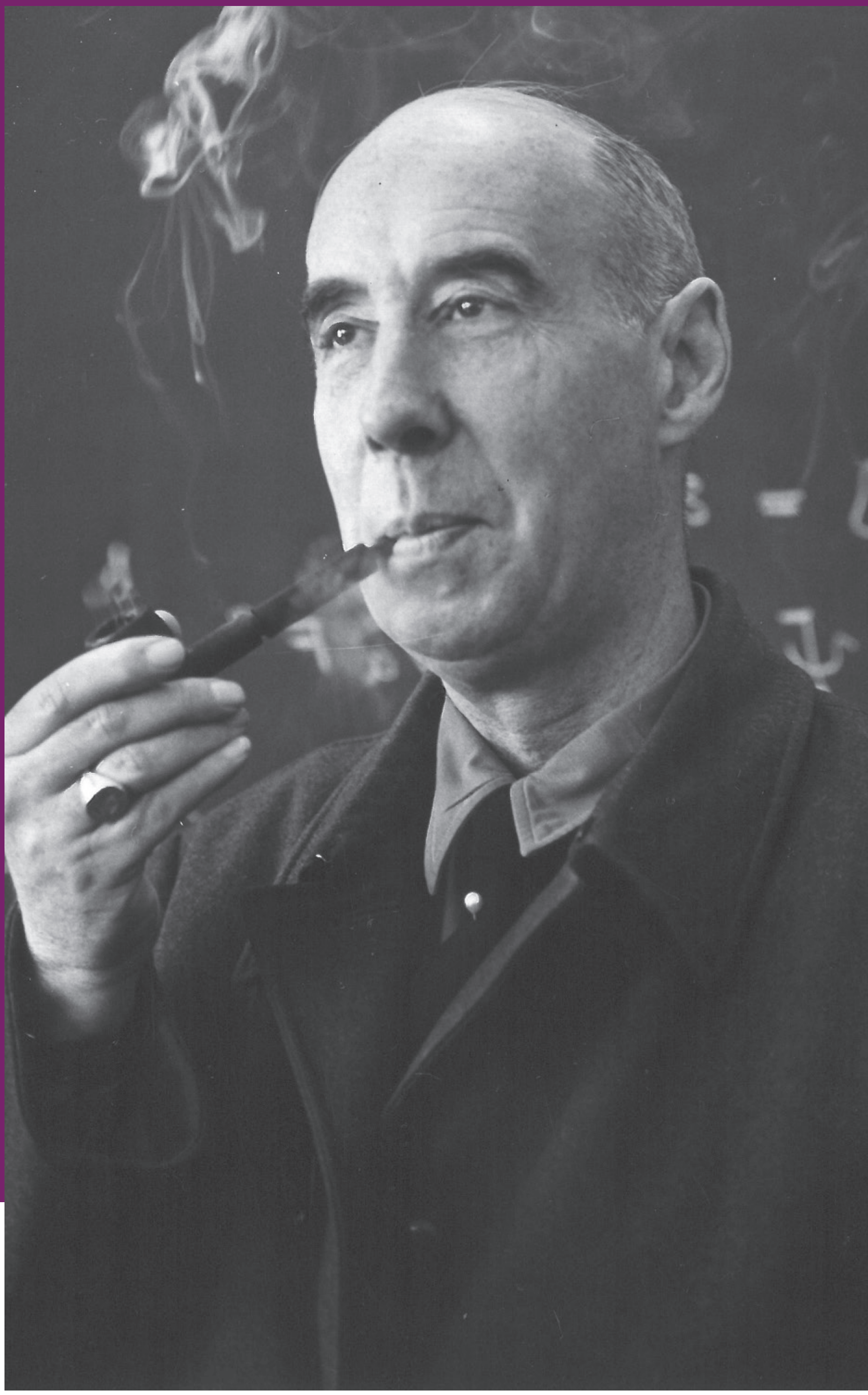
Ernst C. G. Stueckelberg

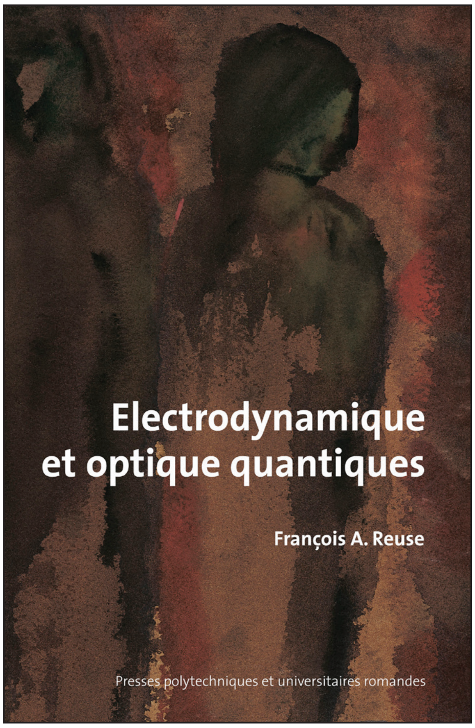
Relativité restreinte

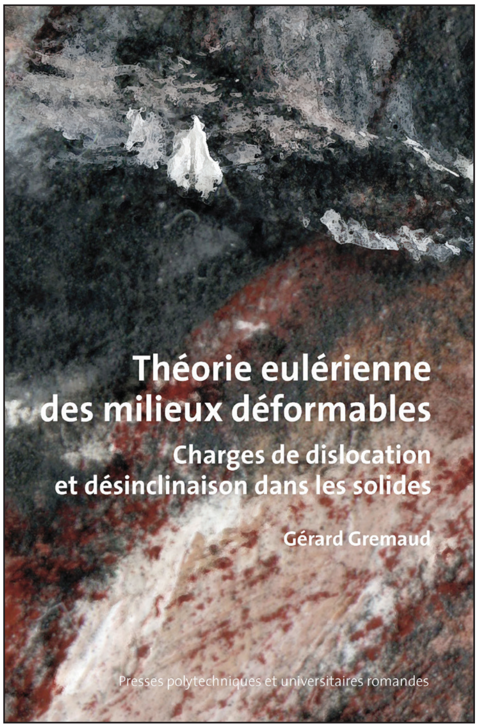


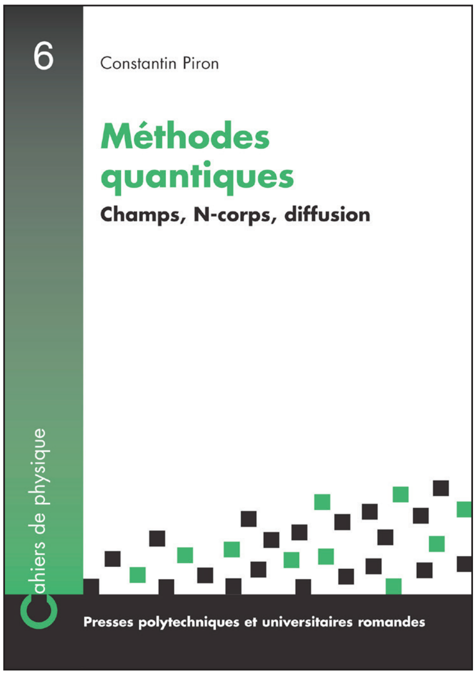
Livre III

Presses polytechniques et universitaires romandes www.ppur.org

Chez le même éditeur







Presses polytechniques et universitaires romandes

Livre III

Relativité restreinte

Table des matières

CHAPITRE 1

Electromagnétisme et groupe affine

Présentation

Après avoir rappelé l'équation de continuité à la section 1, nous montrons à la section 2 la covariance des équations de Maxwell par rapport au groupe affine. Les tenseurs de Maxwell et la force de Lorentz sont ensuite définis à la section 3.

1.1 Equation de continuité

Considérons le volume V limité par la surface fermée $C(\vec{y}) = 0$ *fixe* dans le temps. Définissons la fonctionnelle $F(t)$ de densité $f(\vec{x}, t)$

$$F(t) = \int_V dV(\vec{x}) f(\vec{x}, t).$$

Nous avons établi dans le cours de thermodynamique (livre I, section 2.1) l'équation de continuité pour $f(\vec{x}, t)$:

$$(\partial_t f + \partial_k j_F^k)(\vec{x}, t) = \rho_F(\vec{x}, t). \tag{1.1.1}$$

La surface étant fixe, il n'apparaît pas de termes de convection. Cette équation n'impliquant donc pas l'existence d'un champ de vitesse, pourra être utilisée en électromagnétisme.

1.2 Covariance par rapport au groupe affine des équations de Maxwell

Dans le système de Heaviside, les deux groupes d'équations de Maxwell s'écrivent (cf. livre II) :
a) *groupe inhomogène*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overleftrightarrow{H} &= \frac{1}{c}(\partial_t\vec{D}+\vec{j}) \\ \mathrm{div}\,\vec{D} &= q, \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

b) *groupe homogène*

$$\begin{aligned} \overset{\hookrightarrow}{\mathrm{rot}}\,\overleftarrow{E} &= -\frac{1}{c}\partial_t\overleftrightarrow{B} \\ \mathrm{div}\,\overleftrightarrow{B} &= 0. \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Nous allons montrer qu'en utilisant un formalisme *quadri-dimensionnel*, il est possible de les écrire sous forme *tensorielle* ; ce qui revient à montrer qu'elles sont covariantes par rapport au groupe affine (en abrégé : cov/$\{A\}$).

Nous posons à cet effet

$$x^4 = ct, \ \text{donc}\ \frac{1}{c}\partial_t = \partial_4 = \frac{\partial}{\partial x^4},$$

où $c = 1$ et $[\mathrm{v}] = 1$.

Occupons-nous d'abord du groupe inhomogène ; nous avons

$$(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overleftrightarrow{H})^i = \partial_k\mathring{H}_\ell - \partial_\ell\mathring{H}_k = \partial_4 D^i + j^i.$$

Or $\mathring{H}_\ell = H^{ik}$, où les indices i, k, ℓ prennent une des trois permutations cycliques de la suite $\{1,\,2,\,3\}$, donc

$$\text{s.s.}(\partial_k H^{ik} - \partial_\ell H^{\ell i} - \partial_4 D^i) = \partial_k H^{ik} - \partial_4 D^i = j^i$$

(s.s. est une abréviation de sans sommation).

On pose par *définition* :

$$D^i \overset{\text{def}}{=} H^{4i} \overset{\text{def}}{=} -H^{i4} \tag{1.2.3}$$

et donc

$$\partial_k H^{ik} - \partial_4 D^i = \partial_\alpha H^{i\alpha} = j^i.$$

D'autre part on a

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \partial_i D^i = \partial_i H^{4i} = q.$$

On pose maintenant par *définition* :

$$q \overset{\text{def}}{=} j^4 \tag{1.2.4}$$

et alors
$$\operatorname{div}\vec{D} = \partial_i H^{4i} = j^4.$$
Les quatre équations du groupe inhomogène peuvent donc s'écrire sous la *forme tensorielle* :
$$\partial_\alpha H^{\alpha\beta} = -j^\beta. \tag{1.2.5}$$
Nous en déduisons immédiatement l'*équation tensorielle de continuité de la charge* :
$$\partial_{(\alpha\beta)} H^{[\alpha\beta]} = 0 = -\partial_\beta j^\beta$$
et donc
$$\partial_\beta j^\beta = 0. \tag{1.2.6}$$

Pour le groupe homogène nous avons d'abord :
$$(\overleftrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overleftarrow{E})_{ik} = \partial_i E_k - \partial_k E_i = -\partial_4 B^{ik}.$$
On pose encore par *définition* :
$$E_k \overset{\text{def}}{=} B_{k4} \overset{\text{def}}{=} -B_{4k} \tag{1.2.7}$$
et alors :
$$\partial_i B_{k4} + \partial_k B_{4i} + \partial_4 B_{ik} = i\overset{\curvearrowright}{k}4\,\partial_i B_{k4} = 0.$$
D'autre part
$$\operatorname{div}\overleftrightarrow{B} = \partial_i B^i = \partial_i B_{k\ell} + \partial_k B_{\ell i} + \partial_\ell B_{ik} = i\overset{\curvearrowright}{k}\ell\,\partial_i B_{k\ell} = 0.$$
Les quatre équations du groupe homogène s'écrivent donc sous la *forme tensorielle* :
$$\alpha\overset{\curvearrowright}{\beta}\gamma\,\partial_\alpha B_{\beta\gamma} = 0. \tag{1.2.8}$$

Remarque.

On peut écrire
$$\alpha\overset{\curvearrowright}{\beta}\gamma\,\partial_\alpha B_{\beta\gamma}\ (= 3\partial_{[\alpha}B_{\beta\gamma]}) = j_{[\alpha\beta\gamma]},$$
où $j_{[\alpha\beta\gamma]}$ est la densité de pôles magnétiques isolés.

Si $j_{[\alpha\beta\gamma]} \neq 0$, il n'est plus possible de définir un *potentiel* :
$$B_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \quad \text{où} \quad A_4 = \phi.$$
Jusqu'ici jamais de tels pôles n'ont éte mis en évidence.

Par (1.2.5) et (1.2.8), nous avons donc bien montré que les équations de Maxwell sont cov/$\{A\}$. Insistons sur le fait que les définitions (1.2.3), (1.2.4) et (1.2.7) sont les *seules* qui permettent une transcription tensorielle.

Le fait que les équations de Maxwell soient cov/$\{A\}$ dans le 4-espace défini plus haut n'apporte aucun contenu physique nouveau. Ce ne sera que par l'introduction des postulats de covariance et de constance de la vitesse de la lumière dans le vide que nous pourrons physiquement interpréter ce fait.

1.3 Tenseurs de Maxwell

Dans le cours d'électrodynamique (cf. livre II) nous avions défini les tenseurs de Maxwell :

$$\tau^{i\,(el.)}_{\ k} = D^i E_k - \delta^i_k \ell[\overleftarrow{E}]$$
$$\tau^{i\,(m.)}_{\ k} = H^{i\ell} B_{\ell k} + \delta^i_k u[\overleftrightarrow{B}]$$

Le principe de superposition étant valable du fait de la linéarité des équations de Maxwell, le *tenseur de Maxwell électromagnétique* sera

$$\tau^i_{\ k} \stackrel{\text{def}}{=} \tau^{i\,(el.)}_{\ k} + \tau^{i\,(m.)}_{\ k}. \tag{1.3.1}$$

Dans le formalisme quadridimensionnel défini au paragraphe précédent, nous avons

$$\tau^{i\,(el.)}_{\ k} = H^{4i} B_{k4} - \delta^i_k \ell[B_{\cdot 4}]$$

et donc

$$\tau^i_{\ k} = H^{i\rho} B_{\rho k} - \delta^i_k (\ell[B_{\cdot 4}] - u[\overleftrightarrow{B}]).$$

Par *définition*, la densité lagrangienne électromagnétique est

$$\ell[B_{\mu\nu}] = \ell[\overleftarrow{E}] - u[\overleftrightarrow{B}]. \tag{1.3.2}$$

Elle a la propriété suivante

$$H^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \ell[B_{\cdot\cdot}]}{\partial B_{\mu\nu}}.$$

Grâce à cette définition, on a

$$\tau^i_{\ k} = H^{i\rho} B_{\rho k} - \delta^i_k \ell[B_{\mu\nu}].$$

Nous *définissons* alors le tenseur

$$\tau^\alpha_{\ \beta} = H^{\alpha\rho} B_{\rho\beta} - \delta^\alpha_\beta \ell[B_{\mu\nu}]. \tag{1.3.3}$$

Dans la suite de cette section, nous allons chercher à donner une signification physique aux composantes $\tau^i_{\ 4}$,$\tau^4_{\ i}$ et $\tau^4_{\ 4}$ contenues dans cette définition.

Rappelons que les équations de conservation pour le *système électromagnétique* $\Sigma^{(em.)}$ sont (cf. livre II) :

$$\partial_t \pi^{(em.)}_k - \partial_i \tau^i_{\ k} = k^{(ext.)}_k$$
$$\partial_t u^{(em.)} + \partial_k S^k = \rho^{(ext.)}_H$$

lorsque

$$\Sigma^{(subst.)} + \Sigma^{(em.)} = \Sigma_{00},$$

ce que nous admettrons toujours dans ce cours (l'introduction du champ gravifique se faisant que dans le livre IV). L'« extérieur » est alors le *système substantiel* $\Sigma^{(subst.)}$ et nous avons

$$\begin{aligned} k_k^{(subst.)} + k_k^{(em.)} &= 0 \\ \rho_H^{(subst.)} + \rho_H^{(em.)} &= 0, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \partial_t \pi_k^{(em.)} - \partial_i \tau^i{}_k &= -k_k^{(em.)} \equiv -k_k^L \\ \partial_t u^{(em.)} + \partial_k S^k &= -\rho_H^{(em.)} \equiv -(\vec{j}, \overleftarrow{E}), \end{aligned}$$

où k_k^L est la densité de force de Lorentz

$$k_k^L = qE_k + [\vec{j} \wedge \overleftrightarrow{B}]_k.$$

Ecrivons cette densité sous forme quadridimensionnelle :

$$k_k^L = qE_k + [\vec{j} \wedge \overleftrightarrow{B}]_k = j^4 B_{k4} - j^\ell B_{\ell k},$$

soit encore

$$k_k^L = -j^\alpha B_{\alpha k}$$

Nous *définissons* alors le tenseur

$$k_\beta^L = -j^\alpha B_{\alpha\beta} \tag{1.3.4}$$

et nous essaierons d'interpréter plus loin le terme k_4^L.

Ceci dit, en utilisant la définition (1.3.1) de $\tau^i{}_k$ et les équations de Maxwell, nous obtenons lorsque l'espace est *homogène* c'est-à-dire lorsque $\ell = \ell[B_{\mu\nu}, x]$,

$$\begin{aligned} \partial_i \tau^i{}_k &= qE_k - [\partial_t \overleftrightarrow{B} \wedge \vec{D}]_k + [\vec{j} \wedge \overleftrightarrow{B}]_k + [\partial_t \vec{D} \wedge \overleftrightarrow{B}]_k \\ &= qE_k + [\vec{j} \wedge \overleftrightarrow{B}]_k + \partial_t [\vec{D} \wedge \overleftrightarrow{B}]_k = k_k^L + \partial_t \pi_k. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} [\vec{D} \wedge \overleftrightarrow{B}]_k &= D^\ell \mathring{B}^i - D^i \mathring{B}^\ell = -D^i B_{ik} \\ &= -H^{4i} B_{ik} = -H^{4\rho} B_{\rho k}, \end{aligned}$$

donc

$$\pi_k^{(em.)} = [\vec{D} \wedge \overleftrightarrow{B}]_k = -\tau^4{}_k \tag{1.3.5}$$

et

$$\partial_i \tau^i{}_k = k_k^L - \partial_4 \tau^4{}_k,$$

c'est-à-dire

$$\partial_\alpha \tau^\alpha{}_k = k_k^L. \tag{1.3.6}$$

Examinons maintenant l'équation de conservation de l'énergie

$$\partial_t u^{(em.)} + \partial_k S^k = -(\vec{j}, \overleftarrow{E}).$$

Avec

$$-(\vec{j}, \overleftarrow{E}) = -j^i E_i = -j^i B_{i4} = -j^\alpha B_{\alpha 4}$$

et par (1.3.4) on obtient

$$-\rho^{(em.)} = -(\vec{j}, \overleftarrow{E}) = k_4^L. \tag{1.3.7}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\partial_k S^k &= \partial_k[\overleftarrow{E} \wedge \overleftrightarrow{H}]_k = \partial_k(E_\ell \mathring{H}_i - E_i \mathring{H}_\ell) = \partial_k(E_i H^{ki}) \\ &= \partial_k(H^{ki} B_{i4}) = \partial_k(H^{k\rho} B_{\rho 4})\end{aligned}$$

et donc

$$S^k = [\overleftarrow{E} \wedge \overleftrightarrow{H}]_k = \tau^k{}_4. \tag{1.3.8}$$

Nous posons alors pour la densité d'énergie électromagnétique

$$u^{(em.)} = \tau^4{}_4 \tag{1.3.9}$$

et alors l'équation pour l'énergie s'écrit

$$\partial_4 \tau^4{}_4 + \partial_k \tau^k{}_4 = k_4^L,$$

c'est-à-dire,

$$\partial_\alpha \tau^\alpha{}_4 = k_4^L. \tag{1.3.10}$$

Vérifions si la définition (1.3.9) de $\tau^4{}_4$ est cohérente :

$$\begin{aligned}u^{(em.)} &= \tau^4{}_4 = H^{4i} B_{i4} - \ell[B_{\mu\nu}] = D^i E_i - \ell[\overleftarrow{E}] + u[\overleftrightarrow{B}] \\ &= u^{(el.)} + u^{(m.)}.\end{aligned}$$

En résumé, nous avons construit le *tenseur* $\tau^\alpha{}_\beta$ dans le formalisme quadridimensionnel (1.3.3) ; il jouit des propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \tau^i{}_k & : \textit{tenseur de Maxwell} \\ \tau^4{}_k = -\pi_k^{(em.)} & : \textit{quantité de mouvement (em.)} \\ \tau^i{}_4 = S^i & : \textit{courant d'énergie (em.)} \\ \tau^4{}_4 = u^{(em.)} & : \textit{densité d'énergie (em.).} \end{cases}$$

Nous l'appelons tenseur de la densité d'énergie électromagnétique.

Les équations cov/$\{A\}$

$$\partial_\alpha \tau^\alpha{}_\beta = k_\beta^L \tag{1.3.11}$$

expriment, lorsque $\Sigma^{(subst.)} + \Sigma^{(em.)} = \Sigma_{00}$, les *équations de conservation du système électromagnétique sous forme* cov/$\{A\}$ (cf. sect. 2.5).

Le *tenseur de Lorentz* k_α^L est formé de

$$\begin{cases} k_i^L & : \textit{densité de force de Lorentz} \\ k_4^L & : \textit{densité de source} \text{ (travail).} \end{cases}$$

Electromagnétisme linéaire dans le vide

Si le 4-espace est homogène et isotrope (ce qui est *rigoureusement* vrai pour le vide) la lagrangienne $\ell[\ldots]$ ne dépend que du champ $B_{\mu\nu}$; de plus, puisque c'est un scalaire, elle doit être une fonction de la forme :

$$\ell[\ldots] = \ell\left[\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}\right].$$

Or nous connaissons la relation phénoménologique

$$\frac{\partial \ell[\ldots]}{\partial B_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}H^{\mu\nu}.$$

Par conséquent, si nous écrivons $\ell[\ldots] = \ell(z)$ et $\ell'(z) = d\ell/dz$, nous avons

$$-\frac{1}{2}H^{\alpha\beta} = \frac{\partial \ell[\ldots]}{\partial B_{\alpha\beta}} = \ell'(z)\frac{1}{2}B^{\alpha\beta},$$

où $\ell'(z)$ peut être une fonction assez compliquée (cas de électromagnétisme de Born-Infeld). Par contre dans le cas de l'*électromagnétisme linéaire* dans le vide pour lequel :

$$\ell[\ldots] = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}, \qquad (1.3.12),$$

nous avons simplement

$$H^{\alpha\beta} = B^{\alpha\beta}. \qquad (1.3.13)$$

Remarque.

Pour éviter d'avoir le signe $-$ dans la relation phénoménologique (et dans l'expression de $\ell[\ldots]$), on préfère définir le tenseur densité d'énergie par

$$T^{\alpha}{}_{\beta} = -\tau^{\alpha}{}_{\beta} = H^{\alpha\rho}B_{\beta\rho} - \delta^{\alpha}_{\beta}\ell_1[\ldots] \qquad (1.3.14)$$

avec $\ell_1[\ldots] = -\ell[\ldots]$; ainsi :

$$\frac{\partial \ell_1[\ldots]}{\partial B_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}H^{\mu\nu}$$

et

$$\begin{aligned} T^{i}{}_{k} &= -\tau^{i}{}_{k} \\ T^{i}{}_{4} &= -S^{i} \\ T^{4}{}_{i} &= \pi_i^{(em.)} \\ T^{4}{}_{4} &= -u^{(em.)}. \end{aligned}$$

et (1.3.11) devient alors

$$\partial_\alpha T^{\alpha}{}_{\beta} = -k^L_\beta.$$

Lorsque nous considérons le tenseur densité d'énergie comme un *tenseur contravariant du deuxième ordre*, c'est-à-dire (cf. sect. 2.1 pour la définition de $g^{\alpha\beta}$)

$$T^{\alpha\beta} = H^{\alpha\rho} B^{\beta}{}_{\rho} - g^{\alpha\beta} \ell_1[\ldots], \tag{1.3.15}$$

nous avons

$$\begin{aligned} T^{ik} &= -\tau^{ik} \\ T^{i4} &= +S^{i} \\ T^{4i} &= +\pi^{i(em.)} \\ T^{44} &= +u^{(em.)}. \end{aligned}$$

Cette forme est assez utile car d'une part T^{44} a le même signe que $u^{(em.)}$ et d'autre part, son caractère contravariant permet l'étude des symétries tensorielles.

Par exemple dans le *cas linéaire*, nous avons

$$T^{\alpha\beta} = H^{\alpha\rho} B^{\beta\sigma} g_{\rho\sigma} - g^{\alpha\beta} \ell[\ldots]$$

et nous constatons qu'alors $T^{\alpha\beta}$ est symétrique $T^{\alpha\beta} = T^{(\alpha\beta)} \stackrel{\text{def}}{=} \theta^{\alpha\beta}$; ainsi :

$$\pi^{i} = S^{i}.$$

Chapitre 2

Groupe de Lorentz

Présentation.

Nous montrons à la section 1 que les relations phénoménologiques de l'électromagnétisme imposent une métrique pseudo-euclidienne ; les lois de l'électromagnétisme sont donc covariantes par rapport aux transformations qui conservent la métrique, c'est-à-dire au groupe de Poincaré. On étudie ensuite à la section 2 le sous-groupe continu de Lorentz engendré par le groupe infinitésimal, en particulier les transformations de Lorentz spéciales qui permettent de mettre en évidence la vitesse d'un référentiel par rapport à un autre. On donne ensuite deux postulats fondamentaux qui donnent naissance à la relativité restreinte ; la transformation de Galiée est alors étudiée et on montre son lien avec la transformation de Lorentz. La section 3 établit une classification des vecteurs puis étudie le groupe complet. La contraction des longueurs, le ralentissement des horloges puis l'effet Doppler sont alors étudiés à la section 4. La quantité de mouvement-énergie et le moment cinétique-centre d'énergie sont alors introduits comme quantités pseudo-chrones aux sections 5 et 6. Les exemples particulièrement simples de la matière poudreuse et de la particule sont discutés à la section 7.

2.1 La métrique.

Nous allons maintenant déterminer pour le 4-espace introduit au chapitre 1 une métrique qui soit compatible avec les lois de l'électromagnétisme.

Nous savons (cf. livre I) que la thermodynamique impose une métrique spatiale $\{g_{ik}\}$ définie positive, soit pour simplifier : $g_{ik} \stackrel{*}{=} \delta_{ik}$, soit

$$g_{ii} \stackrel{*}{=} g^{ii} \stackrel{*}{=} 1 \text{ et } g_{i \neq k} \stackrel{*}{=} 0.$$

Une autre conséquence de la thermodynamique est le signe positif de ϵ et de μ. Si nous nous restreignons à l'électromagnétisme dans le vide pour lequel $\epsilon_0 = 1$ et

$\mu_0 = 1$ dans le système de Heaviside, les *relations phénoménologiques* s'écrivent

$$\begin{aligned} D^i &\stackrel{*}{=} g^{ii} E_i = E^i \\ H^{ik} &\stackrel{*}{=} g^{ii} g^{kk} B_{ik} = B^{ik}. \end{aligned}$$

En vertu de (1.2.3) et (1.2.7), la première relation devient

$$H^{4i} \stackrel{*}{=} B_{i4} = -B_{4i},$$

mais puisque

$$H^{4i} \stackrel{*}{=} g^{44} g^{ii} B_{4i},$$

il vient

$$g_{44} \stackrel{*}{=} g^{44} \stackrel{*}{=} -1.$$

Nous voyons que les relations phénoménologiques imposent la métrique :

$$\{g^{\alpha\beta} \stackrel{*}{=} g_{\alpha\beta}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.1.1}$$

qui constitue la métrique d'un *espace pseudo-euclidien* de signature : $\mathrm{signat}(g_{..}) = (1, 1, 1, -1)$.

Remarquons que la restriction (*) à une métrique d'espace $\{g_{ik}\}$ cartésienne ne limite nullement la généralité du résultat ci-dessus.

Nous avons établi au chapitre 1 que les équations de Maxwell et les équations de conservation sont cov$/\{A\}$, mais d'autre part nous venons de voir que les relations phénoménologiques imposent une métrique de signature $(1, 1, 1, -1)$. Par conséquent, *les lois de l'électromagnétisme sont covariantes par rapport aux transformations affines qui conservent la métrique* ; ce sont

$$\begin{aligned} {}'x^{'\alpha} &= L^{'\alpha}{}_{\alpha}(x^{\alpha} + L^{\alpha}) \\ {}'g^{'\alpha'\beta} &= L^{'\alpha}{}_{\alpha} L^{'\beta}{}_{\beta}\, g^{\alpha\beta} = g^{'\alpha'\beta}. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Il est facile de voir qu'elles constituent un groupe : le *groupe de Poincaré* qui est le groupe des transformations pseudo-orthogonales.

On appelle *groupe de Lorentz* $\{L\}$, le sous-groupe des transformations homogènes $(L^{\alpha} = 0)$:

$$\begin{aligned} {}'x^{'\alpha} &= L^{'\alpha}{}_{\alpha} x^{\alpha} \\ {}'g^{'\alpha'\beta} &= L^{'\alpha}{}_{\alpha} L^{'\beta}{}_{\beta}\, g^{\alpha\beta} = g^{'\alpha'\beta}. \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

2.2 Le groupe continu

Le groupe de Lorentz qui est le groupe des transformations pseudo-orthogonales homogènes contient le *sous-groupe continu* $\{L^{+\uparrow}\}$ (pour les notations cf. sect. 2.3). Ce sous-groupe peut être engendré par le *groupe infinitésimal*

$$ {}'x^{'\alpha} = L^{'\alpha}{}_{\alpha}{}^{+\uparrow}(\delta\omega^{\cdot}{}_{\cdot})x^{\alpha} = (\delta^{'\alpha}_{\alpha} + \delta\omega^{'\alpha}{}_{\alpha})x^{\alpha}. \tag{2.2.1}$$

Les paramètres $\delta\omega^{\cdot}{}_{\cdot}$ étant infinitésimaux, nous avons au premier ordre :

$$\begin{aligned} {}'g^{'\alpha'\beta} &= (\delta^{'\alpha}_{\alpha} + \delta\omega^{'\alpha}{}_{\alpha})(\delta^{'\beta}_{\beta} + \delta\omega^{'\beta}{}_{\beta}) \\ &= g^{'\alpha'\beta} + \delta\omega^{'\alpha'\beta} + \delta\omega^{'\beta'\alpha} \equiv g^{'\alpha'\beta}. \end{aligned}$$

Les paramètres $\delta\omega^{\cdot}{}_{\cdot}$ sont donc *antisymétriques.* Ainsi le groupe infinitésimal dépend de $(1/2)n(n-1)$ paramètres $\delta\omega^{\alpha\beta} = \delta\omega^{[\alpha\beta]}$ $(n = d+1 = 3+1 = 4)$.

Pour obtenir une représentation matricielle de la transformation infinitésimale, nous introduisons les $(1/2)n(n-1) = 6$ matrices $\Sigma_{\mu\nu} = \{\Sigma_{\mu\nu}{}^{'\alpha}{}_{\alpha}\}$ (antisymétriques en μ et ν) par :

$$\Sigma_{\mu\nu}{}^{'\alpha}{}_{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \delta^{'\alpha}_{\mu} g_{\nu\alpha} - \delta^{'\alpha}_{\nu} g_{\mu\alpha}. \tag{2.2.2}$$

La transformation infinitésimale s'écrit alors

$$ {}'x^{'\alpha} = \left(\delta^{'\alpha}_{\alpha} + \frac{1}{2}\delta\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}{}^{'\alpha}{}_{\alpha}\right)x^{\alpha}. \tag{2.2.3}$$

Le *sous-groupe continu* $\{L^{+\uparrow}\}$ s'obtient alors par intégration de cette relation : si nous posons

$$\delta\omega^{\mu\nu} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\omega^{\mu\nu},$$

alors on a

$$\begin{aligned} {}'x^{'\alpha} = L^{'\alpha}{}_{\alpha}{}^{+\uparrow}(\omega^{\cdot\cdot}) &= \lim_{N\to\infty}\left(\delta^{'\alpha}_{\alpha} + \frac{1}{2N}\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}{}^{'\alpha}{}_{\alpha}\right)^{N} x^{\alpha} \\ &= \exp\left\{\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}{}^{'\alpha}{}_{\alpha}\right\}x^{\alpha}, \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

où :

$$\exp\{\Xi\} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Xi^{n}.$$

Nous allons donner deux exemples de ces transformations.

1. Rotation dans le plan (1 2)

Cette rotation est définie par

- $\omega^{12} = -\omega^{21} = \omega \neq 0$.
- $\omega^{\alpha\beta} = 0$ pour toutes les autres valeurs des indices.

Pour $n = 4$, on a

$$\{\Sigma_{12}\} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \{\Sigma_{12}\}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où (propriété valable pour $m \geq 3$) $\{\Sigma_{12}\}^m = (-1)\{\Sigma_{12}\}^{m-2}$ et donc

$$\begin{aligned} \{L^{+\uparrow}(\omega)\} &= \exp\left\{\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}\right\} = \exp\{\omega\Sigma_{12}\} \\ &= \{1\} + \{\Sigma_{12}\}^2\left(\frac{\omega^2}{2!} - \frac{\omega^4}{4!} + \cdots\right) + \{\Sigma_{12}\}\left(\frac{\omega}{1!} - \frac{\omega^3}{3!} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Or nous avons

$$\left(\frac{\omega^2}{2!} - \frac{\omega^4}{4!} + \cdots\right) = 1 - \cos\omega \quad \text{et} \quad \left(\frac{\omega}{1!} - \frac{\omega^3}{3!} + \ldots\right) = \sin\omega$$

d'où

$$\{L^{+\uparrow}(\omega)\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}(1 - \cos\omega) + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sin\omega,$$

c'est-à-dire

$$\{L^{+\uparrow}(\omega)\} = \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega & 0 & 0 \\ -\sin\omega & \cos\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que $'x = Lx$ s'écrit

$$\begin{aligned} 'x'^1 &= (\cos\omega)x^1 + (\sin\omega)x^2 \\ 'x'^2 &= (-\sin\omega)x^1 + (\cos\omega)x^2 \\ 'x'^3 &= x^3 \\ 'x'^4 &= x^4 \end{aligned} . \tag{2.2.5}$$

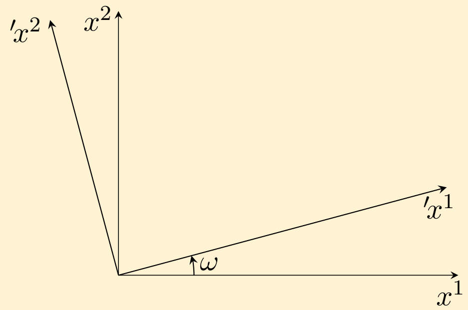


Fig. 2.2.1 Rotation dans la plan (1 2).

Nous reconnaissons là les formules de transformations d'une *rotation d'angle* ω dans le plan (1 2).

« Rotation » dans le plan (3 4)

Cette rotation est caractérisée par :

- $\omega^{34} = -\omega^{43} = \omega \neq 0$,
- $\omega^{\alpha\beta} = 0$ pour toutes les autres valeurs des indices.

Pour $n = 4$ on a :

$$\{\Sigma_{34}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \{\Sigma_{34}\}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où (pour $m \geq 3$) $\{\Sigma_{34}\}^m = \{\Sigma_{34}\}^{m-2}$ et alors

$$\{L^{+\uparrow}(\omega)\} = \{1\} + \{\Sigma_{34}\}^2\left(\frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^4}{4!} + \cdots\right) + \{\Sigma_{34}\}\left(\frac{\omega}{1!} + \frac{\omega^3}{3!} + \cdots\right).$$

Or on a

$$\frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^4}{4!} + \cdots = \mathrm{ch}\,\omega - 1 \quad \text{et} \quad \frac{\omega}{1!} + \frac{\omega^3}{3!} + \cdots = \mathrm{sh}\,\omega,$$

d'où il résulte

$$\{L^{+\uparrow}(\omega)\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{ch}\,\omega & -\mathrm{sh}\,\omega \\ 0 & 0 & -\mathrm{sh}\,\omega & \mathrm{ch}\,\omega \end{pmatrix}$$

et donc $'x = Lx$ s'écrit

$$\begin{aligned} 'x'^1 &= x^1 \\ 'x'^2 &= x^2 \\ 'x'^3 &= (\mathrm{ch}\,\omega)x^3 - (\mathrm{sh}\,\omega)x^4 \\ 'x'^4 &= -(\mathrm{sh}\,\omega)x^3 + (\mathrm{ch}\,\omega)x^4 \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

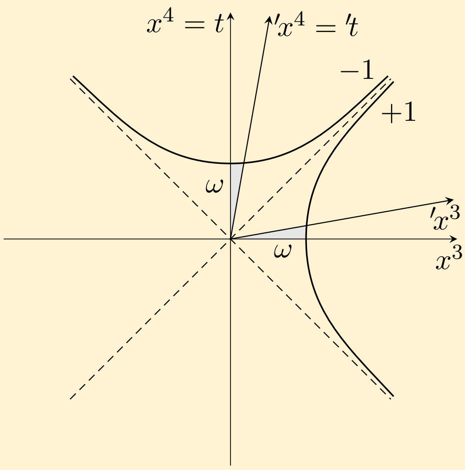


Fig. 2.2.2 Rotation dans la plan (3 4).

Cette transformation représente une *rotation spatio-temporelle* dans le plan (3 4) (« temporelle » puisque $x^4 = c_0 t$). Le vecteur unité dans le plan (3 4) se transforme suivant les *hyperboles* d'équations

$$(x^3)^2 - (x^4)^2 = \pm 1,$$

ce qui résulte de la métrique et de l'invariant $x_\alpha x^\alpha = \pm 1$.

En introduisant :

$$\beta = \operatorname{th}\omega = \frac{\operatorname{sh}\omega}{\operatorname{ch}\omega}$$

et en posant : $x^4 = t$ $(c_0 = 1)$ on peut écrire :

$$\begin{cases} {'x'^3} = \operatorname{ch}\omega \cdot (x^3 - \beta t) \\ {'x'^4} = \operatorname{ch}\omega \cdot (-\beta x^3 + t). \end{cases}$$

Puisque : $-1 < \operatorname{th}\omega < +1$, $|\beta| < 1$; β s'interprète alors facilement lorsque l'on considère la formule de transformation (2.2.6) dans l'espace usuel à trois dimensions spatiales : l'origine (${'x'^1} = {'x'^2} = {'x'^3} = 0$) du référentiel $\{'x\}$ se transforme selon les formules

$$\begin{cases} {'x'^1} = 0 = x^1 \\ {'x'^2} = 0 = x^2 \\ {'x'^3} = \operatorname{ch}\omega \cdot (x^3 - \beta t). \end{cases}$$

En posant ${'x'^3} = 0$ on voit que $x^3 = \beta t$, $x^3/t = \beta$ et que β *représente la vitesse du référentiel* $\{'x\}$ par rapport au référentiel $\{x\}$; de plus, cette vitesse est *constante* puisque $\beta = \operatorname{th}\omega$ (ω a une valeur donnée) et $|\beta| < 1$. En posant $v_0 = \beta c_0$, on a donc $|v_0| < c_0$: La vitesse v_0 du référentiel $\{'x\}$ par rapport à $\{x\}$ *est toujours inférieure à la vitesse de la lumière* c_0 mesurée dans $\{x\}$.

Sachant que : $\operatorname{ch}^2\omega - \operatorname{sh}^2\omega = 1$, il vient

$$\beta^2 = \operatorname{th}^2\omega = \frac{\operatorname{sh}^2\omega}{\operatorname{ch}^2\omega} = \frac{\operatorname{ch}^2\omega - 1}{\operatorname{ch}^2\omega} \quad \text{d'où} \quad \beta^2 \operatorname{ch}^2\omega = \operatorname{ch}^2\omega - 1,$$

et donc

$$\operatorname{ch}\omega = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Ainsi la transformation (2.2.6) s'écrit comme suit $(c_0 = 1)$:

$$\begin{aligned} {'x'^1} &= x^1 \\ {'x'^2} &= x^2 \\ {'x'^3} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x^3 - \beta t) \\ {'x'^4} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(-\beta x^3 + t) \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

et porte le nom de *transformation spéciale de Lorentz*.

C'est la *loi de transformation de deux référentiels en translation rectiligne et uniforme le long de l'axe* x^3 *(ou* $'x'^3$*) à la vitesse relative* β *(ou* $-\beta$*).*

Il est possible de montrer que toute transformation appartenant au sous-groupe continu peut être décomposée en une rotation spatiale et une transformation spéciale de Lorentz.

Nous avons maintenant suffisamment explicité les transformations qui laissent invariantes les lois de l'électromagnétisme pour essayer d'en tirer les conséquences physiques.

Tout d'abord nous savons qu'il existe au moins un référentiel dans lequel les lois de l'électromagnétisme sont vraies ! Par conséquent en vertu de la covariance de ces lois par rapport au groupe de Poincaré (donc à fortiori de Lorentz), elles sont aussi vraies dans tout référentiel déduit du premier par une transformation du groupe. *Il n'y a donc pas de référentiel privilégié mais une famille de référentiels permis.* Pratiquement cela signifie qu'un phénomène d'électromagnétisme observé depuis deux référentiels obéit aux mêmes lois. *Il est donc impossible de mettre en évidence le mouvement de l'un des référentiels par rapport à l'autre.*

En particulier, l'équation des ondes électromagnétiques (déduites des équations de Maxwell) implique l'*isotropie de la propagation de la lumière dans tout référentiel de la famille.* De plus, *cette vitesse de propagation doit être la même dans tous ces référentiels*, sinon il serait possible au moyen d'une expérience faite dans l'un des référentiels de déduire son mouvement par rapport à un autre.

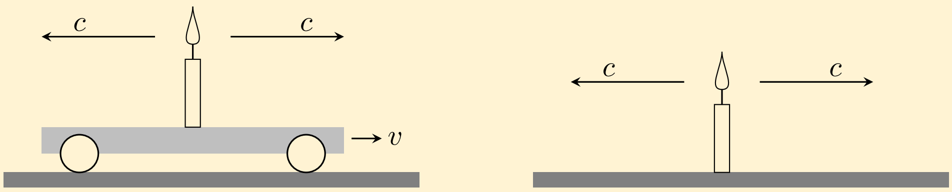


Fig. 2.3.3

Nous savons que les lois de la mécanique sont covariantes par rapport au groupe de Galilée $\{G\}$. Plus précisemment, les lois de la mécanique sont les mêmes dans deux référentiels d'inertie en translation rectiligne et uniforme l'un par rapport à l'autre.

Or pour deux tels référentiels, les résultats relatifs à la vitesse de propagation de la lumière que nous venons de trouver comme conséquence de la $\mathrm{cov}/\{L\}$ sont en *contradiction* avec les lois de la mécanique puisque le théorème d'addition des vitesses est incompatible avec la constance de la vitesse de la lumière. Nous sommes donc placé devant l'alternative : ou bien l'électromagnétisme est faux, ou bien la mécanique est fausse ! (ou les deux ensembles !).

Ce fut le résultat négatif de l'expérience de Michelson et Morley (et d'autres encore) qui permit de trancher en faveur de l'électromagnétisme : *la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels d'inertie.*

Il devenait alors nécessaire de modifier la mécanique de façon qu'elle soit compatible avec ce résultat : en d'autres termes, *il fallait construire une nouvelle mécanique* *dont les lois fussent* $\mathrm{cov}/\{L\}$ *et non plus* $\mathrm{cov}/\{G\}$ *: les transformations de deux référentiels d'inertie en translation rectiligne et uniforme l'un par rapport à l'autre ne sont plus celles de Galilée mais celles de Lorentz.*

La théorie de la relativité d'Einstein ou théorie de la $\mathrm{cov}/\{L\}$ se fonde donc sur les deux postulats suivants :

Postulat 1

La vitesse de la lumière dans le vide est une *constante universelle* c_0 dans tous les référentiels d'inertie.

Postulat 2

Les lois de la physique (mécanique et électromagnétisme) sont covariantes par rapport au groupe de Lorentz.

De ces postulats résulte en particulier que les lois de l'électromagnétisme sont considérées comme rigoureuses. D'autre part, du postulat de covariance résulte qu'*aucune expérience de physique faite dans un référentiel d'inertie permet de mettre en évidence le mouvement de celui-ci par rapport à un autre référentiel d'inertie* (ceci est une autre formulation du postulat 2).

La mécanique $\mathrm{cov}/\{G\}$ a fourni suffisamment de preuve de sa validité pour qu'il vaille la peine d'examiner l'ordre de grandeur des modifications qu'elle va subir. Comparons pour ceci la transformation de Galilée

$$\begin{cases} {}'x'^3 = x^3 - v_0 t \\ {}'t = t \end{cases}$$

avec la transformation spéciale de Lorentz. On constate que cette dernière (dans laquelle $t = x^4/c_0$) tend vers celle de Galilée si $c_0 \to \infty$, donc

$$\lim_{c_0 \to \infty} L = G.$$

Mais nous savons bien que $c_0 \neq \infty$, par conséquent, pour des vitesses très petites devant celle de la lumière : $v/c_0 \to 0$ et la transformation spéciale de Lorentz devient

$$\begin{cases} {}'x'^3 = x^3 - v_0 t \\ {}'t = -\frac{v_0}{c_0} x^3 + t, \end{cases}$$

et donc

$$\lim_{v_0 \to 0} L \neq G,$$

ce que l'on oublie trop souvent ! Toutefois le terme v_0/c_0 étant très petit, la mécanique $\mathrm{cov}/\{G\}$ est exacte avec une bonne approximation tant que les vitesses considérées sont faibles devant celle de la lumière : c'est là son domaine de validité.

Théorème d'addition des vitesses

Une transformation spéciale de Lorentz est définie par un seul paramètre : nous pouvons donc écrire symboliquement :

$${}'x = L(\omega)x.$$

Si nous effectuons une nouvelle transformation, nous avons :

$${}''x = L({}'\omega)\,{}'x.$$

Or $L(.) \in \{L\}$, donc il existe une transformation $L({}''\omega)$ telle que

$${}''x = L({}''\omega)x.$$

avec ${}''\omega = \omega + {}'\omega$.

Nous en déduisons immédiatement la loi d'addition des vitesses. En effet :

$$\beta = \operatorname{th}\omega = \operatorname{th}(\omega_1 + \omega_2) = \frac{\operatorname{th}\omega_1 + \operatorname{th}\omega_2}{1 + \operatorname{th}\omega_1 \operatorname{th}\omega_2},$$

d'où :

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}. \tag{2.2.8}$$

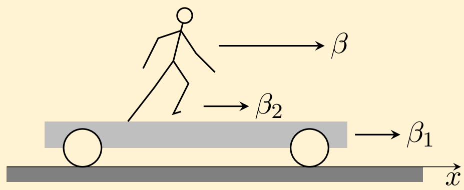


Fig. 2.2.4

On vérifie aisément que $|\beta| < 1$. Donc c_0 *est en toute circonstance une vitesse limite.* Cette loi de composition des vitesses modifie donc considérablement la cinématique.

2.3 Classification des vecteurs et groupe de Lorentz complet

La classification des vecteurs se fait suivant le signe du carré de leur norme :

$$g_{\alpha\beta}\, a^\alpha a^\beta = a^2 \begin{cases} > 0 & : \text{vecteur spatial} \\ = 0 & : \text{vecteur nul} \\ < 0 & : \text{vecteur temporel.} \end{cases} \tag{2.3.1}$$

1. Vecteur spatial

$$a^2 = |\vec{a}|^2 - (a^4)^2 > 0.$$

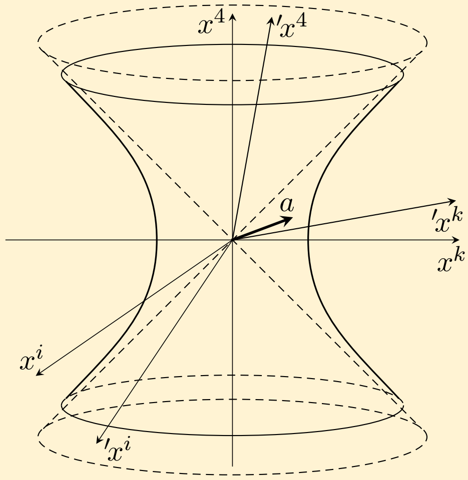


Fig. 2.3.1

Pour tout vecteur de type spatial, il est possible de trouver un référentiel $\{'x\}$ tel que ce vecteur s'écrit :

$$a = (0, {}'a'^2, 0, 0) \quad \text{où} \quad a^2 = g_{22}({}'a'^2)^2 = ({}'a'^2)^2 > 0.$$

Conséquence : Si l'intervalle $x_1 - x_2$ de deux événements x_1 et x_2 est un vecteur spatial, il existe un référentiel $\{'x\}$ dans lequel ces deux événements ont lieu *simultanément* : $'x_1^4 - {}'x_2^4 = 0$. Remarquons que si $x_1^4 - x_2^4 > 0$, il n'existe pas de transformation pour laquelle $'x_1^4 - {}'x_2^4 < 0$ (cf. figure 2.3.1) : la causalité est sauvée !

2. Vecteur temporel

$$a^2 = |\vec{a}|^2 - (a^4)^2 < 0.$$

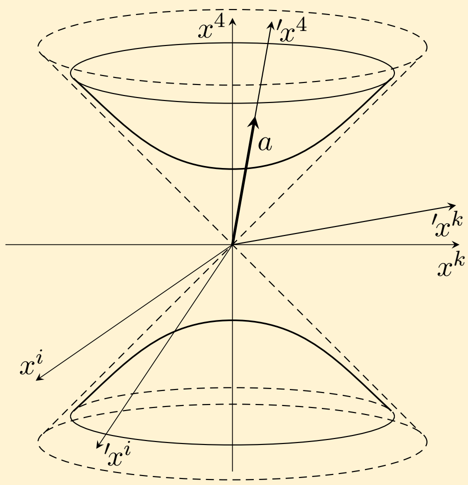


Fig. 2.3.2

Pour tout vecteur de type temporel, il est possible de trouver un référentiel $\{'x\}$ tel que ce vecteur s'écrit :

$$a = (0, 0, 0, {'a'}^4),$$

où $a^2 = g_{44}({'a'}^4)^2 = -({'a'}^4)^2 < 0$.

Conséquence :

Si l'intervalle de deux événements x_1 et x_2 est un vecteur temporel, il existe un référentiel $\{'x\}$ dans lequel ces deux événements ont lieu *au même point* $'\vec{x}_1 = {'\vec{x}}_2$. (cf. figure 2.3.2)

3. Vecteur nul

$$a^2 = |\vec{a}|^2 - (a^4)^2 = 0.$$

Ces vecteurs sont situés sur la nappe du « cône de lumière » d'équation $|\vec{x}|^2 - (x^4)^2 = 0$; cette dénomination provient du fait que tout rayon lumineux issu du sommet se « déplace » sur le cône supérieur (puisqu'en effet $x^4 = c_0 t$).

Groupe de Lorentz complet

A la section 2.2. nous n'avons considéré que le sous-groupe continu des transformations de Lorentz. Or le groupe de Lorentz $\{L\}$ (groupe des transformations pseudo-orthogonales homogènes) contient, en plus des transformations continues, les *opérations discrètes de réflexions* par rapport à un point de l'espace à trois dimensions P (ce qui change le sens du trièdre d'espace) et de *renversement du temps* T.

Une transformation L qui conserve le sens des vecteurs temporel (c'est-à-dire qui conserve le signe de la composante temps de ces vecteurs) est dite *ortho-chrone* ; si elle en change le signe, elle est dite *pseudo-chrone*.

Une transformation L qui conserve le sens du trièdre des trois axes d'espace est dite *ortho-chore* ; si elle en change le sens, elle est dite *pseudo-chore*.

Conséquence :

$$L'^4{}_4 \quad \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \quad 0 : \text{transformation} \left\{ \begin{matrix} \text{ortho-} \\ \text{pseudo-} \end{matrix} \right. \text{chrone}$$

$$\det(L'^i{}_i) \quad \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \quad 0 : \text{transformation} \left\{ \begin{matrix} \text{ortho-} \\ \text{pseudo-} \end{matrix} \right. \text{chore.}$$

Notations : Le signe $+$ $(-)$ caractérise une transformation ortho-(pseudo-)chore. Le signe $\uparrow$ $(\downarrow)$ caractérise une transformation ortho-(pseudo-)chrone.

Classification

Il est pratique de décomposer le groupe $\{L\}$ complet suivant le signe de $L'^4{}_4$ et de $\det(L'^i{}_i)$. Nous aurons ainsi à considérer le *sous-groupe connexe à l'unité* et *trois complexes associés* (qui ne sont pas des sous-groupes !)

1. Le sous-groupe connexe à l'unité.

Transformations ortho-chrones, ortho-chores

$$\{L^{+\uparrow}\} : {L'}^4{}_4 > 0\ ;\ \ \det({L'}^i{}_i) > 0.$$

C'est le sous-groupe continu étudié à la section précédente ; on l'appelle aussi le *groupe propre de Lorentz.*

2. Les complexes associés.

A) Transformations pseudo-chrones, ortho-chores.

$$[L^{+\downarrow}] : {L'}^4{}_4 < 0\ ;\ \ \det({L'}^i{}_i) > 0.$$

Ce complexe est formé des transformations :

$$L^{+\downarrow} = TL^{+\uparrow},$$

où

$$'x = Tx : \begin{cases} 'x^i = x^i \\ 'x^4 = -x^4. \end{cases}$$

B) Transformations ortho-chrones, pseudo-chores

$$[L^{-\uparrow}] : {L'}^4{}_4 > 0\ ;\ \ \det({L'}^i{}_i) < 0.$$

Ce complexe est formé des transformations :

$$L^{-\uparrow} = PL^{+\uparrow},$$

où :

$$'x = Px : \begin{cases} 'x^i = -x^i \\ 'x^4 = x^4. \end{cases}$$

C) Transformations pseudo-chrones, pseudo-chores

$$[L^{-\downarrow}] : {L'}^4{}_4 < 0\ ;\ \ \det({L'}^i{}_i) < 0.$$

Ce complexe est formé des transformations :

$$L^{-\downarrow} = PTL^{+\uparrow},$$

où :

$$'x = PTx = TPx :\ 'x^\alpha = -x^\alpha.$$

Remarque. (2.1.2) implique que $\det('g_{..}) = \det(g_{..})\,(\det(L^{\cdot}{}_{\cdot})^2 = \det(g_{..})$, par conséquent $(\det(L^{\cdot}{}_{\cdot}))^2 = 1$ et donc :

$$\det({L'}^\alpha{}_\alpha) = \pm 1.$$

La classification est résumée dans le tableau suivant :

	$\mathrm{sign}({L'}^4{}_4)$	$\mathrm{sign}(\det({L'}^i{}_i))$	$\mathrm{sign}(\det({L'}^\alpha{}_\alpha))$
$L^{+\uparrow}$	$+1$	$+1$	$+1$
$L^{+\downarrow}$	-1	$+1$	-1
$L^{-\uparrow}$	$+1$	-1	-1
$L^{-\downarrow}$	-1	-1	$+1$

Quelques définitions supplémentaires

Pour le cours de relativité restreinte, il est inutile de pousser plus loin l'étude des propriétés du groupe de Lorentz. Par la suite, nous aurons besoin, outre des tenseurs, des quantités suivantes que nous définissons par leurs lois de transformations.

1. Quantité pseudo-chrone.

$$'\overset{\cup}{a}{}^{'\alpha'\beta\ldots}{}_{'\lambda\ldots} = \mathrm{sign}(L'^{4}{}_{4}) L'^{\alpha}{}_{\alpha} L'^{\beta}{}_{\beta} \ldots \overset{\cup}{a}{}^{\alpha\beta\ldots}{}_{\lambda\ldots} L^{-1\,\lambda}{}_{'\lambda} \ldots$$

Exemples :

Pour la transformation T :

$$'\overset{\cup}{a} = -\overset{\cup}{a} \qquad 'a = a$$

$$\begin{cases} '\overset{\cup}{a}{}^{i} = -\overset{\cup}{a}{}^{i} \\ '\overset{\cup}{a}{}^{4} = \overset{\cup}{a}{}^{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} 'a^{i} = a^{i} \\ 'a^{4} = -a^{4} \end{cases}$$

2. Quantité pseudo-chore.

$$'\overset{\cap}{a}{}^{'\alpha'\beta\ldots}{}_{'\lambda\ldots} = \mathrm{sign}(\det(L'^{i}{}_{i})) L'^{\alpha}{}_{\alpha} L'^{\beta}{}_{\beta} \ldots \overset{\cap}{a}{}^{\alpha\beta\ldots}{}_{\lambda\ldots} L^{-1\,\lambda}{}_{'\lambda} \ldots$$

Exemples :

Pour la transformation P :

$$'\overset{\cap}{a} = -\overset{\cap}{a} \qquad 'a = a$$

$$\begin{cases} '\overset{\cap}{a}{}^{i} = \overset{\cap}{a}{}^{i} \\ '\overset{\cap}{a}{}^{4} = -\overset{\cap}{a}{}^{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} 'a^{i} = -a^{i} \\ 'a^{4} = a^{4} \end{cases}$$

Pseudo-quantité $\overset{\cap}{\underset{\cup}{}} = \bigcirc$

$$'\overset{\bigcirc}{a}{}^{'\alpha'\beta\ldots}{}_{'\lambda\ldots} = \mathrm{sign}(\det(L'^{\alpha}{}_{\alpha})) L'^{\alpha}{}_{\alpha} L'^{\beta}{}_{\beta} \ldots \overset{\bigcirc}{a}{}^{\alpha\beta\ldots}{}_{\lambda\ldots} L^{-1\,\lambda}{}_{'\lambda} \ldots$$

Les tenseurs habituels sont souvent appelés par opposition des quantités ortho-chrones ou ortho-chores.

2.4 Contraction de Lorentz, ralentissement des horloges et effet Doppler

Nous allons examiner quelques-unes des conséquences de la transformation spéciale de Lorentz :

$$\begin{cases} 'x'^{1} = x^{1} \\ 'x'^{2} = x^{2} \\ 'x'^{3} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^{2}}}(x^{3} - \beta t) \\ 't = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^{2}}}(-\beta x^{3} + t). \end{cases}$$

La transformation inverse étant :

$$\begin{cases} x^3 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}({}'x'^3 + \beta\,{}'t) \\ t = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(\beta\,{}'x'^3 + {}'t). \end{cases}$$

1. Contraction de Lorentz

Dans le référentiel $\{{}'x\}$, nous supposons qu'il y a une barre immobile ayant pour extrémités ${}'x_1 = 0$ et ${}'x_2 = L$; la différence : ${}'x_2 - {}'x_1 = L$ représente la longueur de cette barre mesurée par un observateur situé dans ce référentiel.

Par *définition*, on appelle *longueur propre* de la barre, la longueur L mesurée dans le référentiel où elle est en repos.

Pour mesurer la longueur de la barre depuis le référentiel $\{x\}$, un observateur qui la voit se déplacer à la vitesse β doit relever à un instant t (soit par exemple : $t = 0$) les coordonnées des deux extrémités dont la différence lui donnera la longueur cherchée. Pour simplifier, choisissons l'origine $x^3 = 0$ de telle façon qu'elle coïncide en $t = 0$ avec une des deux extrémités de la barre (cf. figure 2.4.1).

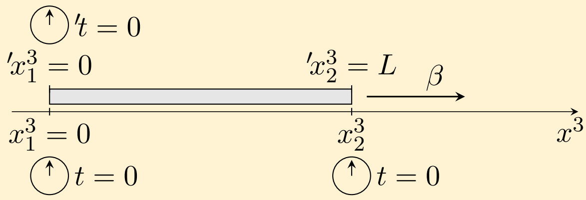


Fig. 2.4.1

Pour $t = 0$, nous avons

$$0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(\beta\,{}'x^3 + {}'t)$$

et donc

$$ {}'t = -\beta\,{}'x^3. \tag{2.4.1}$$

Par choix de l'origine, $x_1^3 = 0$ coïncide en $t = 0$ avec l'extrémité ${}'x_1^3 = 0$. La coordonnée x_2^3 de l'autre extrémité en $t = 0$ est donnée par

$$x_2^3 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(L + \beta\,{}'t) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(1-\beta^2)L = \sqrt{1-\beta^2}L.$$

La longueur cherchée est donc

$$x_2^3 - 0 = L_{\text{apparent}} = \sqrt{1-\beta^2}L. \tag{2.4.2}$$

Nous constatons que *tout objet semble raccourci dans le sens du mouvement.*

Représentons ceci dans un diagramme d'univers (x^3, t). Soit :

$$x^\alpha x_\alpha \overset{*}{=} x^2 - t^2 = L^2.$$

($*$ signifie : cas d'une seule dimension spatiale). Le lieu des vecteurs spatiaux x^α, centrés en 0, de longueur propre L est une hyperbole. Soit alors notre barre de longueur L dans son référentiel de repos $\{{}'x\}$; les intersections des lignes d'univers ${}'x = 0$ et ${}'x = L$ avec l'axe x nous donne L_{apparent}.

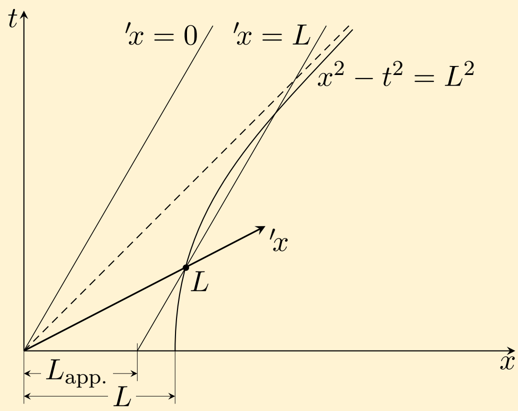


Fig. 2.4.2

2. Ralentissement des horloges

Considérons une horloge fixe, placée à l'origine dans un référentiel $\{{}'x\}$ et donnant pour un observateur placé dans ce référentiel une période T.

Par *définition* on appelle *temps propre* de l'horloge, le temps mesuré par un observateur fixe par rapport à elle.

On aimerait mesurer cette période à partir du référentiel $\{x\}$; pour ce faire, l'observateur dispose de *deux horloges synchronisées* et comparera leurs résultats avec ceux de l'horloge qui se meut par rapport à elles avec la vitesse β. Choisissons nos coordonnées de telle façon qu'au temps ${}'t = 0$, nous ayons : $t = 0$ et $x^3 = 0$; en conséquence, pour ${}'t = 0$, $t = 0$ (choix de l'origine) et pour ${}'t = T$, $t = (1/\sqrt{1-\beta^2})T$, d'où :

$$t - 0 = T_{\text{apparent}} = \frac{T}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{2.4.3}$$

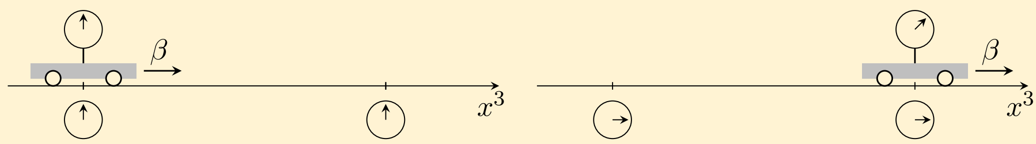


Fig. 2.4.3

Nous constatons qu'*une horloge semble retarder lorsqu'elle est en mouvement.*

Pour représenter ce phénomène dans un diagramme d'univers, introduisons

$$x^\alpha x_\alpha \overset{*}{=} x^2 - t^2 = -T^2.$$

qui représente le lieu des vecteurs temporels de période propre T. Ensuite nous opérons de façon analogue au paragraphe 1 ci-dessus :

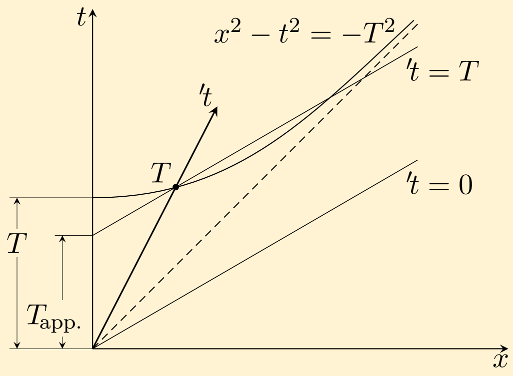


Fig. 2.4.4

Nous arrivons à la conclusion particulièrement importante que, *en théorie* cov$/\{L\}$, *le temps perd son caractère absolu.*

3. Relativité de la simultanéité

Lorsque deux (ou plusieurs) événements ont lieu simultanément dans un référentiel $\{x\}$, ils ne sont en général pas simultanés dans un référentiel $\{{}'x\}$ de vitesse β par rapport au premier.

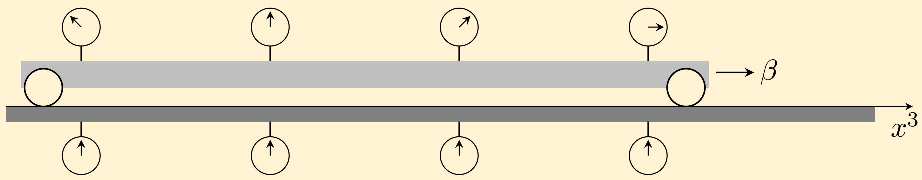


Fig. 2.4.5

Soit $t = 0$, l'instant de la simultanéité dans $\{x\}$. Alors

$$t = 0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(\beta\,{}'x^3 + {}'t) \quad \text{et donc} \quad {}'t = -\beta\,{}'x^3.$$

Mais

$${}'x^3 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x^3 - \beta \underbrace{t}_{=0}) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}x^3,$$

et alors on a :

$${}'t = \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}x^3 \neq 0.$$

Dans un diagramme d'univers, figure 2.4.6 en page suivante, ce phénomène est immédiatement visible.

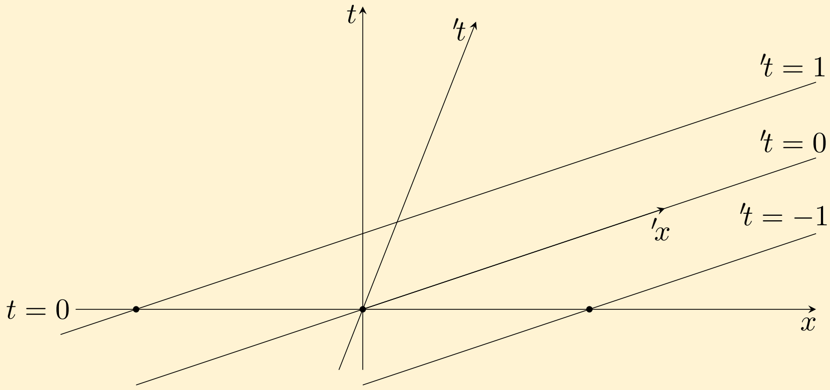


Fig. 2.4.6

4. Effet Doppler

Rappelons qu'on appelle effet Doppler la *variation de la fréquence* d'une onde électromagnétique émise par une source qui se déplace par rapport à l'observateur, relativement à la fréquence dite *fréquence propre* ω_0 (*par définition*), et qui est mesurée dans le référentiel où la source est immobile.

Etablissons d'abord l'équation d'onde électromagnétique sous forme cov/$\{L\}$. Nous partons des équations de Maxwell :

$$\partial_\alpha B_{\beta\gamma} + \partial_\beta B_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma B_{\alpha\beta} = 0$$
$$\partial_\alpha B^{\alpha\beta} = -j^\beta \quad (\textit{dans le vide} : H^{\alpha\beta} = B^{\alpha\beta})$$

On pose *par définition* :

$$\partial^\alpha = g^{\alpha\beta}\partial_\beta$$

et on appelle *d'alembertien*, l'opérateur $\Box$ suivant :

$$\partial^\alpha\partial_\alpha = g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \sum_1^3 (\partial_i)^2 - \partial_4^2 \stackrel{\text{def}}{=} \Box.$$

En appliquant l'opérateur ∂^α à la première équation de Maxwell il vient

$$\Box B_{\beta\gamma} + \partial_\beta(\underbrace{\partial^\alpha B_{\gamma\alpha}}_{j_\gamma}) + \partial_\gamma(\underbrace{\partial^\alpha B_{\alpha\beta}}_{-j_\beta}) = 0,$$

d'où l'*équation d'onde* :

$$\Box B_{\beta\gamma} = -\partial_\beta j_\gamma + \partial_\gamma j_\beta \tag{2.4.5}$$

et, s'il n'y a *pas de sources* ($j_\alpha = 0$),

$$\Box B_{\beta\gamma}(x) = 0. \tag{2.4.6}$$

L'équation (2.4.6) admet pour solution, les ondes planes périodiques :

$$B_{\beta\gamma}(x) = \epsilon_{\beta\gamma}\,\cos(k, x).$$

En substituant dans (2.4.6), nous obtenons

$$-k^{\alpha} k_{\alpha} \underbrace{B_{\beta\gamma}(x)}_{\neq 0} = 0,$$

et donc

$$k^{\alpha} k_{\alpha} = |\vec{k}|^2 - (k^4)^2 = 0. \tag{2.4.7}$$

On remarque que k^{α} est un vecteur nul dont la partie spatiale $\vec{k}$ est le *vecteur d'onde* et la partie temporelle $k^4 = \omega$ est la *fréquence cyclique*. Nous avons en effet :

$$\cos(k, x) = \cos((\vec{k}, \overleftarrow{x}) - \omega t)$$

et (2.4.7) donne $\omega = |\vec{k}|$.

Supposons maintenant que dans un référentiel $\{x\}$, une source immobile (antenne) émette une onde plane

$$B_{\beta\gamma}(x) = \epsilon_{\beta\gamma} \cos(k, x).$$

Dans le référentiel $\{'x\}$ en translation β par rapport au premier, cette onde sera décrite par

$$'B_{\beta\gamma}('x) = \epsilon_{\beta\gamma} \cos('k, 'x).$$

On se propose d'examiner la variation de la fréquence qui se produit lorsqu'on passe d'un référentiel à l'autre. Nous ne traiterons pas le cas général, mais les deux cas extrêmes suivants.

a) Effet Doppler longitudinal : la source de fréquence propre $'\omega = \omega_0$ est fixée à l'origine du repère $\{'x\}$ et se déplace donc, cf. (2.2.7), à la vitesse β par rapport à l'observateur situé par exemple à l'origine du repère $\{x\}$.

Si la source est dans la région des x positifs, alors

$$k = (0, 0, k_3 = -\omega, \omega).$$

Il en résulte

$$'k^4 = '\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(-\beta k^3 + \omega) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(\beta + 1)\omega = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\omega.$$

La fréquence observé $\omega_{\text{obs}} = \omega$ est donc

$$\omega_{\text{obs}} = \omega = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\omega_0. \tag{2.4.8}$$

On constate qu'elle est plus faible que la fréquence émise si $\beta > 0$ (éloignemeent) et plus grande si $\beta < 0$ (rapprochement).

b) Effet Doppler transversal : toujours avec les mêmes notations, l'observateur reçoit l'onde en provenance d'une direction perpendiculaire à la vitesse de la source.

Par exemple, la source se trouve au point $(0, x^2 > 0, 0)$ et alors

$$k = (0, k_2 = -\omega, 0, \omega).$$

Dans ce cas

$$'k^4 = {}'\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(0+\omega) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\omega$$

et alors

$$\omega_{\text{obs}} = \omega = \sqrt{1-\beta^2}\,\omega_0. \tag{2.4.9}$$

Si l'on considère la période observée $(T = 2\pi/\omega)$, il vient alors

$$T_{\text{obs}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} T_0.$$

Dans ce cas particulier, l'effet Doppler est uniquement dû au ralentissement des horloges, cf. (2.4.3). Rajoutons que cet effet Doppler transversal n'est pas prévu par la théorie classique.

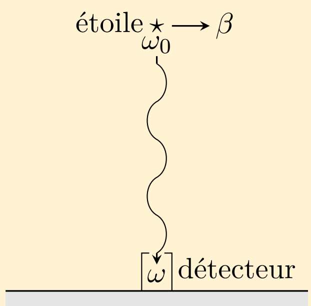


Fig. 2.4.7

2.5 Tenseur quantité de mouvement-énergie

Ainsi que nous l'avons déjà dit, nous sommes arrivés à la conclusion qu'il était nécessaire de construire une physique cov/$\{L\}$. Nous connaissons déjà l'électromagnétisme, reste donc la mécanique et plus généralement la thermodynamique que nous étudierons au chapitre suivant. A la section 1.3 nous avons établi la forme cov/$\{A\}$ (donc à fortiori cov/$\{L\}$) des équations de conservation pour le système électromagnétique. Nous avions trouvé, lorsque $\Sigma^{(subst.)} + \Sigma^{(em.)} = \Sigma_{00}$:

$$\partial_\alpha \tau^\alpha{}_\beta = k^L_\beta.$$

Si le système électromagnétique est fermé : $\Sigma^{(em.)} = \Sigma_{00}$, c'est-à-dire s'il n'y a pas de source de champ, alors :

$$j^\alpha = 0 \quad \text{et} \quad k^L_\beta = -j^\alpha B_{\alpha\beta} = 0$$

et donc

$$\partial_\alpha \tau^\alpha{}_\beta = 0.$$

Une telle équation de conservation n'est pas caractéristique de l'électromagnétisme ; il doit en exister une pour tout système fermé. En particulier cela doit être vrai pour le système :

$$\Sigma_{00}^{(tot.)} = \Sigma^{(subst.)} + \Sigma^{(em.)}.$$

Il est donc possible de construire un *tenseur densité d'énergie totale* $T^{(tot.)\,\alpha}{}_\beta$ tel que

$$\partial_\alpha T^{(tot.)\,\alpha}{}_\beta = 0$$

avec

$$T^{(tot.)\,\alpha}{}_\beta \stackrel{\text{def}}{=} \tau^\alpha{}_\beta + T^{(subst.)\,\alpha}{}_\beta. \tag{2.5.1}$$

En effet, la fermeture du système s'exprime par

$$k_\beta^{(em.)} + k_\beta^{(subst.)} = 0.$$

Il suffit donc de construire $T^{(subst.)\,\alpha}{}_\beta$ de telle sorte que

$$\partial_\alpha T^{(subst.)\,\alpha}{}_\beta = k_\beta^{(subst.)}$$

pour que l'équation de conservation pour $\Sigma_{00}^{(tot.)}$ soit vérifiée. De ceci il résulte que

$$\partial_\alpha T^{(subst.)\,\alpha}{}_\beta = -k_\beta^L. \tag{2.5.2}$$

Ce sont les *équations de conservation pour le système substantiel* $\Sigma^{(subst.)}$; k_β^L est ici la densité de *force extérieure*. Par conséquent, une fois choisies les variables d'état, les équations (2.5.2) fournissent les *équations de mouvement du système substantiel* : ce sont les équations fondamentales de la mécanique cov/$\{L\}$.

Le problème est maintenant de construire le tenseur $T^{(subst.)\,\alpha}{}_\beta$; nous examinerons ceci à la section suivante.

Il est encore nécessaire de définir les *quantités exprimant l'état mécanique des systèmes de dimension finie*. Une fois ces quantités définies, il s'agira encore d'exprimer leurs lois de conservation, ce qui nous fournira une *formulation* cov/$\{L\}$ *du premier principe de la thermodynamique*.

En mécanique prérelativiste (cov/$\{G\}$), ces quantités sont l'énergie H, la quantité de mouvement Π_i et le moment cinétique M_{ik}. Elles sont définies comme des fonctionnelles de grandeurs (volume $V(t)$ occupé par le système, densité caractéristique, etc.) qui sont des fonctions du paramètre t (le temps).

De telles définitions sont inacceptables en théorie cov/$\{L\}$, principalement du fait de la *relativité de la simultanéité*. Il n'est plus possible de faire jouer au temps le rôle d'un paramètre privilégié. En effet, si nous définissons une telle quantité dans un référentiel, cette remarquable propriété de simultanéité de tous les points du système disparait dès que l'on effectue une transformation de Lorentz, donc dès que nous changeons de référentiel. Pour disposer d'une véritable définition cov/$\{L\}$, il faut introduire des grandeurs *non pas fonctions du temps mais fonctionnelles de surfaces* $\tau(y) = 0$ *à normales* $d\sigma_\alpha(y)$ *temporelles dans l'univers* (le 4-espace (x^1, x^2, x^3, c_0t)).

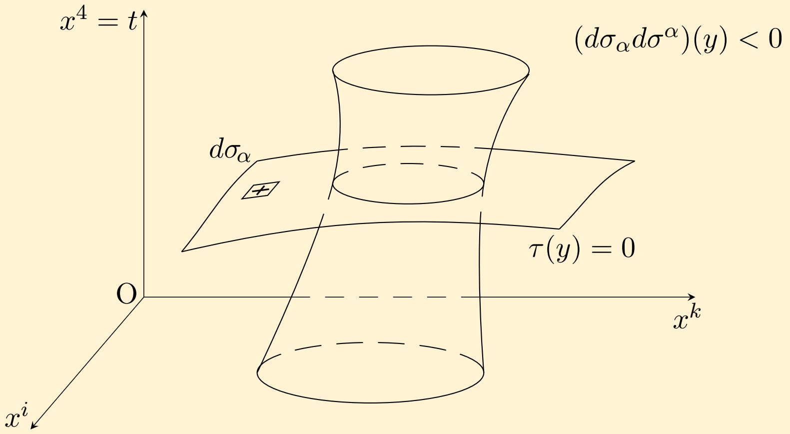


Fig. 2.5.1 Le tube à cloison spatiale représente le système fini dans l'univers

Si nous utilisons dans nos définitions le vecteur $d\sigma_\alpha(y)$, nous introduisons une dissymétrie inadmissible relativement au renversement du temps $T \in \{L\}$. En effet, si deux référentiels se déduisent l'un de l'autre par la transformation T, dans l'un le côté $(+)$ de $d\sigma_\alpha$ serait dirigé vers $x^4 = +\infty$, tandis que dans l'autre, il serait dirigé vers $x^4 = -\infty$. Tous les référentiels devant être équivalents, cette dyssymétrie doit être éliminée. On y parvient en utilisant le vecteur temporel pseudo-chrone $d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha(y)$. En effet :

$$\text{si} \quad {}'x = Tx \quad \Longrightarrow \quad {}'d\overset{\cup}{\sigma}_4 = d\overset{\cup}{\sigma}_4$$

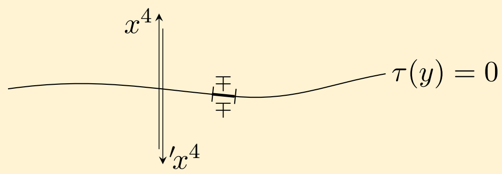


Fig. 2.5.2

De plus $d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha$ étant temporel, il existe un référentiel tel qu'en un point y au moins nous ayons :

$$d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha \overset{*}{=} (0, 0, 0, d\sigma_4 = d^3V)$$

d^3V étant l'élément de volume tridimensionnel usuel à condition que $d\sigma_4 > 0$, ce que nous supposerons. Nous utiliserons donc l'élément de surface $d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha(y)$, tel que :

$$(d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha, d\overset{\cup}{\sigma}^\alpha)(y) < 0 \quad \text{avec} \quad d\overset{\cup}{\sigma}_4(y) > 0.$$

Pour terminer ces généralités, ajoutons qu'un système quelconque devant être complètement défini par son tenseur $T^\alpha{}_\beta(x)$, les quantités que nous allons définir pour le système fini ne devront dépendre que de la surface $\tau(y) = 0$ et de $T^\alpha{}_\beta(x)$.

Définition de la quantité de mouvement-énergie

On appelle *quantité de mouvement-énergie* d'un système, le vecteur pseudo-chrone

$$\overset{\cup}{\Pi}_\beta \overset{\text{def}}{=} \int_{\tau(y)=0} (d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha T^\alpha{}_\beta)(y). \tag{2.5.3}$$

Vérifions d'abord que $\overset{\cup}{\Pi}_\beta$ est bien un vecteur pseudo-chrone :

$$\begin{aligned} {}'\overset{\cup}{\Pi}_{'\beta} &= \int_{'\tau('y)=0} (d\overset{\cup}{\sigma}_{'\alpha}\, {}'T'^\alpha{}_{'\beta})('y) = \int_{'\tau('y)=0} \Big(\operatorname{sign}(L'^4{}_4)\, d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha\, L^{-1\,\alpha}{}_{'\alpha}\, L^{-1\,\beta}{}_{'\beta}\, T'^\alpha{}_\beta\Big)('y) \\ &= \int_{\tau(y)=0} \Big(\operatorname{sign}(L'^4{}_4) d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha\, L^{-1\,\beta}{}_{'\beta}\, T^\alpha{}_\beta\Big)(y) = \operatorname{sign}(L'^4{}_4) L^{-1\,\beta}{}_{'\beta}\, \overset{\cup}{\Pi}_\beta\ . \end{aligned}$$

Loi de conservation

Etablissons la loi de conservation de $\overset{\cup}{\Pi}_\beta$. Soient $\tau'(y) = 0$ et $\tau''(y) = 0$ deux surfaces ; formons la différence

$$\overset{\cup}{\Pi}_\beta[\tau''] - \overset{\cup}{\Pi}_\beta[\tau'] = \int_{\tau''(y)=0} (d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha T^\alpha{}_\beta)(y) - \int_{\tau'(y)=0} (d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha T^\alpha{}_\beta)(y).$$

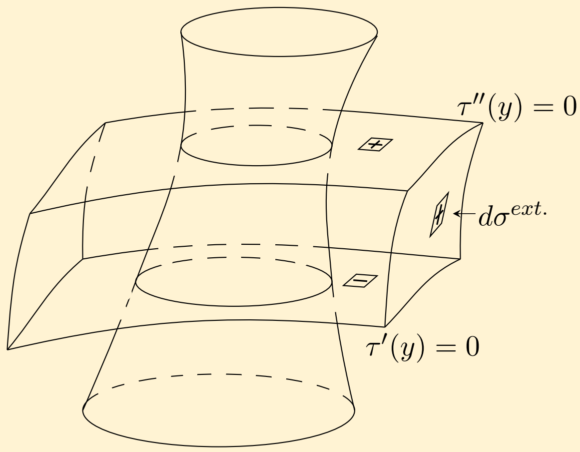


Fig. 2.5.3

Nous pouvons relier ces deux surfaces au moyen d'un « cylindre » extérieur au tube (ce qui est possible vu la dimension finie du système). Pour cette surface fermée, nous choisissons l'élément de surface $d\sigma^{ext.}_\alpha(y)$ tel que (cf. figure 2.5.3)

$$\begin{cases} \text{sur } \tau'' & : \sigma^{ext}_\alpha = d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha \\ \text{sur } \tau' & : d\sigma^{ext.}_\alpha = -d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha \\ \text{sur le cylindre} & : d\sigma^{ext.}_\alpha : \ \text{côté } (-) \text{ dirigé vers le tube.} \end{cases}$$

Alors, puisque par construction, $T^\alpha{}_\beta = 0$ sur le « cylindre », nous avons

$$\overset{\cup}{\Pi}_\beta[\tau''] - \overset{\cup}{\Pi}_\beta[\tau'] = \oint_{\tau^{ext.}} (d\sigma^{ext.}_\alpha T^\alpha{}_\beta)(y)$$

et, par le théorème de Gauss,

$$\overset{\cup}{\Pi}_\beta[\tau''] - \overset{\cup}{\Pi}_\beta[\tau'] = \int_{x\in\tau^{ext.}} (d^4V\partial_\alpha T^\alpha{}_\beta)(x).$$

Si le système est fermé, soit $\Sigma = \Sigma_{00}$, nous savons que :

$$\partial_\alpha T^\alpha{}_\beta(x) = 0,$$

par conséquent pour un tel système on a bien

$$\overset{\cup}{\Pi}_\beta[\tau(.)] = \overset{\cup}{\Pi}{}'_\beta. \tag{2.5.4}$$

On a ainsi prouvé que *la quantité de mouvement-énergie d'un système fermé est une grandeur conservée* ; cette propriété de conservation sera par la suite représentée par l'adjonction d'une prime.

Sa valeur est alors indépendante de la surface $\tau(y) = 0$; il devient alors possible sans sacrifier la généralité de choisir une surface particulière $\tau(y) = (y^4)^2 - t^2 = 0$ sur laquelle :

$$d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha \overset{*}{=} (0, 0, 0, d^3V)$$

et alors

$$\overset{\cup}{\Pi}_\beta = \int_\tau (d^3V\,T^4{}_\beta)(x).$$

Puisque par définition de $T^\alpha{}_\beta$:

$$T^4{}_i = \pi_i$$
$$T^4{}_4 = h,$$

nous retrouvons les définitions prérelativistes de la quantité de mouvement et de l'énergie :

$$\overset{\cup}{\Pi}_i = \int_\tau (d^3V\,\pi_i)(x)$$
$$H = \Pi_4 = \int_\tau (d^3V\,h)(x)$$

Donc, (2.5.4) est la *formulation* cov$/\{L\}$ *du premier principe de la thermodynamique pour la quantité de mouvement et l'énergie*. Nous avons donc

$$\overset{\cup}{\Pi}_\beta = (\overset{\cup}{\overleftarrow{\Pi}}, H). \tag{2.5.5}$$

On constate que $\overset{\cup}{\Pi}_\beta$ est un *vecteur temporel* ; en effet, la condition imposée de *signe positif (strictement) de la densité d'énergie* implique $h > 0$ et donc $H > 0$, et il existe un référentiel pour lequel :

$$'\overset{\cup}{\Pi}_\beta \overset{*}{=} ('\overset{\cup}{\overleftarrow{0}}, 'H).$$

Lors du renversement du temps ($'x = Tx$) nous avons :

$$
\begin{aligned}
{}'\overset{\cup}{\overleftarrow{\Pi}} &= -\ \overset{\cup}{\overleftarrow{\Pi}} \\
{}'H &= H.
\end{aligned}
$$

Ainsi on constate que le caractère pseudo-chrone de $\overset{\cup}{\Pi}_\beta$ est nécessaire si l'on veut conserver une définition positive pour l'énergie.

Remarque.

Nous devons bien écrire (par exemple) :

$$\overset{\cup}{\Pi}_i = \int_\tau (d^3V\pi_i)(x)$$

et non (bien que $x = (\vec{x}, t)$) :

$$\overset{\cup}{\Pi}_i = \int_\tau \Big(d^3V(\vec{x})\pi_i(\vec{x}, t)\Big),$$

comme en description prérelativiste d'Euler. Ceci est dû aux équations de conservation $\partial_\alpha T^\alpha{}_\beta = 0$, qui ne contiennent pas de termes de convection. En effet, dans l'univers, la description est purement « statique ».

2.6 Moment cinétique-centre d'énergie

Définition

On appelle *moment cinétique-centre d'énergie* d'un système fini, le tenseur *pseudo-chrone* :

$$\overset{\cup}{M}_{\mu\nu}[\tau(.)] \overset{\text{def}}{=} \int_{\tau(y)=0} d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha(y)\big(y_\mu T^\alpha{}_\nu(y) - y_\nu T^\alpha{}_\mu(y)\big). \tag{2.6.1}$$

Loi de conservation

Etablissons la loi de conservation de $\overset{\cup}{M}_{\mu\nu}$. Nous opérons comme pour $\overset{\cup}{\Pi}_\beta$:

$$
\begin{aligned}
\overset{\cup}{M}_{\mu\nu}[\tau''] - \overset{\cup}{M}_{\mu\nu}[\tau'] &= \oint_{\tau^{ext.}} d\overset{\cup}{\sigma}{}^{ext.}_\alpha(y)\big(y_\mu T^\alpha{}_\nu - y_\nu T^\alpha{}_\mu\big)(y) \\
&\overset{\text{Gauss}}{=} \int_{x\in\tau^{ext.}} d^4V(x)\partial_\alpha\big(x_\mu T^\alpha{}_\nu - x_\nu T^\alpha{}_\mu\big)(x).
\end{aligned}
$$

Or, d'une part, $\partial_\alpha x_\mu = g_{\alpha\mu}$ et, d'autre part, pour un système fermé $\Sigma = \Sigma_{00}$, on a $\partial_\alpha T^\alpha{}_\beta = 0$. Donc

$$
\begin{aligned}
\overset{\cup}{M}_{\mu\nu}[\tau''] - \overset{\cup}{M}_{\mu\nu}[\tau'] &= \int_{x\in\tau^{ext.}} d^4V(x)\big(g_{\alpha\mu}T^\alpha{}_\nu - g_{\alpha\nu}T^\alpha{}_\mu\big)(x) \\
&= \int_{x\in\tau^{ext.}} d^4V(x)\big(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}\big)(x) = 0.
\end{aligned}
$$

Ainsi nous constatons que la *conservation du moment cinétique-centre d'énergie d'un système fermé*

$$\overset{\cup}{M}_{\mu\nu}[\tau(.)] = \overset{\cup}{M}'_{\mu\nu}, \tag{2.6.2}$$

exige la *symétrie du tenseur* $T_{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu}(x) = T_{(\mu\nu)}(x) \overset{\text{def}}{=} \theta_{\mu\nu}(x). \tag{2.6.3}$$

Si (2.6.3) est vérifiée, alors $\overset{\cup}{M}_{\alpha\beta}$ est indépendant de la surface $\tau(y) = 0$. Comme pour la quantité de mouvement-énergie, nous choisissons alors une surface particulière telle que

$$\overset{\cup}{M}_{\mu\nu} = \int_\tau d^3V(y)(y_\mu \theta^4{}_\nu - y_\nu \theta^4{}_\mu)(y).$$

Alors

$$\begin{aligned}\overset{\cup}{M}_{ik} &= \int_\tau d^3V(y)(y_i \theta^4{}_k - y_k \theta^4{}_i)(y) \\ &= \int_\tau d^3V(y)(y_i \pi_k - y_k \pi_i)(y),\end{aligned}$$

et nous retrouvons la définition prérelativiste du moment cinétique. Ensuite

$$\begin{aligned}\overset{\cup}{M}_{i4} &= \int_\tau d^3V(y)(y_i \theta^4{}_4 - y_4 \theta^4{}_i)(y) \\ &= \int_\tau d^3V(y) y_i h(y) - t\,\overset{\cup}{\Pi}_i\,.\end{aligned}$$

Puisque l'énergie H est conservée, nous pouvons introduire la définition suivante : on appelle *centre d'énergie d'un système* le point $\overset{\cup}{\vec{z}}\,(t)$ défini par

$$\overset{\cup}{\vec{z}}\,(t) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{H}\int_\tau (d^3V \vec{x} h)(\vec{x}, t) \tag{2.6.4}$$

et alors :

$$\overset{\cup}{M}_{i4} = \overset{\cup}{z}_i H - t\,\overset{\cup}{\Pi}_i = \overset{\cup}{M}'_{i4}.$$

Donc, en posant $\overset{\cup}{\overleftarrow{M}} = \{\overset{\cup}{M}_{4i}\}$, nous avons

$$\overset{\cup}{\overleftarrow{z}}\,(t) = \frac{\overset{\cup}{\overleftarrow{\Pi}}}{H} t + \frac{\overset{\cup}{\overleftarrow{M}}}{H}. \tag{2.6.5}$$

La vitesse $\overset{\cup}{\overleftarrow{v}}$ du centre d'énergie est une constante valant :

$$\overset{\cup}{\overleftarrow{v}} = \frac{\overset{\cup}{\overleftarrow{\Pi}}}{H}. \tag{2.6.6}$$

Nous avons donc la décomposition :

$$\overset{\cup}{M}_{\alpha\beta} = (\overset{\cup}{\overleftarrow{M}}, \overset{\cup}{\overleftarrow{C}}). \tag{2.6.7}$$

Le vecteur $\overset{\cup}{\overleftarrow{C}}$ apparaît comme une généralisation cov/$\{L\}$ du moment cinétique du premier ordre prérelativiste.

Lors d'un renversement du temps, nous avons :

$$'\overset{\cup}{\overleftarrow{M}} = -\overset{\cup}{\overleftarrow{M}}$$
$$'\overset{\cup}{\overleftarrow{C}} = -\overset{\cup}{\overleftarrow{C}}$$

Donc si la condition de symétrie $T_{\mu\nu} = T_{(\mu\nu)}$ est remplie, les équations $\partial_\alpha T^\alpha{}_\beta(x) = 0$ constituent une formulation cov/$\{L\}$ du premier principe de la thermodynamique pour le moment cinétique.

Par les formules ci-dessus, nous constatons que la conservation de $\overset{\cup}{\overleftarrow{C}}$ n'apporte rien de plus qui ne soit déjà contenu dans les lois de conservation de $\overset{\cup}{\Pi}_\beta$. Nous allons maintenant apporter quelques compléments à l'étude du tenseur $\overset{\cup}{M}_{\alpha\beta}$.

Les trajectoires du centre d'énergie sont, en vertu de (2.6.6), des droites. De même, puisque la vitesse est constante, voir (2.6.7), leurs lignes d'univers sont également des droites. Le centre de masse (CM) décrit une droite toujours inclinée à plus de 45°.

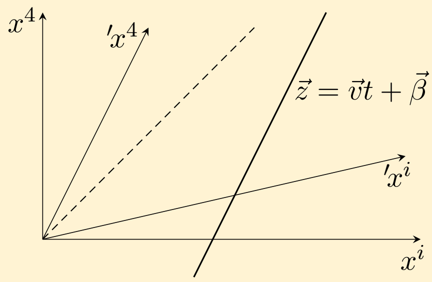


Fig. 2.6.1

Dans un autre référentiel,

$$\text{si } \ \overset{\cup}{M}^{i4} = 0 \ \text{ alors } \ '\overset{\cup}{M}^{'i'4} = \mathrm{sign}(L'^4{}_4) L'^i{}_\alpha L'^4{}_\beta \overset{\cup}{M}^{\alpha\beta} \neq 0 \ \text{ si } \ \overset{\cup}{M}^{ik} \neq 0$$

et donc la trajectoire du (CM) dépend du référentiel : les droites $\vec{z} = \vec{v}t + \vec{\beta}$ sont parallèles à la droite $'4$ du référentiel.

2.7 La matière poudreuse

La matière poudreuse est le fluide le plus simple qu'on puisse imaginer, plus simple que le fluide parfait car il n'y règne aucune tension.

1. Cas prérelativiste

La matière poudreuse est *définie* de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \pi_i &\overset{\text{def}}{=} m v_i \\ h &\overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 \\ \tau^i{}_k &\overset{\text{def}}{=} q_k = 0 \end{aligned} \tag{2.7.1}$$

et donc :

$$\begin{aligned} &a^k = -\tau^k{}_i v^i = 0 : \text{pas de courant de travail} \\ &q^k = 0 : \text{pas de courant de chaleur} \end{aligned}$$

Les seules variables d'état sont par conséquent la densité de masse $m(\vec{x}, t)$ et la vitesse $v_i(\vec{x}, t)$ et les *équations de mouvement* se réduisent à :

$$\begin{aligned} &\partial_t m + \operatorname{div}(\vec{v} m) = 0 \\ &m \dot{v}_i = k_i. \end{aligned} \tag{2.7.2}$$

Postulons encore pour cette matière une densité de charge électrique $q(\vec{x}, t)$ et restreignons-nous au cas où la densité de force extérieure k_i est celle de Lorentz uniquement, soit :

$$k_i = q(E_i + [\vec{v} \wedge \overleftrightarrow{B}]_i).$$

Une manière simple de réaliser l'équation de conservation de la charge

$$\partial_t q + \operatorname{div}(\vec{v} q) = 0$$

est de postuler :

$$q = \sigma m,$$

où σ est la charge spécifique (charge par unité de masse). La conservation de la charge découle alors de celle de la masse.

Le mouvement de la matière poudreuse est alors donné par la famille de trajectoires $\vec{z} = \vec{z}(t)$, solutions de l'*équation de mouvement*

$$\frac{d^2 \vec{z}(t)}{dt^2} = \sigma \left(\vec{E} + \left[\frac{d\vec{z}}{dt} \wedge \overleftrightarrow{B} \right] \right) (\vec{z}(t), t). \tag{2.7.3}$$

Si le second membre est nul (par exemple si $\sigma = 0$), alors les trajectoires sont des droites.

Il est possible de transposer ce résultat au mouvement d'une particule définie par $\vec{v}(\vec{x}, t) = \text{cte}$ là où $m(\vec{x}, t) = \text{cte}$. Nous n'insisterons pas sur ces choses bien connues.

2. Cas relativiste (cov/$\{L\}$)

Dans l'espace-temps, nous commençons par définir le *champ vectoriel temporel et normé*

$$(\omega_\alpha \, \omega^\alpha)(x) = -1. \tag{2.7.4}$$

Définition. Toute ligne d'univers d'un point matériel d'équation

$$x^\alpha = z^\alpha(\lambda)$$

appartient à la famille de solutions de l'équation différentielle

$$\frac{dz^\alpha(\lambda)}{d\lambda} = \omega^\alpha(z(\lambda)). \tag{2.7.5}$$

Donc $\omega^\alpha(z(\lambda))$ est le *vecteur tangent* en chaque point de la ligne d'univers $x^\alpha = z^\alpha(\lambda))$. Une telle ligne est temporelle, c'est-à-dire qu'elle est située à l'intérieur de tout cône de lumière dont le sommet est situé sur elle. Ceci traduit simplement le fait que la vitesse d'un point matériel est inférieure à celle de la lumière.

Après avoir posé cette définition, nous allons maintenant chercher à interpréter ω^α et le paramètre λ.

Dans l'espace physique à trois dimensions spatiales, la trajectoire $x^i = z^i(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$\frac{dz^i(t)}{dt} = v^i(z(t)),$$

où $v^i(z(t))$ est la vitesse du point matériel et t le temps.

Donc, puisque $t = x^4$,

$$\frac{dz^i}{dt} = \frac{dz^i}{dz^4} = \frac{dz^i}{d\lambda} \Big/ \frac{dz^4}{d\lambda} = \frac{\omega^i}{\omega^4} = v^i,$$

c'est-à-dire

$$\vec{\omega} = \omega^4 \vec{v}. \tag{2.7.6}$$

D'autre part, puisque :

$$\omega^\alpha \, \omega_\alpha = |\vec{\omega}|^2 - (\omega^4)^2 = -1$$

on a

$$(\omega^4)^2 = 1 + |\vec{\omega}|^2 = 1 + (\omega^4)^2 |\vec{v}|^2$$

et donc

$$(\omega^4)^2 = \frac{1}{1 - v^2} \quad \text{avec} \quad v^2 = |\vec{v}|^2.$$

Par conséquent :

$$\vec{\omega} = \pm \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2}} \;\; ; \;\; \omega^4 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}. \tag{2.7.7}$$

Le vecteur $\omega^\alpha(x)$ est alors appellé *quadrivitesse* (pour abréger, nous l'appellerons souvent vitesse).

Futur, passé et ailleurs

Pour pouvoir donner une signification aux signes $\pm$ dans (2.7.7) il est nécessaire d'introduire les notions de passé et de futur d'un point-événement $x_0 = (x_0^i, x_0^4)$

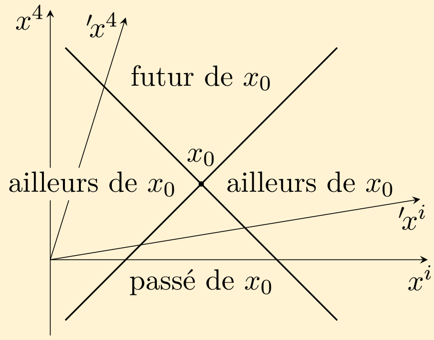


Fig. 2.7.1

Nous définissons le *futur de* x_0 comme l'ensemble des points-événements x tels qu'un signal émis de x_0 puisse leur parvenir. Comme la vitesse limite est celle de la lumière, ce domaine est constitué du cône de lumière d'angle d'ouverture dirigé vers $x^4 = +\infty$; le *passé de* x_0 sera défini comme étant l'ensemble des points-événements tels qu'un signal émis par l'un quelconque d'entre eux atteigne x_0 ; ce domaine est donc constitué du cône de lumière d'angle d'ouverture dirigé vers $x^4 = -\infty$ (cf. figure 2.7.1).

Ces définitions de futur et de passé d'un point-événement sont *absolues* (pour le groupe de Lorentz *propre*). Il est en effet impossible par une transformation de Lorentz propre d'amener un point-événement x du passé au futur et inversément (cf. figure 2.7.1). Le domaine des points-événements extérieurs aux cônes de lumière est alors appelé l'*ailleurs absolu*.

Revenons maintenant à la quadrivitesse.

Quadrivitesse et temps propre

Référentiel de repos en un point.

On appelle *référentiel de repos en* x_0 un référentiel $\{'x\}$ tel que :

$$'\omega'^{\alpha}('x_0) \overset{*}{=} (0, 0, 0, '\omega'^4).$$

Puisque $\omega^\alpha\omega_\alpha = -1$, on a

$$'\omega'^4 \overset{*}{=} \pm 1.$$

Les deux possibilités ($\pm$) définissent les référentiels ortho-chrones ou pseudo-chrones. De façon plus générale, nous introduisons la *classification suivante* selon que ω^α est pointé vers le futur ou vers le passé de x :

$$\omega^4(x) = \left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right. 0 \text{ dans un référentiel } \left\{ \begin{matrix} \text{ortho-} \\ \text{pseudo-} \end{matrix} \right. \text{chrone,}$$

ce qui peut encore s'écrire en introduisant la fonction sign :

$$\text{sign}(\omega^4(x)) = \left\{ \begin{matrix} +1 \\ -1 \end{matrix} \right. \text{ dans un référentiel } \left\{ \begin{matrix} \text{ortho-} \\ \text{pseudo-} \end{matrix} \right. \text{chrone.}$$

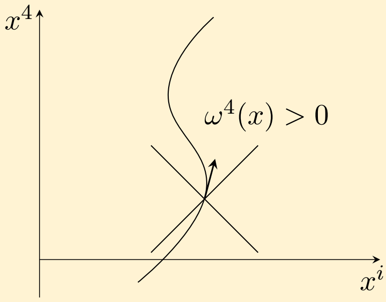


Fig. 2.7.2

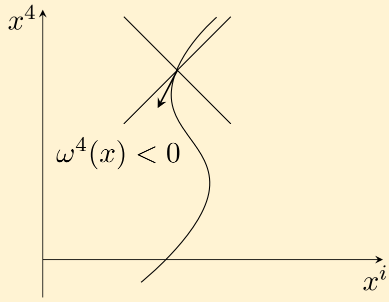


Fig. 2.7.3

Les deux référentiels se déduisent l'un de l'autre par la transformation $T \in \{L\}$ suivante

$$'\omega'^i = T\omega^i = \omega^i$$
$$'\omega'^4 = T\omega^4 = -\omega^4.$$

Nous verrons au chapitre suivant qu'il existe une définition thermodynamique pour ces deux types de référentiels.

Remarque.

Certains choisissent une métrique de signature signat$(g_{..}) = (-1,-1,-1,1)$; alors le vecteur temporel normé ω^α est ici : $\omega^\alpha\omega_\alpha = +1$. Au chapitre 3, nous considérerons le cas où

$$\omega^\alpha\omega_\alpha = -\epsilon\,; \quad \epsilon^2 = 1,$$

et nous en déduirons la signature de la métrique par des considérations thermodynamiques.

Temps propre

Reste à interpréter le paramètre λ. Pour ceci, commençons par nous placer dans *un référentiel local de repos*, pour lequel, par définition, on a

$$'\vec{\omega} \stackrel{*}{=} \vec{0}\,; \quad '\omega'^4 \stackrel{*}{=} \pm 1 = \mathrm{sign}('\omega'^4).$$

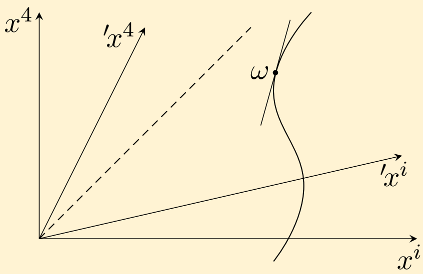


Fig. 2.7.4

Par conséquent :

$$\frac{d'z^4}{d\lambda} = \frac{d't}{d\lambda} = {'\omega'^4} \stackrel{*}{=} \mathrm{sign}('\omega'^4)$$

et donc

$$d'z'^4 = d't \overset{*}{=} d\lambda \cdot \mathrm{sign}({}'\omega'^4). \tag{2.7.10}$$

On interprète λ comme étant le *temps propre au point matériel.*

Etablissons maintenant la relation qu'il existe entre temps propre et temps coordonnée dans un référentiel où le point matériel est en mouvement. (Par temps coordonnée $z^4 = t$, nous entendons le temps propre de toute horloge fixe dans ce système de coordonnées). Nous avons :

$$\omega^\alpha \omega_\alpha = -1 = (\omega^4)^2(v^2 - 1)$$

et donc

$$\omega^4 = \frac{dt}{d\lambda} = \mathrm{sign}(\omega^4)\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

et

$$dt = \mathrm{sign}(\omega^4)\frac{d\lambda}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{2.7.11}$$

ce qui constitue la généralisation pour le groupe de Lorentz complet de ce qui a été établi à la section 2.4 pour le sous-groupe continu.

Les périodes de temps finies s'obtiennent par intégration de (2.7.11).

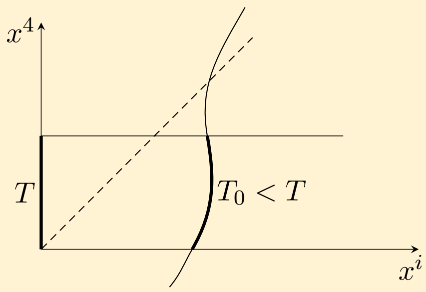


Fig. 2.7.5

Propriétés de la matière poudreuse

Nous pouvons maintenant passer à l'étude de la *matière poudreuse.* Par induction du cas prérelativiste, son *tenseur densité d'énergie* est défini par

$$\theta^{\alpha\beta}(x) = (m\,\omega^\alpha\omega^\beta)(x). \tag{2.7.12}$$

Un tel système substantiel est donc décrit par *cinq variables d'état dont quatre sont indépendantes* (puisque nous avons la relation de normalisation $\omega^\alpha\omega_\alpha = -1$ et une d'elles toujours supposée non négative : $m \geq 0$ (cf. chapitre 3).

La *fluxion substantielle* est la grandeur $\dot{f}(x)$ définie par :

$$\dot{f}(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{d}{d\lambda} f(z(\lambda))\Bigg|_{x=z(\lambda)} = (\omega^\alpha \partial_\alpha f)(x). \tag{2.7.13}$$

Comme $\omega^\alpha\omega_\alpha = -1$, on a $\dot{\omega}^\alpha\omega_\alpha = 0$ et, par conséquent, ω^α étant un vecteur temporel, la *quadriaccélération $\dot{\omega}^\alpha$ est un vecteur spatial.*

A) Cas de la matière poudreuse libre

Par « libre » nous voulons dire que le système $\Sigma^{(subst.)}$ est *fermé*, par conséquent :

$$\partial_\alpha \theta^{\alpha\beta}(x) = 0.$$

Montrons que dans ce cas, le champ scalaire $m(x)$ est conservatif.

$$\begin{aligned}\partial_\alpha \theta^{\alpha\beta} &= \partial_\alpha(m\omega^\alpha)\omega^\beta + m\omega^\alpha \partial_\alpha \omega^\beta \\ &= \partial_\alpha(m\omega^\alpha)\,\omega^\beta + m\dot{\omega}^\beta = 0\end{aligned}$$

et donc

$$\omega_\beta\,\partial_\alpha \theta^{\alpha\beta} = -\partial_\alpha(m\omega^\alpha) + 0 = 0.$$

On définit le courant qui sera interprété par la suite :

$$j^\alpha_M \stackrel{\text{def}}{=} m\omega^\alpha. \tag{2.7.14}$$

Nous obtenons donc l'*équation de continuité*

$$\partial_\alpha j^\alpha_M = 0 \tag{2.7.15}$$

et par suite

$$\partial_\alpha \theta^{\alpha\beta} = 0 + m\dot{\omega}^\beta = 0,$$

ce qui nous fournit les *équations de mouvement* (des ω^β) pour la matière poudreuse :

$$\dot{\omega}^\beta(z(\lambda)) = \frac{d^2 z^\beta(\lambda)}{d\lambda^2} = 0. \tag{2.7.16}$$

Ce sont les équations de la famille de *droites d'univers* $x^\alpha = z^\alpha(\lambda) = a^\alpha\lambda + b^\alpha$.

A l'aide de j^α_M nous définissons la grandeur $\overset{\cup}{M}$ suivante :

$$\overset{\cup}{M}[\tau] \stackrel{\text{def}}{=} \int_\tau d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha\, j^\alpha_M. \tag{2.7.17}$$

Grâce à l'équation (2.7.15) nous constatons que $\overset{\cup}{M}[\ldots]$ est conservée. En effet :

$$\begin{aligned}\overset{\cup}{M}[\tau''] - \overset{\cup}{M}[\tau'] &= \int_{\tau''} d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha\, j^\alpha_M - \int_{\tau'} d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha\, j^\alpha_M = \oint_{\tau^{ext.}} d\sigma^{ext}_\alpha\, j^\alpha_M \\ &= \int_{x\in\tau^{ext}} d^4V\, \underbrace{\partial_\alpha j^\alpha_M}_{=0} = 0.\end{aligned}$$

Comme $\overset{\cup}{M}[\ldots]$ est indépendant de la surface $\tau(y) = 0$, nous savons qu'il est possible de choisir sans perte de généralité une surface $\tau(y) = (y^4)^2 - \lambda^2 = 0$ telle que :

$$\overset{\cup}{M} = \int_\tau d^3V j^4_M = \int_\tau d^3V m\omega^4$$

et, puisque en vertu de (2.7.16) ω^4 est constant $\forall y \in \tau$, il vient :

$$\overset{\cup}{M} = \omega^4 \int_\tau d^3 V m \overset{\text{def}}{=} \omega^4 M,$$

et donc, dans le référentiel de repos, il vient

$$\overset{\cup}{M} \overset{*}{=} \text{sign}({}'\omega'^4) M. \tag{2.7.18}$$

Donc, $m(x) \geq 0$ s'interprète donc comme la *densité de masse au repos* et $\overset{\cup}{M}$ comme la *masse du système* $\Sigma^{(subst.)}$. En conséquence, j^α_M est le *courant de la masse* et l'équation (2.7.15) est l'*équation de conservation de la masse.*

Nous allons déduire de ces résultats une conséquence capitale. Par définition du tenseur densité d'énergie, nous avons :

$$\theta^{44} \overset{\text{def}}{=} h = m\, (\omega^4)^2 \geq 0 \tag{2.7.19}$$

et dans le référentiel de repos :

$$h \overset{*}{=} u = m \tag{2.7.20}$$

ce qui constitue une *égalité* ($c_0 = 1$) *universelle entre la masse et l'énergie de repos. L'inertie est donc une propriété de l'énergie* ; c'est là un résultat nouveau totalement inconnu de la mécanique prérelativiste. (2.7.20) est la formule d'Einstein ($E = Mc_0^2$). Nous allons maintenant déduire de ces équations la *dynamique de la particule* (libre). Celle-ci est définie dans une portion d'espace dans laquelle $\omega^\alpha(x) = \text{cte}$. Alors :

$$\overset{\cup}{\Pi}{}^\mu = \int_\tau d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha \theta^{\alpha\mu} = \int_\tau d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha j^\alpha_M \omega^\mu = \overset{\cup}{M}\omega^\mu.$$

où $\overset{\cup}{M}$ est la *masse de la particule.* Nous avons donc

$$\overset{\cup}{\Pi}{}^\mu = \overset{\cup}{M}\omega^\mu \; ; \;\; \overset{\cup}{\Pi}{}^\mu \overset{\cup}{\Pi}_\mu = |\overset{\cup}{\vec{\Pi}}|^2 - H^2 = -\overset{\cup}{M}{}^2, \tag{2.7.21}$$

où $\overset{\cup}{\vec{\Pi}}$ est la *quantité de mouvement* et H l'*énergie de la particule.*

$\overset{\cup}{\vec{\Pi}}$ et H peuvent donc s'écrire :

$$\overset{\cup}{\vec{\Pi}} = \overset{\cup}{M} \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2}} \tag{2.7.22}$$

$$H = \Pi^4 = \overset{\cup}{M}\omega^4 = \overset{\cup}{M} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} = \left(\overset{\cup}{M} + \frac{1}{2} \overset{\cup}{M} v^2 + \dots \right) > 0. \tag{2.7.23}$$

Pour des vitesses $|\vec{v}|$ très petites devant celle de la lumière, nous retrouvons le terme $(1/2)Mv^2$ de l'énergie cinétique prérelativiste (ajoutée à l'énergie de repos).

Les équations de mouvement de la particule libre sont encore les équations (2.7.16)

$$\dot{\omega}^\beta = 0 \; ; \quad \text{c'est-à-dire : } \dot{\vec{v}}(.) = 0.$$

Les trajectoires de la particule libre sont des droites et la vitesse est constante. Nous retrouvons bien un résultat trivial de la mécanique prérelativiste.

B) Cas de la matière poudreuse dans un champ électromagnétique

Nous examinerons maintenant le cas où le système total, fermé, est constitué du *système substantiel* (matière poudreuse) et du *système électromagnétique* :

$$\Sigma^{(tot.)} = \Sigma^{(subst.)} + \Sigma^{(em.)}.$$

Il existe donc un tenseur densité d'énergie totale $\theta^{(tot.)\alpha\beta}$ tel que :

$$\partial_\alpha \theta^{(tot.)\alpha\beta} = \partial_\alpha(\theta^{(subst.)\alpha\beta} + \theta^{(em.)\alpha\beta}) = 0$$

et donc

$$\partial_\alpha \theta^{(subst.)\alpha\beta} = -\partial_\alpha \theta^{(em.)\alpha\beta}.$$

Mais

$$-\partial_\alpha \theta^{(em.)\alpha\beta} = k_L^\beta$$

et

$$k_L^\beta = -j_Q^\alpha B_\alpha{}^\beta.$$

Donc :

$$\partial_\alpha \theta^{(subst.)\alpha\beta} = \partial_\alpha(m\omega^\alpha)\omega^\beta + m\dot{\omega}^\beta = -j_Q^\alpha B_\alpha{}^\beta$$

et, en contractant avec ω_β, nous obtenons

$$\omega_\beta \partial_\alpha \theta^{(subst.)\alpha\beta} = -\omega_\beta j_{Q\alpha} B^{\alpha\beta} = -\omega^\beta j_Q^\alpha B_{\alpha\beta}.$$

Il s'agit maintenant de préciser la nature des propriétés électromagnétiques de la matière poudreuse ; nous postulons pour ceci l'existence d'une *densité de charge au repos* $q(x)$ et admettons (hypothèse électronique de Lorentz) que *l'électricité est attachée à la substance.* Par conséquent nous avons :

$$j_Q^\alpha = q\omega^\alpha. \tag{2.7.24}$$

Remarque. Au chapitre 1, nous avions posé (1.2.4)

$$j_Q^4 = q,$$

tandis que, par (2.7.24), nous avons

$$j_Q^4 = q\omega^4.$$

Il y a un risque de confusion du fait que nous avons négligé de changer de notation. Peut-être eussions-nous dû écrire (2.7.24) comme :

$$j_Q^\alpha = q_0\omega^\alpha,$$

où l'indice 0 spécifierait que la densité est celle de *repos.*

Grâce à la définition (2.7.24), il vient

$$j_Q^\alpha \omega^\beta B_{\alpha\beta} = q\omega^{(\alpha}\omega^{\beta)} B_{[\alpha\beta]} = 0$$

et donc

$$\omega_\beta \partial_\alpha \theta^{(subst.)\alpha\beta} = -\partial_\alpha (m\omega^\alpha) = 0.$$

La conservation de la masse est encore réalisée.

Une manière simple de réaliser la conservation de la *charge électrique*

$$\overset{\cup}{Q}\,[\tau] = \int_{\tau=0} d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha j_Q^\alpha,$$

qui s'exprime par l'équation (1.2.6) :

$$\partial_\alpha j_Q^\alpha = 0,$$

est de poser :

$$q(x) = \sigma m(x), \tag{2.7.25}$$

où σ est la *charge spécifique*, supposée constante. Alors

$$j_Q^\alpha = \sigma j_M^\alpha$$

et

$$\partial_\alpha j_Q^\alpha = 0 \quad \text{découle de} \quad \partial_\alpha j_M^\alpha = 0.$$

L'équation de conservation $\partial_\alpha \theta^{(subst.)\alpha\beta} = k_L^\beta$ devient alors

$$m\dot{\omega}^\beta = -q\omega_\alpha B^{\alpha\beta}$$

c'est-à-dire

$$\dot{\omega}^\beta(x) = -\sigma(\omega_\alpha B^{\alpha\beta})(x). \tag{2.7.26}$$

Ce sont les *équations de mouvement de la matière poudreuse dans un champ électromagnétique.*

Nous allons les transcrire sous forme *tridimensionnelle* :

$$\dot{\omega}^i = \frac{d}{d\lambda}\omega^i = \frac{d\omega^i}{dt}\frac{dt}{d\lambda}.$$

Mais :

$$\frac{d\omega^i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\operatorname{sign}(\omega^4)\frac{v^i}{\sqrt{1-v^2}}\right)$$

et, par (2.7.11),

$$\frac{dt}{d\lambda} = \omega^4 = \operatorname{sign}(\omega^4)\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.$$

On arrive donc à

$$\dot{\omega}^i = \operatorname{sign}(\omega^4)\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\operatorname{sign}(\omega^4)v^i}{\sqrt{1-v^2}}\right).$$

D'autre part :

$$-\sigma\omega_\alpha B^{\alpha i} = -\sigma\big(\omega_4 B^{4i} + \omega_k B^{ki}\big) = -\sigma\omega^4\big(B_4{}^i + v_k B^{ki}\big).$$

Mais

$$B_4{}^i = B_{4i} = -B_{i4} = -E_i$$

et

$$v_k B^{ki} = -[\vec{v} \wedge B]^i,$$

donc

$$-\sigma\omega_\alpha B^{\alpha i} = \sigma \operatorname{sign}(\omega^4) \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} (E_i + [\vec{v} \wedge B]^i)$$

et l'équation $\dot{\omega}^i = -\sigma\omega_\alpha B^{\alpha i}$ devient

$$\frac{d}{dt}\left(\operatorname{sign}(\omega^4) \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right) = \sigma(\vec{E} + [\vec{v} \wedge \overleftrightarrow{B}]). \tag{2.7.27}$$

De l'équation (2.7.27), nous allons déduire l'équation de mouvement d'une particule dans un champ électromagnétique. Il suffit d'introduire :

$$\sigma = \frac{\overset{\cup}{Q}}{\overset{\cup}{M}},$$

où $\overset{\cup}{Q}$ et $\overset{\cup}{M}$ sont la *charge électrique* et la *masse de la particule*. En vertu des équations de conservation : $\partial_\alpha j^\alpha_Q = \partial_\alpha j^\alpha_M = 0$, ce sont des grandeurs *constantes au cours du mouvement*.

L'équation s'écrit alors

$$\frac{d}{dt}\left(\overset{\cup}{M} \operatorname{sign}(\omega^4) \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right) = \overset{\cup}{Q}\,(\vec{E} + [\vec{v} \wedge \overleftrightarrow{B}])$$

mais, par (2.7.22), elle devient

$$\frac{d}{dt} \overset{\cup}{\vec{\Pi}} = \operatorname{sign}(\omega^4)\, \overset{\cup}{Q}\,(\vec{E} + [\vec{v} \wedge \overleftrightarrow{B}]). \tag{2.7.28}$$

Remarque. Pour conserver la forme prérelativiste de la quantité de mouvement, certains ont introduit la « masse relativiste » $M_{\text{rel.}} = M\omega^4$; alors $\vec{\Pi} = M_{\text{rel.}}\vec{v}$. Ceci n'a pas beaucoup d'intérêt dans une théorie strictement cov/$\{L\}$.

Pour terminer, nous allons rapidement examiner l'effet du *renversement du temps T* sur les quantités figurant dans (2.7.28) (équation qui est bien entendu cov/$\{L\}$).

Nous avons :

$$'x'^{\alpha} = Tx^{\alpha} : \begin{cases} 'x'^{i} = x^{i} \\ 'x'^{4} = -x^{4} \end{cases}$$

$$'\overset{\cup}{\vec{\Pi}} = -\overset{\cup}{\vec{\Pi}}$$

$$'\vec{v} = \vec{v}$$

$$'\overset{\cup}{Q} = -\overset{\cup}{Q}$$

$$'\vec{E} = \vec{E} \ : \text{ le champ électrique ne change pas de signe}$$

$$'\overleftrightarrow{B} = \overleftrightarrow{B} \ : \text{ le champ magnétique ne change pas de signe}$$

$$'\vec{K}^{(el.)} = \mathrm{sign}('\omega'^{4})\,'\overset{\cup}{Q}\,'\vec{E} = \vec{K}^{(el)}$$

$$'\vec{K}^{(m.)} = \mathrm{sign}('\omega'^{4})\,'\overset{\cup}{Q}['\vec{v} \wedge '\overleftrightarrow{B}] = \vec{K}^{(m)}.$$

Les forces ne changent pas de signe (donc l'accélération de la particule non plus). La trajectoire reste donc la même.

En conclusion, nous pouvons dire que la matière poudreuse, aussi peu physique qu'elle soit, nous a permi d'obtenir facilement des résultats importants. Tout d'abord elle nous a permi de déduire *toute la mécanique* cov$\{L\}$ *de la particule.*

En particulier, nous pouvons constater que l'équation de mouvement (2.7.28) cov/$\{L\}$ s'éloigne beaucoup de l'équation (2.7.3) prérelativiste pour les grandes vitesses (à cause du terme $1/\sqrt{1-v^2}$).

Ensuite nous avons pu mettre en évidence *l'inertie de l'énergie*, qui est un résultat capital pour la compréhension de la physique nucléaire. En revanche, la conservation de la masse est accidentelle à la matière poudreuse et ne présente pas un caractère primordial (cf. chapitre 3).

Signalons que le modèle de la matière poudreuse donne de bons résultats lorsqu'on considère un fluide *très peu dense* (par exemple la densité des étoiles dans le ciel).

Chapitre 3

Thermodynamique du fluide relativiste

Présentation

Le deuxième et le premier principe sont tout d'abord énoncés aux sections 1 et 2. Le fluide parfait est ensuite étudié à la section 3. Les viscosités transversales et longitudinales font l'objet des sections 4 et 5. On montre en particulier que la métrique de l'espace-temps possède une dimension privilégiée. La conduction de chaleur est alors examinée à la section 6. Un résumé de thermodynamique du fluide fait l'objet de la section 7. On étudie ensuite à la section 8 les conditions d'extremum, et la vérification des équations de mouvement est faite à la section 9. Les conditions de maximum sont étudiées à la section 10 et le chapitre se termine (section 11) par l'étude de l'approximation linéaire.

3.1 Deuxième principe

Tout d'abord précisons que la définition d'un système reste celle de la section 2.5 ; s'il est de dimension finie (ce que nous supposerons), il est donc caractérisé dans l'univers par un tube du genre temps.

La thermodynamique $\mathrm{cov}/\{L\}$ se heurte dès le départ à une difficulté sérieuse : l'*impossibilité de séparer sans équivoque le travail et la chaleur* (cf. section 3.6). La notion de système adiabatique $\Sigma = \Sigma_0$ devient quelque chose d'assez peu précis, et il est impossible de l'utiliser dans l'énoncé du deuxième principe. Nous sommes pour cela dans l'obligation de nous limiter au *système fermé* $\Sigma = \Sigma_{00}$ (c'est d'ailleurs une condition nécessaire pour l'énoncé du principe d'équilibre !).

Deuxième principe

Pour tout système Σ, il existe une fonctionnelle extensive pseudo-chrone :

$$\overset{\cup}{S}[\tau(.), j_S(.)] \overset{\text{def}}{=} \int_{\tau(y)=0} (d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha j_S^\alpha)(y) \tag{3.1.1}$$

appelée entropie, qui, s'il est fermé : $\Sigma = \Sigma_{00}$, satisfait aux conditions suivantes :

a) Principe d'évolution :

$\overset{\cup}{S}[\ldots]$ est une fonction monotone et croissante du temps pour tout observateur :

$$\overset{\cup}{S}[\tau''(.)\ldots] - \overset{\cup}{S}[\tau'(.)\ldots] \geq 0 \text{ si } \tau''(y) = 0 \text{ est postérieure à } \tau'(y) = 0.$$

b) Principe d'équilibre :

$\overset{\cup}{S}[\ldots]$ tend vers un maximum pour le futur *absolu* lointain.

c) Commentaires :

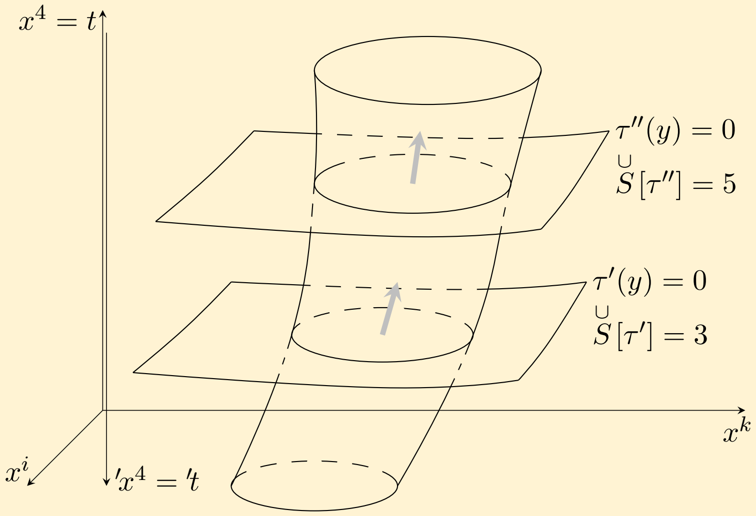


Fig. 3.1.1

La nécessité de définir l'entropie du système par un scalaire pseudo-chrone apparaît dans l'énoncé du principe d'évolution. Prenons en effet l'exemple de la figure 3.1.1.

Dans le *référentiel ortho-chrone*, $\tau''(y) = 0$ est postérieur à $\tau'(y) = 0$; le principe d'évolution s'écrit :

$$\overset{\cup}{S}[\tau''] - \overset{\cup}{S}[\tau'] = 5 - 3 = 2 > 0.$$

Dans le *référentiel pseudo-chrone* défini par

$$'x = Tx$$

nous avons
$$'\overset{\cup}{S}['\tau] = \int_{'\tau('y)=0} ('d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha 'j_S^\alpha)('y) = -\overset{\cup}{S}[\tau]$$
et, puisque dans ce référentiel $'\tau'('y) = 0$ est postérieur à $'\tau''('y) = 0$, il vient :
$$'\overset{\cup}{S}['\tau'] - '\overset{\cup}{S}['\tau''] = (-3) - (-5) = 2 > 0.$$
Or si l'entropie avait été définie comme un scalaire pur, nous aurions obtenu dans ce cas $-2 < 0$, ce qui eût été en contradiction avec le principe d'évolution.

Nous allons maintenant introduire une nouvelle grandeur : la *densité de source d'entropie* (ou *densité d'irréversibilité*). Le principe d'évolution peut s'écrire :
$$\overset{\cup}{S}[\tau''] - \overset{\cup}{S}[\tau'] = \int_{\tau''(y)=0} (d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha j_S^\alpha)(y) - \int_{\tau'(y)=0} (d\overset{\cup}{\sigma}_\alpha j_S^\alpha)(y) = \oint_{\tau^{ext.}(y)=0} (d\sigma_\alpha^{ext.} j_S^\alpha)(y),$$
où la surface fermée $\tau^{ext.}(y) = 0$ est formée des intersections du tube avec les surfaces $\tau''(y) = 0$ et $\tau'(y) = 0$ et de la surface du tube situé entre elles.

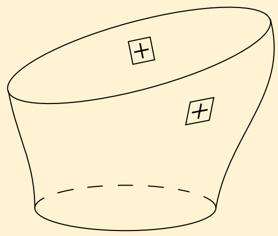


Fig. 3.1.2

La face $(+)$ du $d\sigma_\alpha^{ext.}(y)$ est dirigée vers l'extérieur. En appliquant le théorème de Gauss, nous obtenons :
$$\begin{aligned}\overset{\cup}{S}[\tau''] - \overset{\cup}{S}[\tau'] &= \oint_{\tau^{ext.}(y)=0} (d\sigma_\alpha^{ext.} j_S^\alpha)(y) = \int_{x\in\tau^{ext.}} (d^4V \partial_\alpha j_S^\alpha)(x) \\ &\overset{\text{def}}{=} \int_{x\in\tau^{ext.}} (d^4V i)(x) \geq 0.\end{aligned}$$
Cette définition est tout à fait légitime du fait que $\Sigma = \Sigma_{00}$ (aucune ligne de champ de $j_S^\alpha(x)$ ne traverse la cloison du tube, sinon il y aurait des échange d'énergie).

Il est possible de donner un *énoncé local du principe d'évolution* puisque τ'' et τ' sont quelconques :
$$\partial_\alpha j_S^\alpha(x) = i(x) \geq 0. \tag{3.1.2}$$
où $i(x)$ est la *densité de source d'entropie* et $j_S^\alpha(x)$ est le *vecteur densité d'entropie.* En conséquence de (3.1.1) et du principe d'évolution, le vecteur $j_S^\alpha(x)$ est du genre *temps.*

Nous discuterons du principe d'équilibre à la section 3.8, notamment du concept de futur absolu.

Signalons toutefois que dans l'exemple de la figure 3.1.1 le maximum de $\overset{\cup}{S}[\ldots]$ ne peut être atteint que dans le référentiel ortho-chrone, puisque seulement dans celui-ci nous avons pour t suffisamment grand

$$\overset{\cup}{S}[\ldots] > 0.$$

Le futur absolu est donc dans ce cas celui du référentiel ortho-chrone.

Nous verrons à la section 3.9 que le principe d'équilibre nous laisse le choix des deux types de référentiels, et que nous choisissons arbitrairement le futur absolu dans les référentiels ortho-chrones.

3.2 Premier principe

En fait, nous avons déjà étudié le premier principe à la section 2.5. Dans cette nouvelle section, nous allons énoncer le premier principe pour le système dont nous allons nous occuper : le *fluide à une seule composante chimique.*

Enoncé

Si un tel système est fermé : $\Sigma = \Sigma_{00}$, les grandeurs suivantes sont conservées :

1. — Quantité de mouvement-énergie :

$$\overset{\cup}{\Pi}{}^{\beta}[\tau(.), \theta^{\cdot\cdot}(.)] = \int_{\tau(y)=0} \big(d\overset{\cup}{\sigma}_{\alpha}\, \theta^{\alpha\beta}\big)(y) = \overset{\cup}{\Pi}{}'^{\beta}. \tag{3.2.1}$$

2. — Moment cinétique-centre d'énergie :

$$\overset{\cup}{M}{}^{\mu\nu}[\tau(.), \theta^{\cdot\cdot}(.)] = \int_{\tau(y)=0} \big(d\overset{\cup}{\sigma}_{\alpha}\,(y^{\mu}\theta^{\alpha\nu} - y^{\nu}\theta^{\alpha\mu})\big)(y) = \overset{\cup}{M}{}'^{\mu\nu}. \tag{3.2.2}$$

3. — Quantité de substance :

$$\overset{\cup}{N}[\tau(.), j_N^{\cdot}(.)] = \int_{\tau(y)=0} \big(d\overset{\cup}{\sigma}_{\alpha}\, j_N^{\alpha}\big)(y) \;= \overset{\cup}{N}{}'. \tag{3.2.3}$$

Comme nous l'avons vu à la section 2.5, les principes (3.2.1) *et* (3.2.2) fournissent l'*énoncé local* :

$$\theta^{\alpha\beta}(x) = \theta^{(\alpha\beta)}(x)\ ; \quad \partial_{\alpha}\theta^{\alpha\beta}(x) = 0. \tag{3.2.4}$$

Ensuite, (3.2.3) seule donne

$$\partial_{\alpha} j_N^{\alpha}(x) = 0, \tag{3.2.5}$$

où $\{j_N^{\alpha}\}(x)$ est le vecteur densité de substance.

En thermodynamique non relativiste du fluide à une seule composante chimique (cf. livre I, chapitre 2), le premier principe contenait également la conservation de la substance. Toutefois, la condition de cov/$\{G\}$ des équations de conservation et l'introduction de l'axiome de Newton avaient pour conséquence la conservation de la masse ; ainsi, masse et quantité de substance étant simplement proportionnelles, l'équation de conservation de la substance devenait superflue. (Attention ! cela ne signifiait pas qu'elles se déduisait des autres équations de conservation : la conservation de la masse permettait seulement de déduire la proportionnalité mentionnée ci-dessus !)

Nous verrons qu'en thermodynamique cov/$\{L\}$, la conservation de la masse disparaît dès que l'on étudie un fluide plus réaliste que la matière poudreuse, (3.2.3) ou (3.2.5) est donc nécessaire.

Les équations (3.1.2), (3.2.4) et (3.2.5) sont les équations de conservation d'un système fermé ($\Sigma = \Sigma_{00}$). Est-ce à dire que nous laissons traiter, à titre d'exercice, le cas du système ouvert ? En réalité, pour un tel système, l'éventuelle perte de symétrie de la densité d'énergie $\theta^{\alpha\beta}$ pose certains problèmes que nous ne voulons pas traiter ici. Remarquons d'ailleurs que l'étude du système fermé n'est pas nécessairement restrictive : il est généralement possible d'englober un système ouvert dans un système plus vaste qui lui est fermé. La seule différence étant qu'alors, toutes les grandeurs qui interviennent sont des fonctions d'état du système total.

Mis à part cette question de fermeture, nous ferons sur le système les mêmes hypothèses que celles faites dans le cas non relativiste (cf. livre I, chapitre 2).

Hypothèses de validité

1) L'état du système est complètement décrit par les $n+1$ variables d'état ($n = 4$) indépendantes.

Or (3.1.2), (3.2.4) et (3.2.5) fournissent $1 + n + 1$ équations ; elles ne sont pas toutes indépendantes, et, si $\{\omega_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,n}$, T et μ sont des coefficients indépendants non tous nuls, la condition :

$$\epsilon\omega_\beta\partial_\alpha\theta^{\alpha\beta} + T(\partial_\alpha j^\alpha_S - i) + \mu\partial_\alpha j^\alpha_N = 0 \tag{3.2.6}$$

doit être vérifiée quel que soit l'état du système. Les coefficients $\{\omega_\alpha\}$, T et μ *sont donc des fonctions d'état indépendantes* et il s'avère judicieux de les choisir comme les *variables d'état du système.* La condition (3.2.6) qui est homogène pour ces coefficients est définie à une constante près. Nous éliminons cet arbitraire en *normalisant* les ω_α :

$$\omega_\alpha\omega^\alpha(x) = -\epsilon \qquad \epsilon^2 = 1. \tag{3.2.7}$$

Cette condition de normalisation réduit le nombre des variables d'état à $n+1$, ce qui doit être, par hypothèse.

On remarque que (3.2.6) est l'application du théorème d'algèbre linéaire suivant : $\lambda^i X_i = 0$ et les X_i indépendants non nuls implique $\lambda^i = 0$, $\forall\, i$.

Il aurait été très maladroit de choisir, comme en thermodynamique non relativiste, des variables d'état directement à partir des équations de conservation.

2. — Les grandeurs thermodynamiques $\theta^{\alpha\beta}$, j_S^α et j_N^α ne dépendent, outre des variables d'état, que linéairement de leurs dérivées premières.

Ceci est une traduction différente de la condition imposée aux coefficents d'Onsager en thermodynamique non relativiste et qui servait à exprimer que les échanges se font par des phénomènes de transfert.

La densité d'énergie $\theta^{\alpha\beta}(x)$ est par conséquent une fonctionnelle quasi-locale des variables d'état. L'hypothèse de linéarité des dérivées premières nous permet de la décomposer en plusieurs termes :

$$\theta^{\alpha\beta}(x) = \theta^{\alpha\beta}_{(0)} + \theta^{\alpha\beta}_{(\eta)} + \theta^{\alpha\beta}_{(\xi)} + \theta^{\alpha\beta}_{(\kappa)},$$

où le premier terme, $\theta^{\alpha\beta}_{(0)}$, est le terme local et les autres n'étant en principe quasi-locaux que par la dérivée d'un seul type de variable. (Nous disons « en principe » car nous verrons que l'indexage ((0), (η), (ξ), (κ)) de séparation qui a son correspondant en thermodynamique non relativiste n'est pas tout à fait compatible avec cette hypothèse.)

Il s'agira maintenant d'examiner quelles conditions doivent remplir ces différents termes pour que (3.2.6) soit vérifiée. Mais tout d'abord, remarquons que la condition de normalisation (3.2.7) nous permet d'identifier le champ $\{\omega_\alpha\}$ avec le *le champ de la quadrivitesse.*

D'autre part, dans un *référentiel ortho-chrone local de repos*, la densité d'énergie de repos :

$$\theta^{44}(x) \overset{*}{=} u$$

peut être identifiée à la *densité d'energie interne*

$$u = u[s, n],$$

où s est la *densité d'entropie de repos* et n la *densité de quantité de substance au repos.*

Ces deux grandeurs d'état sont reliées à nos variables d'état par les définitions :

$$\begin{aligned} T[s,n] &\overset{\text{def}}{=} u_s[s,n] \\ \mu[s,n] &\overset{\text{def}}{=} u_n[s,n] \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

où par exemple $u_s = \partial u/\partial s$. Les variables d'état T et μ sont choisies comme la *température* et le *potentiel chimique.*

3.3 Fluide parfait

Le terme le plus général de la densité $\theta^{\alpha\beta}(x)$ est de la forme

$$\theta^{\alpha\beta}_{(0)}(x) = (m[T,\mu]\,\omega^\alpha\omega^\beta + \epsilon g^{\alpha\beta} p[T,\mu])(x). \tag{3.3.1}$$

Nous verrons qu'il doit être considéré comme une *définition* cov/$\{L\}$ *du fluide parfait.* En effet, si le système n'est constitué que de ce fluide, c'est-à-dire si on a

$$\theta^{\alpha\beta}(x) = \theta^{\alpha\beta}_{(0)}(x),$$

alors les *équations de mouvement de la quadrivitesse* sont données par

$$\partial_\alpha \theta^{\alpha\beta}(x) = 0 = (\partial_\alpha(m\,\omega^\alpha)\omega^\beta + m\,\dot{\omega}^\beta + \epsilon\partial^\beta p)(x) = 0.$$

Posons :

$$j^\alpha_M(x) \stackrel{\text{def}}{=} (m\,\omega^\alpha)(x). \tag{3.3.2}$$

En contractant avec ω_β, nous obtenons

$$\omega_\beta \partial_\alpha \theta^{\alpha\beta}(x) = (-\epsilon\partial_\alpha j^\alpha_M + 0 + \epsilon\dot{p})(x) = 0$$

et donc

$$(\partial_\alpha j^\alpha_M = \dot{p})(x). \tag{3.3.3}$$

En écrivant $\partial^\beta p \stackrel{\text{def}}{=} p^\beta$ et en définissant

$$p^\beta_\perp \stackrel{\text{def}}{=} p^\beta + \epsilon\omega^\beta \dot{p}, \tag{3.3.4}$$

les équations de mouvement s'écrivent

$$\partial_\alpha \theta^{\alpha\beta}(x) = 0 = (\omega^\beta \dot{p} + m\dot{\omega}^\beta + \epsilon p^\beta)(x) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\left(m\dot{\omega}^\beta + \epsilon p^\beta_\perp\right)(x) = 0. \tag{3.3.5}$$

Dans un *référentiel local de repos*, ces équations se réduisent à :

$$\begin{aligned} m\dot{\omega}^i + \epsilon p^i_\perp &\stackrel{*}{=} m\dot{\omega}^i + \epsilon p^i = 0 \\ m\dot{\omega}^4 + p^4_\perp &\stackrel{*}{=} m\dot{\omega}^4 = 0. \end{aligned}$$

Or on a

$$\underbrace{-g_{44}}_{\epsilon}(dz^4)^2 \stackrel{*}{=} d\lambda^2 \implies d\lambda^2 \stackrel{*}{=} dt^2 \text{ et } \dot{\omega}^i = \frac{d^2 z^i}{d\lambda^2} \stackrel{*}{=} \frac{d^2 z^i}{dt^2}.$$

Les équations (spatiales) se récrivent alors

$$\left(m\,\frac{d^2\vec{z}}{dt^2} + \epsilon\,\overrightarrow{\text{grad}}\,p\right)(\vec{z}(t), t) = 0. \tag{3.3.6}$$

En comparant cette équation avec celle obtenue en thermodynamique non relativiste pour les fluides parfaits, nous constatons qu'elles sont identiques à condition d'identifier dans (3.3.6) m avec la *densité de masse au repos* et p avec la *pression scalaire.*

Par suite, (3.3.2) est la *définition du courant de masse* et (3.3.3) exprime la *non-conservation de la masse.* La définition (3.3.4) est celle de la *dérivée normale* ($\perp$) *de la pression* (ou projection spatiale du gradient de pression) ; en effet on a

$$\omega_\beta p_\perp^\beta = \omega_\beta p^\beta + \epsilon \omega_\beta \omega^\beta \dot{p} = \dot{p} + \underbrace{\epsilon(-\epsilon)}_{-1} \dot{p} = 0.$$

Retournons maintenant au système général pour lequel $\theta_{(0)}^{\alpha\beta}(x)$ n'est plus que le terme local de la densité $\theta^{\alpha\beta}(x)$ et examinons quelles conditions doivent remplir les fonctions d'état $j_{S(0)}^\alpha[\ldots]$ et $j_{N(0)}^\alpha[\ldots]$ pour que (3.2.6), c'est-à-dire

$$\epsilon \omega_\beta \partial_\alpha \theta_{(0)}^{\alpha\beta} = -T(\partial_\alpha j_{S(0)}^\alpha - i_{(0)}) - \mu \partial_\alpha j_{N(0)}^\alpha,$$

soit identiquement vérifiée.

Tout d'abord, remarquons que si nous renversons le mouvement ($\omega^\alpha \longrightarrow -\omega^\alpha$, alors $\theta_{(0)}^{\alpha\beta}$ ne change pas : *le fluide parfait est donc invariant sous une inversion du temps.* Il en résulte que la densité d'irréversibilité doit être nulle :

$$i_{(0)}(x) = 0. \tag{3.3.7}$$

Ensuite, nous constatons que, dans un référentiel local de repos,

$$\theta_{(0)}^{44}(x) \overset{*}{=} u[s,n] = m[T,\mu] - p[T,\mu].$$

Par conséquent

$$m = u + p = w, \tag{3.3.8}$$

ce qui montre que *la densité de masse au repos est également la densité d'enthalpie au repos.*

En vue d'exprimer facilement les courants $j_{S(0)}^\alpha$ et $j_{N(0)}^\alpha$ comme fonctions d'état, il est habile de considérer le changement provisoire de variables d'état défini par

$$T, \mu \;\longrightarrow\; s, n.$$

Il s'agit donc maintenant d'exprimer dans (3.3.8) que m devient ainsi une fonction d'état des variables d'état s et n

$$m[s,n] = u[s,n] + p\big[T[s,n], \mu[s,n]\big].$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} m_s &= u_s + p_T T_s + p_\mu \mu_s \\ m_n &= u_n + p_T T_n + p_\mu \mu_n. \end{aligned}$$

Or $u_s \overset{\text{def}}{=} T$ et $u_n \overset{\text{def}}{=} \mu$ et donc nécessairement

$$m[s,n] = sT[s,n] + n\mu[s,n]. \tag{3.3.9}$$

Ceci établi, nous avons :

$$\epsilon\,\omega_\beta \partial_\alpha \theta^{\alpha\beta}_{(0)} = -\partial_\alpha(m\omega^\alpha) + \dot{p} = -m\partial_\alpha\omega^\alpha - \dot{m} + \dot{p}.$$

Or $-\dot{m} + \dot{p} = -\dot{u}$ et $\dot{u}[s,n] = u_s\dot{s} + u_n\dot{n} = T\dot{s} + \mu\dot{n}$ et donc

$$\epsilon\omega_\beta\partial_\alpha\theta^{\alpha\beta}_{(0)} = -m\partial_\alpha\omega^\alpha - T\dot{s} - \mu\dot{n} \overset{(3.2.6)}{\equiv} -T\partial_\alpha j^\alpha_{S(0)} - \mu\partial_\alpha j^\alpha_{N(0)}.$$

Mais on a aussi

$$\begin{aligned} -T\dot{s} - \mu\dot{n} &= -T\omega^\alpha\partial_\alpha s - \mu\omega^\alpha\partial_\alpha n \\ &= -T\big(\partial_\alpha(\omega^\alpha s) - s\partial_\alpha\omega^\alpha\big) - \mu(\partial_\alpha(\omega^\alpha n) - n\partial_\alpha\omega^\alpha) \end{aligned}$$

et donc l'expression considérée devient

$$\epsilon\,\omega_\beta\partial_\alpha\theta^{\alpha\beta}_{(0)} = -\underbrace{(m - Ts - \mu n)}_{=0 \text{ d'après } (3.3.9)}\partial_\alpha\omega^\alpha - T\partial_\alpha(\omega^\alpha s) - \mu\partial_\alpha(\omega^\alpha n).$$

L'identification donne enfin

$$\begin{aligned} j^\alpha_{S(0)}(x) &= (\omega^\alpha s)(x) \\ j^\alpha_N(x) &= (\omega^\alpha n)(x), \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

où, dans la deuxième équation, l'indice (0) n'est pas nécessaire car nous verrons qu'il n'y a pas d'autre contribution à j^α_N.

Dans un référentiel local de repos ($\omega^4 \overset{*}{=} \pm 1 = \mathrm{sign}(\omega^4)$), nous avons

$$\begin{aligned} j^4_{S(0)} &\overset{*}{=} \mathrm{sign}(\omega^4)s \\ j^4_N &\overset{*}{=} \mathrm{sign}(\omega^4)n, \end{aligned}$$

où $\mathrm{sign}(\omega^4) \overset{*}{=} \pm 1$ suivant que le référentiel est ortho-chrone ou pseudo-chrone. Par conséquent, en vertu de (3.2.8), $T[s,n]$ et $\mu[s,n]$ n'ont leurs vraies significations que dans les *référentiels ortho-chrones* (nous reviendrons sur cette question à la section 3.8).

3.4 Viscosité transversale

On donne d'abord quelques *définitions*.

1. — *Gradient symétrique de la quadrivitesse* :

$$\omega_{(\alpha\beta)}(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\partial_\alpha\omega_\beta + \partial_\beta\omega_\alpha)(x). \tag{3.4.1}$$

Propriété : $2\,\omega^\alpha\omega_{\alpha\beta} = \dot{\omega}_\beta$.

2. — *Projection spatiale de $\omega_{\alpha\beta}(x)$:*

$$\omega_{\alpha\beta\perp}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Big(\omega_{\alpha\beta} + \frac{\epsilon}{2}\big(\dot\omega_\alpha\omega_\beta + \omega_\alpha\dot\omega_\beta\big)\Big)(x). \tag{3.4.2}$$

Propriété : $\omega^\alpha\omega_{\alpha\beta\perp} = 0$.

3. — *Projection spatiale de la métrique :*

$$g_{\alpha\beta\perp}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (g_{\alpha\beta} + \epsilon\,\omega_\alpha\omega_\beta)(x) \tag{3.4.3}$$

Propriété : $\omega^\alpha g_{\alpha\beta\perp} = 0$.

4. — *Réduction de $\omega_{\alpha\beta}(x)$:*

$$\begin{aligned} &\omega_{\alpha\beta\perp} = \omega_{\alpha\beta\perp}^{(0)} + \frac{1}{n-1} g_{\alpha\beta\perp}\omega^\rho{}_\rho \\ &\omega_{\alpha\beta\perp}^{(0)} : \text{ tenseur de trace nulle} \\ &\omega^\rho{}_\rho = \partial_\alpha\omega^\alpha = g^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta\perp} : \text{trace.} \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Nous devons maintenant nous occuper des termes quasi-locaux. Par hypothèse de linéarité il est impossible de construire dix de ces termes, ne contenant chacun qu'un seul type de dérivée. Toutefois, le fluide considéré n'ayant qu'une seule substance chimique, il n'y a pas de transfert de substance : les dérivées du potentiel chimique μ n'interviennent donc pas et le nombre de termes est réduit à sept.

Si nous écrivons : $\theta^{\alpha\beta} = \theta^{\alpha\beta}_{(0)} + \theta^{\alpha\beta}_{(r)}$, alors en toute généralité (avec la notation $T^\alpha = \partial^\alpha T$) :

$$\begin{aligned} \theta^{\alpha\beta}_{(r)} = &-2\epsilon\eta[T,\mu]\omega^{\alpha\beta} + \rho[T,\mu](\dot\omega^\alpha\omega^\beta + \omega^\alpha\dot\omega^\beta) \\ &- \epsilon\xi[T,\mu]g^{\alpha\beta}\omega^\rho{}_\rho - \bar\xi[T,\mu]\omega^\alpha\omega^\beta\omega^\rho{}_\rho \\ &- \epsilon\kappa[T,\mu](\omega^\alpha T^\beta + \omega^\beta T^\alpha) - \epsilon\lambda[T,\mu]g^{\alpha\beta}\dot T \\ &- \chi[T,\mu]\omega^\alpha\omega^\beta\dot T. \end{aligned}$$

Il est déjà possible de tirer quelques conclusions en nous plaçant dans un référentiel local de repos (ortho-chrone) où :

$$\theta^{44}(x) \stackrel{*}{=} \theta^{44}_{(0)} \stackrel{*}{=} u[s,n]$$

et donc $\theta^{44}_{(r)} \stackrel{*}{=} 0$. Mais on a :

$$\begin{aligned} &\omega^4 \stackrel{*}{=} 1\ ;\quad \omega^i \stackrel{*}{=} 0\ ;\quad \dot\omega^i \stackrel{*}{=} \partial_t v^i\ ;\quad \dot\omega^4 \stackrel{*}{=} 0\ ;\ \longrightarrow\ \omega^\rho{}_\rho \stackrel{*}{=} v^i{}_i \\ &\omega_\alpha\omega^\alpha \stackrel{*}{=} \omega_4\omega^4 \stackrel{*}{=} g_{44}(\omega^4)^2 = -\epsilon\ ;\ \longrightarrow\ g_{44} = -\epsilon\ ;\quad \omega_4 = -\epsilon\underbrace{\omega^4}_{=1} \\ &\dot T = \omega^\rho\partial_\rho T = \omega_\rho T^\rho \stackrel{*}{=} \omega_4 T^4 \stackrel{*}{=} \epsilon T^4. \end{aligned}$$

Par conséquent on a

$$\theta^{44}_{(r)} \overset{*}{=} (\xi - \bar{\xi})v^i_{\ i} - \epsilon(2\kappa + \lambda - \chi)T^4 \overset{*}{=} 0,$$

ce qui entraîne

$$\xi = \bar{\xi}\ ;\quad 2\kappa + \lambda = \chi. \tag{3.4.5}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} \theta^{\alpha\beta}_{(r)} = &-2\epsilon\eta[T,\mu]\omega^{\alpha\beta} + \rho[T,\mu](\dot{\omega}^\alpha\omega^\beta + \omega^\alpha\dot{\omega}^\beta) \\ &- \epsilon\xi[T,\mu]g^{\alpha\beta}_{\perp}\omega^\rho_{\ \rho} - \epsilon\kappa[T,\mu](\omega^\alpha T^\beta + \omega^\beta T^\alpha) \\ &- \epsilon\lambda[T,\mu]g^{\alpha\beta}\dot{T} - (2\kappa+\lambda)[T,\mu]\omega^\alpha\omega^\beta\dot{T}. \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

Remarquons que l'on peut écrire

$$\epsilon\,\omega_\beta\partial_\alpha\theta^{\alpha\beta} = \epsilon\,\partial_\alpha(\omega_\beta\theta^{\alpha\beta}) - \epsilon\,\theta^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta}.$$

Le premier terme est *la divergence de $\theta^{\alpha\beta}$ projetée sur la quadrivitesse*. Or il est toujours possible de décomposer un tenseur $u^{\alpha\beta}$ de la manière suivante

$$u^{\alpha\beta} = u^{\alpha\beta}_{\perp} + u^{\alpha\beta}_{\parallel} \quad \text{de telle sorte que} \quad \omega_\alpha u^{\alpha\beta}_{\perp} = 0 \text{ et } \omega_\alpha u^{\alpha\beta}_{\parallel} = \omega_\alpha u^{\alpha\beta}.$$

Nous allons opérer cette décomposition sur notre tenseur $\theta^{\alpha\beta}_{(r)}$ et nous occuper en premier lieu des termes normaux à ω_β (pour lesquels la divergence ci-dessus est nulle).

On peut transformer (d'après (3.4.2)) le premier terme de (3.4.6) :

$$\begin{aligned} &-2\epsilon\eta[T,\mu]\omega^{\alpha\beta} + \rho[T,\mu](\dot{\omega}^\alpha\omega^\beta + \omega^\alpha\dot{\omega}^\beta) = \\ &\qquad -2\epsilon\eta[T,\mu]\omega^{\alpha\beta}_{\perp} + (\rho+\eta)[T,\mu](\dot{\omega}^\alpha\omega^\beta + \omega^\alpha\dot{\omega}^\beta). \end{aligned}$$

Le premier terme est de cette espèce (orthogonalité à ω_β) ; nous allons poser :

$$\theta^{\alpha\beta}_{(\eta)} = -2\epsilon\eta[T,\mu]\omega^{\alpha\beta}_{\perp} \tag{3.4.7}$$

et alors

$$\epsilon\omega_\beta\partial_\alpha\theta^{\alpha\beta}_{(\eta)} = 0 + 2\eta[T,\mu]\omega^{\alpha\beta}_{\perp}\omega_{\alpha\beta},$$

où

$$\omega^{\alpha\beta}_{\perp}\omega_{\alpha\beta} = \omega^{\alpha\beta}_{\perp}\omega_{\alpha\beta\perp}.$$

En effet, par (3.4.2) :

$$\omega^{\alpha\beta}_{\perp}\omega_{\alpha\beta} = \omega^{\alpha\beta}_{\perp}(\omega_{\alpha\beta\perp} - \frac{\epsilon}{2}(\dot{\omega}_\alpha\omega_\beta + \omega_\alpha\dot{\omega}_\beta)) = \omega^{\alpha\beta}_{\perp}\omega_{\alpha\beta\perp} - \epsilon\underbrace{\omega^{(\alpha\beta)}_{\perp}\dot{\omega}_{(\alpha}\omega_{\beta)}}_{=0}.$$

Par (3.2.6) nous devons avoir

$$\epsilon\,\omega_\beta\partial_\alpha\theta^{\alpha\beta}_{(\eta)} = 2\eta[\ldots]\omega^{\alpha\beta}_{\perp}\omega_{\alpha\beta\perp} \equiv -T(\partial_\alpha j^\alpha_{S(\eta)} - i_{(\eta)}) - \mu\partial_\alpha j^\alpha_{N(\eta)}.$$

Si $\omega_\perp^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta\perp}$ est une *forme définie*, nous devons avoir

$$j^\alpha_{S(\eta)} = 0\ ;\quad j^\alpha_{N(\eta)} = 0\ ;\quad Ti_{(\eta)} = 2\eta[T,\mu]\omega_\perp^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta\perp}.$$

Il s'agit donc d'examiner sous quelles conditions cette forme est définie. La métrique pouvant toujours être supposée diagonale :

$$\{g_{\alpha\beta}\} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} \end{pmatrix},$$

nous pouvons écrire

$$\omega_\perp^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta\perp} = g_{\alpha\alpha}g_{\beta\beta}(\omega_\perp^{\alpha\beta})^2.$$

D'autre part, puisque $\omega_\alpha\omega_\perp^{\alpha\beta} = 0$, $\omega_\perp^{\alpha\beta}$ est dans un référentiel local de repos :

$$\omega_\perp^{\alpha\beta} \overset{*}{=} \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & \omega_\perp^{ij} & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puisqu'en effet : $\omega^\alpha \overset{*}{=} (0,0,0,\omega^4)$. Par conséquent :

$$\omega_\perp^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta\perp} \overset{*}{=} g_{ii}g_{kk}(\omega_\perp^{ik})^2$$

et nous constatons que *cette forme est définie si la métrique spatiale* $\{g_{ik}\}$ *est définie*; de plus, si $\omega_\perp^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta\perp}$ est définie, alors elle est *définie non négative.*

Par ailleurs :

$$\omega_\alpha\omega^\alpha \overset{*}{=} \omega_4\omega^4 = g_{44}\underbrace{(\omega^4)^2}_{=1} = -\epsilon,$$

et donc $g_{44} = -\epsilon$. Ainsi il y a quatre cas à considérer :

$$\epsilon = +1 \quad \{g_{\alpha\beta}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\epsilon = -1 \quad \{g_{\alpha\beta}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La métrique est donc soit *définie*, soit *indéfinie avec une seule dimension privilégiée qui est le temps.* Malheureusement la thermodynamique ne parvient pas à exclure les deux cas d'inexistence du temps (statique pure).

De ceci résulte :

$$i_{(\eta)} = 2\frac{\eta[T,\mu]}{T}\underbrace{\omega_\perp^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta\perp}}_{\geq 0} \geq 0,$$

et donc
$$\frac{\eta[T,\mu]}{T} \geq 0. \tag{3.4.8}$$
Par analogie avec ce qui a été fait en thermodynamique non relativiste, nous préférons utiliser l'expression irréductible :
$$\theta^{\alpha\beta}_{(\eta)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} -2\epsilon\eta[T,\mu]\omega_{\perp}^{\alpha\beta(0)}(x). \tag{3.4.9}$$
Alors en vertu de (3.4.4), le terme $-\epsilon\xi[T,\mu]g_{\perp}^{\alpha\beta}\omega^{\rho}_{\rho}$ dans (3.4.6) doit être remplacé par $-\epsilon\xi'[T,\mu]g_{\perp}^{\alpha\beta}\omega^{\rho}_{\rho}$ où :
$$\xi'[T,\mu] = \left(\xi - \frac{2\eta}{n-1}\right)[T,\mu]. \tag{3.4.10}$$
Avec la définition (3.4.9), l'irréversibilité s'écrit :
$$i_{(\eta)} = \frac{2\eta[T,\mu]}{T}\omega_{\perp}^{\alpha\beta(0)}\omega_{\alpha\beta\perp}^{(0)}. \tag{3.4.11}$$
En effet on a
$$\begin{aligned}\omega_{\perp}^{\alpha\beta(0)}\omega_{\alpha\beta\perp} &= \omega_{\perp}^{\alpha\beta(0)}\big(\omega_{\alpha\beta\perp}^{(0)} + \frac{1}{n-1}g_{\alpha\beta\perp}\omega^{\rho}{}_{\rho}\big)\\ &= \omega_{\perp}^{\alpha\beta(0)}\omega_{\alpha\beta\perp}^{(0)} + \frac{1}{n-1}\underbrace{\omega_{\perp}^{\alpha\beta(0)}g_{\alpha\beta\perp}}_{\omega^{\rho}{}_{\rho\perp}^{(0)}=0}\omega^{\rho}{}_{\rho}.\end{aligned}$$
Pour interpréter les grandeurs que nous avons introduites, plaçons-nous dans un référentiel local de repos. Nous avons alors
$$2\omega_{\perp}^{ik(0)} = 2\omega^{ik} + \epsilon\,\dot{\omega}^i\omega^k + \epsilon\,\omega^i\dot{\omega}^k - \frac{2}{n-1}(g^{ik} + \epsilon\,\omega^i\omega^k)\omega^{\rho}{}_{\rho}.$$
Nous avons aussi
$$\omega^{ik} \stackrel{*}{=} v^{ik} \quad \text{et} \quad \omega^{\rho}{}_{\rho} \stackrel{*}{=} v^{i}{}_{i}$$
et, en posant $\epsilon = 1$, $n = 4 = d+1$, nous obtenons
$$2\omega_{\perp}^{ik(0)} \stackrel{*}{=} 2v^{ik} - \frac{2}{d}g^{ik}v^{\ell}{}_{\ell} = 2v^{ik(0)}$$
et
$$\begin{aligned}\theta^{ik}_{(\eta)} &= -\tau^{ik}_{(\eta)} \stackrel{*}{=} -2\eta[\ldots]v^{ik(0)}\\ i_{(\eta)} &\stackrel{*}{=} \frac{2\eta}{T}v^{ik(0)}v^{(0)}_{ik} \geq 0.\end{aligned}$$
Par comparaison, nous voyons que $\eta[T,\mu]$ doit être identifié au *coefficient de viscosité transversale* ; $\theta^{\alpha\beta}_{(\eta)}$ décrit donc les phénomènes de viscosité transversale.

3.5 Viscosité longitudinale

Le prochain terme que nous allons examiner est

$$\theta^{\alpha\beta}_{(\xi)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\epsilon\,\xi'[T,\mu] g^{\alpha\beta}_{\perp} \omega^{\rho}{}_{\rho}(x). \tag{3.5.1}$$

Nous devons avoir

$$\begin{aligned}
\epsilon\omega_\beta \partial_\alpha \theta^{\alpha\beta}_{(\xi)} &= \epsilon\partial_\alpha\left(\omega_\beta \theta^{\alpha\beta}_{(\xi)}\right) - \epsilon\theta^{\alpha\beta}_{(\xi)}\,\partial_\alpha\omega_\beta \\
&= 0 + \xi'[T,\mu]\omega^{\rho}{}_{\rho}\underbrace{g^{\alpha\beta}_{\perp}\partial_\alpha\omega_\beta}_{\partial_\alpha\omega^\alpha = \omega^\rho{}_\rho} \\
&= \xi'[T,\mu](\omega^{\rho}{}_{\rho})^2 \equiv -T(\partial_\alpha j^\alpha_{S(\xi)} - i_{(\xi)}) - \mu\partial_\alpha j^\alpha_{N(\xi)}.
\end{aligned}$$

Nous obtenons, $\xi'(\omega^{\rho}{}_{\rho})^2$ étant une forme définie,

$$j^\alpha_{S(\xi)} = 0\;;\;\; j^\alpha_{N(\xi)} = 0$$

et

$$i_{(\xi)} = \frac{\xi'[T,\mu]}{T}(\omega^{\rho}{}_{\rho})^2 \geq 0, \tag{3.5.2}$$

ce qui conduit à

$$\frac{\xi'[T,\mu]}{T} \geq 0. \tag{3.5.3}$$

Pour l'interprétation, plaçons-nous dans un référentiel local de repos :

$$\begin{aligned}
\theta^{ik}_{(\xi)} &= -\tau^{ik}_{(\xi)} \stackrel{*}{=} -\xi'[T,\mu]g^{ik}v^{\ell}{}_{\ell} \\
i_{(\xi)} &\stackrel{*}{=} \frac{\xi'}{T}(v^{\ell}{}_{\ell})^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\xi'[T,\mu]$ doit être identifié au coefficient de viscosité longitudinale et $\theta^{\alpha\beta}_{(\xi)}$ au tenseur dû à cette viscosité.

Nous pouvons grouper les termes de viscosités en un tenseur $\theta^{\alpha\beta}_{(f)}$ dû au frottement :

$$\theta^{\alpha\beta}_{(f)} = \theta^{\alpha\beta}_{(\eta)} + \theta^{\alpha\beta}_{(\xi)} = -2\eta[T,\mu]\omega_{\perp}^{\alpha\beta(0)} - \xi'[T,\mu]g^{\alpha\beta}_{\perp}\omega^{\rho}{}_{\rho}.$$

Ce tenseur a les propriétés :

$$\theta^{44}_{(f)} = \theta^{i4}_{(f)} = 0.$$

Le frottement ne contribue donc ni à la densité d'énergie interne, ni au courant d'énergie.

3.6 La conduction de chaleur

Soustraction faite des termes (3.4.9) et (3.5.1) dans l'expression générale (3.4.6), il reste à examiner :

$$\theta^{\alpha\beta}_{(\kappa)} \stackrel{\text{def}}{=} (\rho+\eta)[T,\mu](\dot\omega^\alpha\omega^\beta+\omega^\alpha\dot\omega^\beta) - \epsilon\kappa[T,\mu](\omega^\alpha T^\beta+\omega^\beta T^\alpha)$$
$$- \epsilon\lambda[T,\mu]g^{\alpha\beta}\dot T - (2\kappa+\lambda)[T,\mu]\omega^\alpha\omega^\beta\dot T$$

Extrayons comme auparavant le terme normal à la quadrivitesse ; nous avons par (3.4.3) :

$$-\epsilon\lambda g^{\alpha\beta}\dot T - (2\kappa+\lambda)\omega^\alpha\omega^\beta\dot T = -\epsilon\lambda g^{\alpha\beta}_\perp\dot T - 2\kappa\omega^\alpha\omega^\beta\dot T.$$

D'autre part il est possible de grouper les termes en $\kappa[\ldots]$:

$$-\epsilon\kappa(\omega^\alpha T^\beta+\omega^\beta T^\alpha) - 2\kappa\omega^\alpha\omega^\beta\dot T = -\epsilon\kappa\,(\omega^\alpha T^\beta_\perp+\omega^\beta T^\alpha_\perp)$$

avec

$$T^\alpha_\perp \stackrel{\text{def}}{=} T^\alpha + \epsilon\,\omega^\alpha\dot T \tag{3.6.1}$$

qui constitue la *dérivée normale de* T (ou la projection spatiale du gradient de température) :

$$\omega_\alpha T^\alpha_\perp = \dot T + \epsilon(-\epsilon)\dot T = 0.$$

Donc :

$$\theta^{\alpha\beta}_{(\kappa)} = (\rho+\eta)(\dot\omega^\alpha\omega^\beta+\omega^\alpha\dot\omega^\beta) - \epsilon\kappa\,(\omega^\alpha T^\beta_\perp+\omega^\beta T^\alpha_\perp) - \epsilon\lambda g^{\alpha\beta}_\perp\dot T.$$

En posant

$$-\epsilon\kappa[\ldots]\,\zeta[\ldots]T = (\rho+\eta)[\ldots], \tag{3.6.2}$$

il est possible de grouper les deux premier termes ; pour ceci nous définissons

$$q^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} -\epsilon\kappa[\ldots](T^\alpha_\perp + \epsilon\zeta[\ldots]T\dot\omega^\alpha). \tag{3.6.3}$$

Cette grandeur est *normale à la quadrivitesse* :

$$\omega_\alpha q^\alpha = 0\;; \quad \text{donc} \;\; q^\alpha \equiv q^\alpha_\perp. \tag{3.6.4}$$

Alors :

$$\theta^{\alpha\beta}_{(\kappa)} \stackrel{\text{def}}{=} \omega^\alpha q^\beta + \omega^\beta q^\alpha - \epsilon\lambda g^{\alpha\beta}_\perp\dot T.$$

Introduisons ceci dans l'identité (3.2.6) :

$$\epsilon\omega_\beta\partial_\alpha\theta^{\alpha\beta}_{(\kappa)} = \partial_\alpha\big(\epsilon\omega_\beta\theta^{\alpha\beta}_{(\kappa)}\big) - \epsilon\theta^{\alpha\beta}_{(\kappa)}\omega_{\alpha\beta}$$
$$= -\partial_\alpha q^\alpha - \epsilon q^\alpha\dot\omega_\alpha + \lambda\dot T\omega^\rho_\rho \equiv -T(\partial_\alpha j^\alpha_{S(\kappa)} - i_{(\kappa)}) - \mu\partial_\alpha j^\alpha_{N(\kappa)}.$$

Une identification n'est possible qu'à la condition de poser :

$$q^\alpha = Tj^\alpha_{S(\kappa)} \quad \text{et} \quad j^\alpha_{N(\kappa)} = 0. \tag{3.6.5}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\epsilon\omega_\beta\partial_\alpha\theta^{\alpha\beta}_{(\kappa)} &= -T\partial_\alpha j^\alpha_{S(\kappa)} - j^\alpha_{S(\kappa)}T_\alpha - \epsilon j^\alpha_{S(\kappa)}T\dot\omega_\alpha + \lambda\dot T\omega^\rho{}_\rho \\
&= -T\partial_\alpha j^\alpha_{S(\kappa)} - \frac{q^\alpha}{T}\frac{1}{\epsilon\kappa}\Big(\epsilon\kappa T_\alpha + \kappa\dot T\omega_\alpha + \kappa\zeta T\dot\omega_\alpha\Big) \\
&\quad - q^\alpha\epsilon\dot\omega_\alpha(1-\zeta) + \frac{\dot T}{T}\epsilon\underbrace{q^\alpha\omega_\alpha}_{=0} + \lambda\dot T\omega^\rho{}_\rho \\
&= -T\partial_\alpha j^\alpha_{S(\kappa)} + \frac{1}{T\kappa}\epsilon q^\alpha q_\alpha - q^\alpha\epsilon\dot\omega_\alpha(1-\zeta) + \lambda\dot T\omega^\rho{}_\rho.
\end{aligned}$$

Les deux derniers termes ne pouvant en aucun cas être des formes définies, ils doivent disparaître. Il est facile (en développant q^α), d'écrire ces deux derniers termes sous la forme

$$\big(\kappa(1-\zeta)\dot\omega_\alpha - \lambda\omega^\rho{}_\rho\omega_\alpha\big)T^\alpha - \big((1-\zeta)\epsilon\kappa\dot\omega^\alpha\omega_\alpha\big)T \equiv 0.$$

Le fait que T et T^α sont indépendants implique $\zeta = 1$ et $\lambda = 0$.

Le terme d'irréversibilité est donc :

$$i_{(\kappa)} = \frac{1}{T^2\kappa[T,\mu]}\epsilon q^\alpha q_\alpha \geq 0 \tag{3.6.6}$$

avec

$$q^\alpha = q^\alpha_\perp = -\epsilon\kappa[T,\mu](T^\alpha_\perp + \epsilon T\dot\omega^\alpha). \tag{3.6.7}$$

Puisque q^α est normal à la quadrivitesse dans un référentiel local de repos nous avons

$$\begin{aligned}
\omega^\alpha &\stackrel{*}{=} (0,0,0,\omega^4) \\
q^\alpha &\stackrel{*}{=} (q^1,q^2,q^3,0)
\end{aligned}$$

et alors

$$\epsilon q^\alpha q_\alpha = \epsilon i^i q_i = \epsilon g_{ii}(q^i)^2,$$

qui est une *forme définie* si la métrique spatiale $\{g_{ii}\}$ *est définie* (ceci est une condition déjà rencontrée à la setion 3.4 pour la viscosité transversale).

De plus $\epsilon q^\alpha q_\alpha \geq 0$ à condition que

$$\text{a) } \epsilon = +1 \text{ et } \{g_{ii} = +1\} \ : \quad \{g_{\alpha\beta}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \epsilon = -1 \text{ et } \{g_{ii} = -1\} \ : \quad \{g_{\alpha\beta}\} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et elle est définie négative dans les cas contraires (statique pure).

Par conséquent, en vertu de la condition $i_{(\kappa)} \geq 0$, *l'existence du temps implique nécessairement que*

$$\kappa[T, \mu] \geq 0. \tag{3.6.8}$$

Remarquons que la thermodynamique relativiste ne démontre pas l'existence du temps ; elle affirme simplement qu'*il existe au maximum une dimension temporelle.*

Il est surtout important de voir que l'inégalité (3.6.6) est *indépendante du signe de la température.*

Puisque $\lambda = 0$, $\theta^{\alpha\beta}_{(\kappa)}$ s'écrit

$$\theta^{\alpha\beta}_{(\kappa)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (\omega^\alpha q^\beta + \omega^\beta q^\alpha)(x). \tag{3.6.9}$$

Interprétons ces grandeurs en passant dans un référentiel local de repos : le courant d'énergie $\theta^{i4}_{(\kappa)}$ y devient :

$$\theta^{i4}_{(\kappa)} \stackrel{*}{=} \underbrace{\omega^4}_{=1} q^i = -\epsilon\kappa(T^i + \epsilon\dot{T}\underbrace{\omega^i}_{=0} + \epsilon T\dot{\omega}^i)$$

et donc

$$\vec{q}(\vec{x}, t) \stackrel{*}{=} (-\epsilon\kappa[T, \mu]\overrightarrow{\text{grad}}\, T + \kappa[T, \mu]\partial_t\vec{v})(\vec{x}, t).$$

Malgré le deuxième terme supplémentaire, ceci doit s'identifier au *courant de chaleur.* Ce deuxième terme, qui n'existe pas en thermodynamique non relativiste, peut s'interpréter comme une *inertie de la chaleur* ; c'est ce terme, proportionnel à la grandeur géométrique $\partial_t\vec{v}$, qui est responsable de l'impossibilité d'une décomposition univoque d'un transfert d'énergie en travail et en chaleur.

La fonction $\kappa[T, \mu]$ est alors la *conduction de chaleur* ; elle est reliée à celle ($\kappa_{n.r.}$) définie en thermodynamique non relativiste par $\kappa_{n.r.} = \epsilon\kappa$.

3.7 Résumé

Nous avons montré que (3.6.6) est identiquement vérifié si :

$$\theta^{\alpha\beta}(x) = \theta^{\alpha\beta}_{(0)} + \theta^{\alpha\beta}_{(\eta)} + \theta^{\alpha\beta}_{(\xi)} + \theta^{\alpha\beta}_{(\kappa)}$$

avec

$$\begin{aligned}
\theta^{\alpha\beta}_{(0)} &= m[T, \mu]\omega^\alpha\omega^\beta + \epsilon g^{\alpha\beta} p[T, \mu] \\
\theta^{\alpha\beta}_{(\eta)} &= -2\epsilon\eta[T, \mu]\omega_\perp^{\alpha\beta(0)} \\
\theta^{\alpha\beta}_{(\xi)} &= -\epsilon\xi'[T, \mu] g_\perp^{\alpha\beta}\omega^\rho{}_\rho \\
\theta^{\alpha\beta}_{(\kappa)} &= \omega^\alpha q^\beta + \omega^\beta q^\alpha \\
q^\alpha &= q_\perp^\alpha = -\epsilon\kappa[T, \mu](T_\perp^\alpha + \epsilon T\dot{\omega}^\alpha).
\end{aligned}$$

Les propriétés suivantes des fonctions d'état ont été déduites :

$$m[s,n] = u + p = Ts + \mu n$$

($p = m - u = Ts + \mu n - u = u_s s + u_n n - u$ et nous retrouvons la définition non relativiste).

$$\frac{\eta}{T} \geq 0\ ; \quad \frac{\xi'}{T} \geq 0\ ; \quad \kappa \geq 0.$$

Les courants sont :

$$j_N^\alpha = \omega^\alpha n$$
$$j_S^\alpha = j_{S(0)}^\alpha + j_{S(\kappa)}^\alpha = j_{S\,\|}^\alpha + j_{S\,\perp}^\alpha = \omega^\alpha s - \frac{\epsilon\kappa}{T}(T_\perp^\alpha + \epsilon T\dot{\omega}^\alpha).$$

L'irréversibilité est :

$$i = \frac{1}{T}\left(2\eta\omega_\perp^{\alpha\beta(0)}\omega_{\alpha\beta\perp}^{(0)} + \xi'(\omega^\rho{}_\rho)^2 + \frac{1}{\kappa T}\epsilon q^\alpha q_\alpha\right) \geq 0.$$

Les équations de mouvement sont :

$$\partial_\alpha\theta^{\alpha\beta} = 0$$
$$\partial_\alpha j_N^\alpha = 0$$
$$\partial_\alpha j_S^\alpha = i \geq 0$$

avec $\omega_\alpha\omega^\alpha = -\epsilon$. Elles sont ainsi exprimables en fonction des variables d'état $\{\omega^\alpha\}$, T et μ (ou $\{\omega^\alpha\}$, s et n). Nous renonçons à les écrire explicitement.

Dans un référentiel local de repos, nous obtenons ($\omega^4 \stackrel{*}{=} 1$: référentiel orthochrone) :

$$\theta^{44} \stackrel{*}{=} \theta_{(0)}^{44} = u[s,n] = m - p$$
$$\theta^{i4} \stackrel{*}{=} q^i$$
$$\theta^{ik} \stackrel{*}{=} \tau_{(f)}^{ik} = -2\eta v^{ik(0)} - \xi' g^{ik} v^\ell{}_\ell.$$

3.8 Equilibre – Conditions d'extremum

Nous voulons maintenant étudier les conditions d'équilibre de notre système. En vertu du deuxième principe b), cet état est réalisé lorsque

$$\overset{\cup}{S}[\ldots] = \overset{\cup}{S}_{\max}\ .$$

Mais puisque le système est fermé, les conditions de fermeture (la prime exprime la conservation de la grandeur)

$$\overset{\cup}{\Pi}{}^\alpha[\ldots] = \overset{\cup}{\Pi}{}'^\alpha\ ; \quad \overset{\cup}{M}{}^{\alpha\beta}[\ldots] = \overset{\cup}{M}{}'^{\alpha\beta}\ ; \quad \overset{\cup}{N}[\ldots] = \overset{\cup}{N}{}'$$

forment un ensemble de contraintes auxquelles est soumis le maximum de $\overset{\cup}{S}[\ldots]$. Nous utiliserons donc, pour ce calcul de maximum, la méthode des multiplicateurs de Lagrange (cf. livre I).

Lorsque le système est en équilibre on a :

$$\overset{\cup}{S}[\tau''] - \overset{\cup}{S}[\tau'] = \int_{x\in\tau^{ext.}} (d^4Vi)(x) = 0$$

et donc, puisque i n'est jamais négatif,

$$i(x) = 0. \tag{3.8.1}$$

A cause du caractère défini positif de chacun des termes contenus dans i, nous devons avoir, en vertu de (3.6.3) :

$$\omega^{\alpha\beta\perp}(x) = 0\ ;\ \ \omega^{\rho}{}_{\rho}(x) = 0\ ;\ \ q^{\alpha}(x) = 0$$

et par conséquent

$$\theta^{\alpha\beta}_{(\eta)}(x) = 0\ ;\ \ \theta^{\alpha\beta}_{(\xi)}(x) = 0\ ;\ \ \theta^{\alpha\beta}_{(\kappa)}(x) = 0.$$

A l'équilibre, nous avons donc simplement

$$\theta^{\alpha\beta}(x) = \theta^{\alpha\beta}_{(0)}(x). \tag{3.8.2}$$

D'autre part, puisqu'à l'équilibre ($i = 0$), l'entropie $\overset{\cup}{S}[\ldots]$ est indépendante de la surface $\tau(y) = 0$, il est possible, et même recommandable pour la simplification des calculs, de choisir une *surface particulière* $\tau(y) = 0$, telle que :

$$\{d\overset{\cup}{\sigma}_{\alpha}(y)\} = (0, 0, 0, d^3V).$$

Alors :

$$\overset{\cup}{S}[\ldots] = \int_{\tau(y)=0} (d\overset{\cup}{\sigma}_{\alpha} j^{\alpha}_{S})(y) = \int_{\tau(y)=0} (d^3V j^4_S)(x)$$

et, comme $\partial_\alpha\theta^{\alpha\beta}(x) = 0$ et $\partial_\alpha j^{\alpha}_{N}(x) = 0$, nous aurons de même

$$\overset{\cup}{\Pi}{}^{\alpha}[\ldots] = \int_{\tau(y)=0} \big(d^3V\theta^{4\alpha}\big)(x)$$
$$\overset{\cup}{M}{}^{\alpha\beta}[\ldots] = \int_{\tau(y)=0} \big(d^3V(x^{\alpha}\theta^{4\beta} - x^{\beta}\theta^{4\alpha})\big)(x)$$
$$\overset{\cup}{N}[\ldots] = \int_{\tau(y)=0} (d^3V j^4_N)(x).$$

Il est évident que l'état d'équilibre (comme n'importe quel état d'ailleurs) doit être indépendant du choix de l'origine du référentiel. En particulier, *le centre d'énergie*

$$\overset{\cup}{M}{}^{i4}[\ldots] = \overset{\cup}{z}{}^{i}H - t\,\overset{\cup}{\Pi}{}^{i}$$

dépend explicitement du temps et du choix de son origine et *ne saurait être pris comme contrainte* pour la recherche de l'équilibre (cf. la remarque ci-dessus).

Par (3.8.2), nous avons

$$\begin{aligned}\theta^{44} &= h = (m\,\omega^4)\omega^4 - p \\ \theta^{4i} &= \pi^i = (m\,\omega^4)\omega^i\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}H[\ldots] = \Pi^4[\ldots] &= \int_\tau \Big(d^3V\big((m\,\omega^4)\omega^4 - p\big)\Big)(x) \\ \overset{\cup}{\Pi}{}^i[\ldots] &= \int_\tau \big(d^3V(m\,\omega^4)\omega^i\big)(x) \\ \overset{\cup}{M}{}^{ik}[\ldots] &= \int_\tau \Big(d^3V\big(x^i(m\,\omega^4)\omega^k - x^k(m\,\omega^4)\omega^i\big)\Big)(x) \\ \overset{\cup}{N}[\ldots] &= \int_\tau \big(d^3V j_N^4\big)(x).\end{aligned}$$

où, pour la dernière ligne, on a utlisé $j_N^4 \equiv j_{N(0)}^4\,(= \omega^4 n)$.

Nous savons que les conditions d'extremum de $\overset{\cup}{S}[\ldots]$ soumise aux contraintes ci-dessus sont, dans la méthode des multiplicateurs de Lagrange, celles de la fonctionnelle auxiliaire :

$$\overset{\cup}{\Psi}[\ldots] = \overset{\cup}{S}[\ldots] + \overset{\cup}{\theta} H[\ldots] - (\overleftarrow{\zeta}, \overset{\cup}{\vec{\Pi}}[\ldots]) - (\overleftrightarrow{\varpi}, \overset{\cup}{\overleftrightarrow{M}}[\ldots]) - \nu \overset{\cup}{N}[\ldots],$$

où $\overset{\cup}{\theta}$, $\overleftarrow{\zeta}$, $\overleftrightarrow{\varpi}$ et ν sont les multiplicateurs de Lagrange.

Etant donné les expressions de $\overset{\cup}{S}[\ldots]$ et des contraintes, le calcul des conditions d'extremum (puis de maximum) se trouve grandement simplifié si l'on choisit comme *variables d'état* les grandeurs $\vec{\omega}$, j_S^4 et j_N^4.

Les conditions d'extremum sont données par la variation : $\delta^{(1)}\overset{\cup}{\Psi} = 0$, variation qu'il s'agit d'exprimer en fonction de $\delta\vec{\omega}$, δj_S^4 et δj_N^4.

De l'équation de normalisation $\omega_\alpha\omega^\alpha = -1$ (nous posons $\epsilon = 1$) nous tirons :

$$\delta(\omega_\alpha\omega^\alpha) = (\overleftarrow{\omega}, \delta\vec{\omega}) - \omega^4\delta\omega^4 = 0$$

et donc

$$\delta\omega^4 = \frac{(\vec{\omega}, \delta\overleftarrow{\omega})}{\omega^4}.$$

Mais $\vec{\omega} = \vec{v}\omega^4$ et il vient enfin

$$\delta\omega^4 = (\overleftarrow{v}, \delta\vec{\omega}). \tag{3.8.3}$$

D'autre part, puisque : $j^4_S = s\,\omega^4$ et $j^4_N = n\,\omega^4$, les fonctions d'état $m[s,n]$ et $p[s,n]$ s'expriment à l'aide de nos nouvelles fonctions d'état comme :

$$m[j^4_S, j^4_N, \omega^4] = m\left[\frac{j^4_S}{\omega^4}, \frac{j^4_N}{\omega^4}\right]$$
$$p[j^4_S, j^4_N, \omega^4] = p\left[\frac{j^4_S}{\omega^4}, \frac{j^4_N}{\omega^4}\right].$$

(Dans les équations précédentes $\omega^4 = \omega^4[\vec{\omega}]$ n'est pas une variable, mais une fonction d'état ; nous gardons ω^4 pour des raisons de simplification d'écriture).

Leur variation sera

$$\delta m[\ldots] = m_s[\ldots]\left(\frac{\delta j^4_S}{\omega^4} - \frac{j^4_S}{(\omega^4)^2}\delta\omega^4\right) + m_n[\ldots]\left(\frac{\delta j^4_N}{\omega^4} - \frac{j^4_N}{(\omega^4)^2}\delta\omega^4\right)$$
$$\delta p[\ldots] = p_s[\ldots]\left(\frac{\delta j^4_S}{\omega^4} - \frac{j^4_s}{(\omega^4)^2}\delta\omega^4\right) + p_n[\ldots]\left(\frac{\delta j^4_N}{\omega^4} - \frac{j^4_N}{(\omega^4)^2}\delta\omega^4\right)$$

et donc

$$\begin{aligned}\delta(m\omega^4) &= \delta m\,\omega^4 + m\delta\omega^4 \\ &= \delta\omega^4(m - sm_s - nm_n) + m_s\delta j^4_S + m_n\delta j^4_N.\end{aligned}$$

Mais

$$m[s,n] = sT[\ldots] + n\mu[\ldots] = su_s + nu_n$$

et alors

$$m_s[\ldots] = u_s + su_{ss} + nu_{ns}$$
$$m_n[\ldots] = su_{sn} + nu_{nn} + u_n.$$

En analogie avec la thermodynamique non relativiste, nous définissons le module de compressibilité isentrope par :

$$a[s,n] \stackrel{\text{def}}{=} (u_{ss}s^2 + 2u_{sn}sn + u_{nn}n^2)[\ldots]. \tag{3.8.4}$$

Par conséquent, en vertu de cette définition :

$$m - sm_s - nm_n = -a$$

et donc

$$\delta(m\omega^4) = -a(\overleftarrow{v}, \delta\vec{\omega}) + m_s\delta j^4_S + m_n\delta^4_N. \tag{3.8.5}$$

Récrivons la variation de $p[\ldots]$ sous la forme

$$\delta p[\ldots] = \frac{p_s}{\omega^4}\delta j^4_S + \frac{p_n}{\omega^4}\delta j^4_N - (sp_s + np_n)\frac{\delta\omega^4}{\omega^4}.$$

Mais $-p[s,n] = u - su_s - nu_n$; il vient donc

$$p_s[\ldots] = (u_s - su_{ss} - u_s - nu_{ns})s$$
$$p_n[\ldots] = (u_n - su_{sn} - nu_{nn} - u_n)n.$$

En faisant la somme, nous obtenons

$$sp_s + np_n = a.$$

Par conséquent :

$$\delta p[\ldots] = \frac{-a}{\omega^4}(\overleftarrow{v}, \delta\vec{\omega}) + \frac{p_s}{\omega^4}\delta j_S^4 + \frac{p_n}{\omega^4}\delta j_N^4. \tag{3.8.6}$$

La fonctionnelle $\overset{\cup}{\Psi}[\ldots]$ peut s'écrire

$$\overset{\cup}{\Psi}[\ldots] \stackrel{\text{def}}{=} \int_\tau (d^3V\psi)(x)$$

avec

$$\psi = j_S^4 + \overset{\cup}{\theta}((m\omega^4)\,\omega^4 - p) - (\overleftarrow{\zeta}, (m\omega^4)\,\vec{\omega}) - (\overleftarrow{\omega}, [\vec{x} \wedge (m\omega^4\vec{\omega}]) - \nu j_N^4.$$

Mais $(\overleftarrow{\omega}, [\vec{x} \wedge \vec{\omega}]) = ([\overleftarrow{\omega} \wedge \vec{x}], \vec{\omega})$; donc, en posant

$$\overleftarrow{\zeta}' = \overleftarrow{\zeta} + [\overleftarrow{\omega} \wedge \vec{x}], \tag{3.8.7}$$

nous obtenons

$$\psi = j_S^4 + \overset{\cup}{\theta}((m\omega^4)\,\omega^4 - p) - (\overleftarrow{\zeta}', (m\omega^4)\,\vec{\omega}) - \nu j_N^4.$$

La variation

$$\delta^{(1)}\overset{\cup}{\Psi}[\ldots] = \int_\tau (d^3V\delta\psi)(x) \equiv 0,$$

qui s'écrit

$$\delta^{(1)}\overset{\cup}{\Psi}[\ldots] = \int \big(d^3V(\psi_{\vec{\omega}}\delta\vec{\omega} + \psi_{j_S^4}\delta j_S^4 + \psi_{j_N^4}\delta j_N^4)\big)(x) \equiv 0,$$

fournit les conditions d'extremum :

$$\psi_{\vec{\omega}} \equiv 0\ ;\quad \psi_{j_S^4} \equiv 0\ ;\quad \psi_{j_N^4} \equiv 0.$$

Alors,

$$\delta\psi = \delta j_S^4 + \overset{\cup}{\theta}\big(\delta(m\omega^4)\,\omega^4 + (m\omega^4)\,\delta\omega^4 - \delta p\big) - \big(\overleftarrow{\zeta}', \delta(m\omega^4)\,\vec{\omega} + (m\omega^4)\delta\vec{\omega}\big) - \nu\delta j_N^4$$

donne, en vertu de (3.8.3), (3.8.4) et (3.8.6) :

$$\begin{aligned}\delta\psi = \delta j_S^4 + \overset{\cup}{\theta}\Big(&\big(-a(\overleftarrow{v}, \delta\vec{\omega}) + m_s\delta j_S^4 + m_n\delta j_N^4\big)\,\omega^4 \\ &+ (m\omega^4)(\overleftarrow{v}, \delta\vec{\omega}) + \frac{a}{\omega^4}(\overleftarrow{v}, \delta\vec{\omega}) - \frac{p_s}{\omega^4}\delta j_S^4 - \frac{p_n}{\omega^4}\delta j_N^4\Big) \\ &- \Big(\overleftarrow{\zeta}', \big(-a(\overleftarrow{v}, \delta\vec{\omega}) + m_s\delta j_S^4 + m_n\delta j_N^4\big)\vec{\omega} + (m\omega^4)\,\delta\vec{\omega}\Big) - \nu\delta j_N^4.\end{aligned}$$

En groupant les termes, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
\delta\psi = \Bigg(\Big(\overset{\cup}{\theta}\,\big(-a\big(\omega^4 - \frac{1}{\omega^4}\big) + m\omega^4\big) + a\big(\overleftarrow{\zeta}\,',\vec{\omega}\big)\Big)\overleftarrow{v} - m\omega^4\overleftarrow{\zeta}\,', \delta\vec{\omega}\Bigg) \\
+ \Big(1 + \overset{\cup}{\theta}\,\big(m_s\omega^4 - \frac{p_s}{\omega^4}\big) - m_s\big(\overleftarrow{\zeta}\,',\vec{\omega}\big)\Big)\delta j^4_S \\
+ \Big(\overset{\cup}{\theta}\,\big(m_n\omega^4 - \frac{p_n}{\omega^4}\big) - m_n(\overleftarrow{\zeta}\,',\vec{\omega}) - \nu\Big)\delta j^4_N \equiv 0.
\end{aligned}
\tag{3.8.8}
$$

Occupons-nous d'abord du coefficient de $\delta\vec{\omega}$:

$$\psi_{\vec{\omega}} = \Big(\overset{\cup}{\theta}\,\Big(-a\big(\omega^4 - \frac{1}{\omega^4}\big) + m\omega^4\Big) + a(\overleftarrow{\zeta}\,',\vec{\omega})\Big)\vec{v} - m\omega^4\vec{\zeta}' \equiv 0.$$

Nous constatons que $\vec{\zeta}'$ doit avoir la même direction que $\vec{v}$: $\vec{v} \parallel \vec{\zeta}'$. D'autre part on a

$$\Big(\omega^4 - \frac{1}{\omega^4}\Big) = \frac{(\omega^4)^2 - 1}{\omega^4} = \frac{(\overleftarrow{\omega}\,,\vec{\omega})}{\omega^4} = (\overleftarrow{v}\,,\vec{\omega})$$

et donc

$$\psi_{\vec{\omega}} = \Big(-\overset{\cup}{\theta}\,\overleftarrow{v} + \overleftarrow{\zeta}\,',\vec{\omega}\Big)a\vec{v} - m\omega^4(-\overset{\cup}{\theta}\,\vec{v} + \vec{\zeta}').$$

Or $\vec{\omega} = \omega^4\,\vec{v}$ et, puisque $\vec{v} \parallel \vec{\zeta}'$, il vient :

$$\psi_{\vec{\omega}} = \Big(-\overset{\cup}{\theta}\,\vec{v} + \vec{\zeta}'\Big)\Big(\frac{a}{m}(\overleftarrow{v}\,,\vec{v}) - 1\Big)m\omega^4 \equiv 0.$$

La solution $(a/m)|\vec{v}|^2 = 1$ est inacceptable car elle conduit à une absurdité dans un référentiel local de repos ($|\vec{v}|^2 = 0,\ (a/m) \to \infty\,!$). Donc nous devons avoir

$$-\overset{\cup}{\theta}\,\vec{v} + \vec{\zeta}' = \vec{0},$$

c'est-à-dire :

$$\vec{v}(\vec{x}) = \overset{\cup}{\theta}{}^{-1}(\vec{\zeta} + [\vec{\varpi} \wedge \vec{x}]). \tag{3.8.9}$$

A l'équilibre, le mouvement du fluide se compose :

- d'une *translation* $\overset{\cup}{\theta}{}^{-1}\vec{\zeta}$ à laquelle se superpose
- une *rotation* $\overset{\cup}{\theta}{}^{-1}[\vec{\varpi} \wedge \vec{x}]$.

Le terme de rotation suppose naturellement que le système est de dimension finie, sinon en certains points, la vitesse $\vec{v}(\vec{x})$ pourrait être supérieure à 1 ($= c_0$).

Le coefficient $\psi_{j^4_S}$ de δj^4_S est

$$\psi_{j^4_S} = 1 + \overset{\cup}{\theta}\,(m_s\omega^4 - \frac{p_s}{\omega^4}) - m_s(\overleftarrow{\zeta}\,',\vec{\omega}) \equiv 0.$$

Par (3.8.9) on a

$$(\overleftarrow{\zeta}\,',\vec{\omega}) = \overset{\cup}{\theta}\,(\overleftarrow{v}\,,\vec{\omega}) = \overset{\cup}{\theta}\,\omega^4(\overleftarrow{v}\,,\vec{v}) = \overset{\cup}{\theta}\,\omega^4|\vec{v}|^2$$

et donc :

$$\psi_{j^4_S} = 1 + \overset{\cup}{\theta}(1 - |\vec{v}|^2) m_s \omega^4 - \overset{\cup}{\theta}\frac{p_s}{\omega^4} \equiv 0.$$

Mais $1 - |\vec{v}|^2 = 1/(\omega^4)^2$ et alors

$$\psi_{j^4_S} = 1 + \frac{\overset{\cup}{\theta}}{\omega^4}(m_s - p_s) \equiv 0.$$

Mais avec $m_s - p_s = u_s \overset{\text{def}}{=} T$, il vient

$$\psi_{j^4_S} = 1 + \frac{\overset{\cup}{\theta}}{\omega^4} T \equiv 0,$$

d'où

$$T = \overset{\cup}{\theta}{}^{-1}\omega^4 = \mp \overset{\cup}{\theta}{}^{-1}\frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} = -\frac{\overset{\cup}{\theta}{}^{-1}\mathrm{sign}(\omega^4)}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Posons :

$$T_0 = \overset{\cup}{\theta}{}^{-1}\mathrm{sign}(\omega^4) \tag{3.8.10}$$

et alors

$$T(\vec{x}) = \frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2}}. \tag{3.8.11}$$

Grâce à $\mathrm{sign}(\omega^4)$, nous constatons à l'aide de (3.8.10) que la température ne change pas de signe lorsqu'on passe d'un référentiel ortho-chrone à un référentiel pseudo-chrone : c'est donc un *scalaire pur.*
Cette propriété est dûe au fait que $\overset{\cup}{S}$ est pseudo-chrone mais non H, donc $\overset{\cup}{\theta}$ doit l'être.

Par (3.8.9) et (3.8.11), nous voyons que dans un fluide en rotation, la température (si $T_0 > 0$) est d'autant plus élevée que l'on s'éloigne du centre de rotation. Ceci est dû à l'inertie de la chaleur : *la chaleur est centrifugée dans un référentiel en rotation.*

Le coefficient $\psi_{j^4_N}$ de δj^4_N est

$$\psi_{j^4_N} = \overset{\cup}{\theta}(m_n\omega^4 - \frac{p_n}{\omega^4}) - m_n(\overleftarrow{\zeta}{}', \vec{\omega}) - \nu \equiv 0.$$

Puisque $(\overleftarrow{\zeta}{}', \vec{\omega}) = \overset{\cup}{\theta}\omega^4 v^2$ et $1 - v^2 = 1/(\omega^4)^2$ et que, d'autre part, $m_n - p_n = u_n \overset{\text{def}}{=} \mu$, on a

$$\psi_{j^4_N} = \frac{\overset{\cup}{\theta}}{\omega^4} u_n - \nu \equiv 0,$$

où :

$$\mu = \overset{\cup}{\theta}{}^{-1}\nu\omega^4 = \frac{\overset{\cup}{\theta}{}^{-1}\nu\,\mathrm{sign}(\omega^4)}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Posons :

$$\mu_0 = \nu\overset{\cup}{\theta}{}^{-1}\mathrm{sign}(\omega^4). \tag{3.8.12}$$

et alors le potentiel chimique prend la forme

$$\mu(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{3.8.13}$$

On peut faire les mêmes remarques que pour la température. En thermodynamique non relativiste nous avions obtenu pour le potentiel chimique $\mu = \mu_0(1+(1/2)v^2)$. Ces deux résultats sont donc compatibles pour des petites vitesses.

3.9 Vérification des équations de mouvement

Il s'agit maintenant de vérifier si les conditions de l'équilibre cinétique ($\vec{v}(\vec{x}) \neq \vec{0}$) établies au paragraphe précédent sont compatibles avec les équations de mouvement.

a) Vérifions d'abord si la condition $i = 0$, qui est équivalente à

$$\omega_\perp^{\alpha\beta(0)} = 0\ ;\quad \omega^\rho{}_\rho = 0\ ;\quad q^\alpha = 0,$$

est réalisée pour les champs stationnaires de vitesse $\vec{v}(\vec{x})$ (3.8.9), de température $T(\vec{x})$ (3.8.11) et de potentiel chimique $\mu(\vec{x})$ (3.8.13).

1. — Nous avons

$$\omega^4 = \pm\frac{1}{\sqrt{1-v^2(\vec{x})}} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} \partial_4\omega^4 = 0 \\ \partial_k\omega^4 = \pm\dfrac{1}{(1-v^2)^{3/2}}v^i\partial_k v_i = (\omega^4)^3 v^i\partial_k v_i. \end{cases}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} 2v_{ik} &= \partial_i v_k + \partial_k v_i = \partial_i(\omega_\ell x_i - \omega_i x_\ell) + \partial_k(\omega_k x_\ell - \omega_\ell x_k) \\ &= \omega_\ell g_{ii} - \omega_i g_{i\ell} + \omega_k g_{k\ell} - \omega_\ell g_{kk} = 0 \end{aligned}$$

et $v^\ell{}_\ell = g^{ik}v_{ik} = 0$, conduisent à

$$\begin{aligned} \omega^\rho{}_\rho = \partial_\rho\omega^\rho = \partial_k\omega^k &= \partial_k(\omega^4 v^k) = \omega^4\underbrace{\partial_k v^k}_{=0} + v^k\partial_k\omega^4 \\ &= v^k(\omega^4)^3 v^i\partial_k v^i = (\omega^4)^3 v^k v^i v_{ik} = 0 \end{aligned}$$

et nous avons bien *à l'équilibre* :

$$\omega^\rho{}_\rho(\vec{x}) = 0.$$

2. — Calculons encore les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\omega}^4 &= \omega^k\partial_k\omega^4 = (\omega^4)^4 v^k v^i\partial_k v_i = (\omega^4)^4 v^k v^i v_{ik} = 0 \\ \dot{\omega}^i &= (\omega^4\dot{v}^i) = \omega^4\omega^k\partial_k v^i = (\omega^4)^2 v^k\partial_k v^i \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2\omega_{ik} &= \partial_i\omega_k + \partial_k\omega_i = \partial_i(\omega^4 v_k) + \partial_k(\omega^4 v_i) \\
&= \omega^4\partial_i v_k + v_k\partial_i\omega^4 + \omega^4\partial_k v_i + v_i\partial_k\omega^4 \\
&= 2\omega^4 \underbrace{v_{ik}}_{=0} + (\omega^4)^3(v_k v^\ell\partial_i v_\ell + v_i v^\ell \partial_k v_\ell) \\
2\omega_{ik\perp} &= 2\omega_{ik} + \dot\omega_i\omega_k + \omega_i\dot\omega_k \\
&= (\omega^4)^3\Big(v_k(v^\ell\partial_i v_\ell + v^\ell\partial_\ell v_i) + v_i(v^\ell\partial_k v_\ell + v^\ell\partial_\ell v_k)\Big) \\
&= 2(\omega^4)^3\Big(v_k v^\ell \underbrace{v_{i\ell}}_{=0} + v_i v^\ell \underbrace{v_{k\ell}}_{=0}\Big) = 0 \\
2\omega^4_{i\perp} &= 2\omega^4_i + \dot\omega_i\omega^4 + \underbrace{\dot\omega^4\omega_i}_{=0} \\
&= \partial_i\omega^4 + \underbrace{\partial_4\omega_i}_{=0} + \dot\omega_i\omega^4 = (\omega^4)^3(v^k\partial_i v_k + v^k\partial_k v_i) \\
&= 2(\omega^4)^3 v^k v_{ik} = 0
\end{aligned}
$$

On a aussi $\omega_{44\perp} = 0$. Par conséquent : $\omega_{\alpha\beta\perp} = 0$ et, puisque $\omega^{(0)}_{\alpha\beta\perp} = \omega_{\alpha\beta\perp} - (1/3)g_{\alpha\beta\perp}\omega^\rho{}_\rho$, on a alors *à l'équilibre*

$$\omega^{\alpha\beta(0)}_\perp(\vec{x}) = 0.$$

3. — Calculons enfin $q^\alpha(\vec{x})$:

$$
\begin{aligned}
q^\alpha(\vec{x}) &= T^\alpha_\perp(\vec{x}) + (\dot\omega^\alpha T)(\vec{x}) \\
T^\alpha_\perp(\vec{x} &= T^\alpha(\vec{x}) + (\omega^\alpha \dot T)(\vec{x})
\end{aligned}
$$

Avec (3.8.11) il vient $T = T_0 \,\mathrm{sign}(\omega^4)\,\omega^4$; donc $\dot T = T_0\,\mathrm{sign}(\omega^4)\,\dot\omega^4 = 0$ et par conséquent

$$
\begin{aligned}
T_{i\perp} &= T_i = \partial_i T = T_0\,\mathrm{sign}(\omega^4)\,\partial_i\omega^4 = T_0\,\mathrm{sign}(\omega^4)(\omega^4)^3 v^\ell\partial_i v_\ell \\
&= T(\omega^4)^2 v^\ell \partial_i v_\ell
\end{aligned}
$$

et

$$\dot\omega^i T = (\omega^4)^2 v^\ell\partial_\ell v_i T.$$

Il en résulte donc

$$
\begin{aligned}
q_i &= T_{i\perp} + \dot\omega_i T = T(\omega^4)^2(v^\ell\partial_i v_\ell + v^\ell\partial_\ell v_i) \\
&= T(\omega^4)^2 2v^\ell \underbrace{v_{i\ell}}_{=0} = 0 \\
q_4 &= \partial_4 T + \dot\omega_4 T = 0.
\end{aligned}
$$

Donc, *à l'équilibre*, on a bien

$$q^\alpha(\vec{x}) = 0.$$

Ainsi, la condition $i = 0$ apparaît bien comme une conséquence des conditions d'équilibre.

b) Vérifions ensuite les équations de mouvement :

1. — $\partial_\alpha \theta^{\alpha\beta} = 0$.

A l'équilibre nous avons

$$\theta^{\alpha\beta} = \theta^{\alpha\beta}_{(0)} = m\omega^\alpha\omega^\beta + g^{\alpha\beta}p, \qquad (\epsilon = +1).$$

Il s'agit donc de vérifier que

$$\partial_\alpha(m\omega^\alpha)\,\omega^\beta + m\dot{\omega}^\beta + \partial^\beta p \stackrel{?}{=} 0.$$

Puisque $\theta^{\alpha\beta} = \theta^{\alpha\beta}_{(0)}$, nous avons la relation (3.3.3) :

$$\partial_\alpha(m\omega^\alpha) = \dot{p}.$$

Mais nous avons aussi :

$$p = sT + n\mu - u \quad \text{d'où} \quad \dot{p} = s\dot{T} + n\dot{\mu}.$$

Mais $\dot{T} = 0$ et $\dot{\mu} = 0$ (puisque $\mu = \mu_0\omega^4$) ce qui donne $\dot{p} = 0$ et alors, *à l'équilibre*, on a bien

$$\partial_\alpha(m\,\omega^\alpha)(\vec{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\alpha j^\alpha_M(\vec{x}) = 0.$$

La masse est *conservée* dans l'état d'équilibre.

L'équation à vérifier se réduit donc à :

$$m\dot{\omega}^\beta + \partial^\beta p = 0.$$

Mais $\partial^4 p = \partial^4 p[T,\mu] = 0$ et $\dot{\omega}^4 = 0$, donc $m\dot{\omega}^4 + \partial^4 p = 0$. D'autre part

$$\dot{\omega}_i = (\omega^4)^2 v^\ell \partial_\ell v_i\,, \quad m = sT + n\mu \quad \text{et} \quad \partial^i p = sT^i + n\mu^i.$$

Or $T^i = (\omega^4)^2 T v^\ell \partial^i v_\ell$ et $\mu^i = (\omega^4)^2 \mu v^\ell \partial^i v_\ell$. L'équation de mouvement s'écrit alors

$$(sT + n\mu)(\omega^4)^2 v^\ell g^{ik}\big(\underbrace{v_{k\ell}}_{=0} + \underbrace{v_{\ell k}}_{=0}\big) = 0.$$

Les équations $\partial_\alpha\theta^{\alpha\beta} = 0$ sont donc vérifiées *à l'équilibre*.

2. — $\partial_\alpha j^\alpha_S = 0$.

Comme $j^\alpha_S = s\omega^\alpha$,

$$\partial_\alpha j^\alpha_S = \partial_\alpha(s\omega^\alpha) = \dot{s} + s\underbrace{\partial_\alpha\omega^\alpha}_{=0} \stackrel{?}{=} 0.$$

Mais : $\dot{s}[T,\mu] = s_T\underbrace{\dot{T}}_{=0} + s_\mu\underbrace{\dot{\mu}}_{=0} = 0$, l'équation est donc bien vérifiée.

3. — $\partial_\alpha j^\alpha_N = 0$.

Comme $j^\alpha_N = n\omega^\alpha$, le raisonnement est le même ; l'équation est également vérifiée.

3.10 Equilibre – Conditions de maximum

Les conditions de maximum sont données par

$$\delta^{(2)}\overset{\cup}{\Psi}[\ldots] = \int_\tau (d^3V\,\delta^{(2)}\psi)(x) \leq 0$$

avec

$$\begin{aligned}\delta^{(2)}\psi = \psi_{ik}\delta\omega^i\delta\omega^k + \psi_{j^4_S j^4_S}(\delta j^4_S)^2 + \psi_{j^4_N j^4_N}(\delta j^4_N)^2 \\ + 2\big(\psi_{ij^4_S}\delta\omega^i\delta j^4_S + \psi_{ij^4_N}\delta\omega^i\delta j^4_N + \psi_{j^4_S\,j^4_N}\delta j^4_S\delta j^4_N\big)\end{aligned}$$

(tous les coefficients de cette forme bilinéaire étant symétriques dans leurs indices, cf. livre I).

Mais nous avons :

$$\delta\psi_k\delta\omega^k = \psi_{ik}\delta\omega^i\delta\omega^k + \psi_{j^4_S k}\delta j^4_S\delta\omega^k + \psi_{j^4_N k}\delta j^4_N\delta\omega^k,$$

où, cf. (3.8.8),

$$\psi_k = \Big(\overset{\cup}{\theta}\Big(-a\big(\omega^4 - \frac{1}{\omega^4}\big) + m\omega^4\Big) + a\,\zeta'_\ell\,\omega^\ell\Big)v_k - m\omega^4\zeta'_k.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\delta\psi_k = \Big(\overset{\cup}{\theta}\Big(-\delta a\big(\omega^4 - \frac{1}{\omega^4}\big) - a\big(1 + \frac{1}{(\omega^4)^2}\big)\delta\omega^4 + \delta\big(m\omega^4\big)\Big) \\ + \delta a\,\zeta'_\ell\,\omega^\ell + a\,\zeta'_\ell\,\delta\omega^\ell\Big)v_k \\ + \Big(\overset{\cup}{\theta}\Big(-a\big(\omega^4 - \frac{1}{\omega^4}\big) + m\omega^4\Big) + a\,\zeta'_\ell\,\omega^\ell\Big)\delta v_k - \delta(m\omega^4)\zeta'_k.\end{aligned}$$

Mais $(\omega^4 - (1/\omega^4)) = v_\ell\omega^\ell$ et, *à l'équilibre*, $\zeta'_\ell = \overset{\cup}{\theta}\,v_\ell$; par conséquent les termes contenant $\delta a(\omega^4 - (1/\omega^4))$ disparaissent et

$$\delta a(-\overset{\cup}{\theta}v_\ell\omega^\ell + \zeta'_\ell\,\omega^\ell) = \delta a(-\overset{\cup}{\theta}v_\ell\omega^\ell + \overset{\cup}{\theta}v_\ell\omega^\ell) = 0.$$

Il en est de même pour les termes contenant $\delta(m\,\omega^4)$ et $a(\omega^4 - 1/\omega^4)$. Par suite nous avons

$$\delta\psi_k = \Big(\overset{\cup}{\theta}\Big(-a\Big(1 + \frac{1}{(\omega^4)^2}\Big)\delta\omega^4\Big) + a\zeta'_\ell\,\delta\omega^\ell\Big)v_k + \overset{\cup}{\theta}m\omega^4\delta v_k.$$

Les relations

$$\begin{aligned}1 + \frac{1}{(\omega^4)^2} &= 2 - v^2 \\ \delta\omega^4 &= v_\ell\delta\omega^\ell \\ \delta v_k &= \delta\Big(\frac{\omega_k}{\omega^4}\Big) = \frac{1}{\omega^4}\delta\omega_k - \frac{v_k}{\omega^4}v_\ell\delta\omega^\ell \\ \zeta'_\ell &= \overset{\cup}{\theta}v_\ell\end{aligned}$$

conduisent à

$$\delta\psi_k = \overset{\cup}{\theta}(m(g_{k\ell} - v_k v_\ell) - a(1-v^2)v_k v_\ell)\delta\omega^\ell.$$

Mais à l'équilibre, cf. (3.8.11),

$$\overset{\cup}{\theta} = \frac{-\mathrm{sign}(\omega^4)}{T\sqrt{1-v^2}}.$$

Donc

$$\psi_{ik} = \frac{-\mathrm{sign}(\omega^4)}{T\sqrt{1-v^2}}(m(g_{ik} - v_i v_k) - a(1-v^2)v_i v_k) \tag{3.10.1}$$

et

$$\psi_{ij^4_S} = 0 \quad \text{et} \quad \psi_{ij^4_N} = 0. \tag{3.10.2}$$

Considérons maintenant :

$$\delta\psi_{j^4_S}\delta j^4_S = \psi_{j^4_S i}\delta j^4_S \delta\omega^i + \psi_{j^4_S j^4_S}(\delta j^4_S)^2 + \psi_{j^4_S j^4_N}\delta j^4_S \delta j^4_N.$$

Nous avons (cf. (3.8.8))

$$\psi_{j^4_S} = 1 + \overset{\cup}{\theta}\Big(m_s\omega^4 - \frac{p_s}{\omega^4}\Big) - m_s\zeta'_\ell\omega^\ell.$$

Alors :

$$\delta\psi_{j^4_S} = \overset{\cup}{\theta}\Big(\delta m_s\omega^4 + m_s\delta\omega^4 - \frac{\delta p_s}{\omega^4} + \frac{p_s}{(\omega^4)^2}\delta\omega^4\Big) - \delta m_s\zeta'_\ell\omega^\ell - m_s\zeta'_\ell\delta\omega^\ell.$$

Mais *à l'équilibre* $\zeta'_\ell = \overset{\cup}{\theta} v_\ell$, donc

$$\delta m_s(\overset{\cup}{\theta}\omega^4 - \zeta'_\ell\omega^\ell) = \delta m_s\overset{\cup}{\theta}(\omega^4 - v_\ell\omega^\ell) + \delta m_s\overset{\cup}{\theta}\omega^4(1-v^2) = \delta m_s\overset{\cup}{\theta}\frac{1}{\omega^4}.$$

D'autre part, puisque $p = m - u$ et $p_s = m_s - u_s$, nous avons

$$-\overset{\cup}{\theta}\delta p_s\frac{1}{\omega^4} = -\overset{\cup}{\theta}\delta m_s\frac{1}{\omega^4} + \overset{\cup}{\theta}\delta u_s\frac{1}{\omega^4}.$$

Nous arrivons ainsi à

$$\delta\psi_{j^4_S} = \overset{\cup}{\theta}\Big(m_s\delta\omega^4 + \frac{\delta u_s}{\omega^4} + \frac{p_s}{(\omega^4)^2}\delta\omega^4 - m_s v_\ell\delta\omega^\ell\Big).$$

Mais nous avons aussi

$$\begin{aligned}\delta u_s[s,n] &= u_{ss}\Big(\frac{\delta j^4_S}{\omega^4} - \frac{j^4_S}{(\omega^4)^2}\delta\omega^4\Big) + u_{sn}\Big(\frac{\delta j^4_N}{\omega^4} - \frac{j^4_N}{(\omega^4)^2}\delta\omega^4\Big)\\ &= u_{ss}\frac{1}{\omega^4}\delta j^4_S + u_{sn}\frac{1}{\omega^4}\delta j^4_N - (u_{ss}s + u_{sn}n)\frac{\delta\omega^4}{\omega^4}\end{aligned}$$

qui, avec $p_s = u_{ss}s + u_{sn}n$, conduit à

$$\frac{\delta u_s}{\omega^4} = \frac{u_{ss}}{(\omega^4)^2}\delta j_S^4 + \frac{u_{sn}}{(\omega^4)^2}\delta j_N^4 - \frac{p_s}{(\omega^4)^2}\delta\omega^4.$$

Comme d'autre part $\delta\omega^4 = v_\ell\delta\omega^\ell$ entraîne $m_s\delta\omega^4 - m_s v_\ell\delta\omega^\ell = 0$, il vient finalement

$$\delta\psi_{j_S^4} = \frac{\overset{\cup}{\theta}}{(\omega^4)^2}(u_{ss}\delta j_S^4 + u_{sn}\delta j_N^4).$$

Par (3.8.11), nous avons *à l'équilibre*

$$\frac{\overset{\cup}{\theta}}{(\omega^4)^2} = \frac{-\mathrm{sign}(\omega^4)}{T}\sqrt{1-v^2}$$

et donc

$$\psi_{j_S^4 j_S^4} = \frac{-\mathrm{sign}(\omega^4)}{T}\sqrt{1-v^2}\,u_{ss} \tag{3.10.3}$$

et

$$\psi_{j_S^4 j_N^4} = \frac{-\mathrm{sign}(\omega^4)}{T}\sqrt{1-v^2}\,u_{sn}. \tag{3.10.4}$$

Pour calculer le dernier coefficient $\psi_{j_N^4 j_N^4}$ de la forme bilinéaire qui nous manque, nous utilisons

$$\delta\psi_{j_N^4}\delta j_N^4 = \psi_{j_N^4 i}\delta\omega^i + \psi_{j_N^4 j_S^4}\delta j_S^4 + \psi_{j_N^4 j_N^4}(\delta j_N^4)^2$$

avec (cf. (3.8.8))

$$\psi_{j_N^4} = \overset{\cup}{\theta}\big(m_n\delta\omega^4 - \frac{p_n}{\omega^4}\big) - m_n\zeta'_\ell\omega^\ell - \nu.$$

Les calculs de $\delta\psi_{j_N^4}$ sont identiques à ceux de $\delta\psi_{j_S^4}$. Nous ne les répéterons donc pas ; nous obtenons

$$\psi_{j_N^4 j_N^4} = \frac{-\mathrm{sign}(\omega^4)}{T}\sqrt{1-v^2}u_{nn}. \tag{3.10.5}$$

La matrice $\{\psi_{ab}\}$, $a, b = 1, 2, 3, j_S^4, j_N^4$ est donc

$$\{\psi_{ab}\} = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & 0 & 0 \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} & 0 & 0 \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_{j_S^4 j_S^4} & \psi_{j_S^4 j_N^4} \\ 0 & 0 & 0 & \psi_{j_N^4 j_S^4} & \psi_{j_N^4 j_N^4} \end{pmatrix}.$$

La deuxième variation $\delta^{(2)}\overset{\cup}{\Psi}$ s'écrit

$$\delta^{(2)}\overset{\cup}{\Psi} = -\mathrm{sign}(\omega^4)\int_\tau\bigg(d^3V\Big(\frac{1,}{T\sqrt{1-v^2}}\big(m(g_{ik} - v_iv_k) - a(1-v^2)v_iv_k\big)\delta\omega^i\delta\omega^k \\ + \frac{1}{T}\sqrt{1-v^2}\big(u_{ss}(\delta j_S^4)^2 + 2u_{sn}\delta j_S^4\,\delta j_N^4 + u_{nn}(\delta j_N^4)^2\big)\Big)\bigg)(\vec{x}).$$

La condition de maximum est $\delta^{(2)}\overset{\cup}{\Psi} \leq 0$. Si nous renversons le temps $'x = Tx$, la variation $\delta^{(2)}\overset{\cup}{\Psi}$ étant pseudo-chrone *change de signe.*

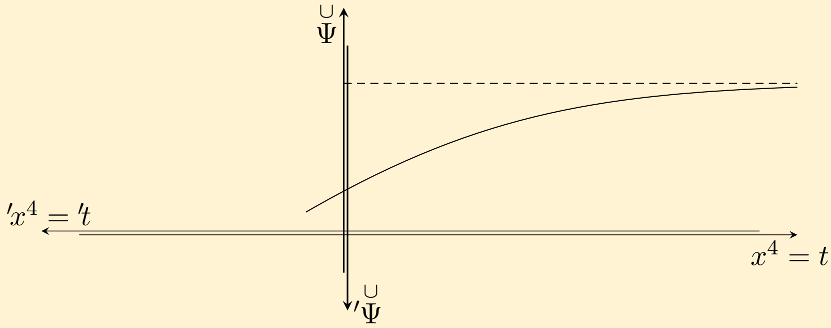


Fig. 3.10.1

Donc la condition de maximum de $\overset{\cup}{S}\,[\ldots]$ n'est pas covariante pour le renversement du temps ; c'est cette condition qui donne le sens de la flèche du temps.

Il reste encore à savoir dans quels référentiels : ortho- ou pseudo-chrones le maximum est atteint. Nous avons la situation suivante : si

$$\delta^{(2)}\overset{\cup}{\Psi} \leq 0 \begin{cases} \text{ortho-chrone :} & \omega^4 > 0 \\ \text{pseudo-chrone :} & \omega^4 < 0 \end{cases}$$

alors la transformation $'x = Tx$ mène à

$$\delta^{(2)\prime}\overset{\cup}{\Psi} \geq 0 \begin{cases} \text{pseudo-chrone :} & '\omega^4 < 0 \\ \text{ortho-chrone :} & '\omega^4 > 0. \end{cases}$$

Nous choisissons arbitrairement que

$$\overset{\cup}{S}\,[\ldots] = \overset{\cup}{S}_{\max} \ \text{ si } \operatorname{sign}(\omega^4) > 0, \tag{3.10.6}$$

nous choisissons donc les référentiels ortho-chrones.

Examinons maintenant les conditions de maximum (cf. livre I) :

$$\{\psi_{ab}\} \geq 0.$$

1. — Condition : $-\psi_{j_S^4 j_S^4} = (1/T)\sqrt{1-v^2}\,u_{ss} \geq 0$.

Comme $\sqrt{1-v^2} \geq 0$, il faut $u_{ss}/T \geq 0$. Mais, *par définition de la capacité de chaleur*

$$c = \frac{u_s}{u_{ss}},$$

la condition devient

$$\frac{u_{ss}}{T} = \frac{u_{ss}}{u_s} = \frac{1}{c} \geq 0,$$

soit encore

$$c \geq 0. \tag{3.10.7}$$

La capacité de chaleur a son signe indépendant de celui de la température. (Nous retrouvons là un résultat de la thermodynamique non relativiste.)

2. — Conditions :

$$- \psi_{j_S^4 J_S^4} \geq 0$$
$$- \psi_{j_N^4 j_N^4} \geq 0$$
$$\begin{vmatrix} -\psi_{j_S^4 j_S^4} & -\psi_{j_S^4 j_N^4} \\ -\psi_{j_N^4 j_S^4} & -\psi_{j_N^4 j_N^4} \end{vmatrix} \geq 0.$$

De ces conditions, nous tirons le signe de la forme bilinéaire

$$\frac{1}{T}(s^2 u_{ss} + 2snu_{sn} + n^2 u_{nn}) \geq 0.$$

Le module de compressibilité isentrope a le signe de la température :

$$\frac{a_{(S)}}{T} \geq 0. \tag{3.10.8}$$

(Ceci est également un résultat de la thermodynamique non relativiste.)

3. — Condition $\{-\psi_{ik}\} \geq 0$.

Plaçons-nous dans un référentiel local où : $\vec{v} = (v, 0, 0)$ alors par (3.10.1) nous avons

$$\{\psi_{ik}\} = \begin{pmatrix} -\psi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\psi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -\psi_{33} \end{pmatrix} \geq 0$$

avec

$$-\psi_{11} = \frac{1}{T}(m - av^2)\sqrt{1 - v^2} \geq 0$$
$$-\psi_{22} = -\psi_{33} = \frac{m}{T\sqrt{1 - v^2}} \geq 0.$$

De cette dernière condition, nous déduisons que *la densité de masse a le signe de la température* :

$$\frac{m}{T} \geq 0. \tag{3.10.9}$$

De la condition $-\psi_{11} \geq 0$, nous tirons

$$\frac{1}{T}(m - av^2) \geq 0.$$

Après multiplication avec la grandeur non-négative T/mv^2 nous obtenons

$$\frac{1}{v^2} - \frac{a}{m} \geq 0$$

et donc

$$0 \leq \frac{a}{m} \leq \frac{1}{v^2}.$$

D'après la section 3.11, $a/m = c_\|^2$ est la *vélocité des ondes élastiques* (en particulier la vitesse du son).

Comme vitesse limite, nous avons $v^2 = 1 - \varepsilon$ et $\varepsilon^2 \to 0$ et alors $1/v^2 = 1 + \varepsilon$, d'où il résulte

$$0 \leq c_\|^2 = \frac{a}{m} \leq 1. \tag{3.10.10}$$

Par la thermodynamique, nous avons ainsi prouvé que la vitesse des ondes élastiques est inférieure à celle de la lumière.

De l'inégalité (3.10.9), nous obtenons

$$\frac{m}{T} = s + \frac{n\mu}{T} \geq 0.$$

Comme s et n sont des variables d'état indépendantes, nous avons

$$s \geq 0 \;\; ; \;\; j^4_{S(0)}(x) = s\omega^4(x) \overset{*}{\geq} 0. \tag{3.10.11}$$

Le quadrivecteur $j^4_{S(0)} \overset{*}{\geq} 0$ ($*$ signifiant dans un référentiel ortho-chrone) est la *flèche du temps*. Le futur d'un référentiel ortho-chrone est ainsi le *futur absolu* et c'est dans ce futur lointain que le maximum de $\overset{\cup}{S}$ est atteint.

La première inégalité de (3.10.11), $s \geq 0$, est *une forme rudimentaire du principe de Nernst* (troisième principe) : l'entropie est une quantité définie positive dans un référentiel ortho-chrone (nous ne pouvons pas démontrer que $s \geq 0$ si $T = 0$: le troisième principe n'est pas encore un théorème...).

Remarque. Si au lieu de (3.10.6), nous avions choisi

1) $\overset{\cup}{S} = \overset{\cup}{S}_{\max}$ si $\operatorname{sign}(\omega^4) < 0$ nous aurions obtenu :

$$c \leq 0 \;\; ; \;\; \frac{a}{T} \leq 0 \;\; ; \;\; \frac{m}{T} \leq 0 \;\; ; \text{ mais : } \;\; c_\|^2 \leq 1.$$

2) $\overset{\cup}{S} = \overset{\cup}{S}_{max}$ si $\operatorname{sign}(\omega^4)/T \geq 0$ nous aurions :

$$\begin{aligned} &\text{ortho-chrone : } T > 0 \, ; \;\; c \geq 0 \, ; \;\; a \geq 0 \, ; \;\; m \geq 0 \, ; \;\; c_\|^2 \leq 0 \\ &\text{pseudo-chrone : } T < 0 \, ; \;\; c \leq 0 \, ; \;\; a \leq 0 \, ; \;\; m \leq 0 \, ; \;\; c_\|^2 \leq 1, \end{aligned}$$

et donc $T = \overset{\cup}{T}$, ce qui est *impossible.*

3.11 Approximation linéaire

Considérons un système constitué d'un fluide au repos :

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{x},t) &= \vec{0} \qquad & \omega^4(\vec{x},t) &= \omega_0^4 = \pm 1 \\ s(\vec{x},t) &= s_0 \qquad & n(\vec{x},t) &= n_0. \end{aligned}$$

L'approximation linéaire consiste à considérer un fluide dont l'état ne s'éloigne qu'infinitésimalement de l'état de repos, c'est-à-dire pour lequel nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{x},t) &\to \vec{0} \\ s(\vec{x},t) - s_0 &\to 0 \\ n(\vec{x},t) - n_0 &\to 0. \end{aligned}$$

Nous allons écrire les équations de mouvement pour ce système

1. — L'équation $\partial_\alpha \theta^\alpha_{\ i} = 0$, dont l'expression générale est

$$\begin{aligned} &\partial_\alpha(m\omega^\alpha)\omega_i + m\dot{\omega}_i + \partial_i p - \partial_\alpha(2\eta\,\omega^\alpha{}_{i\perp}^{(0)}) - \partial_\alpha(\xi\delta^\alpha_{i\perp}\omega^\rho{}_\rho) \\ &- \partial_\alpha\big(\kappa\omega^\alpha(T_{i\perp} + \dot{\omega}_i T) + \kappa\omega_i(T^\alpha_\perp + \dot{\omega}^\alpha T)\big) = 0 \end{aligned}$$

devient, puisque $\omega_i = \omega^4 v_i \to 0$,

$$m\omega_i + \partial_i p - \partial_\alpha(2\eta\,\omega^\alpha{}_{i\perp}^{(0)}) - \partial_\alpha(\xi\delta^\alpha_i\omega^\rho{}_\rho) - \partial_\alpha\big(\kappa\omega^\alpha(T_i + \dot{\omega}_i T)\big) = 0.$$

Mais nous disposons des relations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_i &\overset{*}{=} \omega^4\partial_4\omega_i = (\omega^4)^2\partial_t v_i \\ \partial_\alpha\omega^4 &\overset{*}{=} (\omega^4)^3 v^i\partial_\alpha v_i = 0 \ (\to 0) \\ \partial_\rho\omega^\rho &\overset{*}{=} \partial_i\omega^i = \partial_i(\omega^4 v^i) = \omega^4 \mathrm{div}\,\vec{v} \\ 2\omega_{ik\perp} &\overset{*}{=} 2\omega^4 v_{ik} \\ 2\omega_{i4\perp} &\overset{*}{=} \underbrace{\partial_i\omega^4}_{=0} + \partial_4\omega_i + \dot{\omega}_i\omega_4 + \omega_i\underbrace{\dot{\omega}_4}_{=0} \\ &\overset{*}{=} \omega^4\partial_4 v_i + \underbrace{\omega_4\omega^4}_{=-1}\omega^4\partial_4 v_i = 0 \\ 2\omega_{44\perp} &\overset{*}{=} 0. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$2\partial_\alpha\omega^\alpha{}_{i\perp}^{(0)} = 2\partial_k v_{ik}\omega^4 - \frac{2}{3}\omega^4\partial_i \mathrm{div}\,\vec{v}.$$

Or, d'une part,

$$2\partial_{ki}v^k = \partial_k\partial^k v_i + \partial_k\partial_i v^k = \Delta v_i + \partial_i \,\mathrm{div}\ \vec{v}$$

et, d'autre part,

$$\Delta = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overset{\hookrightarrow}{\mathrm{rot}} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}.$$

Cela conduit à

$$2\partial_\alpha {\omega^\alpha}_{i\perp}^{(0)} = \omega^4(-\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overleftrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} + \frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{v})_i$$

$$\partial_\alpha \delta_i^\alpha {\omega^\rho}_\rho = \partial_i {\omega^\rho}_\rho = \omega^4(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{v})_i.$$

Le terme du courant de chaleur est un peu plus ennuyeux à calculer :

$$\partial_\alpha(\omega^\alpha(T_i + \dot{\omega}_i T)) = (T_i + \dot{\omega}_i T)\partial_\alpha \omega^\alpha + \omega^4(\partial_4 T_i + \partial_4(\dot{\omega}_i T)).$$

Le premier terme est :

$$\underbrace{\overrightarrow{\mathrm{grad}}_i T}_{1}\, \omega^4 \underbrace{\mathrm{div}\,\vec{v}}_{2} + (\omega^4)^3 T \underbrace{\partial_t v_i}_{1}\, \underbrace{\mathrm{div}\,\vec{v}}_{2}.$$

Il est formé de produits de deux termes infinitésimaux et donc, comme expression linéaire, il est nul. Le second terme est

$$\omega^4\Big(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\partial_t T + T(\underbrace{\omega^4}_{\to 1})^2 \partial_t^2 \vec{v} + (\omega^4)^2 \underbrace{\partial_t \vec{v}\, \partial_t T}_{\to 0}\Big).$$

Par conséquent l'équation $\partial_\alpha \theta^{\alpha\beta} = 0$ devient

$$\begin{aligned} & m_0 \partial_t \vec{v} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p - (\eta\omega^4)_0(-\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overleftrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}) \\ & \quad - \left(\omega^4\Big(\xi + \frac{4}{3}\eta\Big)\right)_0 \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{v} - (\omega^4\kappa)_0\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\partial_t T \\ & \quad - (\omega^4 \kappa T)_0\, \partial_t^2 \vec{v} = \vec{0}. \end{aligned} \tag{3.11.1}$$

Nous pouvons expliciter la partie longitudinale ($\|$) et la partie transverse ($\perp$) de la vitesse :

$$\vec{v} = \vec{v}_\| + \vec{v}_\perp = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overleftrightarrow{a}.$$

Alors (3.11.1) donne les deux équations

$$\Big((-\omega^4 \kappa T)_0\, \partial_t^2 + m_0 \partial_t - (\omega^4 \Delta)\Big)\vec{v}_\perp = \vec{0} \tag{3.11.2}$$

et

$$\left(-(\omega^4\kappa T)_0 \partial_t^2 + m_0 \partial_t - \Big(\omega^4\big(\xi + \frac{4}{3}\eta\big)\Big)_0 \Delta\right)\vec{v}_\| - (\omega^4\kappa)_0\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\partial_t T + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p = \vec{0},$$

dont la seconde s'écrit aussi, puisque $\vec{v}_\| = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi$,

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left\{\left(-(\omega^4\kappa T)_0\, \partial_t^2 + m_0\, \partial_t - \Big(\omega^4\big(\xi + \frac{4}{3}\eta\big)\Big)_0 \Delta\right)(-\varphi) - (\omega^4\kappa)_0\, \partial_t T + p\right\} = \vec{0}.$$

Exprimons les grandeurs p et T à l'aide des variables d'état s et n. Par définition $p = p[s, n]$, nous avons donc

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p = s\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u_s + n\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u_n,$$

mais, d'autre part,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u_s &= \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T = u_{ss}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, s + u_{sn}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, n\\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u_n &= u_{ns}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, s + u_{nn}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, n\end{aligned}$$

et donc

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p = (su_{ss} + nu_{sn})\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, s + (su_{ns} + nu_{nn})\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, n.$$

Ainsi l'équation s'écrit

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\Big\{&\Big((-\omega^4\kappa T)_0\partial_t^2 + m_0\partial_t - \Big(\omega^4\big(\xi + \frac{4}{3}\eta\big)\Big)_0\Delta\Big)(-\varphi)\\ &- (\omega^4\kappa u_{ss})_0 s - (\omega^4\kappa u_{sn})_0 n + (su_{ss} + nu_{nn})_0 s\\ &+ (su_{ns} + nu_{nn})_0 n\Big\} = \vec{0}.\end{aligned} \tag{3.11.3}$$

C'est donc une équation du type $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(\vec{x}, t) = \vec{0}$. $f(\vec{x}, t)$ est donc une fonction de gradient nul. Comme ceci est l'équation de la vitesse $\vec{v}_{\parallel} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi$, nous pouvons sans inconvénient poser $f(\vec{x}, t) = 0$ par une transformation de jauge.

2. — L'équation $\partial_\alpha j_N^\alpha = 0$ devient

$$\partial_\alpha j_N^\alpha = \partial_\alpha(n\omega^\alpha) = \omega^4\partial_4 n + n_0\omega^4\partial_\alpha\omega^\alpha = 0$$

et donc

$$\partial_t n + n_0\,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0.$$

En utilisant

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = \mathrm{div}(\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}) = -\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi + 0 = -\Delta\varphi$$

nous avons

$$\partial_t n - n_0\Delta\varphi = 0. \tag{3.11.4}$$

3. — Considérons maintenant l'équation

$$\partial_\alpha j_S^\alpha = \partial_\alpha\big((s\omega^\alpha) + \frac{1}{T}(-\kappa)(T_\perp^\alpha + \dot{\omega}^\alpha T)\big) = i.$$

L'irréversibilité i est une forme quadratique, elle est donc nulle dans une approximation linéaire.

Transformons les termes du deuxième membre de l'équation précédente :

$$\partial_\alpha(s\omega^\alpha) = \omega^4(\partial_t s - s_0\,\Delta\varphi)$$

$$\partial_\alpha \frac{T_\perp^\alpha}{T} = \frac{1}{T}\partial_\alpha T_\perp^\alpha + \underbrace{\frac{T_\perp^\alpha}{(T)^2}(-\partial_\alpha T)}_{\to 0}$$

$$\partial_\alpha T_\perp^\alpha = \partial_\alpha T^\alpha + \dot{T}\underbrace{\partial_\alpha\omega^\alpha}_{\to 0} + \omega^4\,\partial_4\dot{T} = \partial_i T^i + \partial_4 T^4 + \omega^4\,\partial_4\dot{T}$$

$$= \partial_i T^i + \partial^4\partial_4 T + \underbrace{\omega^4\omega_4}_{=-1}\partial^4\partial_4 T = \partial_i T^i$$

$$\partial_i T^i = \operatorname{div}\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,T = (u_{ss})_0\,\Delta s + (u_{sn})_0\,\Delta n$$

$$\partial_\alpha \frac{1}{T}\,\dot{\omega}^\alpha T = \partial_\alpha\dot{\omega}^\alpha = (\omega^4)^2\partial_t \operatorname{div}\vec{v} = -(\omega^4)^2\Delta\,\partial_t\varphi.$$

Puisque $u_{ss}/T = 1/c$, l'équation s'écrit

$$\partial_t s - s_0\Delta\varphi + (\omega^4\kappa)_0\,\Delta\,\partial_t\varphi - \left(\frac{\omega^4\kappa}{c}\right)_0\Delta s - \left(\frac{\omega^4\kappa u_{sn}}{T}\right)_0\Delta n = 0. \qquad (3.11.5)$$

Nous allons examiner maintenant quelques cas particulièrement intéressants.

a) *Ondes thermiques*

Cette équation est obtenue en posant $\varphi = 0$ et $n = n_0$ dans l'équation (3.11.5) ; nous avons ainsi

$$(\partial_t - \omega^4 b_0\Delta)s(\vec{x}, t) = 0 \quad b = \frac{\kappa}{c} \geq 0. \qquad (3.11.6)$$

Pour l'intégration, on se reportera au livre I. La solution générale existe seulement pour le futur absolu : $\omega^4 > 1\ (= +1)$, $\omega^4 t \geq 0$.

b) *Ondes élastiques*

En posant $\kappa_0 = 0$, (3.11.3) devient

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\Big\{\Big(m_0\,\partial_t - \Big(\omega^4(\xi + \frac{4}{3}\eta)\Big)_0\Delta\Big)(-\varphi) + (su_{ss} + nu_{sn})_0 s + (su_{ns} + nu_{nn})_0 n\Big\} = \vec{0}.$$

En faisant $\partial_t\{\ldots\} = 0$, il vient :

$$\Big\{\Big(m_0\,\partial_t^2 - \Big(\omega^4(\xi + \frac{4}{3}\eta)\Big)_0\Delta\partial_t\Big)\varphi - (su_{ss} + nu_{sn})_0\,\partial_t s + (su_{ns} + nu_{nn})_0\,\partial_t n\Big\} = 0.$$

Mais, si $\kappa_0 = 0$, (3.11.5) devient

$$\partial_t s - s_0\,\Delta\varphi = 0,$$

d'où

$$\partial_t s = s_0 \Delta\varphi.$$

De (3.11.4) nous tirons

$$\partial_t n = n_0 \Delta\varphi$$

alors en substituant dans l'équation $\partial_t\{\ldots\} = 0$ et, en se rappelant que

$$s^2 u_{ss} + 2snu_{sn} + n^2 u_{nn} = a,$$

nous obtenons

$$\Big(m_0 \partial_t^2 - a_0 \Delta - \Big(\omega^4 \big(\xi + \frac{4}{3}\eta\big)\Big)_0 \Delta\partial_t\Big)\varphi(\vec{x}, t) = 0. \tag{3.11.7}$$

Cette équation est exactement celle obtenue en thermodynamique non relativiste pour les ondes élastiques ; leurs *célérités* sont données par

$$c_\parallel^2 = \Big(\frac{a}{m}\Big)_0.$$

(Pour la discussion, cf. livre I.)

Index