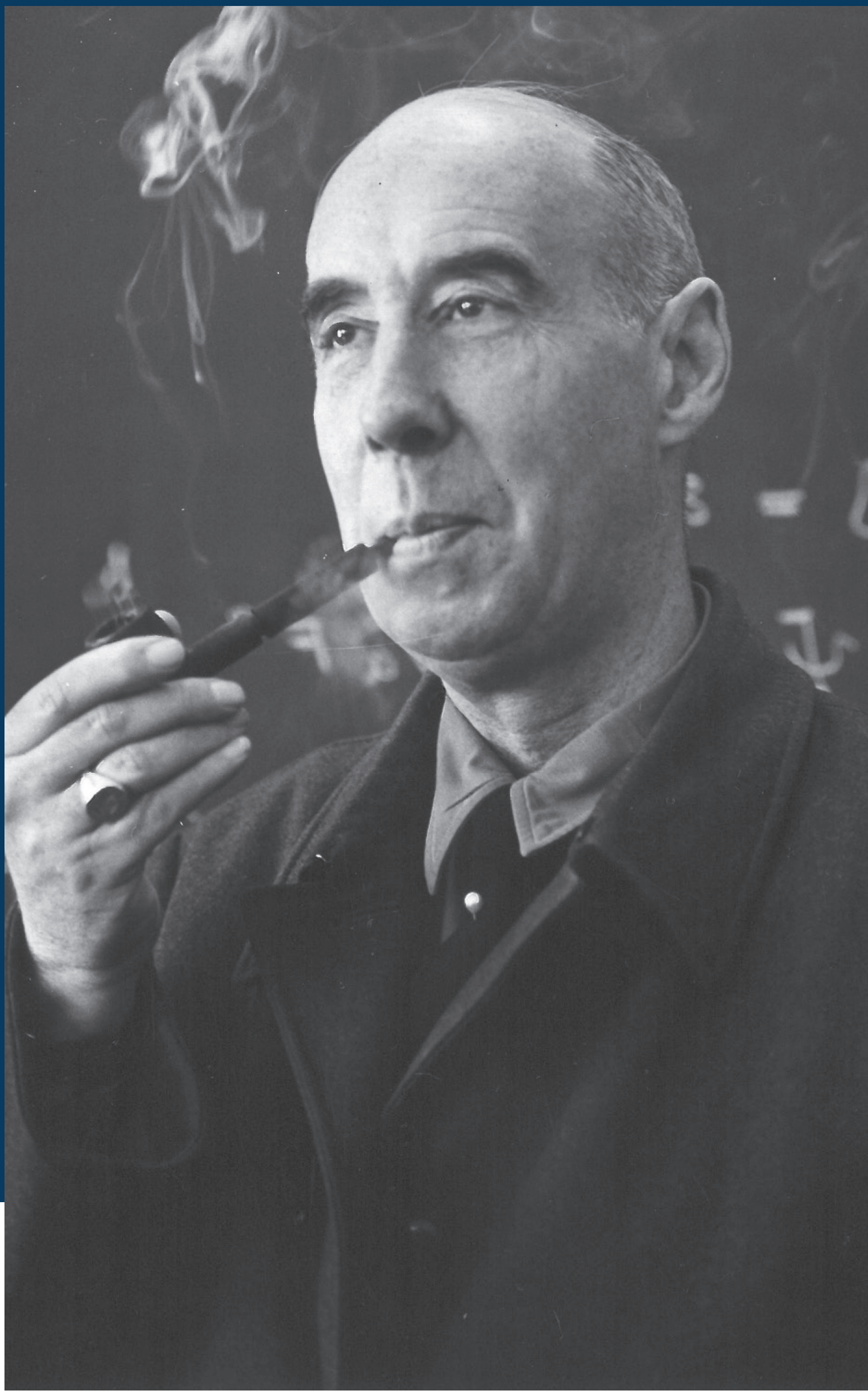
Ernst C. G. Stueckelberg

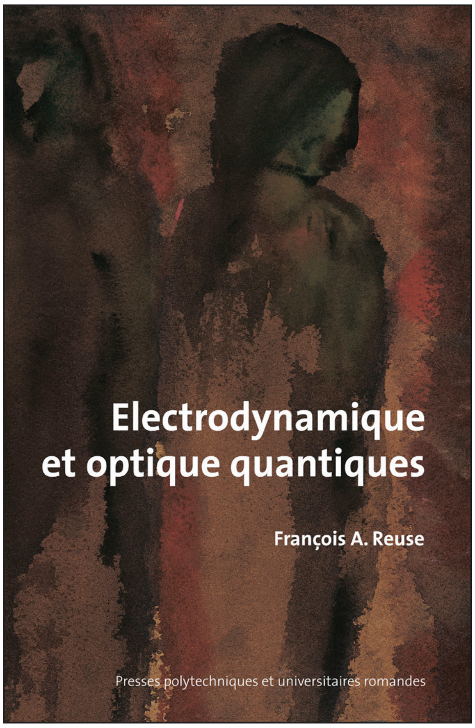
Relativité générale

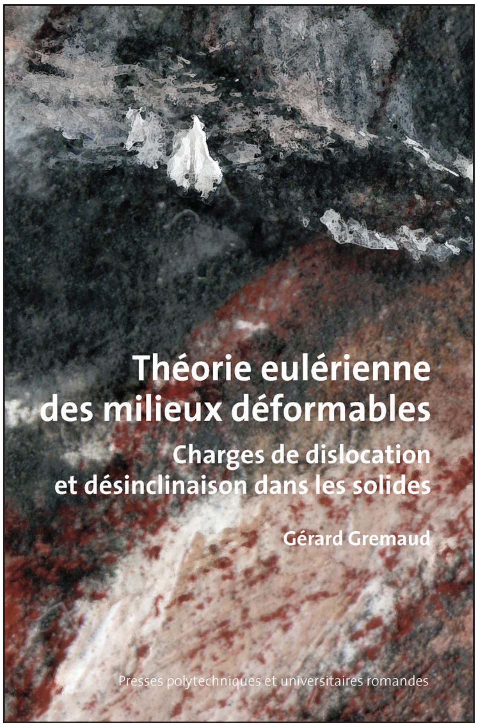


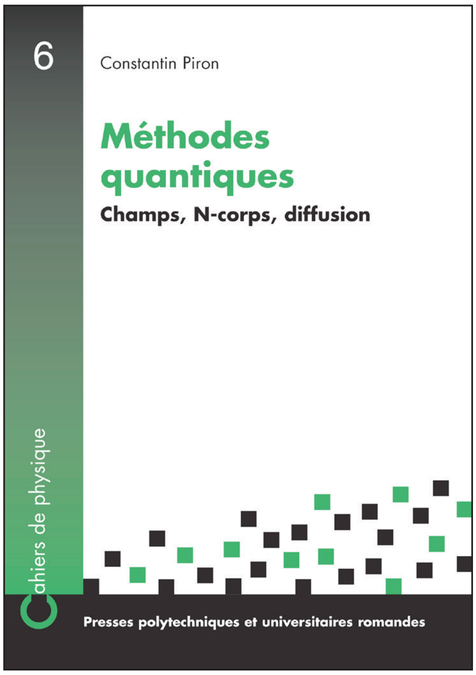
Livre IV

Presses polytechniques et universitaires romandes www.ppur.org

Chez le même éditeur







Presses polytechniques et universitaires romandes

Livre IV

Relativité générale

Table des matières

Chapitre 1

Le référentiel accéléré

Préambule

Le principe d'équivalence qui exprime que le quotient de la charge gravifique par la masse inerte est égal à 1 fait l'ojet de la première section. La section 2, comme première ébauche à l'étude de la relativité générale, examine le référentiel accéléré en relativité restreinte et profite de cette occasion pour énoncer le principe d'équivalence. La section 3 étudie la métrique sur une ligne $x^i =$ constant et montre que les référentiels (coordonnées) doivent être curvilignes. La section 4 définit un tenseur en coordonnées curvilignes. La section 5 énonce alors un principe de variation, ce qui permet de trouver les équations de mouvement d'un point matériel placé dans un champ de gravitation. A la section suivante, on examine la chute libre. La section 7 étudie le retard des horloges, puis la section suivante met en évidence le fait que les rayons lumineux sont courbés en présence de gravitation.

1.1 Principe d'équivalence

Un corps placé dans un champ gravifique vérifie l'équation de mouvement

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = Q_g\vec{G} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} M & : \text{masse inerte} \\ Q_g & : \text{charge gravifique} \\ \vec{G} & : \text{champ gravifique.} \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Expérience de Galilée.

Tous les corps tombent sur la terre avec la même accélération : $d\vec{v}/dt$.

Conséquence.

Par (1.1.1), nous en déduisons que Q_g doit être proportionnel à M.

Nous posons donc (par choix de $[\underline{Q_g}]$) :

$$\frac{Q_g}{M} \stackrel{\text{def}}{=} 1. \tag{1.1.2}$$

Ce qui constitue le *principe d'équivalence*.

Remarque.

En électricité, nous avons

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = Q_e\vec{E},$$

mais $Q_e/M = \sigma$ est arbitraire.

L'équivalence entre Q_g et M doit être considérée comme universelle et non pas comme purement fortuite ; cette interprétation joue un rôle fondamental dans la théorie de la gravitation d'Einstein.

La mesure de cette équivalence fut faite par Eötvös en 1890 avec une précision de 10^{-8}.

1.2 Relativité restreinte avec référentiel accéléré

La théorie de la relativité restreinte (r.s.) fournit les lois physiques cov/$\{L\}$, c'est-à-dire valable dans tous les référentiels lorentziens. *L'idée d'une théorie de la relativité générale (r.g.) est de fournir des lois physiques valables dans n'importe quel référentiel*

L'objet de ce chapitre consiste en une première approche d'une théorie générale : nous allons généraliser les lois données par la relativité restreinte à un référentiel accéléré $\{x\}$ par rapport à un référentiel lorentzien $\{'x\}$.

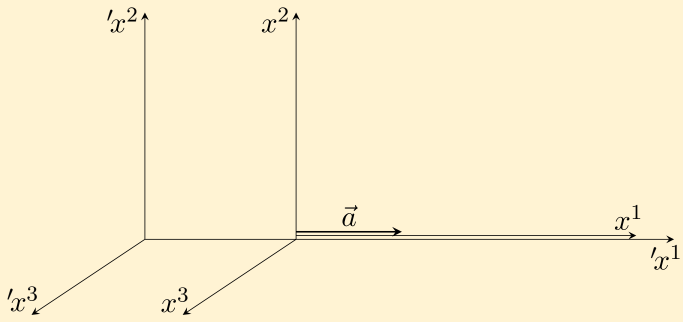


Fig. 1.2.1

Exprimons d'abord les lois de transformations $\{'x\} \longrightarrow \{x\}$.

En théorie de Newton, si nous supposons une accélération constante a, nous avons simplement :

$$\begin{cases} 'x^1 = x^1 + \frac{1}{2}a't^2 \\ 'x^2 = x^2 \\ 'x^3 = x^3 \\ 'x^4 = 't = x^4 = t. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Nous savons bien que la mécanique (de Newton ou d'Einstein) n'est pas valable dans les référentiels accélérés : pour traîter le mouvement d'un corps dans le référentiel accéléré, il est nécessaire d'introduire dans les lois des termes supplémentaires contenant l'accélération de ce référentiel par rapport à celui d'inertie (lorentzien) ; or *ce procédé n'est pas relativiste puisqu'il introduit le concept de mouvement absolu* (du référentiel accéléré). La relativité exige qu'un observateur placé dans le référentiel accéléré explique le mouvement du corps envisagé sans parler d'accélération.

Le principe d'équivalence (1.1.2) nous permet de sortir de l'impasse : le corps est soumis dans le référentiel accéléré à un champ de gravitation de valeur $-\vec{a}$. En effet, prenons l'exemple de plusieurs corps animés d'une vitesse constante dans le référentiel d'inertie : vus du référentiel accéléré, ils sont tous accélérés de la même façon quelque soit leur masse : c'est précisément ce qui se passe dans un champ de gravitation.

Compte tenu de ceci, le principe d'équivalence peut s'exprimer de la façon suivante :

Un référentiel accéléré est équivalent à un référentiel d'inertie doué d'un champ de gravitation.

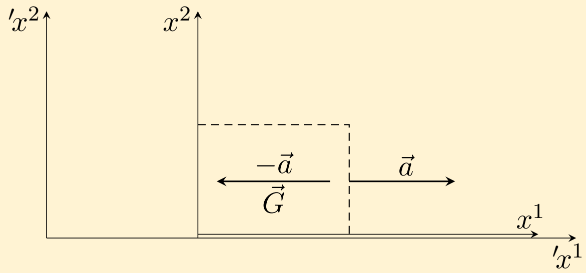


Fig. 1.2.2

Revenons à nos lois de transformations (1.2.1). Dans le référentiel d'inertie $\{'x\}$ nous avons :

$$\frac{d^2\,'x^1}{d't^2} = a$$

et :

$$\frac{d'x^1}{d't} = a't = 'v \to \infty \text{ si } 't \to \infty.$$

Ces lois sont donc incompatibles avec une des conséquence essentielles de la relativité restreinte : $v < c\ (= 1)$. Considérons alors les nouvelles lois :

$$\begin{cases} x^1 = \sqrt{('x^1)^2 - ('x^4)^2} \\ x^2 = 'x^2 \\ x^3 = 'x^3 \\ x^4 = ? \end{cases} \tag{1.2.2}$$

La dernière transformation sera déterminée plus loin.

S'il fallait justifier ce choix de transformations, nous pourrions dire qu'il a été fait de façon à s'écarter le « moins possible » de (1.2.1). En effet, pour ${}'t = {}'x^4 \to 0$:

$$x^1 = {}'x^1\Big(1 - \frac{1}{2}\frac{{}'t^2}{({}'x^1)^2}\Big) = {}'x^1 - \frac{1}{2}\frac{1}{{}'x^1}{}'t^2$$
$$x^4 = {}'x^4 \text{ (par synchronisation).}$$

Calculons alors les *lignes coordonnées* $x^1 =$ cte et $x^4 =$ cte dans le référentiel d'inertie lorentzien L.

Soit x^1, un point fixe dans le référentiel accéléré :

$$x^1 = \text{ cte } = \sqrt{({}'x^1)^2 - ({}'x^4)^2}.$$

Par différentiation :

$$0 = {}'x^1\, d{}'x^1 - {}'t\, d{}'t \qquad ({}'x^4 \stackrel{\text{def}}{=} {}'t),$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d{}'x^1}{d{}'t}\bigg|_{x^1=\text{cte}} = \frac{{}'t}{{}'x^1}, \tag{1.2.3}$$

où l'on reconnait l'équation différentielle des *hyperboles*, dont les propriétés asymptotiques nous assurent que

$$\frac{d{}'x^1}{d{}'t} = {}'v \text{ reste } \textit{finie} \text{ } (\leq 1 \text{ en fait}).$$

Nos transformations sont donc compatibles avec la condition $v < c$.

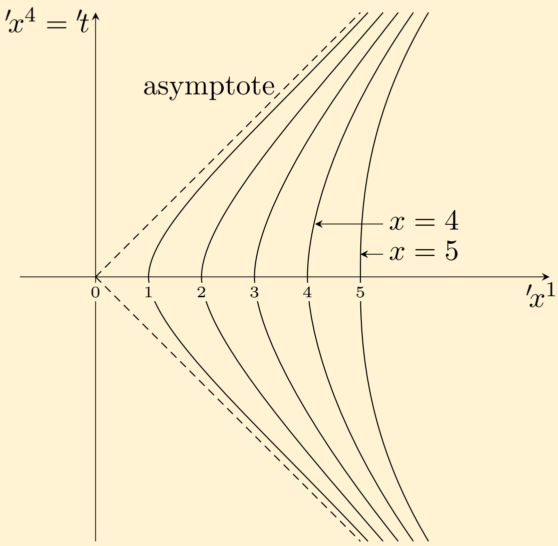


Fig. 1.2.3

L'accélération n'est évidemment plus une constante puisque

$$\frac{d^2{}'x^1}{d{}'t^2} = \frac{1}{{}'x^1} - \frac{{}'t}{({}'x^1)^2}\frac{d{}'x^1}{d{}'t} = \frac{1}{{}'x^1} - \frac{({}'t)^2}{({}'x^1)^3}.$$

C'est une fonction de $'x^1$ qui n'est d'ailleurs pas définie au point $'x^1 = 0$; nous allons donc éliminer de notre espace, le plan $'x^1 = 0$ qui constitue ainsi une frontière infranchissable entre les deux mondes $'x^1 < 0$ et $'x^1 > 0$.

Pour pouvoir exprimer les lignes $t =$ cte dans le référentiel $\{'x\}$ il est nécessaire de compléter la définition (1.2.2) de nos lois de transformations. Nous le faisons en imposant *l'orthogonalité* entre les lignes $x^1 =$ cte et $t =$ cte. (Orthogonalité au sens lorentzien évidemment puisque nous supposons un univers où les lois de la relativité restreinte sont valables.)

L'équation (1.2.3) nous indique que, pour les lignes $x^1 =$ cte,

$$\{d'x^1, d't\}_{x^1=\text{cte}} \propto \{'t, 'x^1\}.$$

La condition d'orthogonalité ci-dessus impose, pour les lignes $t =$ cte, que

$$\{d'x^1, d't\}_{t=\text{cte}} \propto \{'x^1, 't\}.$$

En effet, en effectuant le produit scalaire de ces deux vecteurs, nous obtenons

$$(d'x^1)^2 - (d't)^2 \propto 't\,'x^1 - 'x^1\,'t = 0$$

et donc

$$\left.\frac{d'x^1}{d't}\right|_{t=\text{cte}} = \frac{'x^1}{'t}. \tag{1.2.4}$$

Par intégration, on obtient $\log 'x^1 = \log 't + \text{cte}(t)$, ce qui entraîne

$$t = f\left(\frac{'t}{'x^1}\right), \tag{1.2.5}$$

où $f(\cdot)$ est une fonction encore à déterminer.

Les lignes $t =$ cte exprimées dans $\{'x\}$ sont donc des *droites passant par* 0.

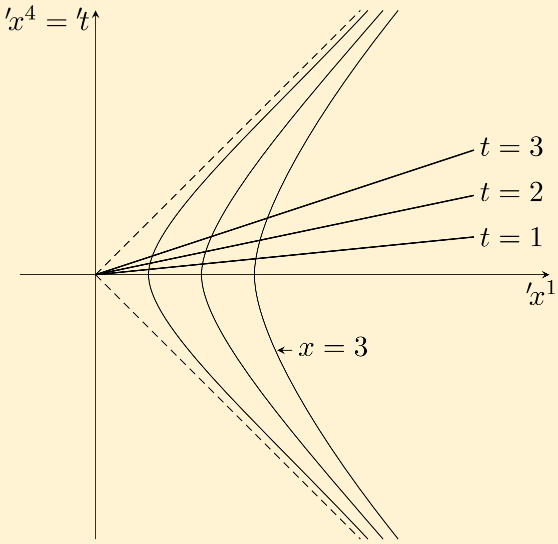


Fig. 1.2.4

Les phénomènes de contraction des longueurs et de retard des horloges subsistent encore. Nous constatons toutefois qu'ils dépendent maintenant de t et de x^1 ; ce à quoi on devait s'attendre puisque d'une part, la vitesse n'est pas constante et d'autre part, l'accélération ne pouvant être choisie constante, la vitesse diffère en chaque point.

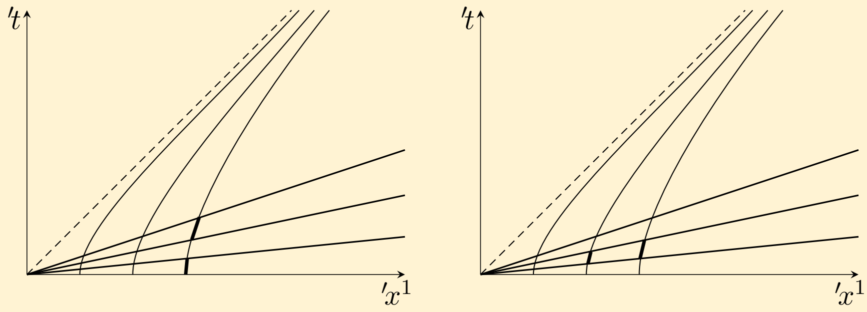


Fig. 1.2.5

Evidemment ceci a pour conséquence qu'un observateur placé dans un référentiel accéléré constate lui aussi ces phénomènes sur des règles et des horloges situées en des points *fixes de son référentiel* (qui ne le sont bien entendu pas pour un observateur placé dans le référentiel $\{'x\}$).

Pour expliquer de façon covariante ces observations, *il ne peut qu'en rendre responsable le champ de gravitation* (cf. plus loin).

Toutes ces déductions résultent de nos lois de transformations (1.2.2) et (1.2.4) qui ne sont *pas* affines mais « curvilignes ».

1.3 Métrique sur une ligne $x^1 = $ cte

Pour abréger, nous nous limiterons à une seule dimension spatiale. En relativité restreinte, le temps propre d'un point matériel de mouvement quelconque s'exprime dans le référentiel lorentzien $\{'x, 't\}$ par

$$d\lambda = \sqrt{-(d'x)^2 + (d't)^2}. \qquad (*)$$

Rappelons qu'il est en effet possible de considérer ce mouvement comme uniforme en chaque instant (sur la longueur $d'x$). Cette formule est donc valable pour un point de la ligne d'univers $x = $ cte.

Par (1.2.2) nous avons

$$(x)^2 = \text{ cte } = ('x)^2 - ('t)^2$$

et, par différentiation,

$$0 = 'x\, d'x - 't\, d't,$$

d'où $d'x = d't('t/'x)$ et, en substituant dans $(*)$, nous obtenons

$$d\lambda = d't\sqrt{1-\frac{('t)^2}{('x)^2}} = d't\sqrt{1-\frac{('t)^2}{(x)^2+('t)^2}} = x\,d't\frac{1}{\sqrt{(x)^2+('t)^2}}.$$

Si le point est immobile dans un référentiel lorentzien $\{x,t\}$, nous avons, par définition du temps propre en relativité restreinte,

$$d\lambda = \text{cte} \quad \text{sur } x^1 = \text{cte}.$$

Mais lorsque le référentiel est accéléré, en vertu de ce que nous avons constaté à la section précédente, nous devons poser :

$$dt = \alpha(x,t)\, d\lambda,$$

où $\alpha(x,t)$ est une fonction encore inconnue ; ainsi, après substitution :

$$dt = \alpha(x,t)x\,d't\frac{1}{\sqrt{x^2+'t^2}}.$$

Nous allons, pour continuer facilement, utiliser les formules suivantes :

$$z = a\,\mathrm{sh}\,\varphi\,, \quad dz = a\,\mathrm{ch}\,\varphi\,d\varphi\,, \quad \mathrm{ch}^2\varphi - \mathrm{sh}^2\varphi = 1\,,$$
$$dz = a\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\varphi}\,d\varphi = \sqrt{a^2+z^2}\,d\varphi\,, \quad d\varphi = \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}dz\,, \quad \varphi = \mathrm{sh}^{-1}\Big(\frac{z}{a}\Big).$$

Alors :

$$dt = \alpha(x,t)x\frac{1}{\sqrt{x^2+'t^2}}d't \implies t = \alpha(x,t)x\,\mathrm{sh}^{-1}\left(\frac{'t}{x}\right) = \alpha(x,t)x\varphi$$

avec $\varphi = \mathrm{sh}^{-1}('t/x)$. Or nous avons

$$'t = x\,\mathrm{sh}\,\varphi \text{ et } 'x = x\,\mathrm{ch}\,\varphi \text{ puisque } x = \sqrt{'x^2 - 't^2}$$

et donc

$$\varphi = \mathrm{sh}^{-1}\left(\frac{'t}{x}\right) = \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{'t}{'x}\right) \text{ et } t = \alpha(x,t)x\varphi = \alpha(x,t)x\,\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{'t}{'x}\right).$$

Mais nous avons vu en (1.2.4) que $t = f('t/'x)$; il est donc nécessaire que

$$\alpha(x,t)x = \text{cte} = a.$$

Par conséquent (1.2.5) devient :

$$t = a\,\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{'t}{'x}\right)$$

qui constitue la transformation qui nous manquait

$$\begin{aligned} x^1 &= \sqrt{('x^1)^2 - ('t)^2} \\ x^2 &= 'x^2 \\ x^3 &= 'x^3 \\ x^4 &= t = a\,\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{'t}{'x}\right). \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Puisque $t = a\varphi$ et donc $\varphi = \frac{t}{a}$, les transformations inverses sont

$$\begin{aligned} 'x^1 &= x^1\,\mathrm{ch}\left(\frac{t}{a}\right) \\ 'x^2 &= x^2 \\ 'x^3 &= x^3 \\ 'x^4 &= 't = x^1\,\mathrm{sh}\left(\frac{t}{a}\right). \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

De plus :

$$dt = \frac{a}{x^1} d\lambda \text{ sur } x^1 = \text{cte}, \tag{1.3.3}$$

c'est-à-dire en intégrant,

$$T(x^1) = \frac{a}{x^1}\Lambda.$$

Λ est la *période propre* de l'horloge ; c'est par définition la période mesurée en un point x^1 quand l'horloge est en ce point. Λ *ne dépend que de l'horloge*. Par exemple, la fréquence de rayonnement d'un atome de sodium (jaune) est une horloge. Si en chaque point du référentiel accéléré il y a un tel atome et que placé en n'importe quel point je regarde l'atome placé en ce point, je le vois jaune. Si maintenant je regarde du point x_1^1 l'atome situé en x_2^1 ($x_1^1 < x_2^1$) je le verrais plutôt rouge, voir la figure 1.3.1.

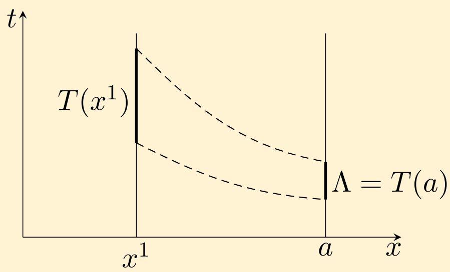


Fig. 1.3.1

Le temps s'écoule plus lentement en x_1^1 qu'en x_2^1 et que, par conséquent, pendant qu'une période s'écoule en x_1^1, plusieurs s'écoulent en x_2^1.

$T(x^1)$ est le *temps coordonnée*, c'est le temps que je mesure (que je compare). Il dépend, comme on vient de le voir de l'endroit où je fais cette mesure.

1.4 Tenseurs en coordonnées curvilignes

Soit la transformation biunivoque :

$$\begin{cases} {'x}^{'\alpha} = \psi^{'\alpha}(x) \\ x^{\alpha} = \psi^{-1\,\alpha}({'x}) \end{cases} \tag{1.4.1}$$

Ecrivons

$$\begin{aligned} A^{'\alpha}{}_{\alpha}(x) &= \partial_\alpha \psi^{'\alpha}(x) \\ A^{-1\,\alpha}{}_{'\alpha}({'x}) &= {'\partial}_{'\alpha}\psi^{-1\,\alpha}({'x}). \end{aligned}$$

Les formules de transformations pour les déplacements élémentaires s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} d{'x}^{'\alpha} &= A^{'\alpha}{}_{\alpha}(x)dx^{\alpha} \\ dx^{\alpha} &= A^{-1\,\alpha}{}_{'\alpha}({'x})d{'x}^{'\alpha}. \end{aligned}$$

Il en découle

$$\begin{aligned} A^{'\alpha}{}_{\alpha}(x)A^{-1\,\alpha}{}_{'\beta}({'x}) &= \delta^{'\alpha}_{'\beta} \\ A^{-1\,\alpha}{}_{'\alpha}({'x})A^{'\alpha}{}_{\beta}(x) &= \delta^{\alpha}_{\beta}. \end{aligned}$$

Définition de tenseurs.

On appelle *tenseur au point x* un être géométrique dont les composantes déterminées par rapport à un référentiel arbitraire se transforment, lors d'un changement de référentiel selon la loi

$${'a}^{'\alpha'\beta\ldots}{}_{'\lambda\ldots}({'x}) = (A^{'\alpha}{}_{\alpha}A^{'\beta}{}_{\beta}\ldots)(x)\,a^{\alpha\beta\ldots}{}_{\lambda\ldots}(x)\,(A^{-1\,\lambda}{}_{'\lambda}\ldots)({'x}).$$

Ceci est une identité en x^α (ou en ${'x}^{\alpha}$). La définition est la même que celle adoptée pour les transformations affines, mais ici les grandeurs $A^{'\cdot}{}_{\cdot}$ dépendent de l'endroit x.

Pour les transformations (1.3.2) relatives au référentiel accéléré

$$\begin{cases} {'x}^1 = x^1 \mathrm{ch}\left(\dfrac{t}{a}\right) \\ {'x}^2 = x^2 \\ {'x}^3 = x^3 \\ {'t} = x^1 \mathrm{sh}\left(\dfrac{t}{a}\right) \end{cases}$$

les grandeurs $A^{'\alpha}{}_{\alpha}(x)$ sont

$$\begin{array}{ll} A^1{}_1 = \mathrm{ch}\left(\dfrac{t}{a}\right) & A^1{}_4 = \dfrac{x^1}{a}\mathrm{sh}\left(\dfrac{t}{a}\right) \\ A^4{}_1 = \mathrm{sh}\left(\dfrac{t}{a}\right) & A^4{}_4 = \dfrac{x^1}{a}\mathrm{ch}\left(\dfrac{t}{a}\right) \\ A^2{}_2 = A^3{}_3 = 1 & \text{toutes les autres sont nulles} \end{array}$$

Examinons alors comment se transforme le tenseur métrique $g_{\alpha\beta}(x)$, qui dans le référentiel lorentzien est bien entendu :

$$'g_{'\alpha'\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nous devons avoir

$$'g_{'\alpha'\beta} = g_{\alpha\beta}(x)(A^{-1\,\alpha}{}_{'\alpha}A^{-1\,\beta}{}_{'\beta})('x)$$

et donc

$$g_{\alpha\beta}(x) = 'g_{'\alpha'\beta}(A^{'\alpha}{}_{\alpha}A^{'\beta}{}_{\beta})(x),$$

soit terme par terme

$$\begin{aligned} g_{11}(x) &= 'g_{11}(A^1{}_1)^2 + 'g_{44}(A^4{}_1)^2 \\ &= (+1)\Big(\mathrm{ch}\left(\frac{t}{a}\right)\Big)^2 + (-1)\Big(\mathrm{sh}\left(\frac{t}{a}\right)\Big)^2 = 1 \\ g_{22}(x) &= g_{33}(x) = 1 \\ g_{\alpha\beta}(x) &= 0 \quad \text{pour} \quad \alpha \neq \beta \\ g_{44}(x) &= 'g_{11}(A^1{}_4)^2 + 'g_{44}(A^4{}_4)^2 \\ &= (+1)\Big(\frac{x^1}{a}\mathrm{sh}\left(\frac{t}{a}\right)\Big)^2 + (-1)\Big(\frac{x^1}{a}\mathrm{ch}\left(\frac{t}{a}\right)\Big)^2 = -\left(\frac{x^1}{a}\right)^2 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$g_{\alpha\beta}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{x^1}{a}\right)^2 \end{pmatrix}.$$

Les transformations (1.3.2) n'étant pas affines, *la métrique $g_{\alpha\beta}(x)$ n'est plus pseudo-euclidienne.* Par contre la signature spatiale est toujours euclidienne, d'où l'existence possible d'une thermodynamique dans ce référentiel.

Nous verrons au paragraphe suivant la signification de cette modification de la métrique.

1.5 Trajectoires d'un point matériel

Nous avons vu en relativité restreinte que dans un référentiel lorentzien $\{'x\}$, les lignes d'univers d'un point matériel libre sont des droites données par

$$'x^{'\alpha} = 'z^{'\alpha}(\lambda) = 'A^{'\alpha} + \lambda\, '\omega^{'\alpha}('z(\lambda)),$$

où λ est le temps propre du point et ${}'\omega^{'\alpha}$ la quadrivitesse :

$$
{}'\omega^{'\alpha}\,{}'\omega_{'\alpha} = \begin{cases} -1 & \text{pour un point matériel} \\ 0 & \text{pour un rayon de lumière (où } \lambda \text{ n'a pas de sens physique).} \end{cases}
$$

Nous allons montrer que ces lignes d'univers peuvent être déduites du *principe de variation* suivant :

$$
\underline{\delta} \int_{\lambda'}^{\lambda''} d\lambda\, {}'g_{'\alpha'\beta} \frac{d\,{}'z^{'\alpha}(\lambda)}{d\lambda} \frac{d\,{}'z^{'\beta}(\lambda)}{d\lambda} = 0 \tag{1.5.1}
$$

avec

$$
\delta\,{}'z^{'\alpha}(\lambda) = \delta\,{}'z^{'\alpha}(\lambda) = 0 \text{ pour } \lambda = \lambda' \text{ et } \lambda = \lambda''.
$$

En effet, ${}'g_{'\alpha'\beta}$ étant constant dans le référentiel lorentzien, (1.5.1) s'écrit

$$
\int_{\lambda'}^{\lambda''} d\lambda\, {}'g_{'\alpha'\beta} \frac{d\,\delta\,{}'z^{'\alpha}}{d\lambda} \frac{d\,{}'z^{'\beta}}{d\lambda} = 0,
$$

d'où, en intégrant par parties,

$$
-\int_{\lambda'}^{\lambda''} d\lambda\, \delta\,{}'z^{'\alpha}(\lambda)\, {}'g_{'\alpha'\beta} \frac{d^2\,{}'z^{'\beta}}{d\lambda^2} + \underbrace{{}'g_{'\alpha'\beta}\, \delta\,{}'z^{'\alpha}(\lambda) \frac{d\,{}'z^{'\beta}(\lambda)}{d\lambda} \Bigg|_{\lambda'}^{\lambda''}}_{=0 \text{ car } \delta'z'^{\alpha}(\lambda') = \delta'z'^{\alpha}(\lambda'') = 0} = 0
$$

et, puisque $\delta\,{}'z^{'\alpha}(\lambda)$ est une variation arbitraire dans $]\lambda', \lambda''[$, nous avons nécessairement

$$
\frac{d^2\,{}'z^{'\beta}(\lambda)}{d\lambda^2} = 0, \tag{1.5.2}
$$

où l'on reconnait l'*équation différentielle des droites.*

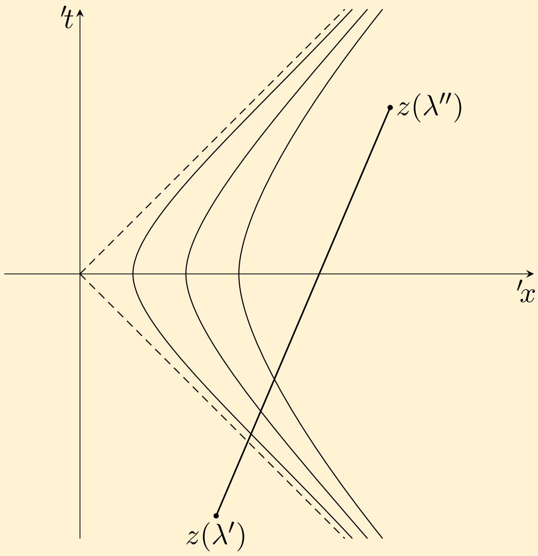


Fig. 1.5.1

Ce principe variationnel ne faisant intervenir que des grandeurs tensorielles, il reste valable quelque soit le référentiel considéré :

$$\underline{\delta}\int_{\lambda'}^{\lambda''} d\lambda \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\big(z(\lambda)\big)\frac{dz^\alpha(\lambda)}{d\lambda}\frac{dz^\beta(\lambda)}{d\lambda} = 0 \tag{1.5.1$'$}$$

avec

$$\delta z^\alpha(\lambda) = \delta z^\beta(\lambda) = 0 \text{ pour } \lambda = \lambda' \text{ et } \lambda = \lambda''.$$

En effectuant la variation, nous obtenons :

$$\int_{\lambda'}^{\lambda''} d\lambda \left[\frac{1}{2}\partial_\alpha g_{\gamma\beta}\big(z(\lambda)\big)\,\delta z^\alpha \,\frac{dz^\gamma}{d\lambda}\,\frac{dz^\beta}{d\lambda} + g_{\alpha\beta}\big(z(\lambda)\big)\,\frac{d\,\delta z^\alpha}{d\lambda}\,\frac{dz^\beta}{d\lambda}\right] = 0$$

puis, en intégrant par parties le second terme, il vient :

$$\int_{\lambda'}^{\lambda''} d\lambda \left[\frac{1}{2}\partial_\alpha g_{\beta\gamma}\big(z(\lambda)\big)\,\delta z^\alpha \,\frac{dz^\beta}{d\lambda}\,\frac{dz^\gamma}{d\lambda} - \delta z^\alpha \frac{d}{d\lambda}\Big(g_{\alpha\beta}\big(z(\lambda)\big)\,\frac{dz^\beta}{d\lambda}\Big)\right] - \underbrace{\delta z^\alpha g_{\alpha\beta}\,\frac{dz^\beta}{d\lambda}\bigg|_{\lambda''}^{\lambda'}}_{=0} = 0,$$

et, $\delta z^\alpha(\lambda)$ étant arbitraire, nous en déduisons

$$\frac{d}{d\lambda}\Big(g_{\alpha\beta}(z(\lambda))\,\frac{dz^\beta}{d\lambda}\Big) - \frac{1}{2}\partial_\alpha g_{\beta\gamma}(z(\lambda))\,\frac{dz^\beta}{d\lambda}\,\frac{dz^\gamma}{d\lambda} = 0.$$

En effectuant la dérivation sur le premier terme, il vient :

$$g_{\alpha\beta}(z)\,\frac{d^2z^\beta}{d\lambda^2} + \frac{1}{2}(2\partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma})(z(\lambda))\,\frac{dz^\beta}{d\lambda}\,\frac{dz^\gamma}{d\lambda} = 0.$$

Mais nous avons la relation

$$2\partial_\gamma g_{\alpha\beta}\,\frac{dz^\beta}{d\lambda}\,\frac{dz^\gamma}{d\lambda} = (\partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma})\,\frac{dz^\beta}{d\lambda}\,\frac{dz^\gamma}{d\lambda},$$

d'où il résulte

$$g_{\alpha\beta}(z)\,\frac{d^2z^\beta}{d\lambda^2} + \frac{1}{2}(\partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\gamma g_{\alpha\beta})(z)\,\frac{dz^\beta}{d\lambda}\,\frac{dz^\gamma}{d\lambda} = 0.$$

Enfin, en multipliant par $g^{\alpha'\alpha}(z)$, nous obtenons

$$\frac{d^2z^{\alpha'}}{d\lambda^2} + \frac{1}{2}\Big(g^{\alpha'\alpha}(\partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\gamma g_{\alpha\beta})\Big)(z)\,\frac{dz^\beta}{d\lambda}\,\frac{dz^\gamma}{d\lambda} = 0.$$

Posons :

$$\begin{aligned} G_{\beta\alpha\gamma} &= \frac{1}{2}(\partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\gamma g_{\alpha\beta}) \\ G_\beta{}^{\alpha'}{}_\gamma &= g^{\alpha'\alpha} G_{\beta\alpha\gamma}. \end{aligned}$$

Les équations du point matériel s'écrivent alors :

$$\frac{d^2z^\alpha(\lambda)}{d\lambda^2} + G_\beta{}^\alpha{}_\gamma(z(\lambda))\,\frac{dz^\beta(\lambda)}{d\lambda}\,\frac{dz^\gamma(\lambda)}{d\lambda} = 0. \tag{1.5.3}$$

Introduction et définition de la notion de champ gravifique.

Remarquons l'analogie entre ces équations et les équations de mouvement d'une charge électrique placée dans un champ électromagnétique

$$\frac{d^2z^\alpha}{d\lambda^2} - \sigma_e B^\alpha{}_\beta(z)\,\frac{dz^\beta}{d\lambda} = 0.$$

Le principe d'équivalence (1.2.1) nous permet d'interpréter tout naturellement les équations (1.5.3) comme *les équations de mouvement d'un point matériel placé dans un champ de gravitation.* N'y apparaissent ni la masse ni la charge gravifique ainsi que cela doit être, le champ gravifique s'identifie aux quantités $G_\alpha{}^\beta{}_\gamma$.

Par *définition*, nous appelons *champ gravifique*, le champ de composantes :

$$G_{\alpha\beta\gamma}(z) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\beta\gamma} - \partial_\beta g_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma g_{\alpha\beta})(z). \tag{1.5.4}$$

et, par analogie avec le potentiel électromagnétique

$$B_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha,$$

nous appelons *potentiel gravifique* le champ métrique $g_{\alpha\beta}(z)$.

En appliquant la définition des tenseurs, il est aisé de s'assurer que *le champ gravifique n'est pas un tenseur*, ce qui est logique puisqu'il doit être possible de l'annuler par un changement de référentiel. Il est en effet nul dans un référentiel d'inertie $\{'x\}$! Il se transforme toutefois comme un tenseur lors de transformations affines, ce qui est normal puisque le transformé affine n'est pas accéléré par rapport à l'ancien système.

Dans les trois derniers paragraphes de ce chapitre, nous appliquerons ces importants résultats.

Jusqu'ici nous n'avons fait qu'exploiter le principe d'équivalence. Mais il ne faudrait tout de même pas oublier qu'en plus des champs gravifiques apparaissant dans les référentiels accélérés, il existe des champs de gravitation « réels », c'est-à-dire produits par une distribution de matière. De tels champs ne sont pas nuls dans les référentiels lorentzien d'inertie !

Il est clair, par le principe de covariance, que les équations (1.5.3) et la définition (1.5.4) sont encore valables pour les champs gravifiques réels. Par suite, qu'est-ce qu'un *référentiel d'inertie* ? C'est un référentiel dans lequel l'équation (1.5.2) est valable, c'est-à-dire un référentiel dans lequel *il n'existe pas de champ de gravitation.*

(1.5.4) prend maintenant une importance assez sensationnelle ! Les propriétés physiques déterminent les propriétés géométriques de l'univers. *L'univers en tant que forme des phénomènes n'est qu'un espace amorphe ; c'est le contenu matériel qui le* *remplit qui lui donne sa structure et détermine ses rapports de mesure.* Le problème consiste alors à déterminer comment la métrique dépend du contenu matériel. Cette recherche d'une équation du champ gravifique sera entreprise au chapitre 4.

Remarquons pour l'instant que l'univers pseudo-euclidien de la relativité restreinte n'est susceptible de décrire qu'un univers vide. Dès qu'apparaît une distribution de substance, la métrique se modifie et il est impossible par un choix de transformation de la réduire partout à sa forme pseudo-euclidienne. La possibilité d'une géométrie globale disparait.

1.6 Chute libre

Ce qu'on appelle chute libre, c'est le mouvement d'un corps soumis au seul champ de gravitation.

Nous allons écrire l'équation de mouvement d'un point matériel dans un référentiel accéléré. Les seules composantes non nulles du champ sont

$$G_4{}^1{}_4 = g^{11}\frac{1}{2}(-\partial_1 g_{44}) = \Big(\frac{x^1}{a^2}\Big)$$
$$G_1{}^4{}_4 = g^{44}\frac{1}{2}(\partial_1 g_{44}) = \Big(-\frac{a^2}{(x^1)^2}\Big)\Big(\frac{-x^1}{a^2}\Big) = \frac{1}{x^1}.$$

En nous restreignant à la seule composante spatiale intéressante, (1.5.3) s'écrit :

$$\frac{d^2z^1}{d\lambda^2} = -G_4{}^1{}_4\Big(\frac{dz^4}{d\lambda}\Big)^2.$$

Exprimons-la *au point où la vitesse est nulle* : $dz^1/d\lambda = 0$. Dans ce cas :

$$\omega_\alpha\omega^\alpha = g_{\alpha\beta}\frac{dz^\alpha}{d\lambda}\frac{dz^\beta}{d\lambda} = -1 \quad \text{s'écrit} \quad g_{44}\Big(\frac{dz^4}{d\lambda}\Big)^2 = -\Big(\frac{z^1}{a}\Big)^2\Big(\frac{dz^4}{d\lambda}\Big)^2 = -1,$$

d'où :

$$\Big(\frac{dz^4}{d\lambda}\Big)^2 = \Big(\frac{a}{z^1}\Big)^2 \quad (= 1 \text{ seulement en } z^1 = a\,!)$$

et, en substituant,

$$\frac{d^2z^1}{d\lambda^2} = -\frac{a^2}{(z^1)^3} = -\frac{1}{z^1} = -\frac{1}{a} \quad \text{au « point standard » } z^1 = a \text{ où } d\lambda = dt = dx^4.$$

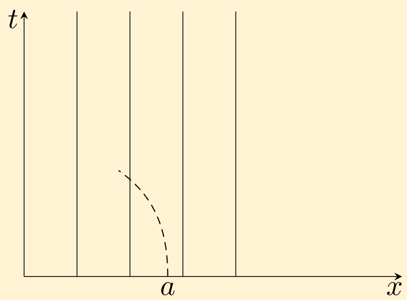


Fig. 1.6.1

En ce point a (où $dz^1/d\lambda = 0$), l'accélération est constante.

Pour trouver la ligne d'univers de ce point matériel, il suffit d'exprimer l'équation de cette ligne $'x^1 = a$ dans le référentiel accéléré. Ceci est évident, un point immobile dans le référentiel lorentzien se meut dans le référentiel accéléré sous l'unique effet du champ gravifique.

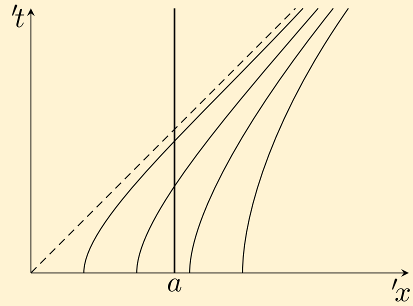


Fig. 1.6.2

Par la loi de transformation (1.3.2) nous avons

$$z^1(t) = \frac{a}{\operatorname{ch}\left(\dfrac{t}{a}\right)}$$

et donc

$$\frac{dz^1}{dt} = -\frac{a}{\operatorname{ch}^2\left(\dfrac{t}{a}\right)} \operatorname{sh}\left(\frac{t}{a}\right)\frac{1}{a} = -\frac{\operatorname{sh}\left(\dfrac{t}{a}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\dfrac{t}{a}\right)},$$

puis

$$\frac{d^2z^1}{dt^2} = \begin{cases} = -\dfrac{1}{a}\dfrac{1}{\operatorname{ch}\left(\dfrac{t}{a}\right)}\left(1 - 2\operatorname{th}^2\left(\dfrac{t}{a}\right)\right) = -\dfrac{1}{a} \text{ si } t = 0 \\ \qquad \text{(à cet instant } z^1 = a\text{, donc } dt = d\lambda \\ \qquad \text{et on retrouve bien l'équation ci-dessus)} \\ \to 0 \text{ si } t \to \pm\infty. \end{cases}$$

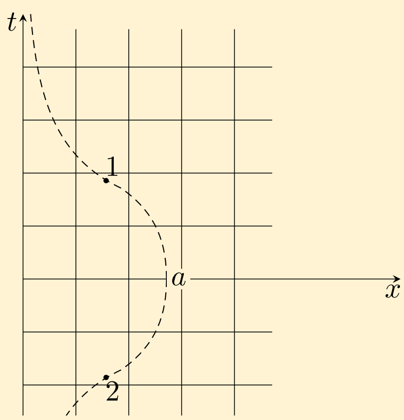


Fig. 1.6.3

L'accélération change de signe lorsque $d^2z^1/dt^2 = 0$, donc lorsque $\mathrm{th}\,(t/a) = \pm 1/4$ (figure 1.6.3, points 1 et 2). Un objet immobile en a à l'instant $t = 0$ est tout d'abord accéléré puis freiné et n'atteindra jamais le point $x = 0$ (Voilà un bien curieux référentiel, mais n'oublions pas que la ligne $x = 0$ est absente de notre univers !)

Remarquons que, dans le langage vitesses et accélérations, ce sont les dérivées prises par rapport au temps coordonnées qui ont un sens physique. Par contre le temps propre présente un caractère invariant.

1.7 Retard des horloges

Les comparaisons entre diverses horloges se faisant par émission de signaux lumineux, nous voulons ici calculer *les lignes d'univers des rayons de lumière.*

De

$$\omega_\alpha \, \omega^\alpha = g_{\alpha\beta} \frac{dz^\alpha}{d\lambda} \frac{dz^\beta}{d\lambda} = 0,$$

nous tirons (pour notre référentiel et en nous restreignant à la seule dimension spatiale x^1)

$$g_{11}(dz^1)^2 + g_{44}(dt)^2 = 0$$
$$(dz^1)^2 - \left(\frac{z^1}{a}\right)^2 (dt)^2 = 0$$

et

$$\frac{dz^1}{dt} = \pm \frac{z^1}{a}$$
$$\frac{dz^1}{z^1} = \pm \frac{dt}{a}.$$

Ainsi, par intégration, il vient

$$\log z^1 = \pm \frac{t}{a} + \mathrm{cte} \quad \text{soit :} \quad z^1(t) = z^1(t=0) e^{\pm t/a}.$$

En présence d'un champ gravifique, la vitesse de la lumière n'est plus égale à 1 et sa ligne d'univers n'est plus une droite !

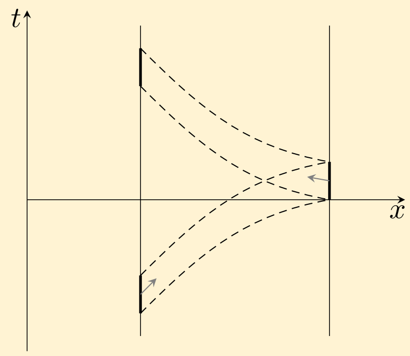


Fig. 1.7.1 Cette figure représente l'émission d'un signal lumineux avec retour.

Nous allons maintenant écrire sous forme covariante le phénomène de retard des horloges.

Temps propre en un point donné.

Par définition le *temps propre au point* z, la quantité :

$$d\lambda = \sqrt{-g_{\alpha\beta}(z)\, dz^\alpha dz^\beta} \tag{1.7.1}$$

Cette définition est la généralisation naturelle de celle adoptée en relativité restreinte. En effet

1) Pour un *point fixe* dans un *référentiel lorentzien* :

$$d\lambda = \sqrt{-g_{44}(dt)^2} = dt.$$

2) Pour un *point mobile* dans un *référentiel lorentzien* :

$$d\lambda = \sqrt{(d\vec{x})^2 - (dt)^2}.$$

3) Pour *notre référentiel accéléré* et en un *point fixe* :

$$d\lambda = \sqrt{-g_{44}(\vec{x})(dt)^2} = \frac{x^1}{a}dt,$$

c'est-à-dire, pour une période Λ :

$$\Lambda = \sqrt{-g_{44}(\vec{x})}T(\vec{x}).$$

Ainsi, pour deux points $\vec{x}$ et $\vec{y}$:

$$\Lambda = \sqrt{-g_{44}(\vec{x})}\, T(\vec{x}) = \sqrt{-g_{44}(\vec{y})}\, T(\vec{y}),$$

et donc

$$\frac{T(\vec{x})}{T(\vec{y})} = \sqrt{\frac{-g_{44}(\vec{y})}{-g_{44}(\vec{x})}}.$$

En particulier, en se référant au point standard $x^1 = a$,

$$T(a) = \Lambda = \sqrt{-g_{44}(\vec{x})}T(x) = \frac{x^1}{a}T(x^1)$$

et on obtient la propriété :

– pour $x^1 > a \quad T(x^1) < T(a)$

– pour $x^1 < a \quad T(x^1) > T(a)$.

Les horloges à gauche de a retardent par rapport à celle qui sont à droite.

Le retard d'une horloge est donc lié à l'augmentation de l'accélération.

1.8 Courbure des rayons lumineux

Comme dernière application, nous allons montrer qu'en présence d'un champ gravifique, la trajectoire des rayons lumineux n'est plus rectiligne. Pour simplifier, nous allons nous restreindre à deux dimensions spatiales.

Dans le référentiel d'inertie, l'équation de ces trajectoires peut s'écrire

$$\begin{cases} {}'x = b + \alpha\,{}'t \\ {}'y = \beta\,{}'t \end{cases} \qquad \text{avec :} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

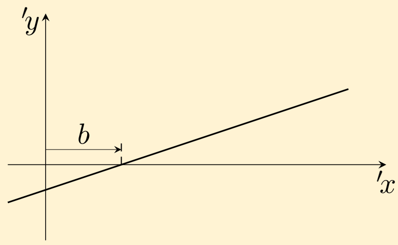


Fig. 1.8.1

Pour exprimer ces trajectoires dans le référentiel accéléré, nous utilisons les lois de transformations (1.2.2), soit

$$\begin{aligned} x^2 &= {}'x^2 - {}'t^2 \\ y &= {}'y, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} x^2 = b^2 + (\underbrace{\alpha^2 - 1}_{-\beta^2})\,{}'t^2 + 2b\alpha\,{}'t \\ y = \beta\,{}'t \end{cases}$$

et donc

$$x^2 + \Big(y - b\frac{\alpha}{\beta}\Big)^2 = b^2\Big(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\Big), \tag{1.8.1}$$

qui constitue l'*équation d'un cercle* d'origine en $x = 0$.

Pour une trajectoire passant par le point standard $x = a$, nous posons $\alpha = 0$ ($\Longrightarrow \ \beta = 1$), l'équation ci-dessus s'écrit alors

$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{1.8.2}$$

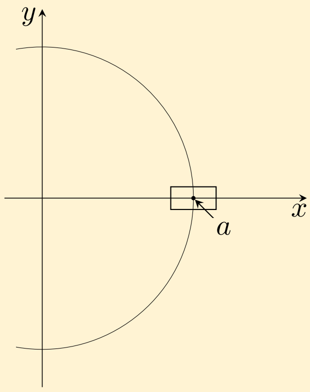


Fig. 1.8.2

Plaçons-nous alors dans le « référentiel local de a », qui est une toute petite portion d'espace autour de a.

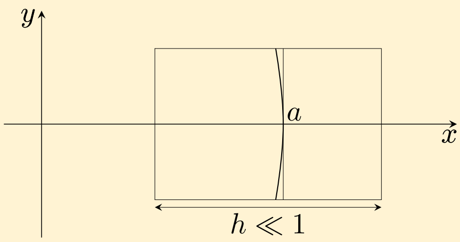


Fig. 1.8.3

Dans le référentiel (où $y \approx 0$), (1.8.2) peut s'écrire

$$x(y) = \sqrt{a^2 - y^2} \cong a - \frac{q}{2a}y^2,$$

qui est l'équation d'une *parabole*. Nous avons :

$$\frac{dx}{dy} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{1}{a} \qquad \text{en } a.$$

Comparons ceci avec les trajectoires d'un *point matériel* ($\alpha = 0$; $\beta = 1$) :

$$\begin{cases} {}'x = a \\ {}'y = {}'v\,{}'t \end{cases} \qquad \text{d'où :} \quad x = \sqrt{{}'x^2 - {}'t^2} = \sqrt{a^2 - \frac{y^2}{{}'v^2}} \approx a - \frac{1}{2a}\,\frac{1}{{}'v^2}\,y^2.$$

Or en a : ${}'v = d{}'y/d{}'t = dy/dt = v$ et alors : $d^2x/dy^2 = -1/av$. Comme $v \ll 1$, les trajectoires d'un point matériel sont *beaucoup plus courbées* que celle d'un rayon lumineux dans le « référentiel local a ».

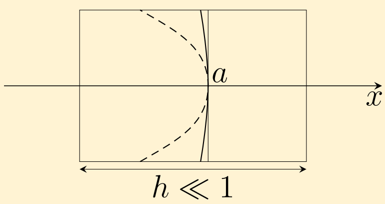


Fig. 1.8.4

Chapitre 2

Analyse tensorielle

Préambule

Ce chapitre est de nature purement mathématique. La section 1 étudie la dérivée ordinaire. On profite pour donner la définition de densité tensorielle de première et de deuxième espèce d'ordre r et de poids k ; la divergence généralisée est ensuite donnée. La section 2 définit alors l'espace capacitif et le théorème de Gauss. La section 3 donne ensuite la définition de la dérivée covariante et met en évidence les coefficients de la connexion affine. On étudie ensuite (section 4) la loi de transformation des coefficients de la connexion affine. La section 5 étudie les lignes auto-parallèles et la section 6 le référentiel « géodésique » local. La section suivante définit alors le transport intégral. La section 8 définit ensuite le transport quasi-fermé, ce qui permet d'introduire les notions de courbure et de torsion. La section suivante étudie des identités de Bianchi et la dernière section traite du champ stationnaire.

Avant d'entrer dans le vif du sujet un petit rappel de mathématique s'impose.

On appelle *espace amorphe* $\{z\}$, un espace doué d'aucune structure (un tel espace est souvent appelé *variété différentiable*).

Dans cet espace, envisageons les *transformations biunivoques*

$$\begin{aligned} {}'x^{'\alpha} &= \psi^{'\alpha}(x) \\ x^{\alpha} &= \psi^{-1\,\alpha}({}'x) \end{aligned}$$

et définissons les coefficients

$$\begin{aligned} A^{'\alpha}{}_{\alpha}(x) &= \partial_{\alpha}\psi^{'\alpha}(x) \\ A^{-1\,\alpha}{}_{'\alpha}({}'x) &= {}'\partial_{'\alpha}\psi^{-1\,\alpha}({}'x). \end{aligned}$$

Un *champ tensoriel* dans cet espace est toujours défini par la loi de transformation :

$${}'a^{'\alpha'\beta\ldots}{}_{'\lambda\ldots}({}'x) = (A^{'\alpha}{}_{\alpha}A^{'\beta}{}_{\beta}\ldots)(x)\,a^{\alpha\beta\ldots}{}_{\lambda\ldots}(x)\,(A^{-1\,\lambda}{}_{'\lambda}\ldots)({}'x).$$

2.1 Dérivée ordinaire ∂_α

Symboliquement, lors d'un changement de coordonnées, la dérivée ∂_α se transforme selon la loi

$$'\partial_{'\alpha} = A^{-1\,\alpha}{}_{'\alpha}('x)\,\partial_\alpha.$$

Considérons un tenseur covariant $'a_{'\alpha'\beta\ldots}('x)$ et formons l'expression $'\partial_{'\alpha}{}'a_{'\beta'\gamma\ldots}('x)$. La loi de transformation s'écrit

$$\begin{aligned}'\partial_\alpha a_{'\beta'\gamma\ldots}('x) &= \partial_\alpha a_{\beta\gamma\ldots}(x)\,(A^{-1\,\alpha}{}_{'\alpha}A^{-1\,\beta}{}_{'\beta}A^{-1\,\gamma}{}_{'\gamma}\ldots)('x)\\ &+ a_{\beta\gamma\ldots}(x)\Big[('\partial_{'\alpha}A^{-1\,\beta}{}_{'\beta})\,A^{-1\,\gamma}{}_{'\gamma}\ldots\\ &+ A^{-1\,\beta}{}_{'\beta}('\partial_{'\alpha}A^{-1\,\gamma}{}_{'\gamma})\ldots+\ldots\Big]('x).\end{aligned}$$

Ceci ne constitue pas la loi de transformation d'un tenseur ; donc si $'a_{'\beta'\gamma\ldots}('x)$ *est un tenseur, alors* $'\partial_{'\alpha}{}'a_{'\beta'\gamma\ldots}('x)$ *n'est pas un tenseur.*

Par contre la *partie antisymétrique* de cette expression $'\partial_{['\alpha}{}'a_{'\beta'\gamma\ldots]}$ *se transforme comme un tenseur.*

En effet :

$$\begin{aligned}'\partial_{['\alpha}{}'a_{'\beta'\gamma\ldots]}('x) &= \partial_{[\alpha}a_{\beta\gamma\ldots]}(x)\,(A^{-1\alpha}{}_{['\alpha}\,A^{-1\beta}{}_{'\beta}\,A^{-1\gamma}{}_{'\gamma}\ldots{}_{]})('x)\\ &+ a_{\beta\gamma\ldots}(x)\Big[('\partial_{['\alpha}A^{-1\beta}{}_{'\beta})\,A^{-1\gamma}{}_{'\gamma}\ldots{}_{]}\\ &+ A^{-1\beta}{}_{['\beta}('\partial_{'\alpha}A^{-1\gamma}{}_{'\gamma})\ldots{}_{]}+\ldots\Big]('x)\end{aligned}$$

Or $'\partial_{'\alpha}A^{-1\,\beta}{}_{'\beta}$ est symétrique, sa partie antisymétrique est donc nulle, de même pour tous les termes de cette forme. L'expression ci-dessus se réduit donc à :

$$'\partial_{['\alpha}{}'a_{'\beta'\gamma\ldots]}('x) = \partial_{[\alpha}a_{\beta\gamma\ldots]}(x)(A^{-1\,\alpha}{}_{['\alpha}A^{-1\,\beta}{}_{'\beta}A^{-1\,\gamma}{}_{'\gamma}\ldots{}_{]})('x)$$

et l'on constate que $\partial_{[\alpha}a_{\beta\gamma\ldots]}$ sont les composantes d'un tenseur antisymétrique.

Définition du rotationnel généralisé

On appelle *rotationnel généralisé*, l'expression

$$b_{[\alpha\beta\gamma\ldots]}(x) = \partial_{[\alpha}a_{\beta\gamma\ldots]}(x),$$

où les composantes $b_{[\alpha\beta\gamma\ldots]}(x)$ constituent, en vertu de ce que nous venons de voir, les composantes d'un tenseur antisymétrique.

Exemple.

L'*équation homogène de Maxwell* s'écrit

$$3\partial_{[\alpha}B_{\beta\gamma]} = \overrightarrow{\alpha\beta\gamma}\,\partial_\alpha B_{\beta\gamma} = q_{[\alpha\beta\gamma]} = 0.$$

Nous allons maintenant introduire de nouveaux êtres géométriques.

Définition des densité tensorielles

On appelle *densité tensorielle de première espèce d'ordre r et de poids k*, un ensemble de d^r nombres $\mathfrak{a}^{\alpha_1}{}_{\alpha_2}{}^{\dots\alpha_r}$ déterminés par rapport à un référentiel, qui lors d'un changement de référentiel se transforme selon la loi

$$\begin{aligned}{}'\mathfrak{a}_{\langle+k\rangle}{}^{'\alpha_1}{}_{'\alpha_2\dots}{}^{\dots'\alpha_r}('x) = |\Delta(x)|^{-k}(A^{'\alpha_1}{}_{\alpha_1}\dots A^{'\alpha_r}{}_{\alpha_r})(x)\\ \times\, \mathfrak{a}_{\langle+k\rangle}{}^{\alpha_1}{}_{\alpha_2\dots}{}^{\dots\alpha_r}('x)\,(A^{-1\,\alpha_2}{}_{'\alpha_2}\dots)('x),\end{aligned}$$

où $\Delta(x) = \det(A^{'\cdot}{}_{\cdot}(x))$ et k est un entier quelconque. Cette quantité est notée par une lettre gothique.

Une *densité tensorielle de deuxième espèce d'ordre r et de poids k* admet comme loi de transformation de ses composantes :

$$\begin{aligned}{}'\tilde{\mathfrak{a}}_{\langle+k\rangle}{}^{'\alpha_1}{}_{'\alpha_2\dots}{}^{\dots'\alpha_r}('x) = \Delta(x)^{-k}(A^{'\alpha_1}{}_{\alpha_1}\dots A^{'\alpha_r}{}_{\alpha_r})(x)\\ \times\, \tilde{\mathfrak{a}}_{\langle+1\rangle}{}^{\alpha_1}{}_{\alpha_2\dots}{}^{\dots\alpha_r}(x)\,(A^{-1\,\alpha_2}{}_{'\alpha_2}\dots)('x).\end{aligned}$$

Les densités de poids avec k négatif sont généralement appelées *capacités.*

Lorsque le poids est $+1$ ou -1, nous omettrons cet indice.

Définition de la divergence généralisé

On appelle *divergence généralisée*, l'expression

$$\mathfrak{b}^{[\beta\gamma\dots]}(x) = \partial_\alpha \mathfrak{a}^{[\alpha\beta\gamma\dots]}(x),$$

où $\mathfrak{a}^{[\alpha\beta\gamma]}$ est une densité tensorielle de première espèce, de poids $+1$ et totalement antisymétrique. Les composantes $\mathfrak{b}^{[\beta\gamma\dots]}(x)$ sont les composantes d'une densité tensorielle totalement antisymétrique de poids $+1$.

Démonstration.

1) Dans la théorie des déterminants, nous établissons que

$$\delta\Delta = \sum_{'\rho}\sum_{\rho}\mathrm{Min}(A^{'\rho}{}_{\rho})\,\delta A^{'\rho}{}_{\rho}.$$

Mais :

$$\sum_{\rho} A^{'\rho}{}_{\rho}\,\mathrm{Min}(A^{'\rho}{}_{\rho}) = \Delta$$

et, comme

$$A^{'\rho}{}_{\rho}\,A^{-1\,\rho}{}_{'\sigma} = \delta^{'\rho}_{'\sigma},$$

nous obtenons

$$\mathrm{Min}(A^{'\rho}{}_{\rho}) = A^{-1\,\rho}{}_{'\rho}\,\Delta,$$

que nous reportons ci-dessus pour arriver à

$$\delta\Delta = \Delta A^{-1\,\rho}{}_{'\rho}\,\delta A^{'\rho}{}_{\rho}.$$

Ainsi :

$$\partial_\lambda(-\Delta(x)) = (-(\Delta)A^{-1\,\rho}{}_{'\rho}\,\partial_\lambda A^{'\rho}{}_{\rho})(x)$$

si $\Delta(x) < 0$. On peut donc écrire :

$$\partial_\lambda|\Delta(x)| = \big(|\Delta|A^{-1\,\rho}{}_{'\rho}\,\partial_\lambda A^{'\rho}{}_{\rho}\big)(x)$$

ce qui implique que

$$\partial_\lambda|\Delta(x)|^{-1} = (-|\Delta|^{-1}\,A^{-1\,\rho}{}_{'\rho}\,\partial_\lambda A^{'\rho}{}_{\rho})(x).$$

2) Nous avons (les dépendances en x et $'x$ sont omises pour alléger l'écriture)

$$\begin{aligned}
{}'\partial_{'\alpha}{}'\mathfrak{a}^{['\alpha'\beta\ldots]} &= \big(A^{-1\,\lambda}{}_{'\alpha}\,\partial_\lambda\big(|\Delta|^{-1}A^{'\alpha}{}_{\alpha}A^{'\beta}{}_{\beta}\ldots\mathfrak{a}^{[\alpha\beta\ldots]}\big)\\
&= |\Delta|^{-1}A^{-1\,\lambda}{}_{'\alpha}\,A^{'\alpha}{}_{\alpha}A^{'\beta}{}_{\beta}\ldots\partial_\lambda\mathfrak{a}^{[\alpha\beta\ldots]}\\
&\quad + |\Delta|^{-1}A^{-1\,\lambda}{}_{'\alpha}\big(-A^{-1\,\rho}{}_{'\rho}\partial_\lambda A^{'\rho}{}_{\rho}\cdot A^{'\alpha}{}_{\alpha}A^{'\beta}{}_{\beta}\ldots\\
&\quad + \partial_\lambda A^{'\alpha}{}_{\alpha}\cdot A^{'\beta}{}_{\beta}\ldots + A^{'\alpha}{}_{\alpha}\partial_\lambda A^{'\beta}{}_{\beta}\ldots+\ldots\big)\mathfrak{a}^{[\alpha\beta\ldots]}
\end{aligned}$$

et, en se rappelant que $A^{-1\,\lambda}{}_{'\alpha}A^{'\alpha}{}_{\eta} = \delta^\lambda_\eta$, il vient

$$\begin{aligned}
{}'\partial_{'\alpha}{}'\mathfrak{a}^{['\alpha'\beta\ldots]} &= |\Delta|^{-1}\,A^{'\beta}{}_{\beta}\ldots\partial_\alpha\mathfrak{a}^{[\alpha\beta\ldots]}\\
&\quad + |\Delta|^{-1}\big(-A^{-1\,\rho}{}_{'\rho}\,\partial_\alpha A^{'\rho}{}_{\rho}\cdot A^{'\beta}{}_{\beta}\ldots + A^{-1\,\lambda}{}_{'\alpha}\,\partial_{(\lambda}A^{'\alpha}{}_{\alpha)}\,A^{'\beta}{}_{\beta}\ldots\\
&\quad + \underbrace{\partial_{(\alpha}A^{'\beta}{}_{\beta}\ldots_{)}+\ldots\big)\mathfrak{a}^{[\alpha\beta\ldots]}}_{=0} = |\Delta|^{-1}A^{'\beta}{}_{\beta}\ldots\partial_\alpha\mathfrak{a}^{[\alpha\beta\ldots]}. \qquad \text{(c.q.f.d.)}
\end{aligned}$$

Exemples.

1) L'*équation inhomogène de Maxwell* :

$$\partial_\alpha\mathfrak{H}^{[\alpha\beta]} = -\mathfrak{j}^\beta_Q \quad (\text{d'où } \partial_\beta\mathfrak{j}^\beta_Q = 0).$$

où $\mathfrak{H}$ désigne la densité du champ.

2) Le *courant d'entropie* :

$$\partial_\alpha\mathfrak{j}^\alpha_S = \mathfrak{i} \geq 0.$$

En résumé, nous avons montré que les composantes du rotationnel et de la divergence généralisés sont respectivement les composantes d'un tenseur et celles d'une densité de poids 1.

$$\begin{aligned}
b_{[\alpha\beta\gamma\ldots]}(x) &= \partial_{[\alpha}a_{\beta\gamma\ldots]}(x)\\
\mathfrak{b}^{[\beta\gamma\ldots]}(x) &= \partial_\alpha\mathfrak{a}^{[\alpha\beta\gamma\ldots]}(x).
\end{aligned}$$

De là nous avons déduit la covariance des équations de Maxwell relativement aux transformations $'x^{'\alpha} = \psi^{'\alpha}(x)$.

2.2 Espace capacitif – Théorème de Gauss

L'espace capacitif est un espace amorphe dans lequel est définie la densité scalaire de première espèce de poids -1 (capacité scalaire) $d\mathfrak{v}_{\langle -1\rangle}(x)$, constante positive construite de la façon suivante. Considérons à partir du point x de l'espace amorphe à d dimensions d déplacements élémentaires $d\vec{x}_{(k)} = \{dx^i_{(k)}\}$ $(k = 1, \ldots, d)$ linéairement indépendants. Nous appelons *mesure positive du parallélépipède élémentaire* formé sur ces déplacements, l'expression

$$d\mathfrak{v}_{\langle -1\rangle}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left|\sum_P (-1)^P dx^{i_1}_{(1)}\, dx^{i_2}_{(2)}\, \ldots dx^{i_d}_{(d)}\right| = |\det(dx^{\cdot}_{\cdot})|.$$

C'est en effet une densité scalaire de poids -1 : puisque $d'x'^i = A'^i{}_i dx^i$, nous avons

$$d'\mathfrak{v}('x) = |\det(d'x'^{\cdot}_{\cdot})| = |\det(A'^{\cdot}{}_{\cdot}\, dx^{\cdot}_{\cdot})| = |\Delta|^{+1} d\mathfrak{v}(x).$$

Par un *choix particulier* des déplacements élémentaires, en les prenant le long des axes x^k, nous obtenons

$$d\mathfrak{v}_{\langle -1\rangle}(x) \stackrel{*}{=} dx^1 dx^2 \cdots dx^d \stackrel{\text{def}}{=} d^d x.$$

Bien qu'étant une densité, $d^d x$ n'est pas écrite en lettres gothiques.

$$'(d^d x) = |\Delta(x)| d^d x.$$

Soit $\mathfrak{j}(x)$ une densité scalaire, donc telle que :

$$'\mathfrak{j}('x) = |\Delta(x)|^{-1} \mathfrak{j}(x).$$

Alors

$$d^d x\, \mathfrak{j}(x) = dI(x)$$

est un vrai scalaire associé au parallélépipède. Par suite, la structure capacitive de l'espace permet d'associer à toute densité scalaire un scalaire pur qui, nous le savons, reste invariant pour toute transformation.

En particulier, $\partial_\alpha \mathfrak{j}^\alpha(x)$ étant une densité scalaire, l'intégrale

$$I = \int d^d x \partial_\alpha \mathfrak{j}^\alpha(x)$$

est un scalaire et le *théorème de Gauss* est valable :

$$\int (d^d x) \partial_\alpha \mathfrak{j}^\alpha(x) = \oint (d^{d-1}_\alpha y) \mathfrak{j}^\alpha(y)$$

avec $(d^{d-1}_\alpha y) \stackrel{*}{=} \pm dy^1 \ldots dy^{\alpha-1} dy^{\alpha+1} \ldots dy^d$.

Remarque.

En général, une grandeur du type

$$I^{\alpha\beta\dots} = \int_{C(y)=0} (d^d x)\mathfrak{a}^{\alpha\beta\dots}(x)$$

n'a aucun caractère tensoriel puisque les transformations dépendent de l'endroit x. C'est pour cette raison que le théorème de Gauss n'est valable que si I est un scalaire ($d^d x\,\partial_\alpha \mathfrak{j}^\alpha$ étant un scalaire *invariant*).

Introduisons maintenant dans notre espace capacitif une *densité scalaire de première espèce positive* $\mathfrak{g}(x) > 0$

$$'\mathfrak{g}('x) = |\Delta(x)|^{-1}\mathfrak{g}(x).$$

Cette densité permet d'associer à tout tenseur, une densité tensorielle de même ordre et de poids $+1$ définie par :

$$\mathfrak{a}^{\alpha\beta\gamma\dots}(x) = \mathfrak{g}(x)\, a^{\alpha\beta\gamma\dots}(x). \tag{2.2.1}$$

Considérons alors la *divergence*

$$\partial_\alpha \mathfrak{a}^{[\alpha\beta\gamma\dots]} = \mathfrak{b}^{[\beta\gamma\dots]}.$$

En vertu de (2.2.1), elle peut s'écrire

$$\partial_\alpha(\mathfrak{g} a^{[\alpha\beta\gamma\dots]}) = \mathfrak{g} b^{[\beta\gamma\dots]}.$$

Mais

$$\partial_\alpha(\mathfrak{g} a^{[\alpha\beta\gamma\dots]}) = \mathfrak{g}(\partial_\alpha a^{[\alpha\beta\gamma\dots]} + (\partial_\alpha \log \mathfrak{g})\, a^{[\alpha\beta\gamma\dots]}).$$

Posons alors

$$\partial_\alpha(\log \mathfrak{g}(x)) \equiv G_\alpha(x)$$

et

$$D_\alpha = \partial_\alpha + G_\alpha.$$

Nous obtenons ainsi la *généralisation de la divergence pour les tenseurs complètement antisymétriques* :

$$D_\alpha a^{[\alpha\beta\gamma\dots]}(x) = b^{[\beta\gamma\dots]}(x).$$

Par exemple :

1) $(\partial_\alpha \mathfrak{H}^{[\alpha\beta]} = -\mathfrak{j}^\beta_Q)(x)$ devient $(D_\alpha H^{[\alpha\beta]} = -j^\beta_Q)(x)$,
2) $(\partial_\alpha \mathfrak{j}^\alpha_S = \mathfrak{i})(x)$ devient $(D_\alpha j^\alpha_S = i)(x)$.

Pour terminer, nous allons définir l'*élément de volume (scalaire) positif* $dV(x)$ et l'*élément de surface (vecteur covariant)* $d\sigma_\alpha(y)$

$$dV(x) = \mathfrak{g}(x)\, d^d x \; (= 'dV('x)),$$
$$d\sigma_\alpha(y) = \mathfrak{g}(y)\, d^{d-1}_\alpha(y).$$

Il est alors possible de généraliser le *théorème de Gauss pour les tenseurs du premier ordre* (vecteurs contravariants) :

$$\int dV(x) D_\alpha j^\alpha(x) = \oint d\sigma_\alpha(y) j^\alpha(y).$$

En effet :

$$\begin{aligned}\int dV D_\alpha j^\alpha &= \int d^d x\, \mathfrak{g} D_\alpha j^\alpha = \int d^d x\, \partial_\alpha(\mathfrak{g}\, j^\alpha) \\ &= \oint d_\alpha^{d-1} y\, \mathfrak{g}\, j^\alpha = \oint d\sigma_\alpha j^\alpha.\end{aligned}$$

2.3 Dérivée covariante

Nous commençons par l'introduction d'une notation qui va grandement faciliter l'écriture :

$$u^{\alpha\beta\dots}{}_{\lambda\dots}(x) \equiv u^A(x).$$

Considérons la grandeur (disons un tenseur) $u^A(y)$ attachée au point y et la grandeur $u^A(x)$ attachée au point x.

Comparer, et à fortiori additionner et soustraire, ces deux grandeurs n'a en général aucun sens dans l'espace amorphe puisqu'elles sont attachées à des points distincts : $u^A(y) \pm u^A(x)$ n'a aucun caractère tensoriel (ce n'est même pas une grandeur géométrique !) puisque les coefficients $A^{'\cdot}{}_{\cdot}(x)$ dépendent de l'endroit. La seule exception est fournie par les *scalaires* : $\chi(x, y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ est encore un scalaire (bilocal) invariant.

Pour pouvoir effectuer des comparaisons entre deux grandeurs en deux lieux différents, il est nécessaire, au préalable, d'en transporter une vers l'autre :

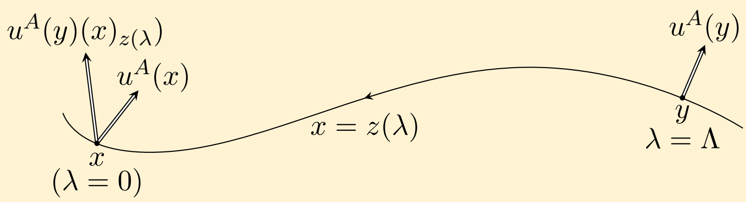


Fig. 2.3.1

Nous écrivons :

$u^A(y)(x)_{z(\cdot)}$: *la grandeur* $u^A(y)$ *transportée en* x *par le chemin* $z(\cdot)$.

Reste encore à *définir le transport.*

Dans l'espace affine, ce transport (tellement habituel qu'on ne le mentionne même plus) s'effectue par déplacement parallèle ; le parallélisme, qui est une notion affine et non métrique, s'exprime par l'égalité des composantes. Ce procédé est covariant du fait que les coefficients $A^{\prime\,\cdot}{}_{\cdot}$ des transformations affines sont des constantes. L'utilisation des déplacement infinitésimaux permet, en particulier, de définir la différentielle (puis la dérivée) d'une grandeur de façon covariante :

$$du^A(x) = u^A(x+\delta x)(x)_{\|} - u^A(x) \stackrel{\text{def}}{=} u^A(x+\delta x) - u^A(x).$$

Dans l'espace amorphe, où les systèmes de coordonnées rectilignes n'existent pas nécessairement, une telle définition (égalité des composantes) du déplacement n'est pas covariante. Même en considérant un déplacement infinitésimal, le parallélisme

$$u^A(x+\delta x)(x) = u^A(x+\delta x)$$

ne convient pas puisque

$$u^A(x+\delta x) = u^A(x) + \delta x^\alpha \partial_\alpha u^A(x) + \ldots$$

contient des dérivées qui, nous l'avons vu, n'ont aucun caractère tensoriel.

Comme nous voulons établir des règles covariantes de calcul différentiel, il s'avère donc nécessaire de définir un déplacement infinitésimal convenable. Nous le choisirons le plus simple possible en postulant la linéarité (dans l'infiniment petit).

Postulat 1

La grandeur $u^A(x+\delta x)$ déplacée en x *conserve le même caractère tensoriel* et *dépend linéairement* de δx^α et de u^A, donc

$$u^A(x+\delta x)(x) \stackrel{\text{def}}{=} u^A(x+\delta x) + \delta x^\alpha\, \Gamma_\alpha{}^A{}_{A'}(x) u^{A'}(x+\delta x) \tag{2.3.1}$$

où le δx dans $u^{A'}(\cdot)$ va être supprimé car il y aurait dépendance quadratique.

Nous posons alors :

$$u^A(x+\delta x)(x) - u^A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \delta x^\alpha \nabla_\alpha u^A(x), \tag{2.3.2}$$

ce qui doit être considéré comme la définition covariante généralisée de la *différentielle de $u^A(x)$, relativement au déplacement.*

Puisque :

$$u^A(x+\delta x) = u^A(x) + \delta x^\alpha \partial_\alpha u^A(x) + \text{termes quadratiques},$$

nous avons

$$u^A(x+\delta x)(x) = u^A(x) + \delta x^\alpha [\partial_\alpha u^A(x) + \Gamma_\alpha{}^A{}_{A'}(x) u^{A'}(x)]$$

et alors

$$\delta x^\alpha (\partial_\alpha u^A(x) + \Gamma_\alpha{}^A{}_{A'}(x) u^{A'}(x)) = \delta x^\alpha \nabla_\alpha u^A(x).$$

Par *définition*, on appelle *dérivée covariante* du tenseur u^A, le tenseur

$$\nabla_\alpha u^A(x) = \partial_\alpha u^A(x) + \Gamma_\alpha{}^A{}_{A'}(x) u^{A'}(x).$$

Il est clair que

$$\nabla_\alpha u^A(x) \overset{\text{def}}{=} b_\alpha{}^A(x) \overset{\text{def}}{=} u^A{}_{;\alpha}(x)$$

est un tenseur puisque sa contraction avec δx^α donne un tenseur.

Nous disons que deux points $x + \delta x$ et x sont en *connexion affine* lorsqu'un tenseur est transporté de $x + \delta x$ en x selon (2.3.1). Les fonctions $\Gamma_\alpha{}^A{}_{A'}(x)$ sont dites *coefficient de connexion affine* et l'espace amorphe est ainsi doué d'une structure à connexion affine. (La géométrie affine est valable, sous ces hypothèses, dans l'infiniment petit.)

Lorsque nous nous arrangeons pour effectuer le déplacement de façon que :

$$\delta x^\alpha\, \Gamma_\alpha{}^A{}_{A'}(x) u^{A'}(x) = 0, \tag{2.3.3}$$

nous disons que $u^A(x + \delta x)$ a été transporté par *déplacement parallèle*.

Il est assez intuitif que les dérivées covariantes sont des généralisations dans l'espace à connexion affine des dérivées ordinaires. Il est en fait nécessaire de postuler cette généralisation.

Postulat 2

Pour un *scalaire* $\varphi(x)$:

$$\nabla_\alpha \varphi(x) \overset{\text{def}}{=} \partial_\alpha \varphi(x).$$

Postulat 3

La *règle de Leibniz* (distributivité des dérivées covariantes) :

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha(a^A b^B c^C \ldots)(x) &\overset{\text{def}}{=} (\nabla_\alpha a^A) b^B c^C \ldots + a^A(\nabla_\alpha b^B) c^C \ldots \\ &\quad + a^A b^B (\nabla_\alpha c^C) \ldots + \ldots\end{aligned}$$

Règle de la somme

La règle de la somme se déduit de la linéarité en u^A (postulat 1) et s'écrit :

$$\nabla_\alpha(a^A + b^B + \ldots) = \nabla_\alpha a^A + \nabla_\alpha b^B + \ldots.$$

Ces postulats nous permettent de déduire la dérivée covariante de la grandeur b_A contragrédiente de a^A :

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha(a^A b_A) = \nabla_\alpha \varphi = \partial_\alpha \varphi = \partial_\alpha(a^A b_A) &= (\partial_\alpha a^A)\, b_A + a^A\, \partial_\alpha b_A \\ &= (\nabla_\alpha a^A - \Gamma_\alpha{}^A{}_{A'} a^{A'}) b_A + a^A \partial_\alpha b_A\end{aligned}$$

et, puisque a^A est tout à fait quelconque, nous en déduisons que

$$\nabla_\alpha b_A(x) = \partial_\alpha b_A - b_{A'} \Gamma_\alpha{}^{A'}{}_A(x).$$

Un tenseur quelconque d'ordre n : $a^{\beta\gamma\cdots}{}_{\lambda\ldots}$ pouvant être considéré comme formé d'une somme de produits de n tenseurs d'ordre 1, sa dérivée covariante peut s'écrire (en vertu du postulat 3) :

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha a^{\beta\gamma\cdots}{}_{\lambda\ldots} &= \partial_\alpha a^{\beta\gamma\cdots}{}_{\lambda\ldots} + \Gamma_\alpha{}^\beta{}_{\beta'}\, a^{\beta'\gamma\cdots}{}_{\lambda\ldots} \\ &\quad + \Gamma_\alpha{}^\gamma{}_{\gamma'}\, a^{\beta\gamma'\cdots}{}_{\lambda\ldots} + \ldots - a^{\beta\gamma\cdots}{}_{\lambda'\ldots} \Gamma_\alpha{}^{\lambda'}{}_\lambda - \ldots.\end{aligned}$$

Ce sont ces coefficients à trois indices $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma(x)$ que nous considérerons par la suite.

2.4 Transformation des $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$

Le postulat 1, imposant la conservation du caractère tensoriel à la quantité transportée, impose par là même des conditions bien précises sur les coefficients $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma(x)$.

Formons :

$$\begin{aligned}
{}'\nabla_{'\alpha}{}'u^{'\beta}('x) &= {}'\partial_{'\alpha}{}'u^{'\beta}('x) + {}'\Gamma_{'\alpha}{}^{'\beta}{}_{'\gamma}('x)\,{}'u^{'\gamma}('x) \\
&= {}'\partial_{'\alpha}\Big(A^{'\beta}{}_\beta('x)u^\beta(x)\Big) + {}'\Gamma_{'\alpha}{}^{'\beta}{}_{'\gamma}('x)\,{}'u^{'\gamma}('x) \\
&= A^{-1\,\alpha}{}_{'\alpha}('x)\Big(\big(\partial_\alpha A^{'\beta}{}_\gamma(x)\big)u^\gamma(x) + A^{'\beta}{}_\gamma(x)\partial_\alpha u^\gamma(x)\Big) \\
&\quad + {}'\Gamma_{'\alpha}{}^{'\beta}{}_{'\gamma}('x)A^{'\gamma}{}_\gamma(x)u^\gamma(x) \\
&= A^{-1\,\alpha}{}_{'\alpha}('x)A^{'\beta}{}_\gamma\partial_\alpha u^\gamma(x) + \Big(A^{-1\,\alpha}{}_{'\alpha}('x)\partial_\alpha A^{'\beta}{}_\gamma(x) + {}'\Gamma_{'\alpha}{}^{'\beta}{}_{'\gamma}('x)A^{'\gamma}{}_\gamma(x)\Big)u^\gamma(x).
\end{aligned}$$

Or $\nabla_\alpha u^\beta(x)$ est un tenseur, donc

$$'\nabla_{\alpha}u^{'\beta}('x) = A^{-1\,\alpha}{}_{'\alpha}('x)A^{'\beta}{}_\beta(x)\Big(\partial_\alpha u^\beta(x) + \Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma(x)u^\gamma(x)\Big).$$

Alors, en identifiant ces deux expressions, on obtient

$$\Big(A^{-1\,\alpha}{}_{'\alpha}\partial_\alpha A^{'\beta}{}_\gamma + {}'\Gamma_{'\alpha}{}^{'\beta}{}_{'\gamma}A^{'\gamma}{}_\gamma\Big)u^\gamma = A^{-1\,\alpha}{}_{'\alpha}A^{'\beta}{}_\beta\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma u^\gamma.$$

Finalement, en multipliant cette équation par les matrices inverses de $A^{-1\,\alpha}{}_{'\alpha}$ et de $A^{'\beta}{}_\beta$, nous obtenons *la loi de transformation des* $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma(x)$:

$$\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma = A^{-1\,\beta}{}_{'\beta}\partial_\alpha A^{'\beta}{}_\gamma + A^{-1\,\beta}{}_{'\beta}\,{}'\Gamma_{'\alpha}{}^{'\beta}{}_{'\gamma}A^{'\alpha}{}_\alpha A^{'\gamma}{}_\gamma.$$

Dans un changement de référentiel affine, où les $A^{'}{}_{\cdot}$ sont des constantes, le premier terme du second membre est nul et *les composantes des coefficients de connexion affine* $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ *se transforment comme un tenseur du troisième ordre.* Nous savons que :

$$\partial_{(\alpha}A^{'\beta}{}_{\gamma)}(x) = \partial_{(\alpha\gamma)}\psi^{'\beta}(x) = \partial_\gamma A^{'\beta}{}_\alpha(x)$$

est symétrique dans ses indices covariants. Donc si nous posons

$$\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma = G_{(\alpha}{}^\beta{}_{\gamma)} + Q_{[\alpha}{}^\beta{}_{\gamma]}$$

nous voyons que la partie antisymétrique de $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$, c'est-à-dire $Q_{[\alpha}{}^\beta{}_{\gamma]}$, se transforme toujours comme un tenseur. Cette partie antisymétrique porte le nom de *torsion* (cf. sect. 2.8).

La partie symétrique de $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$, c'est-à-dire $G_{(\alpha}{}^\beta{}_{\gamma)}$, se transforme comme :

$$G_{(\alpha}{}^\beta{}_{\gamma)}(x) = A^{-1\,\beta}{}_{'\beta}\partial_\alpha A^{'\beta}{}_\gamma + A^{-1\,\beta}{}_{'\beta}\,{}'G_{('\alpha}{}^{'\beta}{}_{'\gamma)}A^{'\alpha}{}_\alpha A^{'\gamma}{}_\gamma. \qquad (2.4.1)$$

La dérivée covariante peut s'écrire

$$\nabla_\alpha u^\beta = D_\alpha u^\beta + Q_{[\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma]} u^\gamma$$

où

$$D_\alpha u^\beta = \partial_\alpha u^\beta + G_{(\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma)} u^\gamma$$

est la *dérivée covariante pour une connexion symétrique.*

Remarques.

On constate que $D_\alpha u^\beta$ est un tenseur puisque $\nabla_\alpha u^\beta$ et $Q_{[\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma]} u^\gamma$ sont des tenseurs.

A la section 2.2. nous avons défini dans l'espace amorphe l'opérateur de divergence $D_\alpha = \partial_\alpha + G_\alpha$ avec $G_\alpha = \partial_\alpha(\log \mathfrak{g})$. Dans le *cas particulier* d'un espace à connexion affine symétrique, la divergence s'écrit :

$$D_\alpha u^\alpha = \partial_\alpha u^\alpha + G_{(\alpha}{}^{\alpha}{}_{\gamma)} u^\gamma$$

et donc

$$G_\alpha = G_\gamma{}^\gamma{}_\alpha \equiv G_{\cdot}{}^{\cdot}{}_\alpha.$$

2.5 Lignes auto-parallèles

Dans l'espace à connexion affine, considérons la courbe définie en termes d'un paramètre λ :

$$x^\alpha = z^\alpha(\lambda) \qquad \alpha = 1, \ldots, d.$$

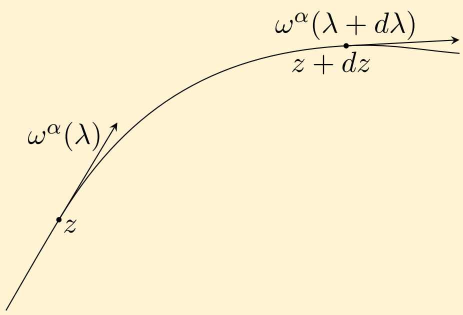


Fig. 2.5.1

Posons :

$$\frac{dz^\alpha(\lambda)}{d\lambda} = \omega^\alpha(z(\lambda)) \equiv \omega^\alpha(\lambda).$$

$\omega^\alpha(z(\lambda))$ est le *vecteur tangent* à la ligne $x^\alpha = z^\alpha(\lambda)$ au point z. Nous supposons une correspondance biunivoque entre z et λ.

Le transport de $\omega^\alpha(z + dz)$ au point z est, d'après ce qui a été vu,

$$\omega^\alpha(z + dz)(z) = \omega^\alpha(z + dz) + dz^\beta (\Gamma_\beta{}^\alpha{}_\gamma \omega^\gamma)(z).$$

Nous allons maintenant étudier une classe particulière de lignes : les *lignes auto-parallèles*. Nous disons qu'une ligne est auto-parallèle si ses vecteurs tangents sont parallèles (c'est-à-dire si leurs composantes sont égales, ou moins restrictivement, si elles sont proportionnelles). Puisque la seule possibilité de comparer deux vecteurs nécessite le transport de l'un vers l'autre, nous admettrons la définition suivante :

Définition des lignes auto-parallèles.

La ligne $x^\alpha = z^\alpha(\lambda)$ est dite auto-parallèle si

$$\omega^\alpha(z+dz)(z) = (1 + d\lambda f(\lambda))\omega^\alpha(z). \tag{2.5.1}$$

Dans ce cas nous avons :

$$\omega^\alpha(\lambda+d\lambda) + \Big(dz^\beta\big(\Gamma_\beta{}^\alpha{}_\gamma\omega^\gamma\big) - \omega^\alpha\Big)(\lambda) = d\lambda f(\lambda)\omega^\alpha(\lambda).$$

Mais

$$\omega^\alpha(\lambda+d\lambda) = \omega^\alpha(\lambda) + d\lambda\frac{d^2z^\alpha(\lambda)}{d\lambda^2} + \dots$$

et donc

$$\omega^\alpha(\lambda) + \frac{d^2z^\alpha(\lambda)}{d\lambda^2}d\lambda + dz^\beta(\Gamma_\beta{}^\alpha{}_\gamma\omega^\gamma)(\lambda) - \omega^\alpha(\lambda) = d\lambda\, f(\lambda)\,\omega^\alpha(\lambda),$$

soit encore en divisant par $d\lambda$,

$$\frac{d^2z^\alpha(\lambda)}{d\lambda^2} + \Gamma_\beta{}^\alpha{}_\gamma(\lambda)\,\frac{dz^\beta(\lambda)}{d\lambda}\,\frac{dz^\gamma(\lambda)}{d\lambda} = f(\lambda)\,\frac{dz^\alpha(\lambda)}{d\lambda}.$$

Comme $(dz^\beta/d\lambda)\,(dz^\gamma/d\lambda)$ est symétrique, seule la partie symétrique de $\Gamma_\beta{}^\alpha{}_\gamma$, soit $G_{(\beta}{}^\alpha{}_{\gamma)}$ intervient. L'*équation différentielle des lignes auto-parallèles* prend la forme suivante :

$$\frac{d^2z^\alpha(\lambda)}{d\lambda^2} + G_\beta{}^\alpha{}_\gamma(\lambda)\,\frac{dz^\beta(\lambda)}{d\lambda}\,\frac{dz^\gamma(\lambda)}{d\lambda} = f(\lambda)\,\frac{dz^\alpha(\lambda)}{d\lambda}. \tag{2.5.2}$$

Effectuons une transformation de paramètre afin d'éliminer le terme du second membre.

Soit $\tau = \tau(\lambda)$, et écrivons : $d\tau/d\lambda = \tau'$ et $d^2\tau/d\lambda^2 = \tau''$, alors

$$\frac{dz^\alpha}{d\lambda} = \frac{dz^\alpha}{d\tau}\,\tau' \quad \text{et} \quad \frac{d^2z^\alpha}{d\lambda^2} = \frac{d^2z^\alpha}{d\tau^2}\,(\tau')^2 + \frac{dz^\alpha}{d\tau}\,\tau''.$$

En substituant dans (2.5.2), il vient

$$\frac{d^2z^\alpha}{d\tau^2} + \frac{dz^\alpha}{d\tau}\,\frac{\tau''}{(\tau')^2} + G_\beta{}^\alpha{}_\gamma\,\frac{dz^\beta}{d\tau}\,\frac{dz^\gamma}{d\tau} = \frac{1}{\tau'}\,f(\lambda)\,\frac{dz^\alpha}{d\tau}.$$

L'élimination cherchée est réalisée si :

$$\frac{dz^\alpha}{d\tau}\,\frac{\tau''}{(\tau')^2} = \frac{dz^\alpha}{d\tau}\,\frac{1}{\tau'}\,f(\lambda),$$

c'est-à-dire si

$$\frac{\tau''}{\tau'} = f(\lambda), \quad \text{soit encore} \quad \log \tau'(\lambda) = \int^{\lambda} f(\lambda')d\lambda'.$$

Le changement de paramètre $(\lambda \to \tau)$ doit donc satisfaire la *condition* suivante

$$\tau(\lambda) = \int^{\lambda} d\lambda'' exp\{\int^{\lambda''} f(\lambda')\, d\lambda'\}.$$

Dans ce cas, l'*équation des lignes auto-parallèles* est

$$\frac{d^2 z^\alpha}{d\tau^2} + G_\beta{}^\alpha{}_\gamma(z(\tau))\Big(\frac{dz^\beta}{d\tau}\frac{dz^\gamma}{d\tau}\Big)(\tau) = 0. \qquad (2.5.3)$$

Remarque. On constate que

$$f(\tau) = 0 \implies \begin{cases} \omega^\alpha(z+dz)(z) = \omega^\alpha(z) \\ \text{où} \quad \omega^\alpha(z) = \dfrac{dz^\alpha}{d\tau}. \end{cases} \qquad (2.5.1)'$$

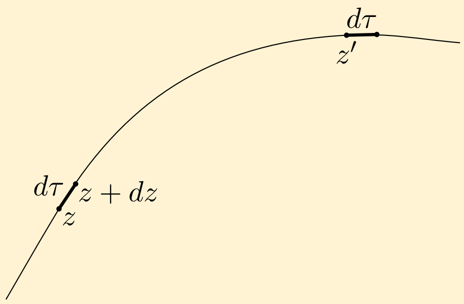


Fig. 2.5.2

Nous voyons apparaître sur la ligne auto-parallèle une connexion métrique rudimentaire (cf. chapitre 3). En effet, en considérant $d\tau$ comme *la mesure de longueur* de l'élément de ligne compris entre z et $z+dz$, l'égalité (2.5.1)' exprime la conservation des longueurs par déplacement le long de la ligne auto-parallèle. Donc τ jouit bien des propriétés d'un temps propre.

2.6 Le référentiel « géodésique » local

On appelle *référentiel « géodésique »* $\{'x\}$, un référentiel dans lequel les égalités

$$u^A('x + d'x)('x) = u^A('x + d'x)$$

sont valables, c'est-à-dire pour lesquelles

$$'G_{'\alpha}{}^{'\beta}{}_{'\gamma}('x) = 0.$$

(La terminologie « géodésique » est vicieuse car l'espace n'est pas supposé métrique ; nous l'utilisons pour nous conformer à l'usage).

Remarquons que s'il existe un référentiel géodésique, il en existe une infinité qui se déduisent l'un de l'autre par transformation affine ($A^{\prime\cdot}{}_{\cdot} = \mathrm{cte}$).

Nous voulons montrer qu'il est possible de trouver un système $\{{}'x\}$ tel qu'en un point quelconque $x_0 \to {}'x_0$ donné d'avance, nous avons

$$ {}'G_{'\alpha}{}^{'\beta}{}_{'\gamma}({}'x_0) = 0. \qquad \text{connexion géodésique.} \tag{2.6.1}$$

Effectuons au voisinage de x_0 la transformation :

$$\begin{cases} {}'x^{'\alpha} = x_0^{'\alpha} + h^{'\alpha}(x) = \psi^{'\alpha}(x) \\ \text{avec :} \quad h^{'\alpha}(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_\beta h^{'\alpha}(x_0) = 0, \end{cases} \tag{2.6.2}$$

où $h'^{\alpha}(x)$ est une fonction à déterminer eu égard à la connexion géodésique (2.6.1).

Alors :

$$A'^{\alpha}{}_{\alpha}(x_0) = \partial_\alpha \psi'^{\alpha}(x)\Big|_{x=x_0} = \delta_\alpha^{'\alpha}$$

et, en tenant compte de (2.4.1),

$$\begin{aligned} G_\alpha{}^\beta{}_\gamma(x_0) &= A^{-1\beta}{}_{'\beta}\partial_\alpha A^{'\beta}{}_\gamma + A^{-1\beta}{}_{'\beta}\,{}'G_{'\alpha}{}^{'\beta}{}_{'\gamma}({}'x_0)A^{'\alpha}{}_\alpha A^{'\gamma}{}_\gamma \\ &= (\partial_\alpha A^\beta{}_\gamma)(x_0) + 0. \end{aligned}$$

Donc nous avons

$$G_\alpha{}^\beta{}_\gamma(x_0) = \partial_\alpha\partial_\gamma h^\beta(x_0). \tag{2.6.3}$$

La transformation (2.6.2) n'étant supposée valable qu'au voisinage de x_0, nous pouvons effectuer un développement en série de Taylor et ne conserver que les termes d'ordre inférieur à trois :

$$\begin{aligned} {}'x^{'\alpha} = \psi^{'\alpha}(x) = x_0^{'\alpha} + \underbrace{h^{'\alpha}(x_0)}_{=0} + \underbrace{\partial_\beta h^{'\alpha}(x_0)}_{=0}(x-x_0)^\beta \\ + \frac{1}{2}\partial_\beta\partial_\gamma h^{'\alpha}(x_0)(x-x_0)^\beta(x-x_0)^\gamma + \text{termes négligés.} \end{aligned}$$

Alors, en vertu de (2.6.3), le *référentiel géodésique local* (voisinage de x_0) est défini par les formules de transformations :

$$ {}'x^{'\alpha} = x_0^{'\alpha} + \frac{1}{2}G_\beta{}^{'\alpha}{}_\gamma(x_0)(x_0)\,(x-x_0)^\beta(x-x_0)^\gamma. \tag{2.6.4}$$

Propriétés du référentiel géodésique local.

1) Dans ce système, au point ${}'x_0$, la dérivée covariante s'identifie à la dérivée ordinaire :

$$ {}'D_{'\alpha}\,{}'u^{'A}({}'x_0) = {}'\partial_{'\alpha}\,{}'u^{'A}({}'x_0).$$

2) Reprenons l'équation (2.5.3) des lignes auto-parallèles. Au point x_0, pour la ligne définie par $(dz^\alpha/d\tau)(0) = \omega^\alpha(0)$, l'équation (2.5.3) donne, en supposant $\tau = 0$ au point x_0 :

$$\begin{aligned} z^\alpha(\tau) &= z^\alpha(0) + \frac{dz^\alpha}{d\tau}(0)\,\tau + \frac{1}{2!}\frac{d^2z^\alpha}{d\tau^2}(0)\,\tau^2 + \dots \\ &= z^\alpha(0) + \omega^\alpha(0)\,\tau - \frac{1}{2}G_\beta{}^\alpha{}_\gamma(0)\,\omega^\beta(0)\,\omega^\gamma(0)\,\tau^2 + \dots \end{aligned}$$

Dans le système « géodésique » $\{'x\}$, où $'G_\beta{}^\alpha{}_\gamma(0) = 0$, *la ligne auto-parallèle est une droite au voisinage de* x_0

$$'z^\alpha(\tau) = {}'z^\alpha(0) + {}'\omega^\alpha(0)\,\tau + \dots$$

2.7 Transport intégral

Considérons une courbe

$$x^\alpha = z^\alpha(\lambda) \quad \alpha = 1, \dots, d$$

et posons

$$\frac{dz^\alpha(\lambda)}{d\lambda} = v^\alpha(z(\lambda)) \stackrel{\text{def}}{=} v^\alpha(\lambda).$$

(« déf » signifie ici : avec l'hypothèse d'une correspondance biunivoque entre z et λ). Le transport de la grandeur $u^A(z(\lambda+d\lambda))$ le long de cette courbe jusqu'au point $z(\lambda)$ est défini dans l'espace à connexion affine par (cf. sect. 2.3)

$$u^A(z(\lambda + d\lambda))(z(\lambda)) = (1 + dz^\alpha(\lambda)\,\nabla_\alpha)\,u^A(z(\lambda)).$$

qui, grâce à

$$dz^\alpha(\lambda) = \frac{dz^\alpha(\lambda)}{d\lambda}\,d\lambda = v^\alpha(\lambda)\,d\lambda,$$

s'écrit

$$u^A(z(\lambda + d\lambda))(z(\lambda)) = (1 + d\lambda\,v^\alpha(\lambda)\,\nabla_\alpha)u^A(z(\lambda)).$$

Envisageons maintenant deux transports infinitésimaux *successifs*. Nous avons

$$u^A(z(\lambda + 2d\lambda))(z(\lambda + d\lambda)) = (1 + d\lambda\,v^\alpha(\lambda + d\lambda)\,\nabla_\alpha)u^A(z(\lambda + d\lambda)),$$

puis

$$u^A(z(\lambda + 2d\lambda))(z(\lambda)) = u^A(z(\lambda + d\lambda))\,u^A(z(\lambda + d\lambda))(z(\lambda)).$$

Il en résulte :

$$u^A(z(\lambda + 2d\lambda))(z(\lambda)) = \underbrace{(1 + d\lambda\,v^\alpha(\lambda + d\lambda)\,\nabla_\alpha)\,u^A(z(\lambda + d\lambda))}_{\zeta^A(z(\lambda+d\lambda))}(z(\lambda)).$$

Mais nous avons

$$\zeta^A(z(\lambda+d\lambda))(z(\lambda)) = (1 + d\lambda v^\alpha(\lambda)\nabla_\alpha)\,\zeta^A(z(\lambda))$$

et

$$\zeta^A(z(\lambda)) = (1 + d\lambda\, v^\alpha(\lambda)\,\nabla_\alpha)u^A(z(\lambda)),$$

donc

$$u^A(z(\lambda+2d\lambda))(z(\lambda)) = (1 + d\lambda\, v^\alpha(\lambda)\,\nabla_\alpha)^2 u^A(z(\lambda)).$$

Pour N transports infinitésimaux successifs, nous obtenons (par itération)

$$u^A(z(\lambda+Nd\lambda))(z(\lambda)) = (1 + d\lambda\, v^\alpha(\lambda)\,\nabla_\alpha)^N u^A(z(\lambda)).$$

Considérons alors *le transport à distance finie (transport intégral)* de la grandeur $u^A(z(\lambda))$, le long de la courbe, jusqu'au point $z(0)$; nous pouvons le construire à l'aide d'une suite de transports infinitésimaux successifs. Par conséquent :

$$u^A(z(\lambda))(z(0)) = \lim_{N\to\infty}(1 + d\lambda\, v^\alpha(0)\,\nabla_\alpha)^N u^A(z(0)),$$

avec $d\lambda = \lambda/N$. En posant $P(\lambda) = v^\alpha(\lambda)\nabla_\alpha$ nous avons

$$\lim_{N\to\infty}(1 + d\lambda\, v^\alpha(0)\,\nabla_\alpha)^N = \lim_{N\to\infty}(1 + \frac{\lambda}{N}P)^N \stackrel{\text{def}}{=} e^{\lambda P(0)}.$$

Par conséquent :

$$u^A(z(\lambda))(z(0)) = e^{\lambda P(z(0))} u^A(z(0)).$$

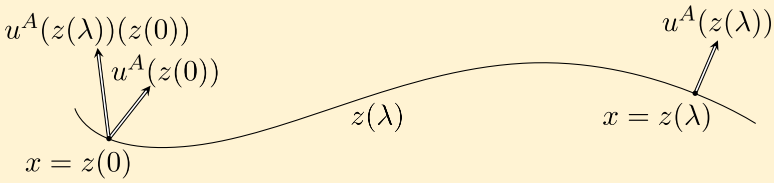


Fig. 2.7.1

Nous voyons que :

$$\frac{d}{d\lambda}u^A(z(\lambda))(z(0)) = Pu^A(z(\lambda))(z(0)).$$

La grandeur transportée *dépend* donc en général du chemin parcouru.

2.8 Transport quasi-fermé

Etant donné deux fonctions vectorielles $v^\alpha(\cdot)$ et $w^\alpha(\cdot)$, considérons le réseau de courbes définies par les systèmes d'équations

$$\frac{dx^\alpha(\lambda)}{d\lambda} = v^\alpha(\lambda)$$
$$\frac{dy^\alpha(\mu)}{d\mu} = w^\alpha(\mu).$$

Construisons, dans un domaine suffisamment petit pour que ces courbes ne se recoupent pas, un quasi-parallélogramme comme indiqué dans la figure 2.8.1 :

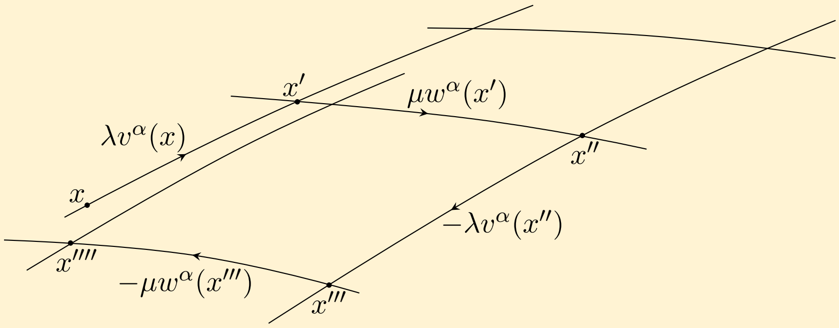


Fig. 2.8.1

Notons qu'en général $x'''' \not\equiv x$.

Envisageons alors le transport de la grandeur $u^A(x'''')$ le long du quasi-parallélogramme jusqu'au point x. En vertu de la section 2.7 nous aurons :

$$u^A(x'''')(x) = e^{\lambda P} e^{\mu Q} e^{-\lambda P} e^{-\mu Q} u^A(x),$$

où nous avons posé

$$P = v^\alpha \bigtriangledown_\alpha \quad \text{et} \quad Q = w^\alpha \bigtriangledown_\alpha .$$

Le quasi-parallélogramme étant infiniment petit, nous pouvons écrire en deuxième approximation

$$\begin{aligned} u^A(x'''') = &\Big(1 + \lambda P + \frac{\lambda^2}{2!}P^2\Big)\Big(1 + \mu Q + \frac{\mu^2}{2!}Q^2\Big) \\ &\times \Big(1 - \lambda P + \frac{\lambda^2}{2!}P^2\Big)\Big(1 - \mu Q + \frac{\mu^2}{2!}Q^2\Big) u^A(x). \end{aligned}$$

On note que la première approximation donne $u^A(x'''')(x) = u^A(x)$: l'effet du transport quasi-fermé est du deuxième ordre !

Ce produit d'opérateurs donne tout calcul fait

$$u^A(x'''')(x) = (1 + \lambda\mu[P, Q])u^A(x).$$

Explicitons le commutateur $[P, Q]$:

$$\begin{aligned} [P, Q] &= v^\alpha \bigtriangledown_\alpha w^\beta \bigtriangledown_\beta - w^\beta \bigtriangledown_\beta v^\alpha \bigtriangledown_\alpha \\ &= v^\alpha (\bigtriangledown_\alpha w^\beta) \bigtriangledown_\beta + v^\alpha w^\beta \bigtriangledown_\alpha \bigtriangledown_\beta - w^\beta (\bigtriangledown_\beta v^\alpha) \bigtriangledown_\alpha - v^\alpha w^\beta \bigtriangledown_\beta \bigtriangledown_\alpha . \end{aligned}$$

Pour simplifier, posons

$$\begin{aligned} \lambda v^\alpha \bigtriangledown_\alpha w^\beta(x) = 0 \\ \mu w^\beta \bigtriangledown_\beta v^\alpha(x) = 0. \end{aligned}$$

Ceci signifie que $w^\beta(x+\lambda v)(x) = w^\beta(x)$ et $v^\alpha(x+\mu w)(x) = v^\alpha(x)$. Signalons que ce choix rend notre contour quasi-fermé, aussi proche que possible d'un contour fermé (d'un parallélogramme). D'autre part, utilisons la notation différentielle (pour λ et μ infinitésimaux) :

$$\lambda v^\alpha(x) = dx^\alpha \quad \text{et} \quad \mu w^\beta(x) = dy^\beta.$$

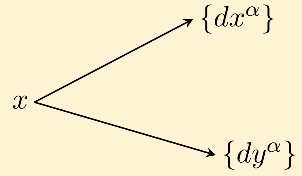


Fig. 2.8.2

Nous aurons par conséquent :

$$[P, Q] = v^\alpha w^\beta [\nabla_\alpha, \nabla_\beta]$$

et donc

$$u^A(x'''')(x) = u^A(x) + dx^\alpha dy^\beta [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] u^A(x).$$

Posons :

$$d^2\varphi^{[\alpha\beta]} = dx^\alpha dy^\beta - dx^\beta dy^\alpha$$

et alors il vient

$$u^A(x'''')(x) = u^A(x) + \frac{1}{2} d^2\varphi^{[\alpha\beta]} [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] u^A(x).$$

Evaluons le commutateur $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]$; en utilisant $\nabla_\alpha u^A = \partial_\alpha u^A + \Gamma_\alpha{}^A{}_B u^B$ nous obtenons successivement

$$\begin{aligned}
\nabla_\alpha \nabla_\beta u^A &= \partial_\alpha \nabla_\beta u^A + \Gamma_\alpha{}^A{}_B \nabla_\beta u^B - (\nabla_{\beta'} u^A)\Gamma_\alpha{}^{\beta'}{}_\beta \\
&= \partial_\alpha \partial_\beta u^A + (\partial_\alpha \Gamma_\beta{}^A{}_B) u^B + \Gamma_\beta{}^A{}_B \partial_\alpha u^B \\
&\quad + \Gamma_\alpha{}^A{}_B \partial_\beta u^B + \Gamma_\alpha{}^A{}_C \Gamma_\beta{}^C{}_B u^B - (\nabla_\gamma u^A)\Gamma_\alpha{}^\gamma{}_\beta,
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
\nabla_\beta \nabla_\alpha u^A &= \partial_\beta \partial_\alpha u^A + (\partial_\beta \Gamma_\alpha{}^A{}_B) u^B + \Gamma_\alpha{}^A{}_B \partial_\beta u^B \\
&\quad + \Gamma_\beta{}^A{}_B \partial_\beta u^B + \Gamma_\beta{}^A{}_C \Gamma_\alpha{}^C{}_B u^B - (\nabla_\gamma u^A)\Gamma_\beta{}^\gamma{}_\alpha,
\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}
[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] u^A &= (\partial_\alpha \Gamma_\beta{}^A{}_B - \partial_\beta \Gamma_\alpha{}^A{}_B + \Gamma_\alpha{}^A{}_C \Gamma_\beta{}^C{}_B - \Gamma_\beta{}^A{}_C \Gamma_\alpha{}^C{}_B) u^B \\
&\quad - (\nabla_\gamma u^A)(\Gamma_\alpha{}^\gamma{}_\beta - \Gamma_\beta{}^\gamma{}_\alpha).
\end{aligned}$$

Définition des tenseurs de courbure et de torsion.

On appelle *tenseur de courbure*, le tenseur $K_{\alpha\beta}{}^{A}{}_{B}$ défini par

$$K_{[\alpha\beta]}{}^{A}{}_{B} = \partial_\alpha \Gamma_\beta{}^{A}{}_{B} - \partial_\beta \Gamma_\alpha{}^{A}{}_{B} + \Gamma_\alpha{}^{A}{}_{C} \Gamma_\beta{}^{C}{}_{B} - \Gamma_\beta{}^{A}{}_{C} \Gamma_\alpha{}^{C}{}_{B}.$$

On appelle *tenseur de torsion* (cf. sect. 2.4) le tenseur $Q_{[\alpha}{}^{\gamma}{}_{\beta]}$ défini par

$$Q_{[\alpha}{}^{\gamma}{}_{\beta]} = \frac{1}{2}(\Gamma_\alpha{}^{\gamma}{}_{\beta} - \Gamma_\beta{}^{\gamma}{}_{\alpha}).$$

Ces quantités où n'apparaîssent pas les paramètres λ et μ sont indépendantes du réseau, elles caractérisent des *propriétés de l'espace à connexion affine.*

Avec ces définitions, le commutateur s'écrit :

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] u^A = K_{[\alpha\beta]}{}^{A}{}_{B} u^B - (\nabla_\gamma u^A) 2 Q_{[\alpha}{}^{\gamma}{}_{\beta]}.$$

D'où l'expression du *transport* :

$$u^A(x'''')(x) = \Big(u^A + \frac{1}{2} d^2\varphi^{[\alpha\beta]} K_{[\alpha\beta]}{}^{A}{}_{B} u^B + d^2 z^\gamma \nabla_\gamma u^A\Big)(x),$$

où nous avons posé

$$d^2 z^\gamma = -Q_{[\alpha}{}^{\gamma}{}_{\beta]} d^2\varphi^{[\alpha\beta]}.$$

Pour expliquer la différence entre $u^A(x)$ et la grandeur transportée $u^A(x'''')(x)$, nous voyons qu'il y a lieu de considérer deux sources distinctes :

1) une *transformation linéaire* locale due à la courbure,
2) un *transport infinitésimal* de u^A du point $(x + d^2 z)$ au point x (fermeture du quasi-parallélogramme) due à la torsion.

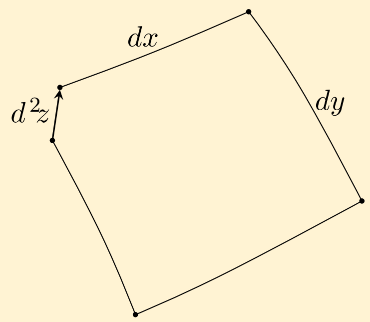


Fig. 2.8.3

Règle de Leibniz.

En évaluant le transport de u^{Aa} au lieu de u^A, le rôle de $\Gamma_\alpha{}^A{}_B$ est joué par $\Gamma_\alpha{}^{Aa}{}_{Bb} = \Gamma_\alpha{}^A{}_B\delta^a_b + \Gamma_\alpha{}^a{}_b\delta^A_B$ et alors :

$$\begin{aligned}K_{\alpha\beta}{}^{Aa}{}_{Bb} &= (\partial_\alpha\Gamma_\beta{}^A{}_B - \partial_\beta\Gamma_\alpha{}^A{}_B)\delta^a_b + \delta^A_B(\partial_\alpha\Gamma_\beta{}^a{}_b - \partial_\beta\Gamma_\alpha{}^a{}_b\\ &\quad + (\Gamma_\alpha{}^A{}_C\delta^a_c + \delta^A_C\Gamma_\alpha{}^a{}_c)(\Gamma_\beta{}^C{}_B\delta^c_b + \delta^C_B\Gamma_\beta{}^c{}_b)\\ &\quad + (-1)(\Gamma_\beta{}^A{}_C\delta^a_c + \delta^A_C\Gamma_\beta{}^a{}_c)(\Gamma_\alpha{}^C{}_B\delta^c_b + \delta^C_B\Gamma_\alpha{}^c{}_b).\end{aligned}$$

En effectuant les calculs :

$$K_{\alpha\beta}{}^{Aa}{}_{Bb} = K_{\alpha\beta}{}^A{}_B\delta^a_b + \delta^A_B K_{\alpha\beta}{}^a{}_b.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]u^{\lambda\rho\ldots}{}_{\sigma\tau\ldots} &= K_{\alpha\beta}{}^\lambda{}_{\lambda'}u^{\lambda'\rho\ldots}{}_{\sigma\tau\ldots} + K_{\alpha\beta}{}^\rho{}_{\rho'}u^{\lambda\rho'\ldots}{}_{\sigma\tau\ldots} + \ldots\\ &\quad - u^{\lambda\rho\ldots}{}_{\sigma'\tau\ldots}K_{\alpha\beta}{}^{\sigma'}{}_\sigma - \ldots - 2Q_\alpha{}^\gamma{}_\beta\nabla_\gamma u^{\lambda\rho\ldots}{}_{\sigma\tau\ldots}\,.\end{aligned}$$

Dans ce cours, nous ne donnerons aucune signification physique à la torsion ; pour cette raison nous n'envisagerons désormais que des espaces à torsion nulle, c'est-à-dire à connexion affine symétrique :

$$Q_{[\cdot\,\dot{}\,\cdot]} = 0 \implies \Gamma^{\cdot}_{\cdot\,\cdot} = G^{\cdot}_{\cdot\,\cdot} \implies \nabla_\cdot = D_\cdot$$

Le quasi-parallélogramme est alors fermé ($d^2z^\gamma = 0$). Les $d^2\varphi^{[\alpha\beta]}$ sont alors les composantes de l'élément de surface défini par ce parallélogramme.

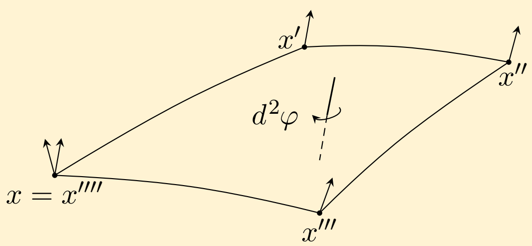


Fig. 2.8.4

La *courbure* (géodésique) devient

$$K_{\alpha\beta}{}^A{}_B \stackrel{\text{def}}{=} R_{\alpha\beta}{}^A{}_B = \partial_\alpha G_\beta{}^A{}_B - \partial_\beta G_\alpha{}^A{}_B + [G_\alpha, G_\beta]^A{}_B,$$

avec $[G_\alpha, G_\beta]^A{}_B = G_\alpha{}^A{}_C G_\beta{}^C{}_B - G_\beta{}^A{}_C G_\alpha{}^C{}_B$, et le commutateur peut se calculer comme suit :

$$[D_\alpha, D_\beta]u^{\lambda\ldots}{}_{\sigma\ldots}(x) = R_{\alpha\beta}{}^\lambda{}_{\lambda'}u^{\lambda'\ldots}{}_{\sigma\ldots} + \ldots - u^{\lambda\ldots}{}_{\sigma'\ldots}R_{\alpha\beta}{}^{\sigma'}{}_\sigma - \ldots \qquad (2.8.1)$$

2.9 Identités de Bianchi

Si A, B et C sont trois *opérateurs linéaires*, nous avons l'identité

$$\overrightarrow{ABC}[A,[B,C]] = 0.$$

La dérivée covariante D_μ est un opérateur linéaire. Par conséquent

$$\overrightarrow{\lambda\mu\nu}[D_\lambda,[D_\mu,D_\nu]] = 0.$$

Appliquons cet opérateur nul sur un tenseur quelconque u^A et explicitons le résultat. Nous avons

$$[D_\mu,D_\nu]u^A = R_{\mu\nu}{}^A{}_B u^B$$

et ensuite

$$D_\lambda[D_\mu,D_\nu]u^A = (D_\lambda R_{\mu\nu}{}^A{}_B)u^B + R_{\mu\nu}{}^A{}_B D_\lambda u^B.$$

D'autre part (en utilisant la règle de Leibniz) :

$$[D_\mu,D_\nu]D_\lambda u^A = R_{\mu\nu}{}^A{}_B D_\lambda u^B - (D_\gamma u^A)R_{\mu\nu}{}^\gamma{}_\lambda.$$

Alors :

$$\overrightarrow{\lambda\mu\nu}[D_\lambda,[D_\mu,D_\nu]]u^A = (D_\lambda R_{\mu\nu}{}^A{}_B)u^B + (D_\gamma u^A)R_{\mu\nu}{}^\gamma{}_\lambda = 0.$$

u^A étant choisi arbitrairement, u^B et $D_\gamma u^A$ étant indépendants, l'annulation ($= 0$) ne peut être réalisée que si leurs coefficients sont nuls. Ceci constitue *les identités de Bianchi* :

$$\overrightarrow{\lambda\mu\nu} D_\lambda R_{\mu\nu}{}^A{}_B = 0$$
$$\overrightarrow{\lambda\mu\nu} R_{\lambda\mu}{}^\gamma{}_\nu = 0.$$

2.10 Le champ stationnaire

Définition d'un champ stationnaire.

Un champ $u^A(x)$ est dit stationnaire si

$$D_\alpha u^A(x) = 0, \quad \forall\, x.$$

Pour un tel champ, *le transport est indépendant du chemin suivi.* En effet :

$$u^A(x+dx)(x) = (1 + dx^\alpha D_\alpha)u^A(x) = u^A(x).$$

Cas particuliers de champs stationnaires.

1) *champ scalaire* : $\partial_\lambda\varphi(x) = 0$, $\forall x$. Le champ scalaire stationnaire est constant :

$$\varphi(x) = \text{cte}.$$

2) *champ vectoriel* : $D_\lambda u_\alpha(x) = 0$, $\forall x$, c'est-à-dire :

$$D_\lambda u_\alpha = \partial_\lambda u_\alpha - G_\lambda{}^\beta{}_\alpha u_\beta = 0$$

et donc

$$\partial_\lambda u_\alpha = G_\lambda{}^\beta{}_\alpha u_\beta.$$

La *condition d'existence* d'un tel champ s'exprime, comme nous le savons, par la symétrie des dérivées mixtes (conditions d'intégrabilité) :

$$(\partial^2_{\lambda\mu} - \partial^2_{\mu\lambda})\, u_\alpha(x) \equiv 0.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\partial_\mu\partial_\lambda u_\alpha = \partial^2_{\mu\lambda} u_\alpha &= G_\lambda{}^\beta{}_\alpha(\partial_\mu u_\beta) + (\partial_\mu G_\lambda{}^\beta{}_\alpha)u_\beta\\ &= G_\mu{}^\gamma{}_\beta G_\lambda{}^\beta{}_\alpha u_\gamma + (\partial_\mu G_\lambda{}^\beta{}_\alpha)u_\beta\\ \partial_\lambda\partial_\mu u_\alpha = \partial^2_{\lambda\mu} u_\alpha &= G_\lambda{}^\gamma{}_\beta G_\mu{}^\beta{}_\alpha u_\gamma + (\partial_\lambda G_\mu{}^\beta{}_\alpha)u_\beta\end{aligned}$$

d'où il résulte

$$\begin{aligned}(\partial^2_{\mu\lambda} - \partial^2_{\lambda\mu})u_\alpha &= (\partial_\mu G_\lambda{}^\gamma{}_\alpha - \partial_\lambda G_\mu{}^\gamma{}_\alpha + G_\mu{}^\gamma{}_\beta G_\lambda{}^\beta{}_\alpha - G_\lambda{}^\gamma{}_\beta G_\mu{}^\beta{}_\alpha)u_\gamma\\ &= R_{\mu\lambda}{}^\gamma{}_\alpha u_\gamma = 0.\end{aligned}$$

Un champ stationnaire $u_\cdot(x)$ est normal à la courbure $R_{\lambda\mu}{}^\cdot{}_\alpha(x)$, $\forall\lambda$, μ, α et x.

Si l'on a n champs stationnaires $u^{(\beta)}_\gamma(x)$ indépendants (n : dimension de l'espace ; β numérotant ces vecteurs : $\beta = 1\ldots,n$), ils sont tous normaux à la courbure et par conséquent

$$R_{\lambda\mu}{}^\gamma{}_\alpha(x) = 0, \quad \forall\, \lambda,\ \mu,\ \gamma,\ \alpha \text{ et } x.$$

Propriété : dans un espace à courbure nulle, il existe des référentiels affines.

En effet : d'après ce qui vient d'être vu, la nullité de la courbure est équivalente à l'existence de n champs stationnaires :

$$\partial_\alpha u^{('\beta)}_\gamma(x) = G_\alpha{}^\rho{}_\gamma u^{('\beta)}_\rho(x) \qquad {}'\beta = 1,\ldots,n.$$

Posons alors

$$u^{('\beta)}_\gamma(x) \overset{\text{def}}{=} \partial_\gamma \psi^{'\beta}(x) \overset{\text{def}}{=} A^{'\beta}{}_\gamma(x),$$

où les $A^{'\cdot}{}_\cdot(x)$ sont les transformations définissant *une* transformation. L'expression ci-dessus s'écrit alors

$$\partial_\alpha A^{'\beta}{}_\gamma(x) = A^{'\beta}{}_\rho(x) G_\alpha{}^\rho{}_\gamma(x).$$

Rappelons la loi de transformation (2.4.1) des coefficients $G_\alpha{}^\beta{}_\gamma$:

$$\begin{aligned}G_\alpha{}^\beta{}_\gamma(x) &= A^{-1\,\beta}{}_{'\beta}('x)\, \partial_\alpha A^{'\beta}{}_\gamma(x)\\ &\quad + A^{-1\,\beta}{}_{'\beta}('x)' G_{'\alpha}{}^{'\beta}{}_{'\gamma}('x) A^{'\alpha}{}_\alpha(x) A^{'\gamma}{}_\gamma(x).\end{aligned}$$

Par simple comparaison de ces deux expressions, nous voyons que pour cette transformation

$$'G_{'\alpha}{}^{'\beta}{}_{'\gamma}('x) = 0.$$

De plus, dans ce nouveau système,

$$'u^{('\beta)}_{'\gamma}('x) = A^{-1}{}^{\gamma}{}_{'\gamma}('x)u^{('\beta)}_{\gamma}(x) = A^{-1}{}^{\gamma}{}_{'\gamma}('x)A^{'\beta}{}_{\gamma}(x) = \delta^{'\beta}_{'\gamma}.$$

$'u^{('\beta)}_{'\gamma}('x) = \delta^{'\beta}_{'\gamma}$ est un champ de vecteurs constants, or $u^{(\beta)}_{\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} A^{'\beta}{}_{\gamma}$, donc il existe au moins une transformation affine, mais s'il en existe une, il en existe une infinité. L'espace est donc un espace affine.

La réciproque, c'est-à-dire : dans un espace affine la courbure est nulle, est évidente du fait que $R_{\cdot\cdot}{}^{\cdot}{}_{\cdot}$ est un tenseur (étant nul dans un référentiel affine, il reste nul quel que soit le référentiel).

Chapitre 3

L'espace à métrique stationnaire Espace de Riemann

Préambule

Ce chapitre constitue un rappel purement mathématique. Après avoir rappelé la définition du champ métrique (section 1), la section 2 est consacrée à l'espace de Riemann. La section 3 étudie ensuite les symétries du tenseur de courbure.

3.1 Le champ métrique

Nous postulons l'existence d'un *champ tensoriel symétrique deux fois covariant* :

$$g_{\alpha\beta}(x) = g_{(\alpha\beta)}(x)$$

tel que

$$\det(g_{..})(x) \neq 0,\ \forall\ x \quad \text{et} \quad g^{\alpha\beta}(x) g_{\beta\gamma}(x) = \delta^{\alpha}_{\gamma},$$

où nous avons posé

$$g^{\alpha\beta}(x) = \frac{\mathrm{Min}(g_{\alpha\beta})(x)}{\det(g_{..})(x)}.$$

Il s'en suit que $g^{\alpha\beta}(x)$ est un tenseur symétrique deux fois contravariant.

Comme tout tenseur symétrique, la métrique $g_{\alpha\beta}(x)$ peut, en tout point x_0 donné d'avance, être ramené à la forme :

$$g_{\alpha\beta}(x_0) = \pm\delta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

par une transformation du type : $x_0 = \psi(x)$.

Définition de la signature de la mètrique.

On appelle *signature de la métrique*, la signature du tenseur $g_{\alpha\beta}(x)$, c'est-à-dire,

$$\operatorname{signat}(g_{..})(x_0) = (\underbrace{11\ldots1}_{p \text{ fois}}\underbrace{-1\ldots-1}_{q \text{ fois}}) \qquad \text{avec} \qquad p+q=n.$$

Si $\operatorname{signat}(g_{..})(x_0) = \pm(11\ldots1)$, elle est dite respectivement *définie positive* ou *définie négative*. Dans les autres cas elle est dite *indéfinie*.

Elévation et abaissement des indices.

Soit : $a_\alpha = g_{\alpha\beta}b^\beta$, alors : $b^\beta = g^{\alpha\beta}a_\alpha$ et par conséquent a_α et b^β doivent être considérés comme deux représentations différentes du même vecteur. Nous écrivons alors

$$(a_\alpha \overset{\text{def}}{=} g_{\alpha\beta}a^\beta)(x) \quad \text{et} \quad (a^\beta \overset{\text{def}}{=} g^{\alpha\beta}a_\alpha)(x).$$

Ceci se généralise sans difficulté à tout tenseur et densité tensorielle.

Définition de la longueur d'un vecteur.

On appelle *longueur d'un vecteur* $u^\alpha(x)$ au point x (ou norme), la grandeur

$$N^2(u)(x) = g_{\alpha\beta}(x)u^\alpha(x)u^\beta(x). \tag{3.1.1}$$

Suivant la signature de la métrique, la longueur d'un vecteur peut être *positive*, *négative* ou *nulle*. En effet, en un point x_0, et pour un vecteur quelconque $\eta^\alpha(x)$, nous pouvons écrire :

$$\eta^2(x_0) \overset{*}{=} \sum_{\alpha=1}^{p}(\eta^\alpha)^2 - \sum_{\alpha=p+1}^{n}(\eta^\alpha)^2 \gtreqless 0.$$

Enfin, $g_{\alpha\beta}(x)$ étant symétrique, il peut être représenté *géométriquement* par des *surfaces centrées* :

$$g_{\alpha\beta}(x_0)\eta^\alpha\eta^\beta = \text{cte} \times \begin{cases} +1 & \text{ellipsoïde} \\ 0 & \text{cône} \\ -1 & \text{hyperboloïde à plus d'une nappe.} \end{cases}$$

3.2 L'espace de Riemann

La détermination métrique en chaque point x_0 (3.1.1) permet de comparer, quant à leurs longueurs, des vecteurs tous attachés aux mêmes points. Un tel espace n'est toutefois pas encore un espace métrique car nous n'avons pas encore défini de connexion métrique permettant de comparer la longueur des vecteurs attachés à des points distincts.

L'*espace de Riemann* est un espace métrique défini par la *stationnarité de la métrique* :

$$D_\alpha g_{\beta\gamma}(x) = 0 \quad \forall\, x. \tag{3.2.1}$$

Le transport de la métrique est donc indépendant du chemin : la métrique transportée de y en x *coïncide* avec la métrique en x. Ceci découle en effet immédiatement de (3.2.1) :

$$g_{\alpha\beta}(x+dx)(x) = (1 + dx^\gamma D_\gamma) g_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(x)$$

et de même pour un transport intégral :

$$g_{\alpha\beta}(y)(x) = e^{\lambda v^\gamma(x)\, D_\gamma(x)} g_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(x).$$

Interprétation « pédestrienne ».

La métrique est l'instrument de mesure, un vecteur est une règle d'une certaine longueur.

a) Partant du point y avec une règle mesurée préalablement en ce point, je me dirige par un chemin quelconque au point x où je mesure la longueur de ma règle avec l'instrument du lieu : j'obtiens le même résultat.
b) Je suis en x où je mesure ma règle : ensuite je fais venir l'instrument de mesure attaché au point y au point x et avec lui je mesure ma règle : le résultat est le même.

Mathématiquement :

$$\begin{aligned} &a) \quad g_{\alpha\beta}(y)\eta^\alpha(y)\eta^\beta(y) = g_{\alpha\beta}(x)\eta^\alpha(y)\eta^\beta(y) \\ &b) \quad g_{\alpha\beta}(x)\eta^\alpha(x)\eta^\beta(x) = g_{\alpha\beta}(y)(x)\eta^\alpha(x)\eta^\beta(x). \end{aligned}$$

en développant ces équations et en tenant compte du caractère scalaire de la longueur, nous déduisons facilement de a) et de b) l'équation (3.2.1).

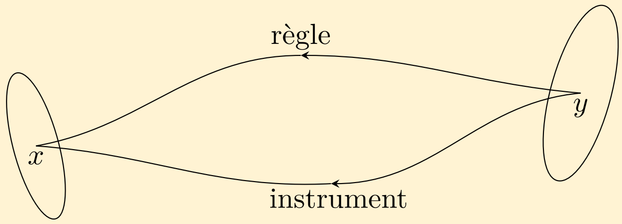


Fig. 3.3.1

Physiquement : (3.2.1) constitue le *principe de relativité générale* : la physique strictement locale est partout la même (c'est en effet le moins que l'on puisse exiger !)

Connexion affine.

Un espace métrique a par sa nature même une connexion affine. En fait nous allons établir que *les coefficients ${G_\alpha}^\beta{}_\gamma$ sont définis univoquement* dans l'espace de Riemann par la condition (3.2.1). En effet :

$$D_\alpha g_{\beta\gamma} = \partial_\alpha g_{\beta\gamma} - g_{\beta'\gamma} {G_\alpha}^{\prime\beta}{}_\beta - g_{\beta\gamma'} {G_\alpha}^{\prime\gamma}{}_\gamma = 0, \quad \forall\, x$$

et donc

$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = G_{\alpha\gamma\beta} + G_{\alpha\beta\gamma},$$

ce qui donne par permutation

$$-\partial_\beta g_{\gamma\alpha} = -G_{\beta\alpha\gamma} - G_{\beta\gamma\alpha}$$
$$\partial_\gamma g_{\alpha\beta} = G_{\gamma\beta\alpha} + G_{\gamma\alpha\beta}.$$

En additionnant, nous obtenons

$$G_{\alpha\beta\gamma}(x) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\beta\gamma} - \partial_\beta g_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma g_{\alpha\beta})(x) \tag{3.2.2}$$

et

$$G_\alpha{}^{\prime\beta}{}_\gamma(x) = g^{\beta'\beta}(x)\, G_{\alpha\beta\gamma}(x).$$

Remarques.

1) $D_\alpha g^{\beta\rho} g_{\rho\gamma} = D_\alpha \delta^\beta_\gamma = 0 = (D_\alpha g^{\beta\rho})\underbrace{g_{\rho\gamma}}_{\neq 0} + g^{\beta\rho}\underbrace{D_\alpha g_{\rho\gamma}}_{=0}$ ce qui conduit à

$$D_\alpha g^{\beta\gamma}(x) = 0 \quad \forall\ x.$$

2) $g_{\beta\rho} D_\alpha u^\beta = D_\alpha(g_{\beta\rho} u^\beta) - u^\beta \underbrace{D_\alpha g_{\beta\rho}}_{=0} = D_\alpha u_\rho$ et donc :

D_α commute avec la montée et la descente des indices.

Retour sur la densité $\mathfrak{g}(x)$.

Dans l'espace capacitif nous avons écrit les équations de Maxwell inhomogènes sous la forme

$$\partial_\alpha \mathfrak{H}^{[\alpha\beta]} = -\mathfrak{j}^\beta.$$

En posant

$$\mathfrak{H}^{\alpha\beta} = \mathfrak{g} H^{\alpha\beta},$$

nous avions alors

$$D_\alpha H^{\alpha\beta} = -j^\beta$$

avec

$$D_\alpha = \partial_\alpha + G_\alpha \quad \text{ et } \quad G_\alpha = \partial_\alpha(\log \mathfrak{g}(x)).$$

Dans l'espace de Riemann, nous avons :

$$D_\alpha H^{\alpha\beta} = \partial_\alpha H^{\alpha\beta} + G_\alpha{}^\alpha{}_{\alpha'} H^{\alpha'\beta} + \underbrace{G_{(\alpha}{}^\beta{}_{\beta')} H^{[\alpha\beta']}}_{=0}$$
$$= \partial_\alpha H^{\alpha\beta} + G_\alpha H^{\alpha\beta}$$

et par conséquent :

$$G_{\rho}{}^{\rho}{}_{\alpha} = \partial_\alpha \log \mathfrak{g}.$$

Mais nous avons aussi

$$\begin{aligned} G_{\rho}{}^{\rho}{}_{\alpha} &= \frac{1}{2} g^{\rho\rho'} (\partial_\rho g_{\rho'\alpha} - \partial_{\rho'} g_{\alpha\rho} + \partial_\alpha g_{\rho\rho'}) = \frac{1}{2} g^{\rho\rho'} \partial_\alpha g_{\rho\rho'} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\det(g_{..})} \sum_\lambda \sum_\rho \mathrm{Min}(g_{\lambda\rho})\, \partial_\alpha g_{\lambda\rho} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial_\alpha |\det(g_{..})|}{\det(g_{..})} = \partial_\alpha \log |\det(g_{..})|^{1/2} \end{aligned}$$

et donc

$$\mathfrak{g}(x) = |\det(g_{..}(x))|^{1/2} > 0.$$

On vérifie ainsi immédiatement qu'il s'agit d'une densité tensorielle.

3.3 Symétries du tenseur $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$

Nous appliquons l'équation (2.8.1) au tenseur métrique :

$$[D_\mu, D_\nu] g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha'\beta} R_{\mu\nu}{}^{\alpha'}{}_{\alpha} - g_{\alpha\beta'} R_{\mu\nu}{}^{\beta'}{}_{\beta} = 0, \quad \forall\, x$$

où l'on a pris en compte (3.2.1). Donc

$$R_{\mu\nu\beta\alpha} + R_{\mu\nu\alpha\beta} = 0.$$

Comme $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ était déjà antisymétrique en μ et ν, on a

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{[\mu\nu][\beta\alpha]}.$$

Ceci étant, formons les premières identités de Bianchi : nous avons successivement

$$\begin{aligned} \mu\overset{\frown}{\nu}\alpha\, R_{\mu\nu\alpha\beta} &= R_{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\nu\alpha\mu\beta} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0 \\ -\mu\overset{\frown}{\nu}\beta\, R_{\mu\nu\beta\alpha} &= -R_{\mu\nu\beta\alpha} - R_{\nu\beta\mu\alpha} - R_{\beta\mu\nu\alpha} = 0 \\ \alpha\overset{\frown}{\beta}\nu\, R_{\alpha\beta\nu\mu} &= R_{\alpha\beta\nu\mu} + R_{\beta\nu\alpha\mu} + R_{\nu\alpha\beta\mu} = 0 \\ -\alpha\overset{\frown}{\beta}\mu\, R_{\alpha\beta\mu\nu} &= -R_{\alpha\beta\mu\nu} - R_{\beta\mu\alpha\nu} - R_{\mu\alpha\beta\nu} = 0. \end{aligned}$$

En additionnant il vient

$$2(R_{\mu\nu\alpha\beta} - R_{\alpha\beta\mu\nu}) = 0,$$

ce qui montre que la courbure est symétrique dans ses couples d'indices (μ, ν) et (α, β) :

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{([\mu\nu][\alpha\beta])}.$$

A partir du tenseur de courbure dans l'espace de Riemann, nous ne pouvons former par contraction qu'un seul tenseur du second rang appelé *tenseur de Ricci* :

$$R_{\rho\alpha}{}^{\rho}{}_{\beta} = R_{\alpha\beta} = R_{(\alpha\beta)}.$$

Le tenseur $R_{\mu}{}^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ est en effet identiquement nul par l'antisymétrie.

Par double contraction, nous obtenons le *scalaire de la courbure* :

$$R_{\rho\alpha}{}^{\rho\alpha} = R_{\alpha}{}^{\alpha} = R.$$

Formons maintenant la deuxième identité de Bianchi pour $g_{\alpha\beta}$; nous avons :

$$\overrightarrow{\lambda\mu\nu}\, D_{\lambda}R_{\mu\nu}{}^{\alpha}{}_{\beta} = D_{\lambda}R_{\mu\nu}{}^{\alpha}{}_{\beta} + D_{\mu}R_{\nu\lambda}{}^{\alpha}{}_{\beta} + D_{\nu}R_{\lambda\mu}{}^{\alpha}{}_{\beta} = 0.$$

Ceci entraîne

$$D_{\lambda}R_{\nu\beta} + D_{\rho}R_{\nu\lambda}{}^{\rho}{}_{\beta} - D_{\nu}R_{\lambda\beta} = 0,$$

puis, en contractant avec $g^{\nu\beta}$:

$$D_{\lambda}R - D_{\rho}R_{\lambda}{}^{\rho} - D_{\rho}R_{\lambda}{}^{\rho} = 0.$$

En posant $D_{\lambda}R = D_{\rho}R\delta_{\lambda}^{\rho}$ il vient

$$D_{\rho}\Big(R_{\lambda}{}^{\rho} - \frac{1}{2}\delta_{\lambda}^{\rho}R\Big)(x) = 0. \tag{3.3.1}$$

Le tenseur $S^{\alpha\beta} = S^{(\alpha\beta)} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R$, qui est symétrique et de divergence nulle, ne dépend que de la métrique et de ses dérivées du premier et du second ordre, linéairement de ces dernières.

L'équation (3.3.1) est une conséquence directe de l'équation (3.2.1), c'est-à-dire physiquement une conséquence du principe de relativité générale une fois donné une signification physique à la métrique. Cette équation joue un rôle fondamental dans la théorie de la gravitation (cf. chapitre 4).

Chapitre 4

Théorie de la gravitation

Préambule

Après avoir rappelé la notion de champ gravifique, on poursuit par quelques indications purement inductives sur les équations de la gravitation d'Einstein (section 1). La section 2 donne les équations de la matière poudreuse. La section suivante traîte de l'approximation linéaire gravistatique des équations du champ (section 3). Enfin, la section 4 étudie le retard des horloges

4.1 Les équations du champ

Les chapitres 2 et 3 étaient destinés à nous fournir les outils mathématiques nécessaires à l'établissement des équations du champ gravifique.

L'étude du référentiel accéléré nous avait conduit à identifier le tenseur fondamental $g_{\alpha\beta}(x)$ avec les *potentiels gravifiques*. Les équations de mouvement d'une particule dans un champ de gravitation nous ont permis d'exprimer les composantes du *champ gravifique* en fonction des potentiels :

$$G_{\alpha\beta\gamma}(x) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\beta\gamma} - \partial_\beta g_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma g_{\alpha\beta})(x). \tag{4.1.1}$$

Le principe de covariance généralisé (ou principe de relativité générale) exige que cette forme soit conservée pour les champs gravifiques « réels ». (Remarquons que cette qualification de « réel » n'est pas covariante ! Aucune mesure faite dans un référentiel ne permet de distinguer entre champs « réels » et champs « fictifs ».)

L'expression mathématique du principe de relativité, c'est-à-dire

$$D_\alpha g_{\beta\gamma}(x) = 0,$$

nous fournit précisemment (4.1.1) en identifiant les composantes du champ gravifique avec les coefficients de la connexion métrique (3.2.2). L'univers est donc un espace de Riemann à n dimensions.

Il s'agit maintenant d'exprimer les équations du champ, c'est-à-dire, comme nous l'avons déjà mentionné au chapitre 1, de trouver un système d'équations reliant les $g_{\alpha\beta}(x)$ à la distribution de matière. Si pour déterminer les $n(n+1)/2$ potentiels $g_{\alpha\beta}(x)$, nous nous donnons un système de $n(n+1)/2$ équations, le système de coordonnées est du même coup imposé. Or ceci est trop restrictif car il doit toujours être possible de choisir librement son référentiel : c'est la condition de covariance ! (Physiquement, cela revient à passer d'un référentiel à l'autre en créant ou en annulant un champ gravifique « fictif ».) Par conséquent, les équations du champ doivent être au nombre de $n(n+1)/2 - n$ et non de $n(n+1)/2$.

Un système du type

$$\begin{cases} F^{(\alpha\beta)}[\ldots] = \kappa_E \theta^{(\alpha\beta)} \\ D_\alpha F^{(\alpha\beta)}[\ldots] = 0 \end{cases}$$

satisfait ces exigences. Pour satisfaire au principe de covariance, les grandeurs $F^{\alpha\beta}$ et $\theta^{\alpha\beta}$ doivent être des tenseurs (symétriques du deuxième ordre).

$\theta^{\alpha\beta}(x)$ représente le tenseur densité de source du champ ; il doit donc dépendre de la distribution de matière. Or, nous le savons par la relativité restreinte, la matière c'est de l'énergie, $\theta^{\alpha\beta}$ devra donc dépendre de la densité d'énergie du système envisagé ; plus précisemment même, en vertu des équations $D_\alpha F^{\alpha\beta} = 0$, ce tenseur doit être le *tenseur énergie du système* :

$$\begin{cases} \theta^{\alpha\beta}(x) = \theta^{(\alpha\beta)}(x) \\ D_\alpha \theta^{\alpha\beta}(x) = 0. \end{cases}$$

Le tenseur $F^{(\alpha\beta)}(x)$, lui, doit dépendre des potentiels $g_{\alpha\beta}(x)$. Par analogie avec les équations de Newton, (ou de l'électromagnétisme), nous voulons que *nos équations dépendent outre des potentiels, de leurs dérivées jusqu'au deuxième ordre inclus.*

D'autre part, nous savons maintenant que ce qui distingue un univers plat (donc vide de substance) d'un autre est la *courbure* (et ses tenseurs contractés). $F^{\alpha\beta}$ devra donc nécessairement être une fonction de ce (ou de ces) tenseurs.

Or nous connaissons un tenseur satisfaisant à toutes les conditions fixées ci-dessus ; c'est le tenseur

$$S^{(\alpha\beta)}(x) = R^{(\alpha\beta)}(x) - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(x)\, R(x).$$

Par suite, les *équations du champ de gravitation* doivent s'écrire

$$\begin{gathered} \left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R\right)(x) = \kappa_E\, \theta^{\alpha\beta}(x) \\ D_\alpha \theta^{\alpha\beta}(x) = 0 \quad \text{où} \quad \theta^{\alpha\beta} = \theta^{(\alpha\beta)}, \end{gathered} \tag{4.1.2}$$

où κ_E est la constante gravifique d'Einstein.

Il est possible de donner une deuxième forme à ces équations. Par contraction, nous obtenons

$$R^\rho{}_\rho - \frac{1}{2} n R = \kappa_E\, \theta^\rho{}_\rho$$

donc, si $(n \neq 2)$

$$R = -\kappa_E \frac{2}{n-2}\theta \qquad (\theta = \theta^\rho{}_\rho). \tag{4.1.3}$$

Alors, en introduisant ceci dans les équations du champ, il vient

$$R^{\alpha\beta} = \kappa_E \theta^{\alpha\beta} - \frac{\kappa_E}{n-2} g^{\alpha\beta}\theta. \tag{4.1.4}$$

Remarque.

Les arguments essentiellement *inductifs* ci-dessus valent par l'intérêt qu'on veut bien leur donner. Ils sont naturellement équivalents au lapidaire « posons (4.1.2) »... Nous constatons que les équations du champ ne sont *pas linéaires*; le principe de superposition n'est donc pas valable, ce qui complique bien les choses... La théorie de la gravitation est beaucoup plus satisfaisante que la théorie électromagnétique de Maxwell. En effet, nos équations du champ contiennent comme conséquence les équations de conservation, nous l'avons écrit explicitement dans (4.1.2), ce qui revient à dire qu'*elles contiennent les équations de mouvement* du système. Au contraire, nous savons que les équations de Maxwell ne contiennent que l'équation de conservation des charges; le tenseur $\theta^{\alpha\beta}_{(em.)}$ permettant d'établir les équations de mouvement des charges doit être donné séparément.

Si dans une portion D de l'univers, $\theta^{\alpha\beta} = 0$, nos équations se réduisent à $R^{\alpha\beta} = 0$ dans D; *cela ne signifie pas que l'univers soit plat* (auquel cas nous aurions $R_{\alpha\mu}{}^\beta{}_\nu(x) = 0 \ \forall x \in D$). Il peut donc exister un champ « réel » (exemple : le champ gravifique du Soleil à l'*extérieur* du Soleil).

Signalons encore que le tenseur $\theta^{\alpha\beta}(x)$ figurant dans nos équations doit contenir toutes les formes d'énergies caractérisant le système. En particulier s'il y a des propriétés électriques :

$$\theta^{\alpha\beta} = \theta^{\alpha\beta}_{(subst.)} + \theta^{\alpha\beta}_{(em.)}$$

car seulement alors

$$D_\alpha \theta^{\alpha\beta} = 0.$$

4.2 Equations de mouvement de la matière poudreuse

Dans cette section, nous allons donner un exemple d'application très simple des résultats ci-dessus. Mais tout d'abord, donnons une définition qui généralise la notion de dérivée substantielle :

Définition généralisée de la dérivée substantielle.

Soit $x^\alpha = z^\alpha(\lambda)$ une ligne solution de l'équation : $(dz^\alpha/d\lambda)(\lambda) = \omega^\alpha(z(\lambda))$. Nous appelons *dérivée substantielle* de la grandeur $f^A(x)$ le long de la ligne $x^\alpha = z^\alpha(\lambda)$, la grandeur :

$$\dot{f}^A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{d\lambda} f^A(z(\lambda))\bigg|_{z(\lambda)=x} = \omega^\alpha D_\alpha f^A(x). \tag{4.2.1}$$

Ceci dit, nous allons considérer le cas de la *matière poudreuse* qui, nous l'avons vu dans le cours de relativité restreinte, est définie par le tenseur :

$$\theta^{\alpha\beta}(x) = (m\omega^\alpha\omega^\beta)(x). \tag{4.2.2}$$

Nous choisissons :

$$\omega_\alpha\omega^\alpha(x) = -1.$$

Déterminons les équations de mouvement. Par (4.1.2), nous avons :

$$D_\alpha\theta^{\alpha\beta} = 0 = D_\alpha(m\omega^\alpha)\omega^\beta + m\omega^\alpha D_\alpha\omega^\beta.$$

En multipliant par ω_β, il vient :

$$D_\alpha(m\omega^\alpha)\underbrace{\omega^\beta\omega_\beta}_{=-1} + m\underbrace{\omega^\alpha(D_\alpha\omega^\beta)\omega_\beta}_{=0} = 0.$$

Par conséquent $D_\alpha(m\omega^\alpha) = 0$.

En définissant comme en relativité restreinte *le courant de la masse* par

$$j^\alpha_M(x) = (m\omega^\alpha)(x), \tag{4.2.3}$$

nous obtenons

$$D_\alpha j^\alpha_M(x) = 0, \tag{4.2.4}$$

ce qui constitue l'*équation de conservation de la masse* :

$$M[\tau] = \int_\tau d\sigma_\alpha j^\alpha_M(y) = M'.$$

Compte tenu de (4.2.3) et de (4.2.1), il vient :

$$D_\alpha\theta^{\alpha\beta} = 0 = m\omega^\alpha D_\alpha\omega^\beta = m\dot{\omega}^\beta,$$

c'est-à-dire ($m \neq 0$) :

$$\dot{\omega}^\beta(x) = 0.$$

Mais, en vertu de la définition de D_α (sect. 2.4.) :

$$\begin{aligned}\dot{\omega}^\beta &= \omega^\alpha D_\alpha\omega^\beta = \omega^\alpha\partial_\alpha\omega^\beta + \omega^\alpha G_\alpha{}^\beta{}_\mu\omega^\mu \\ &= \underbrace{\frac{dz^\alpha}{d\lambda}\frac{\partial\omega^\beta}{\partial z^\alpha}}_{\frac{d\omega^\beta}{d\lambda} = \frac{d^2z^\beta}{d\lambda^2}} + G_\mu{}^\beta{}_\nu\frac{dz^\mu}{d\lambda}\frac{dz^\nu}{d\lambda} = 0.\end{aligned}$$

Finalement, *les équations de mouvement de la matière poudreuse* s'écrivent :

$$\frac{d^2z^\beta}{d\lambda^2}(\lambda) + G_\mu{}^\beta{}_\nu(z(\lambda))\frac{dz^\mu}{d\lambda}\frac{dz^\nu}{d\lambda}(\lambda) = 0, \tag{4.2.5}$$

où l'on reconnaît l'équation des *géodésiques* dans un espace de Riemann. Les particules libres (matière poudreuse) soumises au seul champ de gravitation suivent des trajectoires qui sont des géodésiques (ce ne serait plus le cas si, par exemple, ces particules étaient chargées électriquement !)

Nous allons maintenant faire *deux hypothèses simplificatrices* :

1) Le champ est *gravistatique*.
2) Le champ gravistatique est *faible*.

Définition d'un champ gravistatique.

Le champ est dit *gravistatique* lorsqu'il est possible de ne faire dépendre les $g_{\alpha\beta}$ que des coordonnées spatiales ; $x^4 = t$ est alors appelé *temps universel*. Donc :

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(\vec{x}).$$

Définition d'un champ faible.

Cette hypothèse revient à admettre que les $g_{\alpha\beta}$ ne s'éloignent guère des valeurs qu'ils ont dans un univers vide ; donc il est possible d'écrire

$$g_{\alpha\beta}(\vec{x}) = g^{(0)}_{\alpha\beta} + \varphi_{\alpha\beta}(\vec{x}) \quad \text{avec} \quad |\varphi_{\alpha\beta}| \ll 1,$$

et où :

$$\{g^{(0)}_{\alpha\beta}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

qui est bien la *métrique de Lorentz*. Si le champ est faible, les particules ne peuvent pas acquérir de grandes vitesses (aucune autre force n'agissant sur elles dans le cas de la matière poudreuse) ; par conséquent

$$\begin{cases} \omega^i \ll 1 \\ \omega^4 \cong 1 \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} d\lambda^2 = -dz_\alpha dz^\alpha &\cong -g_{44}(\vec{x})(dz^4)^2 \\ &= -g^{(0)}_{44}(dt)^2 - \underbrace{\varphi_{44}(\vec{x})(dt)^2}_{\text{négligeable}} \end{aligned}$$

et donc : $d\lambda = \pm dt$.

Compte tenu de ceci et de la définition (1.5.4) de $G_\alpha{}^\beta{}_\gamma$, les équations de mouvement (4.2.5) se réduisent à

$$\frac{d^2 z^i}{dt^2}(t) = -G_4{}^i{}_4(\vec{z}(t)) = +\frac{1}{2}\partial^i \varphi_{44}(\vec{z}(t)),$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d^2\vec{z}(t)}{dt^2} = -\vec{G}(\vec{z}(t)) \quad \text{avec} \quad \vec{G}(\vec{x}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi_{44}(\vec{x}), \tag{4.2.6}$$

où l'on reconnaît les lois de la *gravitation de Newton*. Ceci montre que la théorie de la relativité générale donne comme première approximation (approximation linéaire) les équations de mouvement de Newton.

Les équations du champ serons calculées à la section suivante, mais déjà nous retrouvons la propriété bien connue que le champ $\vec{G} = \{G_4{}^i{}_4\}$ dérive d'un potentiel scalaire $\varphi_{44}(\vec{x})$, donc que :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{G}(\vec{x}) = \vec{0}.$$

4.3 Approximation linéaire gravistatique des équations du champ

Nous allons maintenant calculer les équations du champ pour la matière poudreuse. Pour cela, nous partons des équations (4.1.2) :

$$R_{\alpha\beta} = \kappa_E\,(\theta_{\alpha\beta} - \frac{1}{n-2}\,g_{\alpha\beta}\theta),$$

et nous faisons l'hypothèse $n = 4$.

Tout d'abord, il faut se convaincre que les premières 10 équations (4.1.2) *suffisent à déterminer complètement l'état de la matière poudreuse.* En effet, 4 équations arbitraires de changement de coordonnées nous autorisent à fixer arbitrairement 4 potentiels $g_{\alpha\beta}(x)$; les 6 autres seront fournis par les 6 équations (4.1.2) restantes. Des 4 dernières équations dans (4.1.2), nous pourrons tirer les 3 composantes $\omega^i(x)$ et la densité $m(x)$; la dernière composante ω^α se déduisant alors de la condition de normalisation $\omega^{\cdot}\omega_{\cdot} = -1$.

Remarquons que dans le cas d'un fluide plus « réaliste », ces 10 équations ne suffisent plus à se donner l'état, d'autres grandeurs intervenant (pression, viscosité, capacité de chaleur ..., cf. chapitre 5).

Notre but dans cette section n'est pas de résoudre complètement le problème, même compte tenu des deux hypothèses simplificatrices, mais simplement de montrer que sous ces conditions, nous retrouvons les lois classiques de Newton. Nous avons donc

$$\theta_{\alpha\beta} = m\omega_\alpha\omega_\beta \quad \text{avec} \quad \omega_i \ll 1 \text{ et } \omega_4 \cong 1$$

et alors

$$\begin{aligned} \theta_{44} &= m\omega_4\omega_4 \cong m \\ \theta_{\alpha\beta} &= 0 \text{ si } \alpha \neq 4 \text{ ou } \beta \neq 4 \\ \theta &= m\omega_4\omega^4 = -m. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\rho G_\alpha{}^\rho{}_\beta - \partial_\alpha G_\rho{}^\rho{}_\beta + (\text{termes quadratiques en } \varphi_{..}).$$

Le champ étant faible et ses variations également, les termes quadratiques en $\varphi_{..}$ et $\partial_{.}\varphi_{..}$ peuvent être négligés devant les termes linéaires.

En particulier :

$$R_{44} \cong \partial_i G_4{}^i{}_4 - \underbrace{\partial_4 G_\rho{}^\rho{}_4}_{=0}$$

puisque le champ est gravistatique ($\partial_4 ... = 0$). Il vient donc :

$$R_{44} = \partial_i G_4{}^i{}_4 = \mathrm{div}\vec{G},$$

soit encore par (4.1.2)

$$R_{44} \cong \kappa_E \Big(m - \frac{1}{2} g_{44}\,(-m) \Big) \cong \kappa_E\,\frac{1}{2}\,m \quad \text{car} \quad g_{44} \cong -1.$$

Les équations du champ sont donc

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\vec{G}(\vec{x}) &= \frac{\kappa_E}{2}\,m(\vec{x}) \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{G}(\vec{x}) &= \vec{0}, \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

où l'on reconnaît les *équations gravifiques de Newton.*

Remarque. Par (4.3.1), on se rend bien compte que les hypothèses d'un champ gravistatique et de vitesses faibles des particules ne sont pas tout à fait indépendantes ; en effet, si les vitesses sont élevées, la densité m peut dépendre du temps.

Pour terminer, déterminons la constante κ_E. Newton a écrit :

$$\mathrm{div}\vec{G} = (-\triangle\phi) = 4\pi\kappa_N m \quad \text{avec} \quad \kappa_N = 6,68 \cdot 10^{-8}\ \underline{\mathrm{cm}}^3/\underline{\mathrm{sec}}^2 \cdot \underline{\mathrm{g}}$$

dans un système d'unités où $[t] = \underline{\mathrm{sec}}$. L'équation (4.3.1) est écrite dans un système où $[t] = \underline{\mathrm{cm}}$, c'est-à-dire $c = 1$; en changeant d'unités : $c = 3 \cdot 10^{10}\underline{\mathrm{cm}}/\underline{\mathrm{sec}}$.

L'équation de mouvement (4.2.6) nous permet de conclure que

$$\kappa_E = 8\pi \frac{\kappa_N}{9 \cdot 10^{20}} = 1,87 \cdot 10^{-27}\underline{\mathrm{g}} \cdot \underline{\mathrm{cm}}.$$

4.4 Retardement des horloges

Nous nous limiterons au cas du *champ gravistatique* :

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(\vec{x}).$$

Reprenons notre définition (1.7.1) du *temps propre* : en un point fixe $\vec{x}$, nous avons

$$d\lambda = \sqrt{-g_{44}(\vec{x})}\,dt \quad \text{avec} \quad x^4 = t.$$

L'hypothèse d'un champ gravistatique nous permet de considérer des temps propres de durée *finies*, obtenus par intégration de l'expression ci-dessus. Soit Λ_0 la « période atomique » de deux horloges identiques, l'une placée en $\vec{x}$, l'autre en $\vec{y}$. Nous avons :

$$\Lambda_0 = \sqrt{-g_{44}(\vec{x})}\,\Delta T(\vec{x}) = \sqrt{-g_{44}(\vec{y})}\,\Delta T(\vec{y}).$$

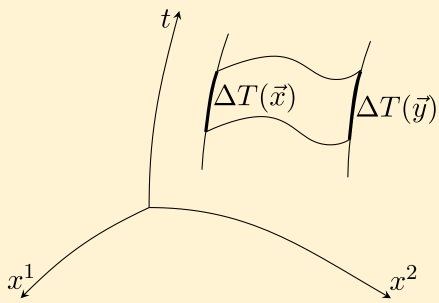


Fig. 4.4.1

Donc :

$$\frac{\Delta T(\vec{y})}{\Delta T(\vec{x})} = \sqrt{\frac{-g_{44}(\vec{x})}{-g_{44}(\vec{y})}}. \tag{4.4.1}$$

Restreignons-nous maintenant au cas où le point $\vec{x}$ est situé à une distance R du soleil (considéré comme une boule homogène de masse $M_\odot$) et le point $\vec{y}$ rejeté à l'infini.

Alors :

$$g_{44}(\vec{y}) = -1$$

car, à l'infini, l'univers est Lorentzien. Par (4.3.1) et (4.2.6), nous avons

$$\mathrm{div}\vec{G} = -\frac{1}{2}\mathrm{div}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g_{44} = -\frac{1}{2}\triangle g_{44} = \frac{\kappa_E}{2}m$$

et donc

$$\triangle g_{44}(\vec{x}) = -\kappa_E m(\vec{x}).$$

La solution avec $g_{44}(\infty) = -1$ est par conséquent

$$g_{44}(\vec{x}) = \frac{\kappa_E}{4\pi}\int_{V_\infty} \frac{dV\ m(\vec{x}')}{R'} - 1 \quad \text{où} \quad R' = |\vec{x} - \vec{x}'|.$$

Mais grâce à notre hypothèse sur le Soleil, nous obtenons (pour $R > R_\odot$) :

$$g_{44}(\vec{x}) = \frac{\kappa_E}{4\pi}\frac{M_\odot}{R} - 1.$$

En remplaçant dans (4.4.1), nous obtenons finalement

$$\frac{\triangle T(R)}{\triangle T(\infty)} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{\kappa_E}{4\pi}\frac{M_\odot}{R}}} \cong 1 + \frac{\kappa_E}{8\pi}\frac{M_\odot}{R} + \dots$$

L'approximation linéaire ci-dessus est satisfaisante puisque :

$$\begin{aligned} \kappa_E &= 1,87 \cdot 10^{-27}\mathrm{cm/g} \\ M_\odot &= 2 \cdot 10^{33}\mathrm{g} \\ 2R_\odot &= 1,39 \cdot 10^{6}\mathrm{km} \quad (R_\odot : \text{rayon du Soleil}). \end{aligned}$$

Par suite, le rapport des temps coordonnées de deux horloges, l'une placée sur le Soleil, l'autre sur la Terre (considérée comme étant à l'infini) est

$$\frac{\triangle T(R_\odot) - \triangle T(\infty)}{\triangle T(\infty)} = \frac{\kappa_E}{8\pi}\frac{M_\odot}{R_\odot} = 2,12 \cdot 10^{-6}.$$

Par conséquent, une raie d'un système atomique de fréquence propre ν_0 émise sur le Soleil et observée sur la Terre sera *décalée* de

$$\frac{\nu(\infty) - \nu(R_\odot)}{\nu(\infty)} = 2,12 \cdot 10^{-6} > 0.$$

Comme ce rapport est positif, on doit constater un *décalage des raies spectrales vers le rouge.*

Remarques.

1) Il est possible d'expliquer au moyen de l'effet Doppler ce décalage observé. Dans ce cas, le Soleil devrait s'éloigner de la Terre avec une vitesse de $0,6$ km/sec.
2) On aboutit bien entendu aux mêmes conclusions que dans le chapitre 1 : une horloge placée dans un champ gravifique est observée aller plus lentement qu'une autre placée dans un champ plus faible.

Chapitre 5

Thermodynamique

Préambule

Après avoir généralisé à la relativité générale la thermodynamique étudiée dans le cours de relativité restreinte, nous énonçons à la section 1 les deux principes. Les sections suivantes (sect. 2 à 6) traîtent du fluide parfait, des viscosités transversale et longitudinale puis de la conduction de chaleur. La section 7 étudie alors l'équilibre gravistatique.

5.1 Les deux principes

Ce chapitre doit être considéré comme un complément du chapitre 3 du cours de relativité restreinte.

La thermodynamique généralisée, examinée ci-dessous, est construite formellement en remplaçant ∂_α par D_α dans les lois et les définitions de la thermodynamique étudiée en relativité restreinte.

Il est clair que celle-ci englobe celle-là ($D_\alpha \longrightarrow \partial_\alpha$ si $G^{\cdot}_{\cdot\,\cdot} \longrightarrow 0$). Il nous reste par conséquent à examiner les modifications (hélàs pratiquement invérifiables !) qu'apporte la présence du champ gravifique.

D'après notre hypothèse, les deux principes généralisés s'écrivent :

Deuxième principe :

$$D_\alpha j_S^\alpha(x) = i(x) \geq 0. \tag{5.1.1}$$

Premier principe :

$$D_\alpha \theta^{\alpha\beta}(x) = 0 \tag{5.1.2θ}$$

$$D_\alpha j_N^\alpha(x) = 0. \tag{5.1.2N}$$

Sous forme intégrale, le deuxième principe s'écrit toujours, si $\overset{\cup}{S}[\tau] = \int_\tau (d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha j_S^\alpha)(y)$,

$$\overset{\cup}{S}[\tau''] - \overset{\cup}{S}[\tau'] = \int_{\tau'}^{\tau''} (dVi)(x) \geq 0 \quad \text{si } \tau'' \text{ est postéreur à } \tau'$$

à condition de se restreindre aux seules transformations de coordonnées qui ne renversent pas le sens du temps (sinon une quantité pseudo-chrone n'a plus de sens).

(5.1.2θ) ne permet pas de formulation intégrale puisque $\int d\sigma_\alpha \theta^{\alpha\beta}$ n'est pas un tenseur. Par contre, (5.1.2N) n'est pas soumis à cette interdiction car

$$\overset{\cup}{N}[\tau] = \int_\tau d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha j_N^\alpha = N'$$

est un pseudo-scalaire, ce qui exprime clairement la conservation de la substance (du nombre d'atomes).

L'identité de compatibilité entre équations de mouvement et variables d'état se généralise en

$$\epsilon\omega_\beta(D_\alpha\theta^{\alpha\beta}) + T(D_\alpha j_S^\alpha - i) + \mu(D_\alpha j_N^\alpha) = 0,$$

et l'hypothèse de phénomènes de transfert permet toujours d'écrire

$$\theta^{\alpha\beta}[\omega^{\cdot}, T, \mu, D_{\cdot}\omega_{\cdot}, \partial_{\cdot}T] = \theta^{\alpha\beta}_{(0)}[\omega^{\cdot}, T, \mu] + \theta^{\alpha\beta}_{(\eta)} + \theta^{\alpha\beta}_{(\xi)} + \theta^{\alpha\beta}_{(\kappa)}.$$

5.2 Fluide parfait

Le tenseur énergie-impulsion du fluide parfait est encore de la forme

$$\theta^{\alpha\beta}_{(0)}(x) = (m\omega^\alpha\omega^\beta + \epsilon g^{\alpha\beta}p)(x)$$

avec $\omega_\alpha\omega^\alpha = -\epsilon$ et $\epsilon = \pm 1$.

Il n'y a rien de nouveau ; écrivons tout de même les équations de mouvement. A partir de

$$m\dot{\omega}^\beta = -\epsilon p_\perp^\beta,$$

nous obtenons, en explicitant $\dot{\omega}^\beta$,

$$\frac{d^2z^\beta}{d\lambda^2} = -G_\alpha{}^\beta{}_\gamma \frac{dz^\alpha}{d\lambda}\frac{dz^\gamma}{d\lambda} - \epsilon m^{-1}p_\perp^\beta.$$

5.3 Viscosité transversale

Rien ne change :

$$\theta^{\alpha\beta}_{(\eta)}(x) = -2\epsilon\eta\omega_\perp^{\alpha\beta(0)}(x)$$

avec maintenant

$$2\omega_{\alpha\beta\perp} = D_\alpha\omega_\beta + D_\beta\omega_\alpha + \epsilon(\omega_\alpha\dot{\omega}_\beta + \omega_\beta\dot{\omega}_\alpha).$$

5.4 Viscosité longitudinale

De même nous avons :

$$\theta_{(\xi)}^{\alpha\beta}(x) = -\epsilon g_{\perp}^{\alpha\beta}\xi\omega_{\rho}{}^{\rho}(x).$$

5.5 Conduction de chaleur

Nous avons toujours :

$$\theta_{(\kappa)}^{\alpha\beta}(x) = (\omega^{\alpha}q^{\beta} + \omega^{\beta}q^{\alpha})(x)$$

avec

$$q^{\alpha}(x) = -\kappa\epsilon(T_{\perp}^{\alpha} + \epsilon\dot{\omega}^{\alpha}T)(x).$$

5.6 Preuve que l'univers est à 4 dimensions

Nous avons démontré en thermodynamique de la relativité restreinte qu'une thermodynamique ne peut exister que s'il existe au maximum une dimension temporelle (sign$(g_{..}) = (1\ 1\ 1 \ldots 1\ -1)$ ou $(-1\ -1 \ldots -1\ 1)$; ne pas admettre l'existence de temps est par trop éléatique !)

Par conséquent, si nous admettons l'existence d'un temps, des solutions du type :

$$\{g_{\alpha\beta}\} = \begin{pmatrix} x^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sont acceptable en relativité générale ; elles vérifient partout la condition

$$\det(g_{..}) \neq 0$$

et sont solution des équations de gravitation avec constante gravifique nulle !

Si nous exigeons que la surface de singularité de la métrique : $x^1 = 0$ sépare deux domaines dans lesquels existe une thermodynamique, nous avons un théorème sur le nombre de dimension de l'univers. En effet, examinons la signature de cette métrique pour $x^1 > 0$ et $x^1 < 0$:

$n = 5$ $(1\ 1\ 1\ 1\ -1) \longrightarrow (-1\ -1\ 1\ 1\ -1)$: deux temps,

$n = 4$ $(1\ 1\ 1\ -1) \longrightarrow (-1\ -1\ 1\ -1)$: un temps,

$n = 3$ $(1\ 1\ -1) \longrightarrow (-1\ -1\ -1)$: pas de temps,

$n = 2$ $(1\ -1) \longrightarrow (-1\ -1)$: un temps.

Nous voyons qu'une thermodynamique ne peut exister que pour $n = 2$ ou $n = 4$. Pour que tout ceci soit convaincant, il faudrait étudier de très près ce genre de singularité de la métrique, en particulier si de telles surfaces ont des propriétés thermodynamiques ...

5.7 Equilibre gravistatique

Nous allons à nouveau nous occuper du champ gravistatique

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(\vec{x})$$

et considérer, plus restrictivement encore, le cas où le fluide est en *équilibre statique*, donc lorsque :

$$\omega^i(x) = 0.$$

Remarquons qu'alors $\omega^4 = \omega^4(\vec{x})$. En effet, de $g_{\alpha\beta}\omega^\alpha\omega^\beta = -1$, nous tirons

$$(\omega^4)^2 = (-g_{44}(\vec{x}))^{-1}.$$

L'équilibre exige que $i(x) = 0$, ce qui implique en particulier

$$\omega_{\alpha\beta\perp}(\vec{x}) = 0 \quad \text{et} \quad (T_{\alpha\perp} + \dot{\omega}_\alpha T)(\vec{x}) = 0.$$

La condition $\omega^i(\vec{x}) = 0$ satisfait la première condition. Reste la deuxième. Nous avons

$$\dot{\omega}^i = \omega^4 D_4\omega^i = \omega^4(\partial_4\omega^i + \omega^4 G_4{}^i{}_4) = (\omega^4)^2 G_4{}^i{}_4,$$

et donc

$$\dot{\omega}_i = (\omega^4)^2 G_{4i4} = -\frac{1}{2}(\omega^4)^2\partial_i g_{44} = -\frac{1}{2}\big(-g_{44}(\vec{x})\big)^{-1}\partial_i g_{44}(\vec{x}).$$

D'autre part nous avons

$$T_{\alpha\perp} = D_\alpha T + \omega_\alpha\dot{T}$$

qui, avec $\dot{T} = \omega^4 D_4 T = \omega^4\partial_4 T = 0$, donne

$$T_{i\perp} = \partial_i T.$$

Par conséquent, $T_{\alpha\perp} + \dot{\omega}_\alpha T = 0$ se réduit à

$$\partial_i T + \frac{1}{2}\frac{\partial_i g_{44}}{g_{44}} T = 0.$$

La solution de cette équation différentielle est

$$\log T(\vec{x}) = -\frac{1}{2}\log(-g_{44}(\vec{x})) + \text{cte}.$$

En faisant les calculs, nous obtiendrons une distribution analogue pour le potentiel $\mu(\vec{x})$. Donc :

$$\frac{T(\vec{x})}{T(\vec{y})} = \frac{\mu(\vec{x})}{\mu(\vec{y})} = \frac{\triangle t(\vec{x})}{\triangle t(\vec{y})} = \sqrt{\frac{-g_{44}(\vec{y})}{-g_{44}(\vec{x})}}. \tag{5.7.1}$$

Notons l'analogie de comportement des températures et des périodes d'horloges !

Nous constatons que la température d'un fluide au repos est plus élevée $(T > 0)$ là où le champ de gravitation est plus intense. Ceci est en parfait accord avec l'effet centrifuge de la chaleur du cas de d'équilibre cinétique étudié en relativité restreinte ; la distribution de température était alors

$$T(\vec{x}) = T_0(1 - v^2)^{-1/2}.$$

Il semble que (5.7.1) soit en contradiction pour un fluide constitué d'oscillateurs...

Chapitre 6

Principe de Hamilton

Préambule

On forme un invariant intégral et qui dépend en principe des 14 invariants indépendants construits à partir des $g_{\alpha\beta}$ et de leurs dérivées, malheureusement il n'en n'existe aucun qui ne dépende que de la métrique (du potentiel gravifique) et du champ de gravitation ; on construit alors à la section 1 un principe de variation permettant de trouver les équations du champ gravifique. Le lagrangien du champ gravifique et celui de la matière sont ensuite construits aux sections 2 et 3.

6.1 L'action

A la section 7.1, lors de l'établissement des équations du champ, nous avons choisi comme tenseur symétrique, du deuxième ordre, de divergence nulle et dépendant des $g_{..}$, $\partial_{.}g_{..}$ et $\partial^2_{..}g_{..}$ le tenseur

$$S^{(\alpha\beta)}(x) = \Big(R^{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta}\, R\Big)(x).$$

Il existe une démonstration prouvant que *c'est le seul* et qu'il satisfait à toutes ces exigences (en fait $c_1(R^{\alpha\beta} - (1/2)g^{\alpha\beta}(R - c_2))$, mais physiquement nous devons poser $c_2 \to 0,\ c_1$ étant mis dans κ_E !). Nous ne voulons pas donner ici cette démonstration ; nous voulons simplement montrer qu'il est possible de retrouver ce résultat par le principe de Hamilton. Il s'agit donc au préalable de définir l'action.

Dans l'espace de Riemann à quatre dimensions, il existe *14 invariants indépendants* construits à partir des $g_{\alpha\beta}$ et de leurs dérivées :

$$\begin{aligned} R_{(1)} &= R \\ R_{(2)} &= R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \\ &\vdots \\ R_{(14)} &= R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}. \end{aligned}$$

Formons alors *l'invariant intégral* :

$$F[\ldots] = \int_V dV(x)\, f[R_{(1)}, \ldots, R_{(14)}],$$

où V est un volume fini limité par la surface fermée $C(y) = 0$. Dire que $F[\ldots]$ est un invariant revient à dire que pour un changement de coordonnées

$${}'x = \psi(x),$$

nous avons

$${}'F[\ldots] = F[\ldots],$$

c'est-à-dire encore

$$\underline{\delta} F[\ldots] = 0.$$

Nous allons choisir un *changement de coordonnées infinitésimal* de la façon suivante :

$$\begin{cases} {}'x^{'\alpha} = \psi^{'\alpha}(x) = x^{'\alpha} + \delta\varphi^{'\alpha} \text{ dans } V \\ {}'x^{'\alpha} = x^{'\alpha} \text{ ailleurs (en particulier sur la surface limitant } V. \end{cases}$$

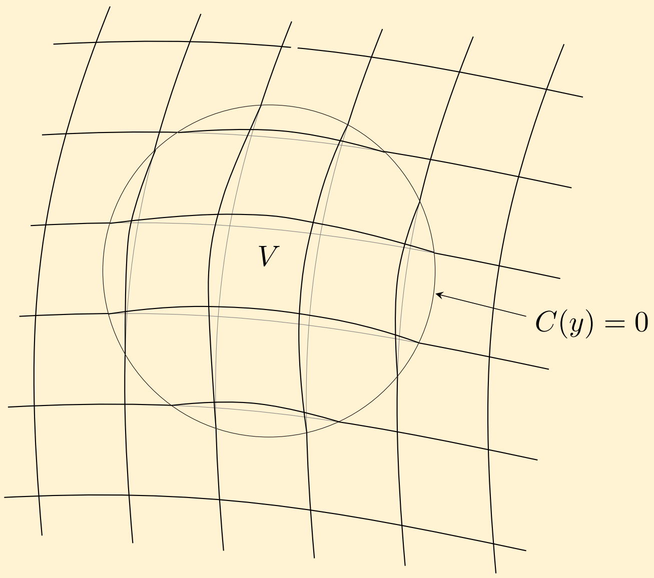


Fig. 6.1.1

Pour ne pas alourdir l'écriture, posons :

$$\varphi^\alpha(x) = \delta\varphi^\alpha(x)$$

en se rappelant que $\varphi^\alpha(x)$ est une fonction infinitésimale du premier ordre. Les matrices de cette transformation sont donc $(A^{'\alpha}{}_{\alpha}(x) = \partial_\alpha \psi^{'\alpha}(x))$

$$A^{'\alpha}{}_{\alpha}(x) = \delta^{'\alpha}_{\alpha} + \partial_\alpha \varphi^{'\alpha}(x)$$
$$A^{-1\,\alpha}{}_{'\alpha}({}'x) = \delta^{\alpha}_{'\alpha} - {}'\partial_{\alpha} \varphi^{\alpha}({}'x).$$

La matrice inverse $A^{-1\,\alpha}{}_{'\alpha}$ a cette forme simple du fait que nous négligeons les termes infinitésimaux d'ordre plus grand que un. En effet, si nous écrivons

$$\begin{aligned} x^\alpha &= \psi^{-1\,\alpha}({}'x) = {}'x^\alpha + \varphi^\alpha({}'x) \\ A^{-1\,\alpha}{}_{'\alpha}({}'x) &= {}'\partial_\alpha \psi^{-1\,\alpha}({}'x) = \delta^\alpha_{'\alpha} - {}'\partial_\alpha \varphi^\alpha({}'x), \end{aligned}$$

alors, puisque

$$A^{'\alpha}{}_\alpha A^{-1\,\alpha}{}_{'\beta} = \delta^{'\alpha}_{'\beta} = (\delta^{'\alpha}_\alpha - \partial_\alpha \varphi^{'\alpha}(x))(\delta^\alpha_{'\beta} - {}'\partial_{'\beta}\varphi^\alpha({}'x)),$$

nous avons bien ${}'\partial_{'\beta}\varphi^{'\alpha}({}'x) = -\partial_\beta \varphi^{'\alpha}(x)$. Par conséquent, nous aurons

$$\begin{aligned} {}'g_{'\alpha'\beta}({}'x) &= g_{\alpha\beta}(x) A^{-1\,\alpha}{}_{'\alpha}({}'x) A^{-1\,\beta}{}_{'\beta}({}'x) \\ &= g_{\alpha\beta}(x)(\delta^\alpha_{'\alpha} - {}'\partial_{'\alpha}\varphi^\alpha({}'x))(\delta^\beta_{'\beta} - {}'\partial_{'\beta}\varphi^\beta({}'x)) \\ &= g_{'\alpha'\beta}(x) - g_{\alpha'\beta}(x)\,{}'\partial_{'\alpha}\varphi^\alpha({}'x) - g_{'\alpha\beta}(x)\,{}'\partial_{'\beta}\varphi^\beta({}'x). \end{aligned}$$

Exprimons cette égalité comme une identité en ${}'x$. Nous pouvons développer :

$$g_{'\alpha'\beta}(x) = g_{'\alpha'\beta}({}'x - \varphi) = g_{'\alpha'\beta}({}'x) - \varphi^\rho({}'x)\,{}'\partial_\rho\, g_{'\alpha'\beta}({}'x) + \ldots$$

Alors, en remplaçant (et en supprimant les $'$ inutiles), nous obtenons, aux infiniment petits du deuxième ordre près,

$${}'g_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(x) - \varphi^\rho(x)\partial_\rho g_{\alpha\beta}(x) - g_{\rho\beta}(x)\partial_\alpha\varphi^\rho(x) - g_{\alpha\beta}(x)\partial_\beta\varphi^\rho(x).$$

Mais $D_\rho g_{\alpha\beta}(x) = 0$, donc

$$\partial_\rho g_{\alpha\beta}(x) = (G_{\rho\beta\alpha} + G_{\rho\alpha\beta})(x)$$

et, en substituant,

$$\begin{aligned} \delta g_{\alpha\beta}(x) &\overset{\text{def}}{=} {}'g_{\alpha\beta}(x) - g_{\alpha\beta}(x) = -(\varphi^\rho G_{\rho\beta\alpha} + \varphi^\rho G_{\rho\alpha\beta} + g_{\rho\beta}\partial_\alpha\varphi^\rho + g_{\alpha\rho}\partial_\beta\varphi^\rho)(x) \\ &= -g_{\rho\beta}(x)(\partial_\alpha\varphi^\rho + G_\alpha{}^\rho{}_\mu\varphi^\mu)(x) - g_{\alpha\rho}(x)(\partial_\beta\varphi^\rho + G_\beta{}^\rho{}_\mu\varphi^\mu)(x) \\ &= -g_{\rho\beta}(x)D_\alpha\varphi^\rho(x) - g_{\alpha\rho}(x)D_\beta\varphi^\rho(x), \end{aligned}$$

soit encore finalement

$$\delta g_{\alpha\beta}(x) = -(D_\alpha\varphi_\beta + D_\beta\varphi_\alpha)(x). \tag{6.1.1}$$

Ce résultat constitue *une transformation de jauge*. Les lois de la relativité doivent donc être invariantes pour les transformations (6.1.1), comme les lois de l'électromagnétisme sont invariantes pour les transformations de jauge $\underline{\delta} A_\alpha = \partial_\alpha \Lambda(x)$. Remarquons que l'électromagnétisme est également invariant pour les transformations de Lorentz qui traduisent les changements de coordonnées ; par contre en relativité générale, *les transformations de coordonnées sont identiques aux transformations de jauge* (6.1.1).

Exprimons alors la variation

$$\underline{\delta} F[\ldots] \equiv 0$$

pour notre changement de coordonnées, donc finalement pour notre transformation de jauge.

Tout d'abord, il faut signaler que les 14 invariants considérés dépendent des $g_{\alpha\beta}(x)$, $\partial_\rho g_{\alpha\beta}(x)$ et $\partial^2_{\rho\sigma} g_{\alpha\beta}(x)$ au maximum. Ensuite il faut se rappeler que dans l'espace de Riemann, l'élément de volume est une fonction de la métrique

$$dV(x) = d^4x\, \mathfrak{g}(x) \quad \text{avec} \quad \mathfrak{g}(x) = |\det(\mathfrak{g}_{..}(x)|^{1/2}.$$

Nous devons donc en tenir compte dans notre variation : nous écrirons donc

$$F[\ldots] = \int_V dV(x)\, f[g_{..}, \partial_. g_{..}, \partial^2_{..} g_{..}] = \int_V d^4x\, \mathfrak{f}[\ldots]$$

avec $\mathfrak{f}[\ldots] = \mathfrak{g}(x) f[\ldots]$. V étant un volume fixe, nous avons

$$\underline{\delta} \int_V d^4x\, \mathfrak{f}[\ldots] = \int_V d^4x\, \underline{\delta}\, \mathfrak{f}[\ldots],$$

où

$$\underline{\delta}\, \mathfrak{f}[\ldots] = \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial(g_{..})}\, \delta g_{..} + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial(\partial_. g_{..})}\, \delta \partial_. g_{..} + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial(\partial^2_{..} g_{..})}\, \delta \partial^2_{..} g_{..}.$$

En effectuant une intégration par parties sur le deuxième terme et deux sur le troisième, nous obtenons :

$$\underline{\delta}\, F[\ldots] \equiv 0 = \int_V d^4x\, \mathfrak{G}^{(\alpha\beta)}[\ldots, \partial^4_{....} g_{..}]\, \delta g_{(\alpha\beta)}(x) + \oint_{C(y)=0} d^3_\alpha y\, (\ldots)^\alpha(y).$$

La présence des dérivées du quatrième ordre de $g_{\alpha\beta}(x)$ dans $\mathfrak{G}^{\alpha\beta}[\ldots]$ provient de la double intégration par parties. Notre choix particulier de transformations $\varphi^\alpha(y) = 0$ ainsi que ses dérivées nous conduit à :

$$\delta g_{\alpha\beta}(y) = \partial_\rho g_{\alpha\beta}(y) = \partial^2_{\rho\sigma} g_{\alpha\beta}(y) = \ldots = 0, \quad \forall\, y \in \{C(y) = 0\}$$

et, par suite, l'intégrale de surface est nulle.

Mais, d'après (6.1.1), $\delta g_{\alpha\beta}(x) = -2 D_{(\alpha} \varphi_{\beta)}(x)$ et donc

$$\underline{\delta} F[\ldots] = -\int_V d^4x\, \mathfrak{G}^{(\alpha\beta)}[\ldots] D_\alpha \varphi_\beta(x) \equiv 0.$$

Enfin, par une dernière intégration par parties (dont l'intégrale de surface s'annule aussi pour la même raison) nous obtenons

$$\underline{\delta} F[\ldots] = \int_V dV(x) D_\alpha G^{(\alpha\beta)}[\ldots] \varphi_\beta(x) \equiv 0,$$

où $G^{(\alpha\beta)}[\ldots] = \mathfrak{g}^{-1}(x)\mathfrak{G}^{(\alpha\beta)}[\ldots]$.

La condition d'invariance (c'est-à-dire l'arbitraire des fonctions $\varphi^\alpha(x)$) nous fournit les conditions

$$\begin{aligned} &D_\alpha G^{\alpha\beta}(x) = 0 \\ &G^{\alpha\beta}(x) = G^{(\alpha\beta)}(x). \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

Les tenseurs $G^{\alpha\beta}(x)$ dépendent donc des $g_{\alpha\beta}(x)$ et de leurs dérivées jusqu'à la quatrième incluse. C'est la théorie la plus générale qu'il est possible d'inventer à partir des invariants considérés.

Dans le cadre de la théorie de la gravitation examinée au chapitre 4, nous avons imposé que les équations du champ ne fassent intervenir que les potentiels et leurs dérivées jusqu'au deuxième ordre. En vertu du calcul qui vient d'être fait, l'invariant ne doit, par conséquent, dépendre que des $g_{\alpha\beta}(x)$ et de leurs dérivées premières (ou ce qui revient au même, des $g_{\alpha\beta}(x)$ et des $G_\alpha{}^\rho{}_\beta$). Malheureusement, parmi les 14 invariants $R_{(A)}$, il n'existe aucun qui jouisse de ces propriétés. Par contre, l'invariant R dépend des $g_{\alpha\beta}(x)$ et des $G_\alpha{}^\rho{}_\beta(x)$ et *linéairement des dérivées secondes* $\partial^2_{\rho\sigma} g_{\alpha\beta}(x)$. Il suit que la double intégration par parties n'augmente pas l'ordre des dérivations, donc :

$$\underline{\delta}\int_V dV(x)\,(-R)(x) = \int_V dV(x)\, G^{\alpha\beta}[\ldots\partial^2_{..} g_{..}]\,\delta g_{\alpha\beta}(x).$$

Calculons ce tenseur $G^{\alpha\beta}[\ldots]$; nous avons

$$\underline{\delta}\int_V dV\,(-R) = \underline{\delta}\int_V d^4x\,\mathfrak{g}(-R) = \int_V d^4x\,(-\delta\mathfrak{g}\,R - \mathfrak{g}\,\delta R).$$

Mais $\mathfrak{g} = |\det(g_{..})|^{1/2}$ donc, d'après ce qui a été vu à la section 2.1, il vient

$$\delta\mathfrak{g} = \frac{1}{2}\mathfrak{g}\, g^{\alpha\beta}\,\delta g_{\alpha\beta}.$$

D'autre part : $R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$ (il s'avère plus astucieux de prendre cette expression plutôt que $g_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}$), et donc

$$\delta R = \delta g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}.$$

Mais

$$g_{\alpha\beta'}g^{\beta'\beta} = \delta^\beta_\alpha \text{ et donc } \delta(g_{\alpha\beta'}g^{\beta'\beta}) = 0$$

et

$$\delta g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\alpha'}g^{\beta\beta'}\delta g_{\alpha'\beta'}.$$

Par conséquent, nous avons

$$\underline{\delta}\int_V dV\,(-R) = \int_V dV\,\Big(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R\Big)\delta g_{\alpha\beta} + \int_V dV\, g^{\alpha\beta}(-\delta R_{\alpha\beta}).$$

Occupons-nous de la seconde intégrale ; d'abord rappelons que :

$$\delta R_{\alpha\beta} = \delta R_{\rho\alpha}{}^\rho{}_\beta$$

où

$$\begin{aligned}\delta R_{\rho\alpha}{}^{\mu}{}_{\beta} &= \partial_\rho \delta G_{alpha}{}^{\mu}{}_{\beta} - \partial_\alpha \delta G_\rho{}^{\mu}{}_{\beta} + [\delta G_\rho, G_\alpha]^{\mu}{}_{\beta} + [G_\rho, \delta G_\alpha]^{\mu}{}_{\beta} \\ &= D_\rho \delta G_\alpha{}^{\mu}{}_{\beta} - D_\alpha \delta G_\rho{}^{\mu}{}_{\beta} - \delta G_\gamma{}^{\mu}{}_{\beta} G_{(\rho}{}^{\gamma}{}_{\alpha)} + \delta G_\gamma{}^{\mu}{}_{\beta} G_{(\rho}{}^{\gamma}{}_{\alpha)} \\ &= D_\rho \delta G_\alpha{}^{\mu}{}_{\beta} - D_\alpha \delta G_\rho{}^{\mu}{}_{\beta}.\end{aligned}$$

De plus, on s'assure immédiatement que les $\delta G_\alpha{}^{\beta}{}_{\gamma}$ sont *des tenseurs* (il suffit d'appliquer la loi de transformation des $G_\alpha{}^{\beta}{}_{\gamma}$ à $G_\alpha{}^{\beta}{}_{\gamma} + \delta G_\alpha{}^{\beta}{}_{\gamma}$ pour le voir !) ; nous arrivons à

$$\delta R_{\alpha\beta} = \delta R_{\rho\alpha}{}^{\rho}{}_{\beta} = D_\rho \delta G_\alpha{}^{\rho}{}_{\beta} - D_\alpha \delta G_\rho{}^{\rho}{}_{\beta}$$

et

$$g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} = D_\rho \delta G_\alpha{}^{\rho\alpha} - D_\alpha \delta G_\rho{}^{\rho\alpha},$$

soit par intégration

$$\int_V dV\, g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} = \int_V dV\, (D_\rho \delta G_\alpha{}^{\rho\alpha} - D_\alpha \delta G_\rho{}^{\rho\alpha}),$$

soit encore, en appliquant le théorème de Gauss,

$$\int_V dV\, g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} = \oint_{C(y)=0} d\sigma_\gamma (\delta G_\alpha{}^{\gamma\alpha} - \delta G_\rho{}^{\rho\gamma})(y).$$

Mais comme $\delta G_{\cdot}^{\cdot}{}_{\cdot}$ est construit avec les $\delta g_{..}$ et $\delta\partial_{.} g_{..}$ qui s'annulent sur la surface, cette intégrale est *nulle*.

Nous avons donc bien montré qu'il est possible de retrouver le tenseur $S^{(\alpha\beta)}$ des équations du champ (4.1.1) au moyen d'un invariant intégral :

$$\underline{\delta}\int_V dV(x)\,(-R)(x) = \int_V dV(x)\Big(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta}R\Big)\delta g_{\alpha\beta}(x). \qquad (6.1.3)$$

L'utilité de ce calcul apparaîtra à la section suivante !

6.2 Lagrangien du champ gravifique

Le principe de Hamilton est, nous le savons, l'affirmation de la stationnarité du lagrangien total du système (Σ_{00}) considéré.

Rappelons l'exemple de l'électromagnétisme :

$$L = \int_V dV\, \ell_{\text{tot.}}[\dots]$$

avec :

$$\ell_{\text{tot.}}[\dots] = \ell_{(em.)}[\dots] + \ell_{(subst.)}[\dots].$$

Dans le cas de l'électromagnétisme linéaire dans la matière poudreuse (théorie électronique de Lorentz), nous savons que

$$\ell_{\text{tot.}}[\ldots] = \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - (A_\alpha j^\alpha + m(-\omega_\alpha \omega^\alpha)^{1/2}).$$

Le principe de stationnarité nous permet, lorsque nous varions les potentiels A_α, de déduire les équations du champ. En effet :

$$\begin{aligned}\delta_A L \equiv 0 = \int_V dV\, \delta_A \ell_{\text{tot.}}[\ldots] &= \int_V dV \Big(\frac{1}{2} B^{\mu\nu} \delta B_{\mu\nu} - \delta A_\alpha j^\alpha + 0\Big)\\ &= \int_V dV \Big(\frac{1}{2} B^{\mu\nu} (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) - \delta A_\alpha j^\alpha\Big)\\ &= \int_V dV \Big(\frac{1}{2} B^{[\mu\nu]} \cdot 2\partial_{[\mu} \delta A_{\nu]} - \delta A_\alpha j^\alpha\Big)\\ &= \int_V dV\, (-\partial_\mu B^{\mu\nu} - j^\nu) \delta A_\nu + \underbrace{\oint_{C(y)=0} d\sigma_\alpha B^{\alpha\nu} \delta A_\nu}_{=0},\end{aligned}$$

où la dernière ligne est obtenue par intégration par parties du premier terme. Comme δA_α est une variation arbitraire, nous obtenons les équations du champ

$$\partial_\mu B^{\mu\nu} = -j^\nu.$$

Si maintenant nous variions les lignes de courant : $\delta_r L \equiv 0$, nous obtiendrions les équations de mouvement des charges.

Il est nécessaire de remarquer que la lagrangienne dépend en particulier des potentiels A_α et de leurs dérivées du premier ordre $\partial_\beta A_\alpha$ (ou du champ $B_{\alpha\beta}$ ce qui revient au même) :

$$\ell_{\text{tot.}} = \ell_{(em.)}[A_., B_{..}] + \ell_{(subst.)}[A_., \ldots].$$

Lors de la variation $\delta_{A.}$, la contribution de $\ell_{(subst.)}$ est de fournir le terme donnant *les sources du champ.*

Ce sont là des propriétés tout à fait générales du principe de Hamilton et pas uniquement propres au système électromagnétique. Elles doivent par conséquent être encore valables pour le système gravifique s'il existe pour lui un principe de Hamilton, ce que nous admettrons (à posteriori !).

Dans la fin de cette section, nous allons chercher le lagrangien du champ gravifique, et dans la prochaine section nous donnerons deux exemples de lagrangiens de la matière.

Les équations du champ gravifique devant contenir au maximum les dérivées secondes des potentiels (comme en électromagnétisme), la densité lagrangienne du champ ne doit être fonction que des $g_{\alpha\beta}$ et des dérivées premières $\partial_\rho g_{\alpha\beta}$ (ou du champ ${G_\alpha}^\beta{}_\gamma$, ce qui revient au même) :

$$\ell_{(g)} = \ell_{(g)}[g_{..}, G_{.}{}^{.}{}_{.}].$$

Or nous avons vu qu'il n'existe pas d'invariants de ce type (ce qui est assez évident puisque $G_{\cdot\cdot}^{\cdot}$ n'est pas un tenseur). Mais puisque l'invariant R ne contient les dérivées secondes que linéairement, il est possible par une transformation d'intégrale d'obtenir

$$\int_V dV\,(-R[\ldots,\partial^2_{\cdot\cdot}\underline{\text{lin.}}] \stackrel{\text{def}}{=} \int_V dV\,\ell_{(g)}[g_{\cdot\cdot},G_{\cdot\cdot}^{\cdot}] + \oint_{C(y)=0} d\sigma_\alpha\,(\ldots)^\alpha.$$

En effet

$$\begin{aligned}\int_V dV\,(-R) &= \int_V d^4x\,\mathfrak{g}(-R) = \int_V d^4x\,\mathfrak{g}\,g^{\alpha\beta}(-R_{\rho\alpha}{}^{\rho}{}_{\beta})\\ &= \int_V d^4x\,\mathfrak{g}\,g^{\alpha\beta}(-\partial_\rho G_\alpha{}^\rho{}_\beta + \partial_\alpha G_\rho{}^\rho{}_\beta - G_\rho{}^\rho{}_\tau G_\alpha{}^\tau{}_\beta + G_\alpha{}^\rho{}_\tau G_\rho{}^\tau{}_\beta).\end{aligned}$$

Intégrons par parties les deux premiers termes ; nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_V d^4x\,\mathfrak{g}\,g^{\alpha\beta}(-\partial_\rho G_\alpha{}^\rho{}_\beta + \partial_\alpha G_\rho{}^\rho{}_\beta) = &\oint_{C(y)=0} d^3_\gamma y\,\mathfrak{g}\,(-g^{\alpha\beta}G_\alpha{}^\gamma{}_\beta + g^{\gamma\beta}G_\rho{}^\rho{}_\beta)(y)\\ &- \int_V dV\,(-G_\alpha{}^\rho{}_\beta\,\partial_\rho(\mathfrak{g}\,g^{\alpha\beta}) + G_\rho{}^\rho{}_\beta\partial_\alpha(\mathfrak{g}\,g^{\alpha\beta})).\end{aligned}$$

Mais

$$\partial_\rho\mathfrak{g} = \frac{1}{2}\mathfrak{g}\,g^{\alpha\beta}\partial_\rho g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\mathfrak{g}\,g^{\alpha\beta}(G_{\rho\alpha\beta} + G_{\rho\beta\alpha}) = \mathfrak{g}\,G_\rho{}^\lambda{}_\lambda$$

et

$$D_\rho g^{\alpha\beta} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \partial_\rho g^{\alpha\beta} = -G_\rho{}^{\alpha\beta} - G_\rho{}^{\beta\alpha}.$$

L'intégrale de volume s'écrit alors

$$\begin{aligned}&-\int_V d^4x\,\Big(-G_\alpha{}^\rho{}_\beta\left(\mathfrak{g}\,G_\rho{}^\lambda{}_\lambda g^{\alpha\beta} - \mathfrak{g}\,(G_\rho{}^{\alpha\beta} + G_\rho{}^{\beta\alpha})\right)\\ &\quad + G_\rho{}^\rho{}_\beta\left(\mathfrak{g}\,G_\alpha{}^\lambda{}_\lambda g^{\alpha\beta} - \mathfrak{g}\,(G_\alpha{}^{\alpha\beta} + G_\alpha{}^{\beta\alpha})\right)\Big)\\ &= \int_V d^4x\,\big(\mathfrak{g}\,g^{\alpha\beta}(G_\alpha{}^\rho{}_\beta G_\rho{}^\lambda{}_\lambda - G_\tau{}^\rho{}_\beta G_\rho{}^\tau{}_\alpha - G_\tau{}^\rho{}_\beta G_\rho{}^\tau{}_\alpha\\ &\quad - G_\rho{}^\rho{}_\beta G_{(\alpha}{}^\lambda{}_{\lambda)} + G_\rho{}^\rho{}_\beta G_{(\lambda}{}^\lambda{}_{\alpha)} + G_\rho{}^\rho{}_\tau G_\alpha{}^\tau{}_\beta)\big).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_V dV\,(-R) = \int_V dV\,g^{\alpha\beta}(G_\alpha{}^\rho{}_\beta G_\rho{}^\lambda{}_\lambda - G_\lambda{}^\rho{}_\alpha G_\rho{}^\lambda{}_\beta) + \oint_{C(y)=0} d\sigma_\gamma\,(-G_\alpha{}^{\gamma\alpha} + G_\alpha{}^{\alpha\gamma}).$$

Par conséquent :

$$\ell_{(g)}[g_{\cdot\cdot},G_{\cdot\cdot}^{\cdot}] = g^{\alpha\beta}(x)\,(G_\alpha{}^\rho{}_\beta G_\rho{}^\lambda{}_\lambda - G_\lambda{}^\rho{}_\alpha G_\rho{}^\lambda{}_\beta)(x). \tag{6.2.1}$$

La densité de lagrangienne $\ell_{(g)}$ n'est donc pas un scalaire.

Si nous avons choisi cette définition de la lagrangienne, c'est simplement parce que :

$$\underline{\delta} \int_V dV\,(-R) = \underline{\delta} \int_V dV\,\ell_{(g)}[\ldots], \tag{6.2.2}$$

l'intégrale de surface s'annulant par les conditions $G^{\cdot\cdot}_{\cdot}(y) \propto \partial_{\cdot} g_{\cdot\cdot}(y) = 0$. Le membre de droite est alors un scalaire puisque le membre de gauche l'est. Et, au fond, pour le principe de Hamilton, c'est bien la variation seule qui importe.

Par (6.1.3) nous aurons donc

$$\underline{\delta} \int_V dV\,\ell_{(g)}[\ldots] = \int_V dV\,\Big(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R\Big)\delta g_{\alpha\beta}. \tag{6.2.3}$$

6.3 Lagrangien de la matière

Ce que nous appelons ici « matière » est « substance + électromagnétisme » ; donc

$$\ell_{\text{mat.}} = \ell_{(subst.)} + \ell_{(em.)}.$$

Lagrangien du champ électromagnétique

Dans le cours d'électromagnétisme nous avons défini la densité lagrangienne du cas linéaire par :

$$\ell_{(em.)}[B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu},$$

le champ $B^{\mu\nu}$ étant en toute généralité défini par

$$\frac{1}{2} B^{\mu\nu} = \frac{\partial \ell_{(em.)}}{\partial B_{\mu\nu}}.$$

Nous avons donc :

$$\ell_{(em.)}[g^{\cdot\cdot}, B_{\cdot\cdot}] = \frac{1}{4}(g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} B_{\mu\nu} B_{\alpha\beta})(x). \tag{6.3.1}$$

Examinons l'effet des variations $\delta g_{\alpha\beta}$ sur $L_{(em.)}$. Nous avons

$$\delta_g L_{(em.)} = \delta \int_V dV\,\ell_{(em.)} = \delta \int_V d^4x\,(\delta\mathfrak{g}\,\ell_{(em.)} + \mathfrak{g}\,\delta_g \ell_{(em.)}).$$

Mais, d'une part, $\delta\mathfrak{g} = \frac{1}{2}\mathfrak{g}\, g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}$ et $\delta g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\alpha'} g^{\beta\beta'} \delta g_{\alpha'\beta'}$ et, d'autre part,

$$\delta_g \ell_{(em.)} = \delta\Big(\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}\Big) = -\frac{1}{2} B^{\alpha\mu} B^{\beta}{}_{\mu} \delta g_{\alpha\beta}.$$

Ainsi

$$\delta_g L_{(em.)} = \int_V dV\,\Big(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \ell_{(em.)} - \frac{1}{2} B^{\alpha\mu} B^{\beta}{}_{\mu}\Big)\delta g_{\alpha\beta}.$$

Or, par définition,

$$\theta^{\alpha\beta}_{(em.)} \stackrel{\text{def}}{=} B^{\alpha\mu} B^{\beta}{}_{\mu} - g^{\alpha\beta} \ell_{(em.)},$$

donc

$$\delta_g L_{(em.)} = \int_V dV(x)\Big(-\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}_{(em.)}\,\delta g_{\alpha\beta}\Big)(x). \tag{6.3.2}$$

Lagrangien du fluide parfait

La densité lagrangienne du fluide parfait $\ell_{(0)}$ est

$$\ell_{(0)}[g_{..},\omega_{.},m,p] = m\,(-g_{\alpha\beta}\,\omega^\alpha\omega^\beta)^{1/2} - p. \tag{6.3.3}$$

Elle est formée de la densité lagrangienne de la matière poudreuse à laquelle s'ajoute la pression scalaire. Pour le cas qui nous occupe (recherche des équations du champ gravifique) nous avons laissé de côté le terme « électromagnétique » $A_\alpha j^\alpha$.

Examinons l'effet des variations $\delta g_{\alpha\beta}$ sur $L_{(0)}$. Nous avons

$$\delta_g L_{(0)} = \int_V d^4x\,(\delta\mathfrak{g}\,\ell_{(0)} + \mathfrak{g}\,\delta_g\ell_{(0)}).$$

Or : $\delta\mathfrak{g} = \frac{1}{2}\mathfrak{g}\,g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}$ et $m = \mathfrak{m}\mathfrak{g}^{-1}$ (avec $\mathfrak{m}$ la densité scalaire) ; il vient donc

$$\delta_g\ell_{(0)} = \mathfrak{m}\,\delta(\mathfrak{g}^{-1})(-g_{\alpha\beta}\,\omega^\alpha\omega^\beta)^{1/2} + m\,\frac{1}{2}(-g_{\alpha\beta}\,\omega^\alpha\omega^\beta)^{-1/2}(-\omega^\alpha\omega^\beta\delta g_{\alpha\beta}).$$

Mais nous avons

$$\delta(\mathfrak{g}^{-1}) = -\mathfrak{g}^{-2}\,\delta\mathfrak{g} = -\frac{1}{2}\mathfrak{g}^{-1}\,g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad -\,g_{\alpha\beta}\,\omega^\alpha\omega^\beta = -\omega_\alpha\omega^\alpha = 1.$$

Il en résulte donc

$$\delta_g\ell_{(0)} = \Big(-\frac{1}{2}\,m\,g^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}m\,\omega^\alpha\omega^\beta\Big)\delta g_{\alpha\beta}$$

et

$$\delta_g L_{(0)} = \int_V dV\,\Big(-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}p - \frac{1}{2}m\,\omega^\alpha\omega^\beta\Big)\delta g_{\alpha\beta}$$

qui, avec $\theta^{\alpha\beta}_{(0)} = m\omega^\alpha\omega^\beta + pg^{\alpha\beta}$, devient

$$\delta_g L_{(0)} = \int_V dV(x)\,\Big(-\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}_{(0)}\,\delta g_{\alpha\beta}\Big)(x). \tag{6.3.4}$$

Equations du champ

Le principe de Hamilton

$$\delta_g L_{\text{tot.}} = \delta\int_V dV\,(\ell_{(g)} + \ell_{(mat.)}) \equiv 0$$

doit nous fournir les équations du champ gravifique.

Par (6.2.3), (6.3.2) et (6.3.4) nous obtenons

$$\delta_g L_{\text{tot.}} = \int_V dV\,\Big(c_1\Big(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R\Big) - \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}_{(mat.)}\Big)\delta g_{\alpha\beta}$$

avec : $c_1 = 1/2\kappa_E$. Les variations $\delta g_{\alpha\beta}$ étant arbitraires, nous en déduisons

$$(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R)(x) = \kappa_E\theta^{\alpha\beta}_{(mat.)}(x). \tag{4.1.2}$$

Le tenseur $\theta^{\alpha\beta}_{(\text{mat.})} = \theta^{\alpha\beta}_{(em.)} + \theta^{\alpha\beta}_{(subst.)}$ constitue le tenseur *densité de source du champ.* Comme il se doit, la divergence de ce tenseur doit s'annuler, ce qui exprime *la conservation, non de l'énergie du système, mais des sources du champ.*

Le problème de la conservation de l'énergie du système total, qui est susceptible de recevoir plusieurs réponses, ne sera pas traité ici.

Chapitre 7

Champp gravistatique à symétrie sphérique

Préambule

A la section 1, on construit le ds^2 d'un champ gravistatique. La section 2 écrit le champ gravistatique directement à partir du principe de Hamilton. La section 3 est consacrée au calcul du ds^2 de Schwarzschild.

7.1 Les potentiels $g_{\alpha\beta}$

Notations et rappels.

Nous reprenons la notation :

$$x = \{\vec{x}, t\} \text{ avec } t = x^4 \text{ et } \vec{x} = \{x^i\}.$$

Rappelons que le champ est dit *gravistatique* lorsqu'il est possible de ne faire dépendre les $g_{\alpha\beta}$ que des coordonnées spatiales ; $x^4 = t$ est alors appelé le *temps universel*. L'expression du ds^2 est alors (en explicitant les termes temporels)

$$ds^2 = g_{ik}(\vec{x})dx^i dx^k + 2g_{i4}(\vec{x})dx^i dt + g_{44}(\vec{x})(dt)^2.$$

Il est toujours possible par un changement de coordonnées d'annuler les trois quantités g_{i4} (d'une infinité de façon puisque nous disposons de quatre lois de transformations pour trois contraintes seulement).

Dans le cas du champ gravistatique, cette élimination peut se faire en effectuant la transformation :

$$\begin{cases} \vec{x} = {}'\vec{x} \\ t = {}'t + f(\vec{x}) \end{cases}$$

$f(\vec{x})$ étant une fonction que nous préciserons par la suite. Par cette transformation les $g_{\alpha\beta}$ ne dépendent encore que de $\vec{x}$; en fait cette transformation traduit l'arbitraire du choix de l'origine (et de l'unité) du temps en chaque point de l'espace. Donc

$$dt = d'\!t + f_i dx^i \text{ avec } f_i = \partial_i f(\vec{x})$$

et

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ik}(\vec{x})dx^i dx^k + 2g_{i4}(\vec{x})dx^i(d'\!t + f_k dx^k) \\ &\quad + g_{44}(\vec{x})(d'\!t + f_i dx^i)(d'\!t + f_k dx^k) \\ &= (g_{ik} + 2g_{i4}f_k + g_{44}f_i f_k)(\vec{x})dx^i dx^k \\ &\quad + 2(g_{i4} + g_{44}f_i)(\vec{x})dx^i d'\!t + g_{44}(\vec{x})(d'\!t)^2. \end{aligned} \tag{7.1.1}$$

Les ${}'g_{i4}(\vec{x})$ s'annulent si

$$(g_{i4} + g_{44}f_i)(\vec{x}) = 0, \quad \text{donc si } \partial_i f(\vec{x}) = -\frac{g_{i4}(\vec{x})}{g_{44}(\vec{x})},$$

ce qui fixe des conditions sur $f(\vec{x})$. Nous voyons ainsi qu'un choix judicieux de l'origine des temps en chaque point de l'espace nous permet d'éliminer les termes mixtes $(dx^i dt)$. Le temps étant alors partout orthogonal à l'espace il est possible de synchroniser toutes les horloges de l'univers.

En vue d'étudier le système solaire, nous allons maintenant nous restreindre au cas du champ gravistatique à symétrie sphérique. Nous disons qu'un champ est à *symétrie sphérique* si pour un choix approprié de coordonnées, *le ds^2 est invariant pour toutes les transformations orthogonales linéaires.* Par conséquent, le ds^2 (7.1.1) doit être de la forme

$$ds^2 = a(r)|d\vec{x}|^2 + b(r)(\vec{x}, d\vec{x})^2 - c^2(r)(dt)^2 \tag{7.1.2}$$

où

$$r^2 = \sum_{i=1}^{3}(x^i)^2 \qquad |d\vec{x}|^2 = \sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2 \qquad (\vec{x}, d\vec{x}) = \sum_{i=1}^{3} x^i dx^i = \frac{1}{2}d(r^2).$$

Remarquons que l'espace n'étant pas euclidien, r n'est en général ni la distance du point $\vec{0}$ au point $\vec{x}$, ni le quotient par 2π de la circonférence d'un cercle passant par ce point ! (cf. plus loin).

Dans le cas à symétrie sphérique les termes mixtes $g_{i4}(\vec{x})$, déjà éliminés dans (7.1.2), sont de la forme

$$g_{i4}(\vec{x}) = x^i g(r)$$

et $f(\vec{x}) = f(r)$, ce qui donne

$$f_i = \frac{x^i}{r}f'(r) \quad \text{où} \quad f'(r) = \frac{d}{dr}f(r),$$

la condition sur f devenant alors

$$f'(r) = -r\frac{g(r)}{g_{44}(r)}.$$

Revenons à (7.1.2) ; la métrique est

$$\begin{cases} g_{ik}(\vec{x}) = a(r)\delta_{ik} + b(r)x^i x^k \\ g_{i4}(\vec{x}) = 0 \\ g_{44}(\vec{x}) = -c^2(r). \end{cases}$$

Sans restreindre la généralité, il est possible par une transformation du type $'\vec{x} = h(r)\vec{x}$ d'avoir $'a('r) = 1$. Le ds^2 sera alors

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_i (dx^i)^2 + b(r) \sum_i (x^i, dx^i)^2 - c^2(r)(dt)^2 \\ &= \sum_{i,k} (\delta_{ik} + b(r)x^i x^k) dx^i dx^k - c^2(r)(dt)^2 \end{aligned}$$

et la métrique :

$$\begin{cases} g_{ik}(\vec{x}) = \delta_{ik} + b(r)x^i x^k \\ g_{i4}(\vec{x}) = 0 \\ g_{44}(\vec{x}) = -c^2(r). \end{cases} \tag{7.1.3}$$

Par la symétrie sphérique, le déterminant $\det(g_{..})$ ne doit dépendre que de r. Il est alors très simple de le calculer :

$$-\det(g_{..})(r) = (1 + b(r)r^2)c^2(r).$$

Par conséquent, si nous posons

$$\gamma(r) = 1 + b(r)r^2 \tag{7.1.4}$$

la densité scalaire $\mathfrak{g}(r) = |\det(g_{..})|^{1/2}$ est

$$\mathfrak{g}(r) = \gamma^{1/2}(r)c(r). \tag{7.1.5}$$

Effectuons encore un dernier changement de coordonnées en posant

$$\begin{aligned} x^1 &= r \sin\theta \cos\varphi \\ x^2 &= r \sin\theta \sin\varphi \\ x^3 &= r \cos\theta \end{aligned}$$

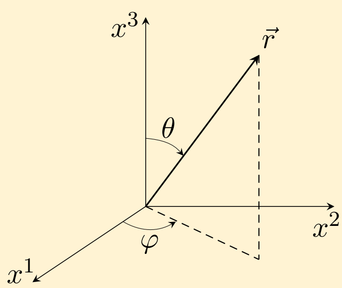


Fig. 7.1.1

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= [\vec{r}]\, dr + [\vec{\theta}] r\, d\theta + [\vec{\varphi}] r \sin\theta\, d\varphi \\ \vec{x} &= [\vec{r}] r \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &|d\vec{x}|^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + (\sin\theta)^2\, d\varphi^2) \\ &b(r)(\vec{x}, d\vec{x})^2 = b(r) r^2 dr^2, \end{aligned}$$

d'où l'expression du ds^2

$$ds^2 = \gamma(r)\, dr^2 + r^2(d\theta^2 + (\sin\theta)^2 d\varphi^2) - c^2(r)\,(dt)^2. \tag{7.1.6}$$

Signification de r .

Que représente r dans (7.1.6) ? Sur une ligne $dr = 0$ et $d\varphi = 0$, la partie spatiale du ds^2 est $d\sigma^2 = r^2\, d\theta^2$, donc :

$$\oint d\sigma = \int_0^{2\pi} r d\theta = 2\pi r,$$

donc r *représente le quotient par 2π de la circonférence d'un cercle.*

Mais, sur une ligne (rayon-vecteur) $d\theta = d\varphi = 0$, $d\sigma^2 = \gamma(r)\, dr^2$ et alors :

$$\int_{r_1}^{r_2} d\sigma = \int_{r_1}^{r_2} \gamma^{1/2}(r)\, dr = \text{dist.}(r_2 - r_1) \neq r_2 - r_1!$$

7.2 Calcul du lagrangien

Nous avons établi au chapitre précédent la forme de la densité lagrangienne du champ gravifique :

$$\ell_{(g)} = g^{\alpha\beta}(G_\alpha{}^\rho{}_\beta G_\rho{}^\lambda{}_\lambda - G_\rho{}^\lambda{}_\alpha G_\lambda{}^\rho{}_\beta). \tag{7.2.1}$$

Nous voulons maintenant l'écrire pour notre champ gravistatique à symétrie sphérique en vue d'établir les équations de ce champ à partir du principe de Hamilton. Il s'avère en effet que ce procédé est plus court et moins lourd que celui consistant à partir de l'équation fondamentale (4.1.1). Il s'agit tout d'abord d'exprimer les $g^{\alpha\beta}$. Pour cela, nous partons de la relation

$$g^{\alpha\rho} g_{\rho\beta} = \delta^\alpha_\beta.$$

L'identité $g^{4\alpha} g_{\alpha 4} = g^{44} g_{44} = 1$ donne par (7.1.3) que $g^{44} = -c^{-2}(r)$. Ensuite nous avons $g^{ik} g_{k\ell} = \delta^k_\ell$; essayons la forme $g^{ik} = \delta^{ik} + k(r) x^i x^k$:

$$g^{ik} g_{k\ell} = \delta^i_\ell + (b + k(r) + bk(r) r^2) x^i x^\ell \equiv \delta^i_\ell,$$

qui conduit à

$$k(r) = \frac{-b}{1+br^2} = -\frac{b}{\gamma}.$$

En résumé :

$$\begin{cases} g^{ik} & = \delta^{ik} - \left(\dfrac{b}{\gamma}\right)(r)x^i x^k \\ g^{i4} & = 0 \\ g^{44} & = -c^{-2}(r). \end{cases} \tag{7.2.2}$$

Ensuite nous devons calculer les $G_\alpha{}^\beta{}_\gamma$. Par (7.1.3) nous obtenons

$$\partial_i g_{k\ell} = \partial_i(bx^k x^\ell) = b'\frac{1}{r}x^i x^k x^\ell + b\,\delta_{ik}x^\ell + b\,\delta_{i\ell}x^k.$$

Alors :

$$G_{ik\ell} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{k\ell} - \partial_k g_{\ell i} + \partial_\ell g_{ki}) = \frac{1}{2}b'(r)\frac{1}{r}x^i x^k x^\ell + 2b\,\delta_{i\ell}x^k$$

et

$$G_i{}^k{}_\ell = \frac{b}{\gamma}\delta_{ik}x^k + \frac{1}{2}\frac{b'}{\gamma r}x^i x^k x^\ell,$$

Les $G_4{}^i{}_k$, $G_i{}^4{}_k$, $G_i{}^k{}_4$ sont évidemment nuls puisque $g_{i4}=0$ et g_{44} est indépendant de x^4.

On calcule immédiatement :

$$\begin{aligned} G_i{}^4{}_4 &= g^{44}\frac{1}{2}(\partial_i g_{44}) = -\frac{1}{c^2}\frac{1}{2}(-\partial_i c^2) = \frac{c'}{c}\frac{x^i}{r} \\ G_4{}^i{}_4 &= g^{ik}\frac{1}{2}(-\partial_k g_{44}) = \left(\delta^{ik} - \frac{b}{\gamma}x^i x^k\right)\left(cc'\frac{x^k}{r}\right) = \frac{cc'}{\gamma}\frac{x^i}{r} \end{aligned}$$

et donc

$$G_i{}^4{}_4 = \frac{c'}{c}\frac{x^i}{r} \qquad \text{et} \qquad G_4{}^i{}_4 = \frac{cc'}{\gamma}\frac{x^i}{r}.$$

En vertu de la symétrie sphérique, la densité lagrangienne $\ell_{(g)}$ est une fonction de r seulement ; il est donc possible comme au paragraphe précédent lors du calcul de $\mathfrak{g}(r)$, de l'écrire pour $x^1 = r,\ x^2 = 0,\ x^3 = 0$. Alors

$$\begin{cases} g^{11} = 1 - \dfrac{b}{\gamma}r^2 = \dfrac{1}{\gamma} \\ g^{22} = g^{33} = 1 \\ g^{44} = -c^{-2}\ ; \quad \text{tous les autres sont nuls.} \end{cases}$$

De même :

$$
\begin{aligned}
&G_1{}^1{}_1 = \frac{b}{\gamma}r + \frac{1}{2}\frac{b'}{\gamma r}r^3 = \frac{1}{2\gamma}(2br + b'r^2) = \frac{1}{2}\frac{\gamma'}{\gamma}\\
&G_1{}^1{}_2 = G_1{}^1{}_3 = 0\\
&G_2{}^1{}_2 = G_3{}^1{}_3 = \frac{br}{\gamma}\\
&G_1{}^1{}_4 = 0 \qquad G_4{}^1{}_4 = \frac{cc'}{\gamma}\\
&G_\alpha{}^2{}_\beta = 0 \quad \forall\,\alpha,\beta\\
&G_\alpha{}^3{}_\beta = 0 \quad \forall\,\alpha,\beta\\
&G_i{}^4{}_k = 0 \qquad G_1{}^4{}_4 = \frac{c'}{c} \qquad G_2{}^4{}_4 = G_3{}^4{}_4 = 0.
\end{aligned}
$$

Par conséquent :

$$
\begin{aligned}
\ell_{(g)} &= g^{11}(G_1{}^\rho{}_1 G_\rho{}^\lambda{}_\lambda - G_\rho{}^\lambda{}_1 G_\lambda{}^\rho{}_1\\
&\quad + 2g^{22}(G_2{}^\rho{}_2 G_\rho{}^\lambda{}_\lambda - G_\rho{}^\lambda{}_2 G_\lambda{}^\rho{}_2) + g^{44}(G_4{}^\rho{}_4 G_\rho{}^\lambda{}_\lambda - G_\rho{}^\lambda{}_4 G_\lambda{}^\rho{}_4)\\
&= g^{11}(G_1{}^1{}_1 G_1{}^4{}_1 - G_4{}^4{}_1 G_4{}^4{}_1)\\
&\quad + 2g^{22}(G_2{}^1{}_2 G_1{}^1{}_1 - G_2{}^1{}_2 G_1{}^4{}_4) + g^{44}(G_4{}^1{}_4 G_1{}^1{}_1 - G_4{}^1{}_4 G_1{}^4{}_4)\\
&= \frac{1}{2}\frac{\gamma'}{\gamma}\frac{c'}{c} - \frac{1}{\gamma}\frac{c'^2}{c^2} + \frac{br}{\gamma^2}\gamma' + 2\frac{br}{\gamma}\frac{c'}{c} + \Big(-\frac{1}{2}\frac{\gamma'}{\gamma^2}\frac{c'}{c}\Big) + \frac{1}{\gamma}\frac{c'^2}{c^2}\\
&= \frac{br}{\gamma}\Big(\frac{\gamma'}{\gamma} + 2\frac{c'}{c}\Big).
\end{aligned}
$$

Il vient alors

$$
\begin{aligned}
L_{(g)} &= \int d^4V\,\ell_{(g)} = \int d^4x\,\mathfrak{g}\,\ell_{(g)}\\
&= 4\pi t\int_\epsilon^\infty dr\,r^2(\gamma^{1/2}c)\frac{br}{\gamma}\Big(\frac{\gamma'}{\gamma} + 2\frac{c'}{c}\Big) = 8\pi t\int_\epsilon^\infty dr\frac{br^3}{\gamma}(\gamma^{1/2}c)'.
\end{aligned}
$$

Posons

$$
\frac{br^3}{\gamma} = \chi(r) \qquad \text{et} \qquad \gamma^{1/2}c = \varphi(r).
$$

Nous constatons que $\chi(r)$ et $\varphi(r)$ sont indépendants puisque l'un dépend de $c(r)$ et l'autre non.

Le principe de Hamilton s'écrit alors

$$
\begin{aligned}
\delta\int_\epsilon^\infty dr\,\chi\varphi' &= \int_\epsilon^\infty dr\,\delta\chi\,\varphi' + \int_\epsilon^\infty dr\,\chi\,\delta\varphi'\\
&= \int_\epsilon^\infty dr\,\varphi'\delta\chi - \int_\epsilon^\infty dr\,\chi'\delta\varphi = 0^*
\end{aligned}
$$

après intégration du second terme par parties (* signifie : rayon du Soleil $< \epsilon$).

Nous posons la variation égale à zéro car nous cherchons le champ dans le vide, en dehors de la masse située au centre de symétrie. Comme $\delta\chi$ et $\delta\varphi$ sont arbitraires, nous avons nécessairement

a) $\chi' = 0$,
b) $\varphi' = 0$,

c'est-à-dire :

a) χ est une constante que nous désignons par R_g :

$$\chi(r) = br^2 \frac{r}{\gamma} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}(r) r = R_g$$

et donc

$$\gamma(r) = \frac{r}{r - R_g}. \tag{7.2.3}$$

Nous constatons que

$$\gamma(r) \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} 1 & \text{si } r \to +\infty \\ +\infty & \text{si } r \to R_g + 0. \end{cases}$$

b) $\varphi = \gamma^{1/2} c$ est une constante laquelle doit valoir $+1$ car pour $r \to \infty$, $\gamma(r) \to 1$ et également $c(r) \to 1$ (l'espace devient lorentzien loin de la masse). Donc

$$(\gamma^{1/2} c)(r) = 1 = \mathfrak{g}.$$

La densité scalaire $\mathfrak{g}$ est donc une constante, et

$$c^2 = \frac{1}{\gamma} = 1 - \frac{R_g}{r} = -g_{44}. \tag{7.2.4}$$

Interprétation de R_g.

Très loin des masses, l'approximation linéaire vue au chapitre 4 est valable ; nous avions trouvé

$$g_{44}(r) = -1 + \frac{\kappa_E M}{4\pi r},$$

M étant la masse source de champ.

Pour r suffisamment grand, l'égalité suivante est valable :

$$g_{44}(r) = -c^2(r) = -1 + \frac{R_g}{r}.$$

Ainsi

$$R_g = \frac{\kappa_E M}{4\pi} > 0 \tag{7.2.5}$$

où R_g, qui est positif et a la dimension d'une longueur, est appelé le *rayon de gravitation de la masse M.*

Exemples :

$\odot$: Soleil : $R_g = 2,98 \cdot 10^5$ cm $\qquad$ T : Terre : $R_g = 0,8$ cm

$$\left.\frac{R_g}{R}\right|_{\odot} = 4 \cdot 10^{-4} \qquad \left.\frac{R_g}{R}\right|_{\mathrm{T}} = 1,3 \cdot 10^{-8}$$

Remarque.

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g_{44} \overset{\text{lin.}}{=} -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \phi^{\text{Newton}} = \vec{G}$$

et donc

$$2\phi^{\text{Newton}} = \frac{R_g}{r}.$$

7.3 Elément ds^2 de Schwarzschild

Le principe de Hamilton, en nous fournissant les équations du champ ($\varphi' = 0$ *et* $\chi' = 0$), nous a permis de déterminer les deux fonctions $\gamma(r)$ et $c(r)$ qui interviennent dans l'expression du ds^2.

Par (7.1.6), (7.2.3) et (7.2.4), cet élément devient

$$ds^2 = \frac{r}{r - R_g}(dr)^2 + r^2\big((d\theta)^2 + (\sin\theta)^2(d\varphi)^2\big) - \Big(1 - \frac{R_g}{r}\Big)(dt)^2 \tag{7.3.1}$$

et est appelé *métrique de Schwarzschild* (1916).

Le ds^2 définissant complètement l'espace de Riemann, la *recherche du champ gravistatique à symétrie sphérique est donc achevée.* Il sera utilisé au chapitre suivant pour la recherche des orbites planétaires. Le déterminant $|\det(g_{..})| = g^2$ est égal à 1 ; il n'y a donc pas de singularité exepté en R_g où la métrique présente la singularité suivante :

	r	θ	φ	t
sign$(g_{..})$ si $r > R_p$	1	1	1	-1
sign$(g_{..})$ si $r < R_g$	-1	1	1	1

On remarque que r et t permutent leur signification lors du passage à $r = R_g$. Les solutions intérieures à R_g ont-elles un sens ? Rappelons que notre domaine d'intégration était $[\epsilon, \infty]$, avec $\epsilon > R_{\odot} >> R_g$.

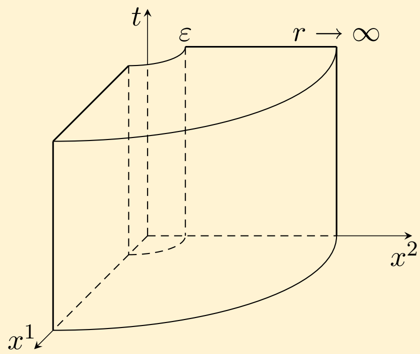


Fig. 7.3.1

Si l'on souhaite une discussion moins superficielle, on pourra consulter les articles suivants :

- Einstein et Rosen : Phys. Rev. **48**, 73 (1935),
- Kruskal : Phys. Rev. **119**, 1743 (1960).

Chapitre 8

Orbites planétaires et déflexion de la lumière (Newton, Einstein, Schwarzschild)

Préambule

La section 1 rappelle les résultats connus sur les orbites planétaires de Newton. La section 2 étudie les orbites d'Einstein et la dernière section est consacrée à la déflexion de la lumière.

8.1 Orbites selon Newton

Sans trop insister, nous voulons rappeler ici les principaux résultats obtenus par la mécanique de Newton. L'équation fondamentale s'écrit pour une planète ponctuelle placée dans un champ gravifique (cf. sect. 4.1)

$$\ddot{\vec{z}}(t) = -\vec{G}(z(t)). \tag{8.1.1}$$

Le champ gravifique dû au Soleil (à l'exclusion de ceux des autres planètes que nous négligeons) est

$$\vec{G}(\vec{x}) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi(\vec{x}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g_{44}(\vec{x})$$

avec

$$g_{44}(\vec{x}) = -1 + \frac{R_{g\odot}}{r} = -1 + \frac{\kappa_E}{4\pi}M_\odot\frac{1}{r},$$

ce qui conduit à

$$\phi(\vec{x}) = \frac{\kappa_E}{8\pi}\frac{M_\odot}{r} = \frac{1}{2}R_{g\odot}\frac{1}{r}$$

(la constante -1 étant inutile pour l'expression du champ). (8.1.1) implique

$$(\dot{\vec z},\ddot{\vec z}) - (\dot{\vec z}, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi(\vec z)) = \overbrace{\Big(\frac{1}{2}|\dot{\vec z}|^2 - \phi(\vec z)\Big)}^{\cdot} = 0,$$

donc (avec $R_g = R_{g\odot}$)

$$|\dot{\vec z}|^2 - 2\phi(\vec z) = |\vec v|^2 - \frac{R_g}{r} = \text{const.} = 2E < 0, \tag{8.1.2}$$

où l'on reconnaît le *théorème de l'énergie.*

L'accélération étant centrale, *le mouvement est plan* ; nous choisissons en vue de simplification le plan défini par

$$\theta = \frac{\pi}{2} \tag{8.1.3}$$

et (8.1.2) s'écrit alors

$$(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) - \frac{R_g}{r} - 2E = 0. \tag*{(8.1.2)$'$}$$

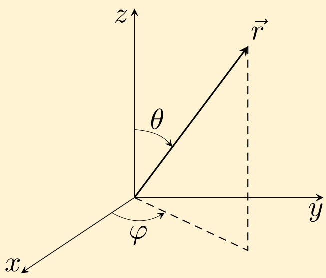


Fig. 8.1.1

La conservation du moment cinétique nous fournit *la loi des aires* :

$$r^2\dot\varphi = F. \tag{8.1.4}$$

En vue de calculer les trajectoires (les orbites), nous allons éliminer t entre (8.1.2)' et (8.1.4) ; pour cela posons

$$r = r(\varphi) \quad \text{et} \quad \frac{dr(\varphi)}{d\varphi} = r'(\varphi)$$

et alors (8.1.4) permet d'obtenir

$$\dot r = r'\dot\varphi = r'\frac{F}{r^2} \quad \text{et donc} \quad \dot r^2 = r'^2\frac{F^2}{r^4}.$$

Ainsi, (8.1.2)' peut s'écrire

$$(r')^2\frac{F^2}{r^4} + \frac{F^2}{r^2} - \frac{R_g}{r} - 2E = 0,$$

soit enfin, après multiplication par $1/F^2$,

$$\frac{(r')^2}{r^4} + \frac{1}{r^2} - \frac{R_g}{F^2\,r} - \frac{2E}{F^2} = 0. \tag{8.1.5}$$

Posons : $r = 1/\rho$, alors $\rho'(\varphi) = (1/r^2)r'$ et nous obtenons

$$(\rho')^2 + \rho^2 - \frac{R_g}{F^2}\rho + \frac{-2E}{F^2} = 0. \tag{8.1.6}$$

Pour intégrer, nous écrivons (8.1.6) sous la forme

$$(\rho')^2 + (\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2) = 0$$

avec

$$\rho_1\rho_2 = \frac{-2E}{F^2} \geq 0 \quad (\rho_2 > \rho_1 \text{ par hypothèse}) \quad \text{et} \quad \rho_1 + \rho_2 = \frac{R_g}{F^2}.$$

Nous avons ainsi :

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} = \frac{1}{\sqrt{-(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)}}.$$

Rappelons que :

$$y = \sin x \longrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Cela nous conduit ici à

$$\varphi(\rho) - \varphi_0 = \sin^{-1}\left(\frac{\rho - \frac{1}{2}(\rho_2+\rho_1)}{\frac{1}{2}(\rho_2-\rho_1)}\right). \tag{8.1.7}$$

Par conséquent en inversant

$$\rho(\varphi) = \frac{1}{2}(\rho_2+\rho_1) + \frac{1}{2}(\rho_2-\rho_1)\sin(\varphi-\varphi_0), \tag{8.1.8}$$

ce qui correspond à :

$$r(\varphi) = \frac{1}{A + B\sin(\varphi-\varphi_0)} \quad \text{avec} \quad A > B > 0, \tag{8.1.9}$$

où l'on reconnaît *l'équation d'une ellipse.*

Par (8.1.7) il vient :

1) *périhélie* : $\rho = \rho_2 > \rho_1$ $(r = r_2 < r_1)$ est atteint pour $(\varphi - \varphi_0) = \pi/2,\ \pi/2 + 2\pi,\ \pi/2 + 2(2\pi), \ldots$
2) *aphélie* : $\rho = \rho_1 < \rho_2$ $(r = r_1 > r_2)$ est atteint pour $(\varphi - \varphi_0) = 3\pi/2,\ 3\pi/2 + 2\pi,\ 3\pi/2 + 2(2\pi), \ldots$

Posons :

$$a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = \frac{1}{2}(\rho_1^{-1} + \rho_2^{-1})$$
$$b = \frac{1}{2}(r_1 - r_2) = \frac{1}{2}(\rho_1^{-1} - \rho_2^{-1})$$
$$e^2 = a^2 - b^2 \quad e : \textit{excentricité linéaire}$$
$$\epsilon^2 = e^2/a^2 \quad \epsilon : \textit{excentricité numérique}$$

et alors

$$r_1 = \rho_1^{-1} = (1+\epsilon)\, a$$
$$r_2 = \rho_2^{-1} = (1-\epsilon)\, a. \qquad (8.1.10)$$

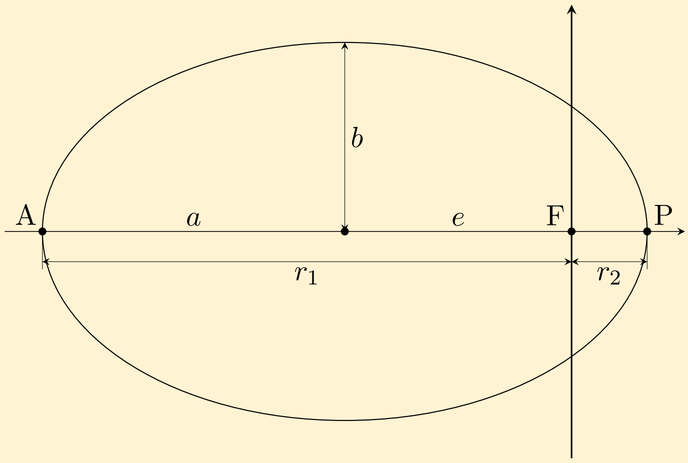


Fig. 8.1.2 A : aphélie, F : foyer (Soleil), P : périhélie.

La loi des aires (8.1.4) peut alors s'écrire

$$F = r^2\dot{\varphi} = \frac{2\sigma}{T} = \frac{2\pi\, a\, b}{T}. \qquad (8.1.11)$$

avec σ aire de l'ellipse et T période de révolution. De (8.1.10), nous tirons : $\rho_1+\rho_2 = 2a/b^2$; mais $\rho_1+\rho_2 = R_g/F^2$ et donc :

$$(\rho_1+\rho_2)F^2 = \frac{2a}{b^2}\,\frac{4\pi^2\, a^2\, b^2}{T^2} = 8\pi^2\frac{a^3}{T^2} = R_g.$$

Cela donne la *troisième loi de Kepler* :

$$R_g = 8\pi^2\frac{a^3}{T^2}. \qquad (8.1.12)$$

8.2 Orbites selon Einstein

Pour établir les équations des orbites planétaires (planète ponctuelle) dans un champ gravifique en théorie d'Einstein, nous utilisons le *principe des géodésiques* (principe de variation vu à la sect. 1.5) :

$$\underline{\delta}\int_{\lambda'}^{\lambda''} d\lambda\, L\Big(\frac{dz^{\cdot}}{d\lambda}, z^{\cdot}\Big) = 0$$
$$L(\ldots) = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(z(\lambda))\,\frac{dz^\alpha}{d\lambda}\,\frac{dz^\beta}{d\lambda} \qquad (8.2.1)$$

qui fournit, comme nous le savons, *les équations eulériennes*

$$\frac{d^2z^\alpha}{d\lambda^2} + G_\beta{}^\alpha{}_\gamma(z(\lambda))\,\frac{dz^\beta}{d\lambda}\,\frac{dz^\gamma}{d\lambda} = 0.$$

Mais nous avons aussi :

$$\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(z(\lambda))\,\frac{dz^\alpha}{d\lambda}\,\frac{dz^\beta}{d\lambda} = \frac{1}{2}\frac{ds^2}{d\lambda^2}.$$

Le champ gravifique considéré étant statique et à symétrie sphérique, le ds^2 est celui de *Schwarzschild* (7.3.1) ; par conséquent :

$$\begin{aligned} L(\dots) &= L(\dot r,\,\dot\theta,\,\dot\varphi,\,r,\,\theta,\,\varphi) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{r}{r-R_g}(\dot r)^2 + r^2\big((\dot\theta)^2 + (\sin\theta)^2(\dot\varphi)^2\big) - \frac{r-R_g}{r}(\dot t)^2\Big) \end{aligned}$$

avec la convention que le point en dessus d'une grandeur g signifie $dg/d\lambda$.

Les équations eulériennes correspondantes seront alors

$$\delta\theta \ :\ \frac{\partial L}{\partial\theta} - \dot{\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\Big)} = 0 \tag{8.2.2θ}$$

$$\delta\varphi \ :\ \frac{\partial L}{\partial\varphi} - \dot{\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}\Big)} = 0 \tag{8.2.2.φ}$$

$$\delta t \ :\ \frac{\partial L}{\partial t} - \dot{\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot t}\Big)} = 0. \tag{8.2.2t}$$

L'équation pour r étant assez compliquée, elle est avantageusement remplacée par l'équation supplémentaire $\omega_\alpha(z(\lambda))\,\omega^\alpha(z(\lambda)) = -A \le 0$, c'est-à-dire :

$$\delta r \ :\ g_{\alpha\beta}(z(\lambda))\,\frac{dz^\alpha}{d\lambda}\,\frac{dz^\beta}{d\lambda} = -A. \tag{8.2.2r}$$

Nous ne posons pas directement $A = 1$ (auquel cas λ est le temps propre) car nous avons également en vue l'examen des trajectoires de lumière.

L'équation (8.2.2θ) donne :

$$r^2\sin\theta\cos\theta - \overbrace{r^2\dot\theta}^{\cdot} = 0$$

qui est satisfaite pour

$$\theta = \frac{\pi}{2}. \tag{8.2.3}$$

Comme en théorie de Newton, les *orbites sont planes.*

L'équation (8.2.2 φ) donne :

$$-\overbrace{r^2(\sin\theta)^2\dot\varphi}^{\cdot} = 0$$

qui devient grâce à (8.2.3)

$$-\frac{d}{d\lambda}(r^2\,\dot\varphi) = 0$$

et donc par intégration :

$$r^2\,\dot\varphi = \text{cte} = F. \tag{8.2.4}$$

Nous retrouvons ainsi la *loi des aires* en temps propre λ.

L'équation (8.2.2t) donne :

$$-\frac{d}{d\lambda}\Big(-\frac{r-R_g}{r}\,\dot t\Big) = 0$$

qui donne par intégration

$$\frac{r-R_g}{r}\,\dot t = \text{cte} = 1.$$

Nous avons posé cette constante égale à l'unité de façon que très loin du Soleil, nous retrouvions :

$$\dot t = \frac{dt}{d\lambda} = 1$$

comme en relativité restreinte. On a donc :

$$\dot t = \frac{r}{r-R_g}. \tag{8.2.5}$$

Par simple comparaison, nous voyons que (8.2.2r) n'est rien d'autre que :

$$L(\ldots) = -\frac{1}{2}\,A,$$

c'est-à-dire

$$\frac{r}{r-R_g}\dot r^2 + r^2\,(\dot\theta)^2 + (\sin\theta)^2(\dot\varphi)^2 - \frac{r-R_g}{r}(\dot t)^2 + A = 0.$$

En tenant compte de (8.2.3), (8.2.4) et (8.2.5) nous obtenons

$$\frac{r}{r-R_g}(\dot r)^2 + r^2(\dot\varphi)^2 - \frac{r}{r-R_g} + A = 0. \tag{8.2.6}$$

Nous pouvons éliminer le paramètre λ entre (8.2.4) et (8.2.6) ; pour cela posons :

$$r = r(\varphi) \quad \text{et} \quad r'(\varphi) = \frac{dr(\varphi)}{d\varphi},$$

ce qui, avec (8.2.4), conduit à

$$(\dot r)^2 = (r')^2\frac{F^2}{r^4}.$$

En substituant dans (8.2.6), il vient

$$\frac{r}{r-R_g}(r')^2\frac{F^2}{r^4} + \frac{F^2}{r^2} - \frac{r}{r-R_g} + A = 0$$

qui, après multiplication par $\big((r-R_g)/r\big)(1/F^2)$, devient

$$\frac{(r')^2}{r^4}+\frac{1}{r^2}-\frac{R_g}{r^3}-\frac{AR_g}{F^2}\,\frac{1}{r}+\frac{A-1}{F^2}=0. \tag{8.2.7}$$

En posant $\rho=1/r$, (8.2.7) devient

$$(\rho')^2+\rho^2-\frac{A\,R_g}{F^2}\,\rho-R_g\,\rho^3+\frac{A-1}{F^2}=0. \tag{8.2.8}$$

Comparons l'équation (8.2.7) avec l'équation « équivalente » (8.1.6) de la théorie de Newton. Nous constatons tout d'abord la présence d'un *terme supplémentaire* $-R_g/r^3$. Comme R_g est très petit, cette modification ne se fait pas sentir pour des planètes très éloignées du Soleil (r grand). Ensuite, nous pouvons voir que F a la même signification dans les deux théories. Quant au terme constant, nous devons avoir

$$A-1=-2E>0 \qquad \text{(voisin de 0 !)}.$$

Ecrivons maintenant (8.2.8) dans la forme suivante :

$$(\rho')^2-R_g(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)(\rho-\rho_3)=0, \tag{8.2.9}$$

ce qui mène à

$$\frac{d\varphi}{d\rho}=\frac{1}{\sqrt{R_g(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)(\rho-\rho_3)}}. \tag{8.2.10}$$

Nous arrivons ainsi à une *intégrale elliptique de première espèce.*

Pour l'intégrer avec une *bonne approximation* par des méthodes élémentaires, procédons comme suit.

Le coefficient de ρ^2 dans (8.2.9) s'écrit

$$R_g(\rho_1+\rho_2+\rho_3)=1 \qquad \text{(par hypothèse : } \rho_3>\rho_2>\rho_1).$$

Ainsi

$$R_g(\rho-\rho_3)=-1+(\rho+\rho_2+\rho_1)R_g,$$

d'où, en substituant dans (8.2.10),

$$\frac{d\varphi}{d\rho}=\frac{1}{\sqrt{(\rho_2-\rho)(\rho-\rho_1)(1-R_g(\rho+\rho_2+\rho_1))}}.$$

On peut voir que $\rho_1\le\rho\le\rho_2$ et que pour notre système planétaire

$$R_g(\rho+\rho_2+\rho_1)\ll 1.$$

Ceci justifie d'effectuer un développement limité de la racine ; nous obtenons au premier ordre

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{d\rho}&=\frac{1}{\sqrt{(\rho_2-\rho)(\rho-\rho_1)}}\Big(1+\frac{1}{2}R_g(\rho+\rho_2+\rho_1)\Big)\\&=\frac{1+(1/2)\,R_g(\rho_1+\rho_2)}{\sqrt{(\rho_2-\rho)(\rho-\rho_1)}}+\frac{R_g}{2}\frac{\rho}{\sqrt{(\rho_2-\rho)(\rho-\rho_1)}}.\end{aligned}$$

Si $R_g \to 0$, nous retrouvons la solution de Newton.

En intégrant nous obtenons

$$\begin{aligned}\varphi - \varphi_0 = (1 + \frac{1}{2} R_g(\rho_2 + \rho_1)) \ \sin^{-1}\left\{\frac{\rho - (1/2)\,(\rho_2 + \rho_1)}{(1/2)(\rho_2 - \rho_1)}\right\} \\ + \frac{R_g}{2}\int^{\rho} \frac{d\bar\rho\ \bar\rho}{\sqrt{(\rho_2 - \bar\rho)(\bar\rho - \rho_1)}}.\end{aligned}$$

Mais

$$\int^{\rho} \frac{d\bar\rho\,\bar\rho}{\sqrt{(\rho_2 - \bar\rho)(\bar\rho - \rho_1)}} = \frac{1}{2}(\rho_2 + \rho_1)\sin^{-1}\left\{\ldots\right\} - \sqrt{(\rho_2 - \rho)(\rho - \rho_1)},$$

donc

$$\begin{aligned}\varphi - \varphi_0 = \Big(1 + \frac{3}{4} R_g(\rho_2 + \rho_1)\Big) \sin^{-1}\left\{\frac{\rho - (1/2)(\rho_2 + \rho_1)}{(1/2)(\rho_2 - \rho_1)}\right\} \\ - \frac{R_g}{2}\sqrt{(\rho_2 - \rho)(\rho - \rho_1)}.\end{aligned} \tag{8.2.11}$$

La trajectoire d'une planète n'est plus fermée.

Dans la théorie de Newton, nous avions :

$$\begin{array}{rcccc} \rho : \rho_2 & \longrightarrow & \rho_1 & \longrightarrow & \rho_2 \\ \varphi : \dfrac{\pi}{2} & \longrightarrow & \dfrac{\pi}{2} + \pi & \longrightarrow & \dfrac{\pi}{2} + 2\pi \end{array}$$

donc une trajectoire fermée. Dans la théorie d'Einstein nous avons, avec $K = (3/4)R_g(\rho_1 + \rho_2)$:

$$\begin{array}{lcccc} \rho : \quad \rho_2 & \longrightarrow & \rho_1 & \longrightarrow & \rho_2 \\ \varphi : (1 + K)\dfrac{\pi}{2} & \longrightarrow & (1 + K)\Big(\dfrac{\pi}{2} + \pi\Big) & \longrightarrow & (1 + K)\Big(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi\Big) \end{array}$$

A chaque révolution, nous constatons une *avance du périhélie* par un angle $\triangle\varphi$ donné comme suit :

$$\triangle\varphi = \frac{3}{2}\pi R_g(\rho_1 + \rho_2) > 0.$$

Par la théorie de Newton, nous avons

$$R_g = \frac{8\pi^2 a^3}{T^2} \qquad \text{et} \qquad \rho_1 + \rho_2 = \frac{2a}{b^2},$$

d'où, en substituant,

$$\triangle\varphi \cong 24\pi^3 \frac{a^4}{b^2 T^2} = 24\pi^3 \frac{a^2}{(1 - \epsilon^2)T^2}.$$

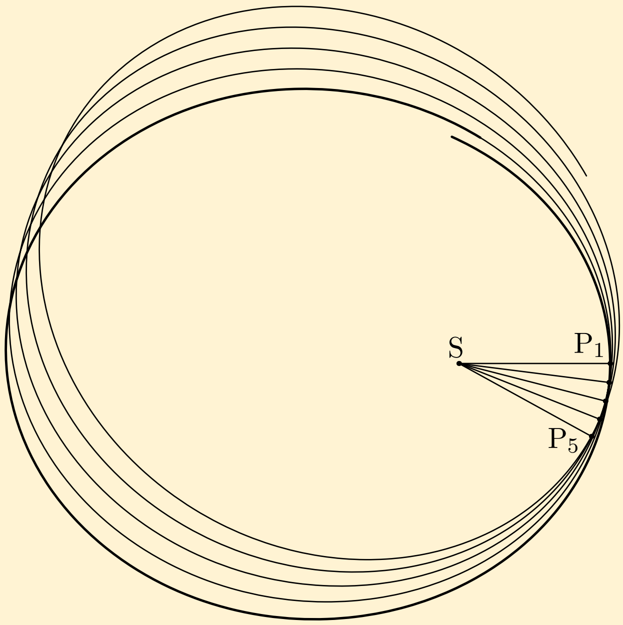


Fig. 8.2.1 Simulation numérique du déplacement du périhélie d'une planète ; S : Soleil, P_1 : périhélie l'année n, P_5 : périhélie l'année $n+4$; la valeur du déplacement est volontairement très exagérée pour pouvoir visualiser le phénomène sur la figure.

Applications.

Pour la planète Mercure :

$$\begin{aligned} a &= 5{,}786 \cdot 10^{12} \text{ cm} \\ T &= 87{,}97 \text{ jours} \\ \epsilon &= 0{,}2056 \end{aligned}$$

Par siècle, la précession est alors :

$$\triangle\varphi = 42{,}89''.$$

Le Verrier a observé 41,22″. Pour les autres planètes proches du Soleil, on a les précessions suivantes : Venus 8,6″, Terre : 3,6″ et Mars : 1,35″ (les plus faibles sont trop petites pour être observées).

8.3 Déflexion de la lumière

Pour les trajectoires de la lumière nous savons que

$$\omega_\alpha \omega^\alpha = -A = 0.$$

(Le paramètre λ n'a plus du tout de signification physique !)

L'équation (8.2.8) se réduit alors à

$$(\rho')^2 + \rho^2 - R_g\,\rho^3 - \frac{1}{F^2} = 0. \tag{8.3.1}$$

En théorie de Newton où le terme $R_g\,\rho^3 = 0$ est absent, nous avons :

$$(\rho')^2 + \rho^2 - \frac{1}{F^2} = 0,$$

donc

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{1}{\sqrt{1/F^2 - \rho^2}} \quad \Rightarrow \quad \varphi - \varphi_0 = \sin^{-1}(F\rho) \quad \Rightarrow \quad F\rho = \sin(\varphi - \varphi_0).$$

Par conséquent

$$r \sin(\varphi - \varphi_0) = F,$$

où l'on reconnaît l'équation d'une droite en coordonnées polaires : en théorie de Newton, la lumière n'est pas perturbée par la présence des masses.

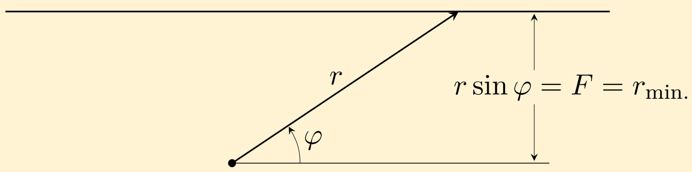


Fig. 8.3.1

Dans la théorie d'Einstein, nous avons :

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{1}{\sqrt{(1/F^2 - \rho^2 + R_g\rho^3}},$$

d'où

$$\varphi - \varphi_0 = \int^{\rho} \frac{F\,d\bar\rho}{\sqrt{1 - F^2\bar\rho^2 + F^2 R_g \bar\rho^3}} = \int^{\rho} \frac{F\,d\bar\rho}{\sqrt{1 - F^2\bar\rho^2(1 - R_g\bar\rho)}}.$$

Posons :

$$\sigma = F\rho\sqrt{1 - R_g\rho},$$

alors

$$F\rho = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - R_g\rho}} \cong \sigma\Big(1 + \frac{1}{2}R_g\rho\Big) \cong \sigma\Big(1 + \frac{1}{2}R_g\frac{\sigma}{F}\Big) \quad (\text{car} : R_g\rho \ll 1) \qquad (*)$$

et

$$F d\rho = d\sigma\Big(1 + \frac{1}{2}\frac{R_g}{F}\sigma\Big) + \frac{1}{2}\frac{R_g}{F}\sigma d\sigma = d\sigma\Big(1 + \frac{R_g}{F}\sigma\Big).$$

L'intégrale devient :

$$\begin{aligned}\varphi(\sigma) - \varphi(0) &= \int_0^{\sigma} \frac{d\bar\sigma\,\big(1 + (R_g/F)\bar\sigma\big)}{\sqrt{1 - \bar\sigma^2}} \\ &= \int_0^{\sigma} \frac{d\bar\sigma}{\sqrt{1 - \bar\sigma^2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\sigma} \frac{d(\bar\sigma^2)}{\sqrt{1 - \bar\sigma^2}}\,\frac{R_g}{F}.\end{aligned}$$

Approximativement, on a $\sigma \cong F\rho$ et, en $\sigma = 1$, $r_{\text{min.}} \cong F$; la déflexion $\triangle\varphi$ du rayon lumineux est donc

$$\triangle\varphi = 2\big(\varphi(\sigma = 1) - \varphi(\sigma = 0)\big) - \pi = 2\sin^{-1}\sigma\Big|_0^1 - \frac{2R_g}{F}\sqrt{1-\sigma^2}\Big|_0^1 - \pi = \frac{2R_g}{F}$$

c'est-à-dire

$$\triangle\varphi \cong \frac{2R_g}{r_{\text{min.}}}.$$

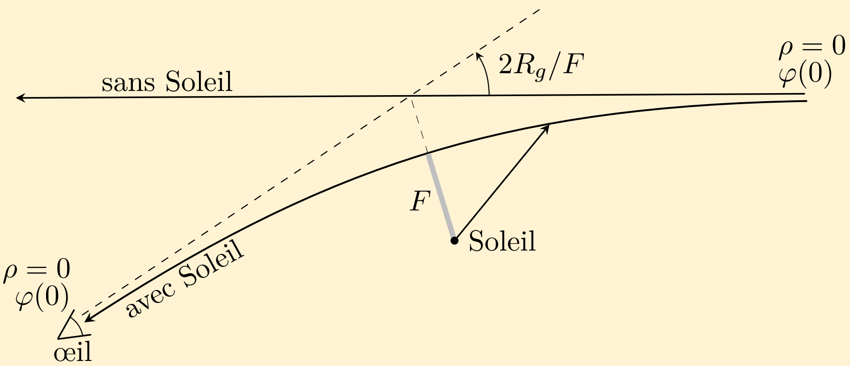


Fig. 8.3.2

Le calcul donne pour la déflexion par le Soleil (avec $r_{\text{min}} = R_\odot$) : $\triangle\varphi = 1{,}74''$.

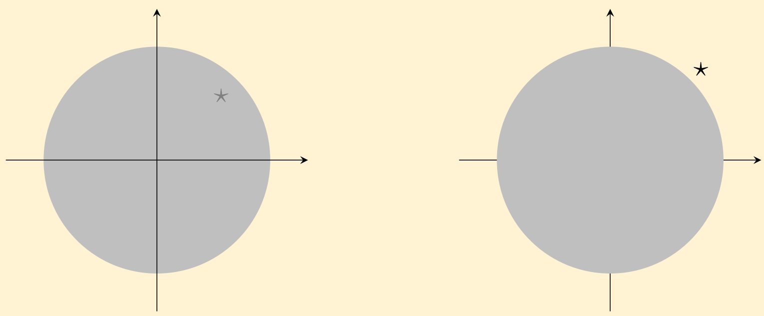


Fig. 8.3.3 A un endroit, au moment d'une éclipse totale de Soleil, l'observateur ne devrait pas voir l'étoile ; en réalité, il peut la voir comme si elle « fuyait » le Soleil.

Cette observation a été effectuée lors d'éclipses du Soleil, et on a trouvé :

$$\text{en 1919} \begin{cases} 1{,}90'' \\ 1{,}67'' \end{cases} \qquad \text{en 1929} \begin{cases} 2{,}74'' \\ 1{,}75'' \end{cases} \qquad \text{en 1947 : } 2{,}04''.$$

Index