité est justifiée. Ainsi, nous constatons que la densité de puissance

$$p^{(int.)} = -(\vec{j}, \overleftarrow{E}) = -\kappa_e E^2 \leq 0 \quad \text{si } T > 0$$

exprime la chaleur dégagée par le système électromagnétique.

Si $\kappa_e \neq 0$, le milieu est dit conducteur.

Si $\kappa_e = 0$, le milieu est dit isolant.

Considérons maintenant un tube de courant de longueur ℓ et de section σ limité par deux surfaces équipotentielle parallèle et supposons \vec{j} parallèle au tube et constant.

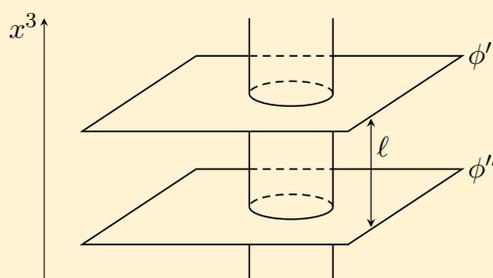


Fig. 4.8.1

Nous avons alors

$$E_3 = -(\overleftarrow{\text{grad}} \phi)_3 = \frac{\phi' - \phi''}{\ell}$$

et donc

$$J''^{\leftarrow'} = \sigma j_3 = \frac{\sigma \kappa_e}{\ell} (\phi' - \phi'').$$

Résistance ohmique.

On appelle *résistance ohmique* de l'élément de tube de courant de longueur ℓ , de section σ et de conductibilité électrique κ_e l'expression

$$R = \frac{\ell}{\sigma \kappa_e}. \quad (4.8.3)$$

Nous voyons que $R/T \geq 0$.

Nous obtenons finalement la *loi d'Ohm pour un conducteur au repos*

$$J''^{\leftarrow'} = \frac{\phi' - \phi''}{R}. \quad (4.8.4)$$

Remarques.

Considérons un conducteur (un tube de courant). La relation $\vec{j} = \kappa_e \vec{E}$ nous permet d'affirmer qu'en chaque point de celui-ci existe un champ électrique $\vec{E}(\vec{x}, t)$. Essayons de déterminer la provenance de ce champ. Tout d'abord, rappelons qu'un

champ électrique est créée par une distribution de charges, nous avons en effet les relations

$$\operatorname{div} \vec{D} = C_e q ; \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}.$$

Nous allons donc déterminer la distribution $q(\vec{x}, t)$. On a en effet

$$\partial_t q + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{j} = \kappa_e \vec{E} \quad \Longrightarrow \quad -\partial_t q = \kappa_e \operatorname{div} \vec{E}$$

d'où

$$-\partial_t q = \frac{\kappa_e}{\epsilon} \operatorname{div} \vec{D} = \frac{\kappa_e}{\epsilon} C_e q$$

et, par intégration,

$$q(\vec{x}, t) = q_0(\vec{x}) e^{-(\kappa_e/\epsilon) C_e t}.$$

Comme $(\kappa_e/\epsilon) C_e$ est très grand, $q(\vec{x}, t)$ décroît rapidement et devient inappréciable : les charges électriques apportées dans un conducteur disparaissent et on a $q(\vec{x}, t) \approx 0$.

Puisqu'il n'existe pas de charges d'espace, la distribution créant le champ \overleftarrow{E} doit obligatoirement se trouver *sur la surface* du conducteur. Ceci est encore vrai et d'autant plus pour un courant stationnaire où $\operatorname{div} \vec{j} = 0$.

Il peut sembler paradoxal que dans un conducteur $q(\vec{x}, t) \approx 0$, alors que l'on sait, grâce à l'équation $\partial_t q + \operatorname{div} \vec{j} = 0$, que le courant est formé de charges. En fait cela ne l'est pas car il ne faut pas oublier que la charge $(q dV)(\vec{x}, t)$ doit être considérée comme la résultante de toutes les charges élémentaires, positives ou négatives, contenues dans dV , par conséquent un courant (formé de charges négatives par exemple) peut fort bien exister alors que $q = 0$.

Donc dans un conducteur, nous devons bien distinguer la distribution superficielle $\omega(\vec{x}, t)$ créant le champ \vec{E} générateur du courant \vec{j} de la distribution spatiale formant le courant $\vec{j}(\vec{x}, t)$.

Considérons maintenant un tube de courant fermé sur lui-même et cherchons s'il existe un régime stationnaire.

Pour un tel système : $\int (\overleftarrow{d}\sigma, \vec{S})(\vec{y}, t) = 0$ par conséquent

$$\dot{U} = 0 = P^{(int.)}.$$

Or

$$P^{(int.)} = \int dV p^{(int.)} = - \int dV (\vec{j}, \overleftarrow{E}) = - \int dV \frac{1}{\kappa_e} \vec{j}^2 = 0,$$

d'où $\vec{j}(\vec{x}, t) = 0$ et nous voyons qu'il n'existe pas de courant stationnaire, à moins qu'une source (batterie par exemple) ne soit insérée dans le tube (cf. sect. 4.9).

4.9 Loi de Kirchhoff

Pour expliquer certains phénomènes, tels l'existence des courants stationnaires, nous sommes conduit à généraliser la loi d'Ohm.

Dans certaines zones, dites « excitées », d'un système électromagnétique, nous avons :

$$\vec{j} = \kappa_e(\vec{E} + \vec{E}^e), \quad (4.9.1)$$

où \vec{E}^e est appelé *vecteur de la force électromotrice*. Il a même dimension que \vec{E} , mais provient de sources totalement différentes et n'obéit pas aux équations de Maxwell.

Considérons à nouveau un tube de courant fermé dans lequel règne un courant stationnaire. Sous cette hypothèse, la première équation de Maxwell s'écrit

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_C (\vec{E}, d\vec{\ell}) = 0,$$

où l'intégrale est prise le long d'un filet de courant C . On a alors

$$\oint_C (\vec{E}, d\vec{\ell}) = \oint_C \left(\frac{1}{\kappa_e} \vec{j} - \vec{E}^e, d\vec{\ell} \right) = 0.$$

Si la section du tube est constante : $|\vec{j}| = J/\sigma$ et on a

$$\oint_C (\vec{E}, d\vec{\ell}) = \frac{\ell}{\kappa_e \sigma} J - \oint_C (\vec{E}^e, d\vec{\ell}) = RJ - \phi^e = 0,$$

d'où, par définition,

$$\phi^e = \oint_C (\vec{E}^e, d\vec{\ell}). \quad (4.9.2)$$

est la force électromotrice (f.e.m.) ; l'intégrale étant parcourue dans le sens du courant (sens fixé arbitrairement). Nous obtenons donc *la loi de Kirchhoff* :

$$J = \frac{\phi^e}{R}. \quad (4.9.3)$$

L'existence de courants stationnaires nous est désormais assurée. En effet, le vecteur de Poynting, provenant de la zone excitée fournit en chaque point non excité de tube, une énergie égale à celle dissipée sous forme de chaleur, soit $p^{(int.)} = -(1/\kappa_e)|\vec{j}|^2$.

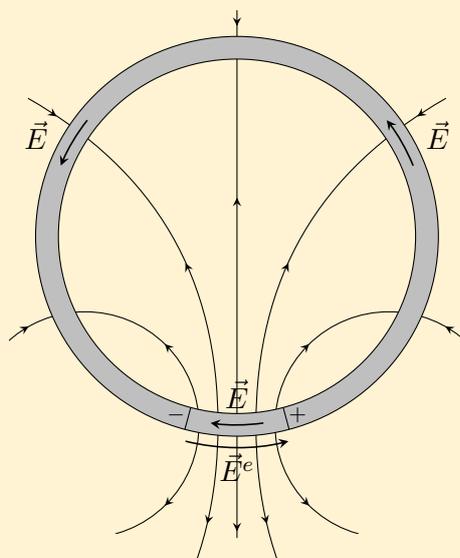


Fig. 4.9.1

4.10 Circuit oscillant

Dans le circuit oscillant considéré, le courant $J(t)$ est fonction du temps mais en tout instant il est identique dans tout le circuit.

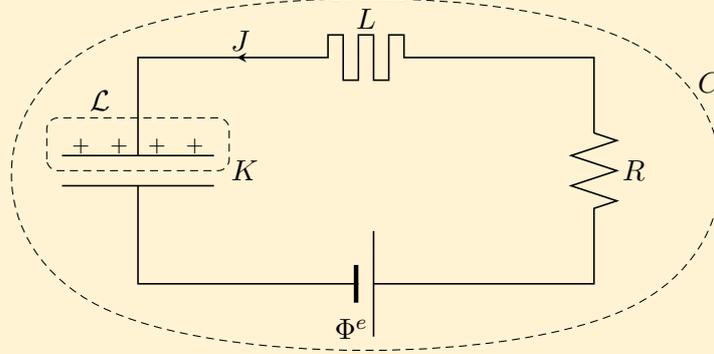


Fig. 4.10.1

L'énergie de ce circuit est donnée par (cf. sect. 2.11 et 3.12)

$$U = \frac{1}{2K}Q^2 + \frac{1}{2}LJ^2.$$

L'équation de continuité pour le courant

$$\partial_t q + \text{div} \vec{j} = 0.$$

appliquée au sous-système \mathcal{L} donne

$$\int_{\mathcal{P}} dV \text{div} \vec{j} + \partial_t \int_{\mathcal{P}} dV q = - \oint_{\mathcal{P}} (\overleftarrow{d\sigma}, \vec{j}) + \dot{Q} = -J + \dot{Q} = 0,$$

donc

$$J = \dot{Q}.$$

L'hypothèse de quasi-stationnarité du courant impose que le circuit ne rayonne pas d'énergie donc : $\oint_C (\overleftarrow{d\sigma}, \vec{S}) = 0$. Le bilan énergétique est alors simplement :

$$\begin{aligned} \dot{U}^{(em.)} &= P^{(int.)} \\ P^{(int.)} &= - \int_C dV (\vec{j}, \overleftarrow{E}) = - \int_C dV \frac{1}{\kappa_e} |\vec{j}|^2 + \int_C dV (\vec{j}, \overleftarrow{E}^e). \end{aligned}$$

Posons $dV = \sigma d\ell$ où σ est la section du circuit) et $|\vec{j}| = J/\sigma$; alors il vient

$$P^{(int.)} = \dot{U}^{(em)} = -J^2 R + J\phi^e.$$

Mais d'autre part

$$\dot{U}^{(em)} = \frac{1}{K} Q\dot{Q} + LJ\dot{J}$$

et alors, en identifiant ces deux expressions et en simplifiant par J (donc par \dot{Q}), nous obtenons

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{K}Q = \phi^e,$$

ce qui constitue l'équation différentielle du circuit, dont la solution nous donne son évolution au cours du temps. Nous distinguons deux cas.

1. Oscillation libres ($\phi^e = 0$)

La solution est de la forme

$$Q(t) = \Re\{Q_0 e^{-i\hat{\omega}t}\}.$$

On détermine $\hat{\omega}$ en remplaçant dans l'équation différentielle Q par cette expression. On obtient l'équation caractéristique

$$-\hat{\omega}^2 - i\gamma\hat{\omega} + \omega_0^2 = 0,$$

où $\gamma = R/L \geq 0$ et $\omega_0^2 = 1/KL$; alors, avec ces notations :

$$\hat{\omega} = -i\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

si $\gamma^2/4 < \omega_0^2$ (amortissement faible); la solution est

$$Q(t) = Q_0 e^{-(\gamma/2)t} \cos(\omega t + \delta) \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \geq 0.$$

2. Oscillation forcées ($\phi^e \neq 0$)

Supposons : $\phi^e = \Re\{\phi_0^e e^{-i\omega_e t}\}$ alors l'équation différentielle peut s'écrire

$$\ddot{Q} + \gamma\dot{Q} + \omega_0^2 Q = \frac{1}{L}\phi_0^e e^{-i\omega_e t}.$$

Une solution particulière de cette équation

$$Q(t) = \mathcal{Q}_0 e^{-i\omega_e t}$$

est obtenue en remplaçant dans l'équation différentielle $Q(t)$ par cette expression, on peut trouver

$$\mathcal{Q}_0 = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega_e^2) - i\gamma\omega_e} \frac{1}{L}\phi_0^e.$$

La solution générale s'obtient en ajoutant à cette solution particulière la solution trouvée en (1); mais après un certain temps, seule subsiste l'équation particulière, l'autre s'étant complètement amortie. On voit alors qu'il peut se présenter une résonance pour $\omega_0 = \omega_e$; en effet le carré de l'amplitude est

$$|\mathcal{Q}_0|^2 = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + \gamma^2\omega_e^2} \frac{1}{L^2}\phi_0^{e2}.$$

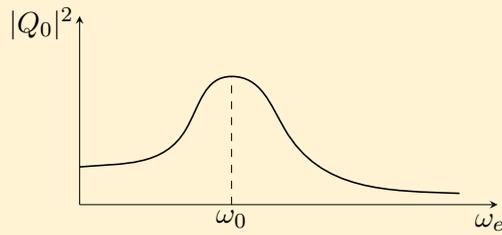


Fig. 4.10.2

4.11 Champs retardés et avancés

A la section 3.5. nous avons déterminé la valeur du champ $\vec{E}(\vec{x})$ créée par une distribution de charges fixes et la valeur du champ $H(\vec{x})$ créée par une distribution de courants stationnaires. Nous étions ainsi parvenu aux lois de Coulomb et de Biot-Savart. Dans cette section, nous allons procéder de manière analogue mais pour des distributions de charges et de courants arbitraires. Les équations différentielles de $\vec{E}(\vec{x}, t)$ et de $\vec{H}(\vec{x}, t)$ ont été établies à la section 4.4. : ce sont les deux *équations d'onde inhomogènes* :

$$\begin{aligned}\square \vec{E}(\vec{x}, t) &= \frac{C_e}{\epsilon} (\overrightarrow{\text{grad}} q + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{j})(\vec{x}, t) \\ \square \vec{H}(\vec{x}, t) &= -C_2 C_e \overleftarrow{\text{rot}} \vec{j}(\vec{x}, t).\end{aligned}$$

Pour intégrer ces équations, nous allons utiliser la méthode suivante.

Complément de mathématiques.

Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$\square \varphi(\vec{x}, t) = -\rho(\vec{x}, t).$$

La solution de cette équation linéaire avec second membre peut être représentée comme la solution générale $\varphi_h(\vec{x}, t)$ de l'équation homogène $\square \varphi(\vec{x}, t) = 0$ et d'une solution particulière $\varphi_1(\vec{x}, t)$ de l'équation complète, soit :

$$\varphi(\vec{x}, t) = \varphi_h(\vec{x}, t) + \varphi_1(\vec{x}, t).$$

Théorème. L'équation différentielle aux dérivées partielles :

$$\square \varphi(\vec{x}, t) = -\rho(\vec{x}, t)$$

admet comme solutions particulière une solution avancée et une solution retardée :

$$\varphi_{\text{avancée}}^{\text{retardée}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V dV(\vec{y}) \frac{1}{r} \rho\left(\vec{y}, t \mp \frac{r}{c}\right),$$

où : $r = |\vec{x} - \vec{y}|$.

Lemme préliminaire. On a

$$\square \frac{1}{r} \rho \left(\vec{y}, t \mp \frac{r}{c} \right) = 0 \quad \text{si } r \neq 0.$$

Démonstration du lemme. \vec{y} est considéré comme fixe, les dérivations se faisant par rapport à \vec{x} . Soit $g = g(r)$, nous savons que (cf. sect. 2.3)

$$\Delta_x g(r) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r g(r)).$$

Alors

$$\begin{aligned} \Delta_x \left(\frac{1}{r} \rho \left(\vec{y}, t \mp \frac{r}{c} \right) \right) &= \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} \rho \left(\vec{y}, t \mp \frac{r}{c} \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \rho \left(\vec{y}, t \mp \frac{r}{c} \right), \end{aligned}$$

la deuxième égalité provenant d'une propriété fondamentale des fonctions du type $f(t \mp r/c)$. On a donc

$$\left(\Delta_x - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \frac{1}{r} \rho \left(\vec{y}, t \mp \frac{r}{c} \right) = 0 \quad \text{si } r \neq 0.$$

Démonstration du théorème. Le volume d'intégration étant supposé fixe, nous pouvons écrire

$$\square \varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V dV(\vec{y}) \square_x \left(\frac{1}{r} \rho \left(\vec{y}, t \mp \frac{r}{c} \right) \right).$$

Partageons le volume V en deux parties : V_0 entourant \vec{x} et $V - V_0$ le reste.

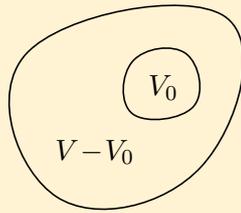


Fig. 4.11.1

L'équation précédente peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} \square_x \varphi(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi} \left(\underbrace{\int_{V-V_0}}_{=0 \text{ en vertu du lemme.}} + \int_{V_0} \right) dV(\vec{y}) \square_x \left(\frac{1}{r} \rho \left(\vec{y}, t \mp \frac{r}{c} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} dV(\vec{y}) \left(\Delta_x - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \left(\frac{1}{r} \rho \left(\vec{y}, t \mp \frac{r}{c} \right) \right). \end{aligned}$$

Si $\vec{y} \rightarrow \vec{x}$, alors $r \rightarrow 0$; développons $\rho(\vec{y}, t \mp r/c)$ en série de Taylor autour de $\vec{y} = \vec{x}$ ($r = 0$) en termes de r :

$$\rho\left(\vec{y}, t \mp \frac{r}{c}\right) = \rho(\vec{y}, t) \mp \frac{r}{1!} \partial_t \rho(\vec{y}, t) \cdot \frac{1}{c} + \frac{r^2}{2!} \partial_t^2 \rho(\vec{y}, t) \cdot \frac{1}{c^2} \mp \frac{r^3}{3!} \partial_t^3 \rho(\vec{y}, t) \cdot \frac{1}{c^3} + \dots$$

et donc :

$$\frac{1}{r} \rho\left(\vec{y}, t \mp \frac{r}{c}\right) = \frac{1}{r} \rho(\vec{y}, t) \mp \frac{1}{c} \partial_t \rho(\vec{y}, t) + \frac{1}{2!} \frac{1}{c^2} r \partial_t^2 \rho(\vec{y}, t) \mp \frac{1}{3!} \frac{1}{c^3} r^2 \partial_t^3 \rho(\vec{y}, t) + \dots$$

Nous savons que :

$$\Delta_x \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad \text{et} \quad \Delta_x r^n = n(n+1)r^{n-2}.$$

Comme V_0 peut être arbitrairement petit, nous pouvons introduire le développement en série sous le signe d'intégration; nous obtenons :

$$\square_x \varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} dV(\vec{y}) \left\{ -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{y}) \rho(\vec{y}, t) - \frac{1}{r} \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \rho(\vec{y}, t) \pm \frac{1}{c^3} \partial_t^3 \rho(\vec{y}, t) + \dots (\text{termes en } r, r^2, \dots) \right\}.$$

Le volume V_0 étant arbitrairement petit, nous pouvons écrire :

$$\int_{V_0} dV(\vec{y}) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{4\pi} d\Omega r^2 dr.$$

et nous voyons que dans l'intégrale tous les termes tendent vers 0 au moins comme r , sauf le premier. Nous obtenons donc, en vertu d'une propriété de la distribution de Dirac (cf. sect. 2.4)

$$\square_x \varphi(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} 4\pi \cdot \rho(\vec{x}, t).$$

Nous avons ainsi démontré que les solutions avancées et retardées vérifiaient l'équation différentielle.

Pour obtenir les solutions avancées et retardées des champs $\vec{E}(\vec{x}, t)$ et $\vec{H}(\vec{x}, t)$, il nous suffit d'appliquer le théorème ci-dessus. Nous obtenons immédiatement :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{avancé}}^{\text{retardé}}(\vec{x}, t) &= -\frac{C_e}{4\pi} \int_V dV(\vec{y}) \frac{1}{r} \left(\overrightarrow{\text{grad}}_y q + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{j} \right) \left(\vec{y}, t \mp \frac{r}{c} \right) \\ \vec{H}_{\text{avancé}}^{\text{retardé}}(\vec{x}, t) &= \frac{C_2 C_e}{4\pi} \int_V dV(\vec{y}) \frac{1}{r} \overleftrightarrow{\text{rot}}_y \vec{j} \left(\vec{y}, t \mp \frac{r}{c} \right). \end{aligned} \quad (4.11.1)$$

Dans le cas de charges fixes et de courants stationnaires, nous retrouvons les lois de Coulomb et de Biot-Savart.

La solution générale d'une des deux équations d'onde s'obtient en ajoutant à l'une de ces solutions particulières (avancée ou retardée), la solution générale de l'équation homogène. Cette solution, en général se détermine de façon à satisfaire les conditions du problème.

Interprétation physique

Considérons l'équation

$$\square\varphi(\vec{x}, t) = -\rho(\vec{x}, t),$$

$\rho(\vec{x}, t)$ est généralement appelé densité de source, elle engendre en tout instant-point le champ $\varphi(\vec{x}, t)$. La solution

$$\varphi_{\text{avancé}}^{\text{retardé}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int dV(\vec{y}) \frac{1}{r} \rho\left(\vec{y}, t \mp \frac{r}{c}\right)$$

dans laquelle (\vec{x}, t) représente l'instant-point auquel on calcule φ et $(\vec{y}, t \mp r/c)$ désigne l'instant-point courant dont la distance r et l'antériorité (resp. postériorité) temporelle t sont reliées par $r = -ct$ (resp. $r = +ct$) indique que les causes du champ φ , à savoir $\rho(\vec{y}, t \mp r/c)$ se *transmettent à la vitesse finie c* et non pas instantanément.

Plus généralement la source ρ étant la cause du champ φ , le champ retardé traduit l'existence d'une *causalité* du type habituel, du passé vers le futur, tandis que le champ avancé traduit la causalité inverse, qui on le sait est inconnue en physique.

En géométrie d'univers, le lieu du quadrivecteur $r^\alpha : \{\vec{y} - \vec{x}, \pm r/c\}$ est situé sur la nappe du cône d'univers de sommet (\vec{x}, t) .

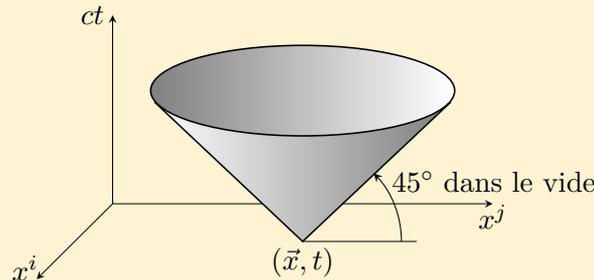


Fig. 4.11.2 Cône d'univers du point (\vec{x}, t) .

4.12 Rayonnement du dipôle électrique

Nous allons maintenant utiliser les résultats de la section précédente pour établir les équations régissant les « ondes hertziennes » et nous en déduisons la forme de l'énergie électromagnétique transportée par ces ondes ; cette énergie rayonnée s'exprime par le vecteur de Poynting. Ce problème étant compliqué, nous devons le résoudre par approximation.

Considérons un circuit oscillant, placé à l'origine et de « dimension \vec{y} » et calculons les champs $\vec{E}_{\text{av.}}^{\text{ret.}}(\vec{x}, t)$ et $\vec{H}_{\text{av.}}^{\text{ret.}}(\vec{x}, t)$ ainsi que le vecteur de Poynting $\vec{S}(\vec{x}, t)$ qu'il crée au point \vec{x} .

Nous allons nous restreindre au cas où les dimensions du système oscillant sont très petites en regard de $|\vec{x}|$, donc : $r = |\vec{x} - \vec{y}| \gg |\vec{y}|$. Pratiquement, pour nos calculs, cela revient à dire que $x \rightarrow \infty$.

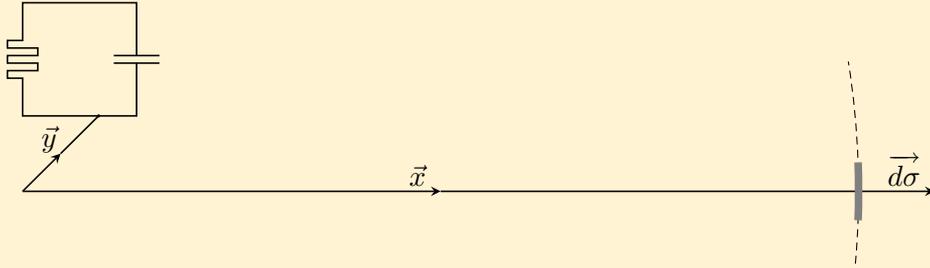


Fig. 4.12.1

Puisque $r = |\vec{x} - \vec{y}|$, on a le développement

$$r^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x}|^2 \left(1 - 2 \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}|^2} + \underbrace{\frac{|\vec{y}|^2}{|\vec{x}|^2}}_{\text{négligeable}} + \dots \right).$$

Posons : $|\vec{x}| = x$ et $|\vec{y}| = y$. Par le développement en série, nous trouvons

$$\left(1 - 2 \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{x^2} \right)^{1/2} = 1 - \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{x^2} + \dots$$

Posons : $Y_x = (\vec{y}, [\vec{x}])$ où $[\vec{x}]$ est le vecteur unité sur \vec{x} . Alors

$$\left(1 - 2 \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{x^2} \right)^{1/2} = 1 - \frac{1}{x} Y_x + \dots \quad \text{et} \quad r = x \left(1 - \frac{1}{x} Y_x + \dots \right)$$

Puisque $x \rightarrow \infty$, alors

$$r = x - Y_x.$$

D'autre part

$$r^{-1} = x^{-1} \left(1 + \frac{1}{x} Y_x - \dots \right),$$

et, puisque $x \rightarrow \infty$,

$$r^{-1} = x^{-1}.$$

Posons encore $t_x = t \mp (x/c)$ et donc

$$t \mp \frac{r}{c} = t_x \pm \frac{Y_x}{c}.$$

Comme par hypothèse Y_x est très petit et x est constant lors de l'intégration, on peut développer le champ

$$\vec{E}_{\text{av.}}^{\text{ret.}}(\vec{x}, t) = -\frac{C_e}{4\pi\epsilon} \int_V dV(\vec{y}) \frac{1}{r} \left(\overrightarrow{\text{grad}}_y q + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{j} \right) \left(\vec{y}, t \mp \frac{r}{c} \right)$$

en série de Taylor sous le signe d'intégration autour de t_x en termes de Y_x et obtenir

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{av.}}^{\text{ret.}}(\vec{x}, t) = & -\frac{C_e}{4\pi\epsilon x} \left\{ \int_V dV(\vec{y}) \left(\overrightarrow{\text{grad}}_y q \pm \frac{1}{c} Y_x \partial_t \overrightarrow{\text{grad}}_y q \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2c^2} Y_x^2 \partial_t^2 \overrightarrow{\text{grad}}_y q \pm \frac{1}{3!c^3} Y_x^3 \partial_t^3 \overrightarrow{\text{grad}}_y q + \dots \right) (\vec{y}, t_x) \right. \\ & \left. + \int_V dV(\vec{y}) \left(\frac{1}{c^2} \partial_t \vec{j} \pm \frac{1}{c^3} Y_x \partial_t^2 \vec{j} + \dots \right) (\vec{y}, t_x) \right\}. \end{aligned}$$

Nous connaissons (par l'analyse vectorielle) la formule d'intégration par partie

$$\int_V dV \varphi \overrightarrow{\text{grad}} \psi = \oint_V \overleftarrow{d\sigma} \varphi \psi - \int_V dV \psi \overrightarrow{\text{grad}} \varphi.$$

Appliquons-la à la première de nos intégrales en nous souvenant que

a) on a les formules

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}_y Y_x &= \overrightarrow{\text{grad}}_y (\vec{y}, [\vec{x}]) = [\vec{x}] \\ \overrightarrow{\text{grad}}_y Y_x^2 &= \dots = 2Y_x [\vec{x}] \\ \overrightarrow{\text{grad}}_y Y_x^3 &= \dots = 3Y_x^2 [\vec{x}] \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

b) sur la surface fermée limitant tout volume V contenant le système oscillant, nous avons : $q(\vec{x}, t) = 0$; par conséquent, l'intégrale de surface est nulle.

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{av.}}^{\text{ret.}}(\vec{x}, t) &= -\frac{C_e}{4\pi\epsilon} \frac{1}{x} \left\{ \int_V dV(\vec{y}) \left(0 \mp [\vec{x}] \frac{1}{c} \partial_t q - [\vec{x}] Y_x \frac{1}{c^2} \partial_t^2 q \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \mp [\vec{x}] Y_x^2 \frac{1}{2c^3} \partial_t^3 q - \dots \right) (\vec{y}, t_x) \right. \\ &\quad \left. + \int_V dV(\vec{y}) \left(\frac{1}{c^2} \partial_t \vec{j} \pm \frac{1}{c^3} Y_x \partial_t^2 \vec{j} + \dots \right) (\vec{y}, t_x) \right\}. \end{aligned}$$

Pour notre système ne comprenant qu'un oscillateur, on a

$$\dot{Q} = \int_V dV(\vec{y}) \partial_t q(\vec{x}, t) = 0.$$

Moment dipolaire.

Par définition, le *moment dipolaire* est l'expression

$$p(t) = \int_V dV(\vec{y}) \vec{y} q(\vec{y}, t). \quad (4.12.1)$$

Nous avons

$$\dot{\vec{p}} = \int_V dV(\vec{y}) \vec{y} \partial_t q(\vec{y}, t),$$

qui devient, par l'équation de continuité pour la charge : $\partial_t q + \text{div} \vec{j} = 0$,

$$\dot{\vec{p}} = - \int_V dV(\vec{y}) \vec{y} \text{div} \vec{j}(\vec{y}, t),$$

soit encore

$$\dot{p}_i = - \int_V dV(\vec{y}) y_i \partial_k j^k(\vec{y}, t).$$

En faisant une intégration par partie et en négligeant l'intégrale de surface pour laquelle $j^k = 0$, nous obtenons

$$\dot{p}_i = \int_V dV(\vec{y}) j^k \partial_k y_i(\vec{y}, t).$$

Or $\partial_k y_i = g_{ki}$, donc $j^k g_{ki} = j_i$, d'où finalement

$$\dot{p}_i(t) = \int_V dV(\vec{y}) j_i(\vec{y}, t),$$

et ensuite

$$\ddot{p}_i(t) = \int_V dV(\vec{y}) \partial_t j_i(\vec{y}, t), \text{ etc.}$$

En *première approximation* nous pouvons ne conserver que le premier terme non nul de chacune des deux intégrales figurant dans l'expression du champ $\vec{E}_{\text{av.}}^{\text{ret.}}(\vec{x}, t)$. Ces deux termes, d'après la définition du moment électrique dipolaire et de ses dérivées, sont du même ordre en Y_x , c'est-à-dire d'ordre un. Cette approximation est d'autant meilleure que $x \gg Y_x$. En effet, sous cette même hypothèse les termes d'ordre supérieur à un en Y_x deviennent négligeables en regard de ceux d'ordre un puisque lors de cette intégration, tous les termes sont de la même forme $(Y_x/x)^n$ (n -ième ordre).

Nous écrivons donc

$$\vec{E}_{\text{av.}}^{\text{ret.}}(\vec{x}, t) = -\frac{C_e}{4\pi\epsilon} \frac{1}{x} \int_V dV(\vec{y}) \left[-\frac{1}{c^2} Y_x[\vec{x}] \partial_t^2 q + \frac{1}{c^2} \partial_t j \right](\vec{y}, t_x).$$

Alors, en utilisant la définition de $p(t)$ et de ses dérivées, nous obtenons

$$\vec{E}_{\text{av.}}^{\text{ret.}}(\vec{x}, t) = -\frac{C_e}{4\pi\epsilon} \frac{1}{x} \frac{1}{c^2} (-[\vec{x}] \ddot{p}_x + \ddot{\vec{p}})(t_x).$$

Mais : $[\vec{x}] \ddot{p}_x = (\ddot{\vec{p}}, [\vec{x}])[\vec{x}]$. Posons :

$$\ddot{\vec{p}}_{\perp} = \ddot{\vec{p}} - [\vec{x}] \ddot{p}_x \quad \text{car} \quad (\ddot{\vec{p}}_{\perp}, [\vec{x}]) = 0.$$

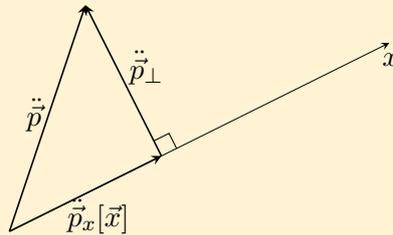


Fig. 4.12.2

Ainsi dans cette approximation, dite *approximation dipolaire*, l'expression du champ $\vec{E}_{\text{av.}}^{\text{ret.}}(\vec{x}, t)$ créé par le circuit oscillant au *point-instant* $(\vec{y}, t \mp (r/c))$ est

$$\vec{E}_{\text{av.}}^{\text{ret.}}(\vec{x}, t) = -\frac{C_e}{4\pi\epsilon} \frac{1}{x} \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{p}}_{\perp}(t_x).$$

Nous voyons donc, qu'à de grandes distances du circuit oscillant tout se passe comme si celui-ci était un dipôle électrique rayonnant. Pour le champ magnétique :

$$\vec{H}_{\text{av.}}^{\text{ret.}}(\vec{x}, t) = \frac{C_2 C_e}{4\pi} \int_V dV(\vec{y}) \frac{1}{r} \text{rot}_{\vec{y}} \vec{j}\left(\vec{y}, t \mp \frac{r}{c}\right),$$

nous opérons de manière analogue. Il vient par un développement en série de Taylor

$$\vec{H}_{\text{av.}}^{\text{ret.}}(\vec{x}, t) = \frac{C_2 C_e}{4\pi} \int_V dV(\vec{y}) \left((\text{rot} \vec{j} \pm \frac{1}{c} Y_x \text{rot} \partial_t \vec{j} + \frac{1}{2c^2} Y_x^2 \text{rot} \partial_t^2 \vec{j} \pm \dots) (\vec{y}, t_x) \right)$$

car, par intégration sur la surface entourant V , on a $\int_V dV \text{rot} \vec{j} = \oint_V [d\vec{\sigma} \wedge \vec{j}] = 0$. En opérant une intégration par partie, selon la formule :

$$\int_V dV \varphi \text{rot} \vec{a} = \oint_V [d\vec{\sigma} \wedge \varphi \vec{a}] + \int_V dV [\vec{a} \wedge \text{grad} \varphi]$$

et, en négligeant l'intégrale de surface, il vient :

$$\vec{H}_{\text{av.}}^{\text{ret.}}(\vec{x}, t) = \frac{C_2 C_e}{4\pi} \frac{1}{x} \int_V dV(\vec{y}) \left(\pm \frac{1}{c} [\partial_t \vec{j} \wedge [\vec{x}]] + \frac{1}{c^2} Y_x [\partial_t^2 \vec{j} \wedge [\vec{x}]] \pm \dots \right) (\vec{y}, t_x).$$

Donc dans l'approximation dipolaire, le champ $\vec{H}_{\text{av.}}^{\text{ret.}}(\vec{x}, t)$ s'écrit :

$$\vec{H}_{\text{av.}}^{\text{ret.}}(\vec{x}, t) = \mp \frac{C_2 C_e}{4\pi} \frac{1}{x c} [[\vec{x}] \wedge \ddot{\vec{p}}_{\perp}] (t_x). \quad (4.12.2)$$

Ces résultats nous suggèrent la figure :

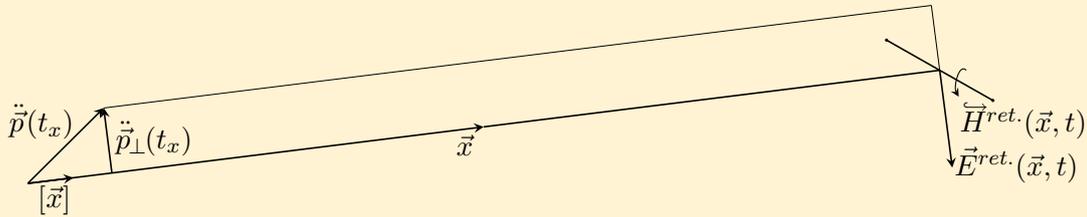


Fig. 4.12.3

Remarquons que par définition même de notre système électromagnétique, il n'existe aucun autre champ que ceux écrits ci-dessus.

Calculons maintenant le vecteur de Poynting à l'instant-point (\vec{x}, t) . Nous savons que

$$\vec{S} = \frac{1}{C_2 C_e} [\vec{E} \wedge \vec{H}].$$

En remplaçant \vec{E} et \vec{H} par leur expression, nous obtenons :

$$\vec{S}_{\text{av.}}^{\text{ret.}}(\vec{x}, t) = \pm \frac{C_e}{(4\pi)^2 \epsilon c^3} \frac{1}{x^2} [\ddot{\vec{p}}_{\perp} \wedge [[\vec{x}] \wedge \ddot{\vec{p}}_{\perp}]] (t_x),$$

c'est-à-dire :

$$\vec{S}_{\text{av.}}^{\text{ret.}}(\vec{x}, t) = \pm \frac{C_e}{(4\pi)^2 \epsilon c^3} \frac{1}{x^2} [\vec{x}] |\ddot{\vec{p}}_{\perp}|^2 \left(t \mp \frac{x}{c} \right). \quad (4.12.3)$$

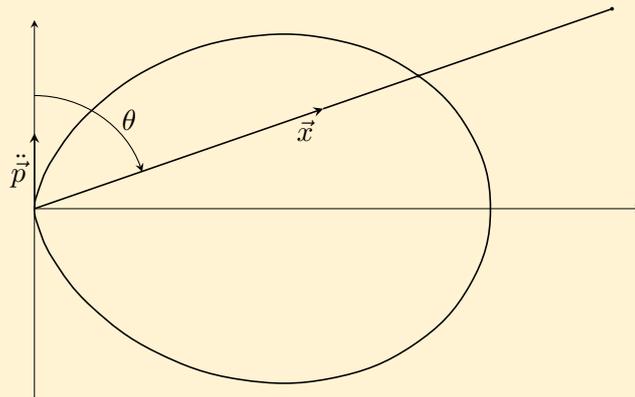


Fig. 4.12.4 Intensité du rayonnement en fonction de θ

Nous avons en effet :

$$|\ddot{\vec{p}}_{\perp}|^2 = |\ddot{\vec{p}}|^2 (\sin \theta)^2$$

Lorsque nous déplaçons un circuit oscillant, nous obtenons une antenne.

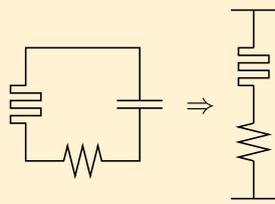


Fig. 4.12.5

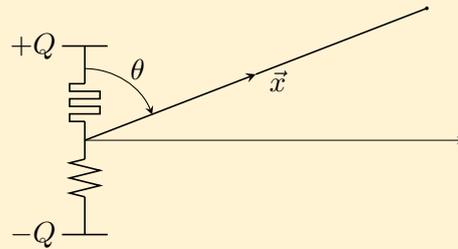


Fig. 4.12.6

Le condensateur ainsi traité se décharge à travers l'espace, ce qui provoque le rayonnement.

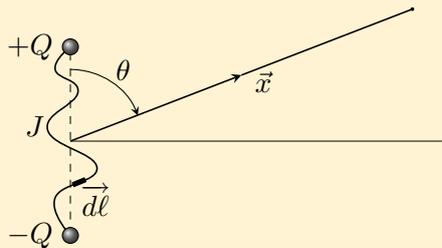


Fig. 4.12.7

Une antenne émettrice étant généralement verticale, nous constatons, en examinant l'expression de \vec{S} , que le rayonnement est nul au zénith ($\sin 0 = 0$) et maximum à l'horizon ($\sin(\pi/2) = 1$). Calculons maintenant le *rayonnement total du dipôle*, c'est-à-dire le courant d'énergie traversant une surface fermée entourant celui-ci. Les champs $\vec{E}_{av.}^{ret.}(\vec{x}, t)$ et $\vec{H}_{av.}^{ret.}(\vec{x}, t)$ calculés constituent des ondes sphériques, nous allons pour simplifier les calculs considérer comme surface fermée une sphère. L'élément de surface d'une sphère est donné par :

$$d\vec{\sigma} = d\Omega |\vec{x}|^2 \hat{x} \quad \text{avec} \quad d\Omega = d\varphi d(\cos \theta) \text{ élément d'angle solide.}$$

Alors :

$$\oint_V (\overleftarrow{d\sigma}, \vec{S}_{\text{av.}}^{\text{ret.}}(\vec{x}, t)) = \pm \frac{C_e}{(4\pi)^2 \epsilon c^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} |\ddot{\vec{p}}_{\perp}|^2 \left(\vec{y}, t \mp \frac{x}{c} \right) d(\cos \theta).$$

En remplaçant $\ddot{\vec{p}}_{\perp}$ par son expression en fonction de $\sin \theta$, il vient (en posant $z = \cos \theta$)

$$\begin{aligned} \oint_V (\overleftarrow{d\sigma}, \vec{S}_{\text{av.}}^{\text{ret.}}(\vec{x}, t)) &= \pm \frac{C_e}{(4\pi)^2 \epsilon c^3} |\ddot{\vec{p}}_{\perp}|^2 \left(\vec{y}, t \mp \frac{x}{c} \right) 2\pi \int_{-1}^{+1} dz (1 - z^2) \\ &= \frac{C_e}{(4\pi)^2 \epsilon c^3} |\ddot{\vec{p}}|^2 \left(\vec{y}, t \mp \frac{x}{c} \right) 2\pi \underbrace{\left| z - \frac{z^3}{3} \right|_{-1}^{+1}}_{4/3}, \end{aligned}$$

et donc

$$\oint_V (\overleftarrow{d\sigma}(\vec{x}), \vec{S}_{\text{av.}}^{\text{ret.}}(\vec{x}, t)) = \pm \frac{C_e}{4\pi \epsilon c^3} \frac{2}{3} |\ddot{\vec{p}}|^2 \left(t \mp \frac{x}{c} \right). \quad (4.12.4)$$

Nous remarquons qu'aussi grand que soit le rayon de la sphère, il y a toujours autant d'énergie qui en sort. C'est là une propriété de l'énergie rayonnée.

Considérons à nouveau notre circuit oscillant et supposons qu'en chaque instant le courant (non fermé!) $J(t)$ y est le même en tout point. Nous avons

$$\dot{\vec{p}}(t) = \int dV \vec{j} \quad \text{avec} \quad dV \vec{j} = J d\vec{\ell}$$

et donc

$$\dot{\vec{p}}(t) = \int d\vec{\ell} = \vec{\ell} J \quad \text{avec} \quad \ddot{\vec{p}}(t) = \vec{\ell} \dot{J}.$$

Par suite

$$\oint_V (\overleftarrow{d\sigma}, \vec{S}_{\text{av.}}^{\text{ret.}}) = \pm \frac{C_e}{4\pi \epsilon c^3} \frac{2}{3} |\ddot{\vec{p}}|^2 = \pm \frac{C_e}{4\pi \epsilon c^3} \frac{2}{3} \ell^2 \dot{J}^2.$$

Nous constatons que le circuit déplié rayonne proportionnellement à $\vec{\ell} \dot{J}$.

Supposons un courant alternatif sinusoïdal $J \sim J_0 \cos \omega t$. Par définition du courant efficace : $\bar{J}^2 = \frac{1}{2} J_0^2$ et $\bar{J}^2 = \omega^2 \bar{J}^2$ avec $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, λ = longueur d'onde du courant. Le bilan d'énergie du dipôle est alors

$$\dot{U} = -R J^2 + \phi^e J \mp \oint (d\vec{\sigma}, \vec{S})$$

soit, en termes de valeurs efficaces,

$$\bar{\dot{U}} = -R \bar{J}^2 + \bar{\phi}^e \bar{J} \mp R_{\text{rad}} \bar{J}^2.$$

Résistance de rayonnement. On appelle l'expression

$$R_{(\text{rad.})} = \frac{2\pi}{3\epsilon c} \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2$$

la résistance de rayonnement d'un dipôle. En unité Giorgi, $C_e = 1$, $\epsilon = 1/9 \cdot 10^9 4\pi$ et $c_0 = 3 \cdot 10^8$ (vide), et alors

$$R_{(rad.)} = \frac{2\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 4\pi}{3 \cdot 3 \cdot 10^8} \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2$$

$$R_{(rad.)} = 790 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 [\Omega].$$

4.13 Rayonnement du dipôle magnétique

Considérons à nouveau le problème du paragraphe précédent, mais en examinant cette fois non plus les termes d'ordre un en Y_x du développement en série des champs $\vec{E}_{av.}^{ret.}(\vec{x}, t)$ et $\vec{H}_{av.}^{ret.}(\vec{x}, t)$, mais les termes d'ordre deux.

Nous avons donc :

$$\vec{E}_{av.}^{ret.}(\vec{x}, t) = -\frac{C_e}{4\pi\epsilon} \frac{1}{x} \int_V dV(\vec{y}) \left[\mp \frac{1}{2} [\vec{x}] \frac{1}{c^3} Y_x^2 \partial_t^3 q \pm \frac{1}{c^3} Y_x \partial_t^2 \vec{j} \right] (\vec{y}, t_x)$$

$$\vec{H}_{av.}^{ret.}(\vec{x}, t) = \frac{C_2 C_e}{4\pi} \frac{1}{x} \int_V dV(\vec{y}) \frac{1}{2c^2} Y_x [\partial_t^2 \vec{j} \wedge [\vec{x}]] (\vec{y}, t_x).$$

Moment magnétique dipolaire.

On appelle l'expression

$$\vec{m}(t) = \frac{1}{2} \int_V dV(\vec{y}) [\vec{y} \wedge \vec{j}(\vec{y}, t_x)] \quad (4.13.1)$$

le moment magnétique dipolaire. Nous avons

$$\dot{\vec{m}}(t) = \frac{1}{2} \int_V dV(\vec{y}) [\vec{y} \wedge \partial_t \vec{j}(\vec{y}, t)], \quad \ddot{\vec{m}}(t) = \dots$$

Il est facile d'exprimer les deux champs ci-dessus en termes du moment magnétique et de ses dérivées :

a) Champ $\vec{E}_{av.}^{ret.}(\vec{x}, t)$

En vertu de la définition du moment électrique dipolaire, nous avons

$$\frac{1}{2} \int_V dV([\vec{x}] Y_x^2 \partial_t^3 q) = \int_V dV Y_x (\partial_t^2 \vec{j}, [\vec{x}]) [\vec{x}],$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_V dV \left[\mp [\vec{x}] \frac{1}{2} Y_x^2 \partial_t^3 q \pm Y_x \partial_t^2 \vec{j} \right] &= \int_V dV \left[\mp Y_x (\partial_t^2 \vec{j}, [\vec{x}]) [\vec{x}] \pm Y_x \partial_t^2 \vec{j} \right] \\ &= \int_V dV \left(\pm Y_x (\partial_t^2 \vec{j})_{\perp} \right). \end{aligned}$$

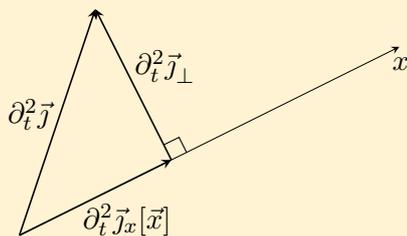


Fig. 4.13.1

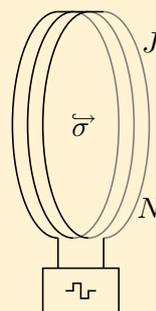


Fig. 4.13.2

D'autre part, nous connaissons la relation vectorielle : $[[\vec{a} \wedge \vec{b}] \wedge \vec{a}] = \vec{b}|\vec{a}|^2$, donc

$$\int_V dV (\pm Y_x (\partial_t^2 \vec{j})_\perp) = \int_V dV (\pm Y_x [[\vec{x} \wedge (\partial_t^2 \vec{j})_\perp] \wedge [\vec{x}]]).$$

Le champ $\vec{E}_{\text{av.}}^{\text{ret.}}(\vec{x}, t)$ s'écrit alors

$$\vec{E}_{\text{av.}}^{\text{ret.}}(\vec{x}, t) = -\frac{C_e}{4\pi\epsilon} \frac{1}{x} \left(\pm \frac{2}{c^3} [\ddot{\vec{m}}_\perp \wedge [\vec{x}]](t_x) \right),$$

c'est-à-dire,

$$\vec{E}_{\text{av.}}^{\text{ret.}}(\vec{x}, t) = \mp \frac{C_e}{4\pi\epsilon} \frac{1}{x} \frac{2}{c^3} [\ddot{\vec{m}}_\perp \wedge [\vec{x}]](t_x). \quad (4.13.2)$$

b) Champ $\vec{H}_{\text{av.}}^{\text{ret.}}(\vec{x}, t)$

Nous obtenons immédiatement

$$\vec{H}_{\text{av.}}^{\text{ret.}}(\vec{x}, t) = -\frac{C_2 C_e}{4\pi} \frac{1}{x} \frac{2}{c^2} \ddot{\vec{m}}_\perp(t_x). \quad (4.13.3)$$

c) Vecteur de Poynting créé par ces deux champs

A partir de l'expression

$$\vec{S} = \frac{1}{C_2 C_e} [\vec{E} \wedge \vec{H}]$$

et, en y remplaçant les champs par leur expression, nous obtenons

$$\vec{S}_{\text{av.}}^{\text{ret.}}(\vec{x}, t) = \pm \frac{C_e}{(4\pi)^2 \epsilon c^5} \frac{1}{x^2} 4 \left[[\ddot{\vec{m}}_\perp \wedge [\vec{x}]] \wedge \ddot{\vec{m}}_\perp \right](t_x),$$

c'est-à-dire

$$\vec{S}_{\text{av.}}^{\text{ret.}}(\vec{x}, t) = \pm \frac{4C_e}{(4\pi)^2 \epsilon c^5} \frac{1}{x^2} [\vec{x}] |\ddot{\vec{m}}_\perp|^2 \left(t \mp \frac{x}{c} \right). \quad (4.13.4)$$

Cette expression est utile dans le cas d'un système formé d'une *antenne à cadre*, où n'intervient pas de dipôle électrique.

Le rayonnement d'un dipôle magnétique au travers d'une sphère le contenant se calcule de la même façon que pour le dipôle électrique. Nous obtenons

$$\oint_V (\vec{d}\vec{\sigma}(\vec{x}), \vec{S}_{\text{av.}}^{\text{ret.}}(\vec{x}, t)) = \pm \frac{C_e}{4\pi\epsilon c^5} \frac{4}{3} \ddot{\vec{m}}^2 \left(t \mp \frac{x}{c} \right). \quad (4.13.5)$$

Considérons notre circuit magnétique formé de N spires dans lesquelles circule un courant J identique partout en chaque instant.

$$\vec{m}(t) = NJ \frac{1}{2} \int_V dV [\vec{y} \wedge \vec{j}] \quad \text{avec} \quad dV \vec{j} = NJ d\vec{\ell},$$

donc

$$\vec{m} = NJ \frac{1}{2} \int [\vec{y} \wedge d\vec{\ell}] = NJ\sigma,$$

où σ est l'aire d'une spire. On a alors $\dot{\vec{m}}(t) = N\dot{\vec{J}}\sigma$ et alors

$$\oint_V (\overleftarrow{d}\sigma, \vec{S}_{\text{av.}}^{\text{ret.}}) = \pm \frac{C_e}{4\pi\epsilon c^5} \frac{4}{3} N^2 |\sigma|^2 \ddot{j}^2.$$

Supposons un courant sinusoïdal $J \sim J_0 \cos \omega t$, alors $\ddot{J} = -\omega^2 J$ avec $\omega = 2\pi c/\lambda$. Pour un tel courant, le bilan d'énergie peut s'écrire

$$\dot{U} = -RJ^2 + \phi^e J \mp R_{(\text{rad.})} J^2.$$

Résistance de rayonnement (dipolaire magnétique).

On appelle l'expression

$$R_{(\text{rad.})} = \frac{4\pi C_e \cdot 4\pi^2 (N\sigma)^2}{3\epsilon c \lambda^4}$$

la résistance de rayonnement pour un dipôle magnétique. En unité Giorgi :

$$R_{(\text{rad.})} = 395 \frac{(4\pi N\sigma)^2}{\lambda^4} [\Omega].$$

Remarques

- 1) Suivant les problèmes, les approximations dipolaires faites dans ce cours ne sont pas suffisamment précises. Il faut alors considérer les termes suivants du développement en série : quadrupolaire, ... multipolaires. Ces questions particulières sont traitées en télécommunication.
- 2) Lorsque le système oscillant n'est composé que d'un seul *électron*, il n'y a pas d'approximation à faire : nous avons directement $\vec{p} = e \cdot \vec{v}$ car $\vec{j} = e\vec{v}$.

Index

A

aimant, [92](#)
analyse vectorielle, [2](#)

B

boule chargée, [9](#)

C

capacité, [66](#)
champ électrique, [4](#)
champ de déplacement, [2](#)
champ de polarisation, [60](#)
champ magnétique, [70](#)
champs retardés et avancés, [138](#)
charge électrique, [1](#)
charge d'un conducteur, [17](#)
charge et courant, [112](#)
charge ponctuelle
à l'intérieur d'un conducteur, [44](#)
circuit oscillant, [136](#)
coefficient d'induction mutuelle, [104](#)
coefficient d'induction, [103](#)
coefficient d'influence, [66](#)
coefficient de self-induction, [104](#)
condensateur, [66](#)
condition d'extremum, [5](#)
condition de minimum, [6](#)
conditions d'équilibre, [4](#)
conducteur, [16](#)
conductibilité électrique, [132](#)
constant diélectrique rigide, [21](#)
constante diélectrique, [21](#)
couche double, [57](#)
courant électrique, [69](#)

D

densité d'énergie électromagnétique, [108](#)
densité de charge, [1](#)
densité de charges apparentes, [60](#)
densité de charges fictives, [60](#)

densité de charges superficielles
apparentes, [61](#)
densité de charges superficielles
fictives, [61](#)
densité de courant, [70](#)
densité de force de Lorentz, [129](#)
densité de polarisation, [53](#)
densité de puissance, [108](#)
densité superficielle de charge, [30](#)
déplacement conservatif de la charge, [15](#)
diamagnétique, [92](#)
distribution de Dirac, [38](#)
divergence superficielle de champ, [30](#)
Drehmoment, [25](#)

E

électrostatique linéaire, [7](#)
énergie électrostatique, [3](#)
énergie magnétostatique, [94](#)
équation de Poisson, [33](#)
équation différentielle de Legendre, [43](#)
équations d'onde, [114](#)
équations de Maxwell, [109](#)
équipotential, [20](#)
espace homogène, [7](#)
espace isotrope, [7](#)

F

ferromagnétique, [92](#)
flux magnétique, [91](#)
fonction de Green, [47](#)
force électrostatique, [13](#)
force sur une charge rigide, [11](#)

G

groupe de Lorentz, [127](#)
groupe de Poincaré, [127](#)

H

hystérèse, [92](#)

I

induction électrique, 2
 induction magnétique, 76
 intensité de courant, 70

L

laplacien en coordonnées
 curvilignes orthogonales, 36
 laplacien en coordonnées
 cylindro-polaire, 37
 laplacien en coordonnées sphériques, 36
 loi d'induction, 2
 loi d'induction sous forme locale, 3
 loi d'Ohm, 131
 loi de Biot-Savart, 81
 loi de Coulomb, 13
 loi de force magnétique, 79
 loi de Kirchhoff, 134

M

métrique pseudo-euclidienne, 126
 magnétostatique, 92
 modèle dipolaire, 62
 moment des forces, 25
 moment dipolaire, 64

O

oscillation forcée, 137
 oscillation libre, 137

P

paramagnétique, 92
 perméabilité magnétique, 92
 polarisabilité d'un corps, 61
 potentiel constant sur la surface
 d'un conducteur, 20
 potentiel de Coulomb, 50

potentiel de double couche, 53
 potentiel scalaire, 6
 potentiel-vecteur, 79
 problème de Dirichlet, 33
 produit vectoriel, 58

Q

quantité de mouvement, 116

R

rayonnement du dipôle électrique, 141
 rayonnement du dipôle magnétique, 148
 relation phénoménologique, 4
 relativité restreinte, 124

S

surface à polarisation constante, 56
 système électrostatique, 3

T

tenseur de Maxwell
 électromagnétique, 129
 tenseur de Maxwell électrostatique, 26
 tenseur de Maxwell magnétique, 99
 tenseur diélectrique, 7
 théorème de Gauss, 3
 théorème de Green, 5
 théorème de Green II, 48
 transformation de jauge, 103
 transformation de Legendre, 27
 travail d'induction, 88

V

variation de la charge, 12
 vecteur axial, 58
 vecteur axial de rotation, 24
 vecteur de Poynting, 108