

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Traité d'Électricité

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION DE JACQUES NEIRYNCK

VOLUME III

ÉLECTROMAGNÉTISME

Fred Gardiol

Nouvelle édition complétée de deux sections

Guides d'ondes métalliques

Guides d'ondes diélectriques, fibres optiques



PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

TRAITÉ D'ÉLECTRICITÉ

III
ÉLECTROMAGNÉTISME

TRAITÉ D'ÉLECTRICITÉ

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE
PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION DE JACQUES NEIRYNCK

VOLUME III

ÉLECTROMAGNÉTISME

Nouvelle édition complétée de deux sections

Guides d'ondes métalliques

Guides d'ondes diélectriques, fibres optiques

par Fred Gardiol



PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

Cet ouvrage fait partie d'une série de vingt-deux volumes
dont les titres sont les suivants:

- I INTRODUCTION À L'ÉLECTROTECHNIQUE
- II MATÉRIAUX DE L'ÉLECTROTECHNIQUE
- III ÉLECTROMAGNÉTISME
- IV THÉORIE DES RÉSEAUX DE KIRCHHOFF
- V ANALYSE ET SYNTHÈSE DES SYSTÈMES LOGIQUES
- VI THÉORIE ET TRAITEMENT DES SIGNAUX
- VII DISPOSITIFS À SEMICONDUCTEUR
- VIII ÉLECTRONIQUE
- IX ÉLECTROMÉCANIQUE
- X MACHINES ÉLECTRIQUES
- XI MACHINES SÉQUENTIELLES
- XII ÉNERGIE ÉLECTRIQUE
- XIII HYPERFRÉQUENCES
- XIV CALCULATRICES
- XV ÉLECTRONIQUE DE PUISSANCE
- XVI ÉLECTRONIQUE DE RÉGLAGE ET DE COMMANDE
- XVII SYSTÈMES DE MESURE
- XVIII SYSTÈMES DE TÉLÉCOMMUNICATIONS
- XIX FILTRES ÉLECTRIQUES
- XX TRAITEMENT NUMÉRIQUE DES SIGNAUX
- XXI ÉLECTROACOUSTIQUE
- XXII HAUTE TENSION



Le Traité d'Electricité est une publication des
Presses polytechniques et universitaires romandes,
fondation scientifique dont le but est principalement la diffusion des travaux de
l'École polytechnique fédérale de Lausanne.

Le catalogue de ces publications peut être obtenu aux
Presses polytechniques et universitaires romandes, CH-1015 Lausanne.

<http://www.ppur.org>

Nouvelle édition revue et augmentée
ISBN 2-88074-508-X

© 2001, **2004** Presses polytechniques et universitaires romandes
CH - 1015 Lausanne
Tous droits réservés.

Reproduction, même partielle, interdite sous quelque forme ou sur quelque support que ce
soit sans l'accord écrit de l'éditeur.

Imprimé en Suisse

INTRODUCTION

Place du volume III dans le *Traité d'Électricité*

Ce volume considère le *modèle de Maxwell*, c'est-à-dire la description macroscopique des phénomènes électriques et magnétiques au moyen des champs vectoriels et scalaires, et des potentiels dont ces champs dérivent. Il se situe entre l'étude fondamentale des matériaux, qui considère les interactions au niveau microscopique entre particules élémentaires, couverte dans le volume II de cette série, et celle des circuits formés d'éléments ponctuels, traitée dans le volume IV (modèle de Kirchhoff). Il couvre la matière d'un cours intermédiaire d'électromagnétisme, visant à établir une liaison entre les notions fondamentales, acquises dans un cours de physique générale, et les applications rencontrées en télécommunications, en électronique, en électromécanique, dans les branches de l'électricité pour lesquelles les simplifications du modèle de Kirchhoff ne sont pas satisfaites.

Toutefois, par suite de son caractère macroscopique, le modèle de Maxwell ne permet pas d'étudier certains effets qui apparaissent au niveau des particules, effets liés à la quantification des niveaux d'énergie dans la matière. Pour comprendre ces phénomènes, dont font usage les lasers, masers et la majorité des composants à semiconducteurs, on doit faire appel aux modèles plus fondamentaux de la physique quantique (vol. II).

Plan de présentation

Dans cet ouvrage, les équations de Maxwell sont introduites comme postulats fondamentaux de l'électromagnétisme, c'est à dire qu'on les accepte sans chercher à démontrer leur validité. Ces équations lient la variation temporelle d'une grandeur vectorielle électrique – appelée champ – à la variation spatiale d'une grandeur magnétique, et vice-versa.

Les équations de Maxwell sont complétées par des équations constitutives, qui définissent les rapports entre des grandeurs de même nature (électrique ou magnétique) à l'intérieur même d'un matériau. Ces relations décrivent les propriétés électriques et magnétiques de la matière, qui découlent des modèles plus fondamentaux de la physique quantique (vol. II).

Avec l'adjonction des relations constitutives pour un matériau – supposé linéaire, homogène, isotrope et sans pertes – les équations de Maxwell fournissent un système de deux équations vectorielles linéaires de premier ordre aux dérivées partielles. Quand le matériau ne possède pas ces propriétés, les relations peuvent devenir beaucoup plus compliquées.

La distribution dans le temps et l'espace des champs électrique et magnétique est obtenue en résolvant ce système d'équations et en appliquant les conditions aux limites aux bords des domaines considérés. Cet ouvrage considère le traitement des champs et des grandeurs qui leur sont associées – dans des milieux homogènes et inhomogènes – au moyen des techniques de l'analyse vectorielle (chap. 14). Différentes méthodes de résolution, soit analytiques (différentielles ou intégrales), soit approchées (numériques), sont présentées et appliquées à des problèmes ayant différents niveaux de complexité. Le choix d'une méthode de résolution est intimement lié à la géométrie de la structure considérée.

Les méthodes analytiques – différentielles ou intégrales – ne peuvent être employées que lorsqu'on peut faire coïncider les limites de la structure avec des surfaces d'un système de coordonnées orthogonales (plans, cylindres, sphères, etc.). Pour des géométries plus complexes on recourt à des méthodes approchées de résolution numérique, qui font pratiquement toujours usage de l'ordinateur.

La résolution de problèmes est abordée dans cet ouvrage en suivant un ordre de complexité croissante: problèmes à une, deux et trois dimensions. On montre, dans des exemples, comment on peut faire usage des résultats obtenus dans un problème simple pour déterminer la solution de problèmes plus complexes. On dispose d'une grande variété de méthodes et il s'agit de choisir celle qui permet de résoudre le plus facilement possible le problème considéré – car il n'existe pas de méthode universelle qui pourrait systématiquement résoudre tous les problèmes. Quand elles sont applicables, les méthodes analytiques ont l'avantage de fournir une réponse rigoureuse et définitive, mais dont la forme est parfois très complexe. Les méthodes de résolution approchée sur ordinateur font en général appel à de longues séquences d'opérations répétitives, avec lesquelles on peut réduire itérativement les erreurs produites par les approximations.

Le choix d'une méthode dépend fortement des moyens dont on dispose, et il est essentiel de considérer attentivement le problème à résoudre avant de mettre en route un quelconque processus de résolution: un problème bien posé est à moitié résolu. Vu la grande diversité de problèmes que l'on rencontre en électromagnétisme, une bonne connaissance des différentes possibilités est indispensable pour faire le "bon" choix.

Organisation générale du volume III (nouvelle édition 1996)

L'ouvrage commence par un aperçu général de l'électromagnétisme (chap. 1), qui le situe au sein des domaines de l'électricité et qui donne un bref historique des développements qui ont abouti à l'élaboration des équations de Maxwell. Les champs – grandeurs fondamentales de l'électromagnétisme – sont définis, avec les équations qui les lient. Dans le cas général on obtient des équations vectorielles aux dérivées partielles, qui portent sur des fonctions du temps et de trois coordonnées spatiales. Pour simplifier le traitement, on tente de ramener la résolution à celle de fonctions d'une variable unique : on traite donc en premier lieu des problèmes à une seule dimension (lignes et ondes).

La suite de l'ouvrage est découpée en trois parties :

- La première partie (chap. 2 à 6) analyse des lignes de transmission uniformes, structures métalliques destinées à transmettre un signal ou une quantité d'énergie d'un point à un autre d'un système. On considère la tension (potentiel transverse) et le courant sur la ligne – à ce stade, on ne fait pas usage des champs – et leurs distributions le long de la ligne (problèmes à une dimension). Le chapitre 2 considère des fonctions du temps, pour lesquelles on n'obtient une solution que pour des lignes idéales : sans pertes, avec des terminaisons résistives. La notation complexe, introduite au chapitre 3, permet d'étendre l'étude à la propagation de signaux sinusoïdaux sur des lignes ayant des pertes et un caractère dispersif (domaine fréquentiel). Le chapitre 4 considère les réflexions produites par des terminaisons et les processus d'adaptation. Le chapitre 5 traite brièvement des lignes chargées d'obstacles disposés périodiquement, tandis que le chapitre 6 donne un aperçu des effets produits par le couplage entre plusieurs lignes de

transmission disposées parallèlement les unes aux autres – ces effets sont souvent indésirables (diaphonie) mais peuvent aussi être bénéfiques pour réaliser des composants qui répartissent un signal entre plusieurs canaux ou qui en prélèvent une partie pour faire des mesures ou des contrôles.

- Dans la deuxième partie (chap. 7 à 9), on aborde l'étude des ondes électromagnétiques qui se propagent dans l'espace sans soutien matériel ou qui sont guidées par divers types de structures (guides d'ondes, fibres optiques). L'étude considère des champs et des potentiels à dépendance unidimensionnelle – suite à l'existence d'une direction spécifique de propagation, comme dans le cas des lignes. Le chapitre 7 présente les notions de base et dérive les équations d'onde, le chapitre 8 étudie la propagation des ondes planes, puis leur transmission et leur réflexion à un interface entre deux milieux, et le chapitre 9 aborde brièvement le domaine des ondes sphériques (rayonnement et antennes).
- La troisième partie (chap. 10 à 13) est consacrée à l'étude des champs, considérant les méthodes de résolution des équations de Maxwell dans des systèmes à une, deux ou trois dimensions. On y définit les domaines de l'électrostatique, de la magnétostatique et de la quasistatique au chapitre 10, qui considère aussi la dépendance transverse des champs sur les lignes de transmission. Les chapitres 11 à 13 présentent, respectivement, les méthodes différentielles, intégrales et numériques pour la résolution des problèmes.

La séquence de présentation a été complètement modifiée par rapport à la version originale du volume III parue en 1977, en vue d'aborder dès que possible les domaines d'application qui intéressent les ingénieurs – les lignes de transmission, les ondes et les antennes – tandis que les aspects plus mathématiques de l'analyse des champs dans des structures de formes diverses font l'objet de la fin de l'ouvrage. On traite ainsi en premier lieu des problèmes unidimensionnels – le long d'une ligne de transmission ou dans une direction particulière de l'espace – avant d'aborder des problèmes à deux ou trois dimensions, dont la résolution est forcément plus complexe.

On notera aussi que l'étude des lignes de transmission fait appel aux concepts de tension et de courant – rencontrés en électrotechnique (vol. I) – qui sont plus faciles à appréhender que ceux des champs, dont on fait usage dans la deuxième partie consacrée aux ondes. Les résultats obtenus dans l'étude des lignes peuvent ainsi être utilisés pour simplifier l'étude et améliorer la compréhension des phénomènes de propagation des ondes planes.

L'ouvrage est complété par des annexes (chap. 14), qui regroupent les principales relations utilisées en analyse vectorielle, les fonctions de Bessel et quelques tables qui donnent les propriétés électriques et magnétiques de matériaux couramment utilisés en électricité. Une abondante bibliographie recense les sources d'information consultées lors de l'élaboration du présent ouvrage, et indique au lecteur où il peut trouver plus d'informations pour compléter ses connaissances.

À la fin de chaque chapitre, une série d'exercices est proposée à la sagacité du lecteur, pour lui aider à assimiler les concepts introduits et développés dans le chapitre. Une description succincte de la méthode utilisée pour résoudre ces exercices est présentée à la fin de l'ouvrage, avec leur solution. Il va sans dire qu'il est vivement recommandé d'au moins tenter de résoudre un problème avant de se référer à sa solution.

Utilisation et limites des modèles

En vue de traiter les problèmes les plus divers, les ingénieurs ont mis au point des modèles, qui sont des représentations de la réalité. Ils ont aussi développé des techniques mathématiques, dont il existe actuellement une grande variété. Or, ces représentations sont imparfaites, et on doit donc prendre bonne note et garder en mémoire les points suivants:

- Il existe toujours une certaine différence entre un modèle et la réalité. Le seul moyen de savoir si un modèle est valable consiste à vérifier si les valeurs obtenues en l'utilisant coïncident bien avec les constatations expérimentales. En dernière analyse, c'est toujours la réalité physique qui compte.
- En pratique, on travaille toujours avec des approximations, dont la précision n'est pas toujours connue. Des résultats acceptables ne peuvent être obtenus que si certaines conditions sont remplies: avant d'utiliser un modèle ou une méthode, on doit déterminer si ses hypothèses de base sont effectivement satisfaites – et que l'on se trouve donc bien à l'intérieur de la zone de validité du modèle ou de la méthode choisis. Il est bien entendu nécessaire de spécifier ces hypothèses.
- Un modèle doit toujours être flexible, afin qu'on puisse en tout temps l'adapter pour tenir compte d'observations ou d'exigences nouvelles. On doit pouvoir ajuster les paramètres du modèle afin d'améliorer la concordance – car on ne peut jamais modifier la réalité pour mieux l'adapter au modèle...
- Il est souvent intéressant de faire usage de plusieurs modèles, afin de mieux appréhender les différents aspects d'un problème.
- Un modèle – ou une méthode de calcul – n'est jamais qu'un outil, dont on fait usage pour obtenir un résultat. On ne doit jamais s'attacher à un outil particulier, mais on doit savoir sélectionner dans la panoplie à disposition celui qui va résoudre de la manière la plus simple ou la plus élégante le problème considéré.
- Le modèle choisi doit être aussi adapté que possible au problème à résoudre – par exemple, il serait stupide de choisir des coordonnées sphériques pour étudier une structure rectangulaire: cela compliquerait inutilement le processus de résolution et on risque même de ne pas obtenir de solution.
- La notation et les symboles graphiques doivent être choisis de façon à faciliter la compréhension, à simplifier le processus de résolution et à éviter des ambiguïtés – il ne faut pas chercher à épater ou dérouter les profanes.
- On consacre parfois des moyens considérables pour réduire à quelques fractions de pour-cent l'erreur qui résulte d'un processus mathématique, sans remarquer que la structure est définie de façon approximative – par exemple, que ses paramètres ne sont connus qu'avec une précision de $\pm 10\%$. On obtient alors une fausse sensation de sécurité. On devrait commencer par détecter toutes les sources d'erreurs, puis les classer par ordre d'importance et ensuite chercher à réduire leur effet – en commençant par les erreurs prépondérantes.
- Certains problèmes peuvent être résolus de façon rigoureuse, tandis que pour d'autres on doit faire appel à des méthodes mathématiques approchées. Il faut toutefois noter que certaines techniques sophistiquées de résolution numérique à l'ordinateur permettent de réduire l'erreur de calcul à une valeur arbitrairement faible, tandis que les solutions dites rigoureuses comportent souvent des fonctions transcendantes, dont la valeur doit être déterminée par des développements numériques approximatifs.

Le domaine de l'électromagnétisme couvre une vaste gamme d'applications de natures très diverses, et on y trouve un grand nombre de problèmes très variés. Au niveau fondamental, les théories de base font appel à des mathématiques souvent ardues. Dans bien des cas il est possible de simplifier des traitements en introduisant des modèles ou des schémas équivalents simplifiés, de sorte qu'on dispose en général de plusieurs méthodes différentes pour résoudre un problème donné, certaines rigoureuses et d'autres basées sur des approximations.

Conventions

Le Traité d'Électricité est composé de 22 volumes (vol.) repérés par un chiffre romain (vol. IV). Chaque volume est partagé en chapitres (chap.) repérés par un nombre arabe (chap. 2). Chaque chapitre est divisé en sections (sect.) repérées par deux nombres arabes séparés par un point (sect. 2.3). Chaque section est divisée en paragraphes (§) repérés par trois nombres arabes séparés par deux points (§ 2.3.11). Les références internes stipulent le volume, le chapitre, la section ou le paragraphe du Traité auquel on se réfère.

Les références bibliographiques sont numérotées continûment dans tout le volume et repérées par un seul nombre arabe entre crochets [33].

Un terme apparaît en *italique maigre* la première fois qu'il est défini dans le texte. Un passage important est mis en évidence lorsqu'il est composé en *italique gras*.

Les équations numériques hors texte sont numérotées continûment par chapitre et repérées par deux nombres arabes placés entre parenthèses et séparés par un point (3.14). Les figures et les tableaux sont numérotés continûment par chapitre et repérés par deux nombres arabes précédés respectivement de Fig. (fig. 4.12) ou Tableau (tableau 4.13).

Les italiques gras représentent des grandeurs vectorielles (champs) tandis que les matrices sont dénotées par des lettres grasses droites entre crochets. Le soulignement indique qu'une grandeur est complexe, c'est-à-dire formée d'une partie réelle et d'une partie imaginaire.

Remerciements

L'auteur tient à remercier le personnel du Laboratoire d'Électromagnétisme et d'Acoustique de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne, dont le soutien et la collaboration durant de nombreuses années lui ont été fort utiles pour élaborer le présent ouvrage. Les contributions – à la recherche et à l'enseignement en électromagnétisme – de M. Jean-François Zürcher et du professeur Juan Mosig sont particulièrement appréciées. De nombreux étudiants ont émis des suggestions et des remarques, qui se sont avérées précieuses pour mettre au point cette nouvelle version, tandis que d'autres contrôlaient consciencieusement les formules et l'orthographe: qu'ils en soient tous remerciés! L'auteur exprime aussi sa gratitude à la direction de l'EPFL, pour le soutien dont il a bénéficié au cours des ans. Finalement, il remercie l'équipe de production des Presses polytechniques et universitaires romandes, dont il a beaucoup apprécié la compétence et la gentillesse.

TABLE DES MATIÈRES

	INTRODUCTION.....	v
	TABLE DES MATIÈRES	xi
CHAPITRE 1	NOTIONS FONDAMENTALES	
	1.1 Modèles	1
	1.2 Historique	3
	1.3 Définitions.....	6
	1.4 Equations de Maxwell	10
	1.5 Conditions aux limites	13
	1.6 Propriétés des matériaux	15
	1.7 Energie et puissance.....	17
	1.8 Equations d'onde	20
	1.9 Exercices	21
	Partie I Lignes	
CHAPITRE 2	LIGNE DANS LE DOMAINE TEMPOREL	
	2.1 Lignes sans pertes	27
	2.2 Propagation le long d'une ligne	30
	2.3 Impédance et puissance	34
	2.4 Quelques lignes	36
	2.5 Ligne sans pertes avec terminaison	40
	2.6 Effet du générateur, réflexions multiples.....	42
	2.7 Lignes avec pertes.....	46
	2.8 Exercices	49
CHAPITRE 3	LIGNE DANS LE DOMAINE FRÉQUENTIEL	
	3.1 Notation complexe	51
	3.2 La ligne de transmission en notation complexe	54
	3.3 Impédance et puissance	59
	3.4 Quelques lignes	60
	3.5 Matrices et schémas équivalents.....	65
	3.6 Cas particulier: ligne sans pertes	71
	3.7 Cas particulier: connexion de deux lignes	75
	3.8 Exercices	76

CHAPITRE 4	TERMINAISONS ET ADAPTATION	
	4.1 Ligne avec terminaison	79
	4.2 Abaque de Smith.....	81
	4.3 Effet du générateur.....	89
	4.4 Adaptation	93
	4.5 Résonateurs	99
	4.6 Exercices	103
CHAPITRE 5	LIGNE À OBSTACLES PÉRIODIQUES	
	5.1 Introduction	105
	5.2 Développement asymptotique.....	109
	5.3 Ligne périodique de longueur finie.....	114
	5.4 Exercices	117
CHAPITRE 6	LIGNES COUPLÉES	
	6.1 Définitions.....	119
	6.2 Développement mathématique général.....	121
	6.3 Conditions aux limites	124
	6.4 Cas particulier de deux lignes couplées.....	126
	6.5 Exercices	131
	Partie II Ondes	
CHAPITRE 7	CHAMPS DANS LE DOMAINE FRÉQUENTIEL	
	7.1 Notation complexe	135
	7.2 Polarisation du champ.....	138
	7.3 Propriétés des matériaux	140
	7.4 Equations et théorèmes en notation complexe	142
	7.5 Exercices	145
CHAPITRE 8	ONDES PLANES	
	8.1 Propagation dans un milieu infini sans pertes	147
	8.2 Propagation dans un milieu infini avec pertes.....	151
	8.3 Discontinuité plane	157
	8.4 Cas particulier: deux milieux sans pertes	164
	8.5 Réflexion sur une surface métallique	166
	8.6 <i>Guides d'ondes métalliques</i>	385
	8.7 <i>Guides d'ondes diélectriques, fibres optiques</i>	406
	8.8 Exercices	171
CHAPITRE 9	RAYONNEMENT ET ANTENNES	
	9.1 Rayonnement	173
	9.2 Dipôle élémentaire	177
	9.3 Boucle élémentaire ou dipôle magnétique.....	180
	9.4 Généralités sur les antennes	182

	9.5 Quelques antennes	188
	9.6 Antennes à réseaux	191
	9.7 Exercices	196
	Partie III Champs	
CHAPITRE 10	STATIQUE ET QUASISTATIQUE	
	10.1 Electrostatique	201
	10.2 Magnétostatique sous courants	203
	10.3 Eléments de circuits	205
	10.4 Electrostatique avec charges d'espace	208
	10.5 Magnétostatique avec courants	209
	10.6 Quasistatique	210
	10.7 Equation de Laplace en deux dimensions.....	214
	10.8 Exercices	216
CHAPITRE 11	MÉTHODES DIFFÉRENTIELLES	
	11.1 Problèmes unidimensionnels cartésiens.....	217
	11.2 Problèmes unidimensionnels circulaires.....	224
	11.3 Séparation de variables (cartésiennes).....	229
	11.4 Séparation de variables (cylindriques).....	235
	11.5 Séparation de variables (sphériques)	242
	11.6 Transformations conformes	247
	11.7 Transformations de Schwartz-Christoffel	254
	11.8 Exercices	262
CHAPITRE 12	MÉTHODES INTÉGRALES	
	12.1 Problèmes unidimensionnels	265
	12.2 Superposition	270
	12.3 Méthode des images.....	273
	12.4 Intégration en électrostatique	275
	12.5 Intégration en magnétostatique	279
	12.6 Inductance mutuelle	283
	12.7 Inductance propre.....	286
	12.8 Exercices	289
CHAPITRE 13	MÉTHODES APPROCHÉES	
	13.1 Approximation des conditions aux limites	291
	13.2 Différences finies	294
	13.3 Différences finies dans le domaine temporel (FDTD)	298
	13.4 Matrice de la ligne de transmission (TLM)	302
	13.5 Principes variationnels – éléments finis	305
	13.6 Méthode des moments.	310
	13.7 Constatations diverses.....	315
	13.8 Exercices	317

CHAPITRE 14	ANNEXES	
	14.1 Calcul vectoriel	319
	14.2 Relations intégrales	325
	14.3 Fonctions de Bessel	327
	14.4 Intégrales elliptiques	331
	14.5 Propriétés des matériaux usuels	332
	BIBLIOGRAPHIE	335
	SOLUTIONS DES EXERCICES	343
	Chapitre 1	343
	Chapitre 2	345
	Chapitre 3	347
	Chapitre 4	351
	Chapitre 5	355
	Chapitre 6	358
	Chapitre 7	359
	Chapitre 8	364
	Chapitre 9	368
	Chapitre 10	372
	Chapitre 11	373
	Chapitre 12	379
	Chapitre 13	382
COMPLÉMENT AU CHAPITRE 8	GUIDES D'ONDES FIBRES OPTIQUES	
	8.6 Guides d'ondes métalliques	385
	8.7 Guides d'ondes diélectriques, fibres optiques	406
	INDEX ANALYTIQUE	423
	GLOSSAIRE	437

NOTIONS FONDAMENTALES

1.1 MODÈLES

1.1.1 Particules et interactions

L'univers est formé d'un extrêmement grand nombre de particules – en admettant qu'il soit borné – qui interagissent entre elles: chaque particule est soumise aux influences combinées de toutes les autres, par le biais d'interactions de caractère gravitationnel, électromagnétique et nucléaire. Le comportement de chaque particule résulte de la somme de toutes les forces qui s'exercent sur elle. Comme l'effet des différentes forces diminue – plus ou moins rapidement – avec la distance, on restreint généralement les dimensions du domaine étudié. On ne considère qu'une région limitée dans l'espace, et donc un nombre relativement faible de particules. Toutefois, même ainsi le problème devient vite insoluble, et on doit recourir à différents modèles simplifiés, qui introduisent des valeurs moyennes pour définir les effets d'ensembles de particules.

La complexité du problème diminue quand on regroupe tous les effets observés en un point donné de l'espace. On mesure la force résultante qui agit sur une particule placée à cet endroit, et on en déduit les propriétés locales de ce point. Dans l'étude des problèmes électriques, on considère plus spécifiquement les forces électriques et magnétiques. Les forces d'attraction gravitationnelle – qui jouent pourtant un rôle prépondérant pour les astres et les êtres vivants – ont un effet nettement moindre et on n'en tient pas compte dans les problèmes d'électromagnétisme. Les forces nucléaires sont très importantes, mais n'agissent que dans un rayon d'action microscopique: ce sont elles qui définissent les propriétés de la matière.

1.1.2 Mécanique quantique

Au niveau des atomes, on étudie les interactions entre les particules élémentaires qui les composent: un noyau central, formé de protons et de neutrons, entouré d'un nuage d'électrons (chap. II.1). L'état de ces particules est caractérisé par plusieurs *nombres quantiques*, qui définissent des niveaux d'énergie – les valeurs propres de l'*équation de Schrödinger*. Ces niveaux sont discrets, ou encore *quantifiés*. Une particule peut "sauter" d'un niveau d'énergie à un autre, en absorbant (passage à un niveau plus élevé) ou en émettant (passage à un niveau plus bas) un photon – particule élémentaire de rayonnement électromagnétique – dont la fréquence est donnée par la différence d'énergie entre les deux niveaux divisée par la constante de Planck ($h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Js). Ces sauts sont utilisés dans les lasers, les masers (lasers micro-ondes) et les horloges atomiques (§ XIII.5.3.11).

Dans les solides ou les liquides, les niveaux d'énergie deviennent des bandes, totalement ou partiellement remplies d'électrons. Selon les espacements entre les bandes et leur remplissage, on a des conducteurs (chap. II.2), des isolants (diélectriques, chap. II.4) ou des semiconducteurs (vol. VII). Les propriétés ferromagnétiques des composés de fer, nickel, cobalt et quelques terres rares résultent du remplissage partiel de plusieurs couches.

L'étude quantique des matériaux sert à définir la permittivité ϵ , la conductivité σ et la perméabilité μ qui les caractérisent en électromagnétisme (sect. 1.6).

1.1.3 Électromagnétisme (modèle de Maxwell)

L'électromagnétisme considère les phénomènes électriques et magnétiques à un niveau macroscopique. Les forces électrique et magnétique produites sur des particules chargées sont liées à l'existence de grandeurs vectorielles appelées respectivement champ électrique (§ 1.3.1) et champ d'induction (§ 1.3.2). Les variations dans le temps et l'espace de ces grandeurs – et de plusieurs autres qui leur sont associées – sont liées entre elles par les équations de Maxwell (sect. 1.4). L'étude de ces interactions dans différentes situations fait l'objet du présent ouvrage. On fait usage de l'électromagnétisme:

- Lorsque le temps de propagation des interactions est du même ordre de grandeur que la durée ou la période du signal (§ 2.2.6). Une partie du signal peut alors rayonner, ce dont on tire profit pour le transmettre (chap. 9). Cet effet peut aussi donner lieu à des interférences indésirables (sect. XVIII.3.4).
- Lorsqu'on détermine les forces produites par des interactions entre champs et courants, ou les tensions qui apparaissent sur des structures en mouvement en présence de champs, dans les domaines de l'électromécanique (vol. IX), des machines (vol. X) ou de l'électroacoustique (vol. XXI).

1.1.4 Théorie des circuits (modèle de Kirchhoff)

Quand le temps nécessaire à la propagation d'un signal est beaucoup plus court que la durée ou la période de ce signal, on peut négliger les effets du retard, et donc admettre que le signal se propage instantanément. Ceci revient à supprimer les dimensions matérielles d'un circuit, dont les propriétés sont alors définies par les courants qui circulent dans les branches du circuit et les tensions qui apparaissent entre ses nœuds. On obtient ainsi le modèle de Kirchhoff (vol. III), formé de résistances R , de capacités C , d'inductances propres L et mutuelles M , ainsi que de transformateurs parfaits et de gyrateurs.

1.1.5 Cas intermédiaire: lignes de transmission

Les structures destinées au guidage de signaux au moyen de conducteurs – appelées lignes de transmission – sont longues, mais étroites. On utilise des tensions et des courants – grandeurs typiques du modèle de Kirchhoff – pour étudier la dépendance longitudinale, qui définit les propriétés de propagation de la structure (chap. 2–6), tandis que la variation transverse des champs obéit à l'équation de Laplace en deux dimensions (sect. 10.7). De cette façon, on remplace un problème à trois dimensions par deux problèmes plus simples, l'un à une dimension, l'autre à deux. Les propriétés des lignes de transmission dépendent de manière complexe de la fréquence.

1.2 HISTORIQUE

Les phénomènes électriques et magnétiques ont depuis toujours fasciné l'humanité. Ils furent pendant très longtemps considérés comme des curiosités de la nature, avant de susciter l'intérêt des scientifiques et, plus tard, des ingénieurs. Les phénomènes produits par des charges électriques, des courants et des aimants ont d'abord été observés dans la nature, puis étudiés expérimentalement, surtout durant la première moitié du 19^e siècle. Maxwell mit au point un modèle théorique unifié, qui décrit tous les phénomènes et les interactions électromagnétiques au moyen d'un ensemble compact de quatre équations.

1.2.1 Précurseurs

Depuis la plus haute antiquité, on a noté l'existence d'effets à distance produits par des forces invisibles. Vers 600 avant J.C. l'aimantation fut observée par Thalès de Milet sur des échantillons d'oxyde naturel de fer découverts en Asie Mineure, près de la ville de Magnésie (aujourd'hui Manisa, en Turquie), qui a fourni la racine du mot *magnétisme*. Il observa également les propriétés d'attraction produits par des morceaux d'ambre (en grec *ελεκτρον*) préalablement frottés sur certains tissus. Durant le Moyen Âge, les effets du magnétisme ont été étudiés – l'existence de pôles fut mise en évidence par Peregrinus en 1269 – et utilisés pour l'orientation – la boussole fut importée de Chine.

On doit à William Gilbert (1544-1603) des travaux sur le magnétisme, qui déterminèrent l'existence du champ magnétique terrestre et décrivent les aimants utilisés pour s'orienter [1]. Il remarqua aussi l'attraction produite par un barreau d'ambre frotté et tira du nom grec de cette substance la racine du mot *électricité*. Puisque des corps électrisés se maintenaient dans cet état, on parla d'électricité statique, ou encore d'*électrostatique*.

L'anglais Stephen Gray (1696-1739) étudia la propriété de transport du "fluide électrique" par divers matériaux. Il classa les corps en conducteurs et isolants. Le chimiste français Charles-François Du Fay (1698-1739) observa deux types d'électricité: "vitreuse" et "résineuse". Benjamin Franklin (1706-1790) suggéra que ces deux types d'électricité sont en fait de même nature, et parla plutôt de corps chargés positivement et négativement. Franklin est aussi connu pour l'invention du paratonnerre.

On constata qu'on peut isoler des charges électriques positives et négatives, mais qu'en revanche, les charges magnétiques sont groupées par paires: un aimant comporte un pôle nord et un pôle sud. Si on le coupe en deux on obtient deux aimants, tous deux formés d'un pôle nord et d'un pôle sud. Nul n'a jusqu'ici réussi à isoler un pôle magnétique.

Les termes de "fluides" et de "courants" furent abondamment utilisés à l'époque pour décrire les effets de l'électricité, de la chaleur, de la lumière et du magnétisme, domaines dont on pensait alors qu'ils étaient de natures complètement distinctes.

Les interactions entre l'électricité et le magnétisme furent découvertes peu à peu sous l'influence de l'école de pensée de la *Naturphilosophie*, mouvement qui prit naissance en Allemagne au début du 19^e siècle. Ses adeptes admettaient que la nature est dans un état de conflit perpétuel, que tout progrès découle d'un effet de synthèse – définie comme résultant de l'interaction de forces opposées – et que dans la nature tout est lié à tout le reste. Plusieurs des principaux chercheurs qui ont contribué au développement de l'électromagnétisme étaient des adeptes de ce mouvement.

1.2.2 Premières lois de l'électromagnétisme

Les phénomènes de décharge ont mis en évidence l'existence de mouvements de charges appelés *courants électriques*. Grâce aux travaux d'Alexandre Volta (1740-1827), il devint possible de générer des courants avec des piles chimiques. L'apparition des générateurs de charges et de courants a permis d'effectuer des expériences plus élaborées, dont les résultats ont servi à établir les lois fondamentales de l'électromagnétisme.

Les travaux de Charles Augustin de Coulomb (1736-1806) débouchèrent sur la loi d'attraction des charges électriques: la force est inversement proportionnelle au carré de la distance qui sépare deux charges – toutes les mesures effectuées depuis lors ont corroboré cette constatation.

L'action à distance d'un courant électrique sur un aimant fut découverte par le physicien danois Hans Christian Oersted (1775-1851), lors d'une expérience effectuée en 1819, qui a démontré que les phénomènes électriques et magnétiques sont liés entre eux.

L'année suivante, André-Marie Ampère (1775-1836) observa les interactions entre courants électriques et formula la loi qui porte son nom. En mettant en évidence l'existence des lignes de champ magnétique produites par un courant, il déduisit que le magnétisme pouvait également être une cause de l'électricité. Ampère adopta la convention qu'avait proposée Franklin, selon laquelle le courant électrique circule de l'électrode positive à l'électrode négative. Cette convention est encore utilisée actuellement, bien que l'on sache que les porteurs de charge dans les conducteurs – les électrons – circulent dans la direction opposée: on leur a par conséquent attribué une charge négative. Ampère remarqua aussi l'existence d'une *tension électrique*, dont l'effet est le courant électrique – mais qui peut également exister en l'absence de courant.

En Allemagne, Georg Simon Ohm (1789-1854) constata l'existence de la résistance dans les conducteurs, et Franz Ernest Neumann (1798-1895) poursuivit les travaux d'Ampère et mit au point la théorie de l'induction. Wilhelm Weber (1804-1891) tenta d'effectuer une première synthèse entre électricité statique, électricité dynamique et induction, et inventa un appareil de mesure appelé électrodynamomètre. En collaboration avec le maître des mathématiques de Göttingen, Karl Friedrich Gauss (1777-1855), il montra que les grandeurs électriques peuvent être rapportées à des unités mécaniques. Ils développèrent par ailleurs ensemble un dispositif qui préfigure le télégraphe électrique.

Une expérience effectuée par Michael Faraday (1791-1836) contribua de façon cruciale au développement de l'électromagnétisme. Cet expérimentateur voulait montrer que les lignes de force magnétiques produites par un courant pouvaient créer un courant électrique dans un autre conducteur. Il bobina deux enroulements sur un tore en fer. Après l'enclenchement d'une batterie connectée au premier enroulement, il n'observa toutefois pas le courant escompté dans le second. Il nota en revanche un bref mouvement de l'aiguille du galvanomètre lors de l'enclenchement et du déclenchement, et en déduisit que c'est la variation du champ magnétique – et non pas le champ lui-même – qui induit un mouvement de charges. Un autre chercheur, Joseph Henry (1797-1878), avait fait la même constatation deux ans auparavant, mais n'avait pas jugé utile de la faire connaître.

La découverte de Faraday souleva des discussions et des contestations. Comme celui-ci ne possédait pas les connaissances théoriques qui auraient permis de comprendre les effets observés, les explications qu'il en donna ne furent pas admises. Vers le milieu du 19^e siècle, les nombreuses constatations de nature diverse faites par des chercheurs de différents pays ne formaient pas encore un ensemble cohérent.

1.2.3 Enfin Maxwell vint !

C'est le savant écossais James Clerk Maxwell (1831-1879), admirateur de Faraday, qui eut l'intuition, sur la base des constatations expérimentales faites notamment par ce dernier, que tous les phénomènes électriques et magnétiques devaient être intimement liés entre eux. Il entreprit un ambitieux travail de synthèse, dont le but était de formuler sous une forme mathématique unifiée l'ensemble de tous les phénomènes électriques et magnétiques observés jusqu'alors [2].

Reprenant le concept des lignes de force et par analogie avec un modèle de fluides, Maxwell formula la *loi d'induction de Faraday*, dont l'idée de base est que, puisqu'une variation des tourbillons magnétiques peut provoquer un courant électrique, une variation du courant doit similairement provoquer un changement des tourbillons magnétiques. Cette idée implique une interaction mutuelle des champs électrique et magnétique en régime dynamique. Il formula alors la loi générale de circuit, appelée aussi *loi d'Ampère*, en ajoutant un terme qu'il appela *courant de déplacement*. Il justifia l'introduction de ce terme par le déplacement des *charges liées* dans les isolants, qui fait le pendant du déplacement des *charges libres* dans les conducteurs (courant de conduction).

Il prédit ainsi la propagation de perturbations électriques à travers les matériaux diélectriques. Faisant usage du concept de l'éther – qui était couramment utilisé à l'époque – il calcula au moyen d'un raisonnement mécanique à quelle vitesse une perturbation électrique devrait se déplacer dans le vide et obtint la vitesse de 193 088 milles par seconde, qui se rapproche beaucoup de la vitesse de la lumière mesurée par Hippolyte Fizeau (1819-1896). Constatant cette remarquable coïncidence, Maxwell en déduisit que la propagation électromagnétique et la lumière sont des phénomènes de même nature [3]: il avait ainsi prévu théoriquement l'existence d'ondes électromagnétiques.

Deux des disciples anglais de Maxwell – que l'on appelait alors les maxwelliens – John Henry Poynting et Olivier Heaviside, découvrirent en 1883, sur la base de la théorie mise au point par Maxwell, qu'un champ électromagnétique qui se propage transporte une certaine énergie à travers l'espace – en l'absence de tout support matériel. Ce n'est toutefois que 8 ans après la mort de Maxwell que les ondes électromagnétiques, dont il avait prédit l'existence, furent effectivement générées, puis détectées expérimentalement par le physicien allemand Heinrich Hertz (1857-1894), qui a ainsi ouvert la voie aux télécommunications par ondes hertziennes.

Il y a plus d'un siècle, Maxwell nous a laissé un modèle comportant vingt équations, exprimées dans la notation des quaternions utilisée à l'époque, au moyen duquel il avait échafaudé une théorie unifiée regroupant en un ensemble cohérent toutes les lois qui gouvernent les phénomènes électriques et magnétiques. On appelle ce regroupement la *deuxième grande unification* – la première étant l'unification des mécaniques terrestre et céleste effectuée par Newton. La théorie de Maxwell s'est depuis lors avérée pleinement compatible avec la théorie de la relativité, car invariante sous les transformations de Lorentz. Elle n'a jamais été mise en défaut jusqu'à présent.

Avec l'introduction plus récente des opérateurs vectoriels – qui n'avaient pas encore été inventés du temps de Maxwell – le système original a pu être ramené à un ensemble qui ne comporte plus que quatre équations. Tout le domaine de l'électromagnétisme est maintenant basé sur cet ensemble compact de quatre équations linéaires, que l'on peut exprimer sous une forme globale, ou intégrale (§1.4.5), et sous leur forme locale ou différentielle (§ 1.4.1).

1.3 DÉFINITIONS

1.3.1 Champ électrique E

Une particule immobile de charge électrique q (sect. I.2.3) subit une force F_e produite par l'ensemble des autres charges électriques. Cette force est proportionnelle à la charge q , et par conséquent le quotient F_e/q ne dépend pas de la particule considérée, mais dénote une propriété locale de l'espace que l'on appelle *champ électrique* $E(t, \mathbf{r})$. De même que la force dont il découle, il s'agit d'une grandeur vectorielle définie par une amplitude et une direction, qui varie généralement avec le temps t et la position \mathbf{r}

$$F_e(t, \mathbf{r})/q = E(t, \mathbf{r}) \quad [\text{V/m}] \quad (1.1)$$

1.3.2 Champ d'induction B

Quand une particule de charge électrique q se déplace, elle subit – en plus de la force électrique F_e (§ 1.3.1) une force magnétique F_m , qui est dirigée perpendiculairement à la vitesse \mathbf{v} de la particule et à une autre propriété vectorielle de l'espace, qu'on appelle champ d'induction $B(t, \mathbf{r})$

$$F_m(t, \mathbf{r})/q = \mathbf{v}(t, \mathbf{r}) \times B(t, \mathbf{r}) \quad [\text{V/m}] \quad (1.2)$$

où le signe \times (cross) représente le produit vectoriel de deux vecteurs (14.3). La dimension du champ d'induction $B(t, \mathbf{r})$ est le tesla [$T = \text{Vs/m}^2$]. Le champ d'induction est généralement aussi une fonction du temps et de la position dans l'espace.

La force magnétique que produit un champ d'induction sur des charges en mouvement, par exemple celles qui contribuent à un courant dans un conducteur (§ 1.3.4), est à la base de toutes conversions électromécaniques: un moteur transforme de la puissance électrique en puissance mécanique, tandis qu'un générateur absorbe une puissance mécanique et fournit de l'électricité (vols. IX et X). On peut également mesurer la force au moyen d'un instrument à cadre mobile, et en déduire la valeur du courant ou l'amplitude du champ d'induction (vol. XVII).

1.3.3 Densités de charge électrique

La charge électrique peut être ponctuelle (particule infiniment petite) ou distribuée le long d'une ligne, sur une surface ou dans un volume, de sorte qu'on rencontre les quatre grandeurs suivantes:

- q [C = As] charge ponctuelle
- ρ_l [As/m] densité de charge linéique
- ρ_s [As/m²] densité de charge surfacique
- ρ [As/m³] densité de charge volumique

Une densité de charge est définie par la limite du quotient de la charge contenue dans un volume (ou sur une surface, ou le long d'une ligne) par ce volume (surface, longueur de ligne) lorsque les éléments deviennent très petits – ils doivent toutefois garder une dimension suffisante par rapport aux dimensions atomiques pour qu'on puisse considérer l'effet moyen d'un certain nombre de particules.

1.3.4 Densité de courant électrique J

Dans certains milieux, les charges électriques (électrons ou ions) peuvent se déplacer librement (chap. II.2). L'application d'une force électrique fait alors bouger les charges et crée un courant électrique, dont on définit la densité $J(t, \mathbf{r})$ par la relation

$$\mathbf{J}(t, \mathbf{r}) = \sum_i \rho_i \mathbf{v}_i \quad [\text{A/m}^2] \quad (1.3)$$

La sommation porte sur tous les types de particules chargées qui se déplacent dans le milieu considéré, les charges du type i étant caractérisées par une densité moyenne de charge ρ_i et une vitesse moyenne \mathbf{v}_i . On constate dans beaucoup de situations que, à cause des collisions entre particules, c'est la vitesse moyenne \mathbf{v}_i – et non l'accélération – qui est proportionnelle au champ électrique et on définit alors une conductivité σ [S/m]

$$\mathbf{J}(t, \mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \quad [\text{A/m}^2] \quad (1.4)$$

Cette relation est connue sous le nom de *loi d'Ohm*. On rencontre des charges libres dans les milieux suivants:

- les métaux, dans lesquels la conduction résulte de la présence d'électrons libres; la conductivité σ des métaux couramment utilisés en électrotechnique est donnée dans le tableau 14.12;
- les semiconducteurs (silicium, germanium, arseniure de gallium, etc.) qui contiennent des électrons libres et des "trous", ou vides d'électrons;
- les sels en solution ou électrolytes, qui contiennent des ions positifs et négatifs;
- les *plasmas*, gaz portés à de très hautes températures dans lesquels les atomes sont partiellement ou totalement dissociés en électrons et en ions positifs;
- les *arcs électriques* apparaissent lorsque l'amplitude du champ électrique dépasse une valeur critique appelée *champ disruptif* du milieu (qui, pour l'air, se situe au voisinage de 3 MV/m); en fait, tous les matériaux deviennent conducteurs quand on leur applique un champ électrique suffisamment intense.

Le passage d'un courant dans un milieu conducteur produit un échauffement de ce dernier, qui est proportionnel au carré du courant (effet Joule). Un courant excessif dans un conducteur métallique peut faire fondre ce dernier: on utilise couramment cet effet pour protéger l'appareillage électrique avec des *fusibles* (§ I.3.5.10).

1.3.5 Densité de courant de surface J_s

Une densité surfacique de charge ρ_s peut aussi se déplacer, produisant une *densité de courant de surface* $J_s(t, \mathbf{r})$. Un courant de surface peut circuler sur la surface séparant deux milieux différents (§ 1.5.1), notamment lorsqu'un des deux milieux est un conducteur électrique parfait (cep, § 1.6.6).

1.3.6 Propriétés diélectriques

Dans les matériaux isolants, les charges restent liées à l'intérieur des atomes et des molécules. Quand on applique un champ électrique, les charges subissent une force, mais elles sont retenues par les forces de cohésion internes de l'atome ou de la molécule, et ne peuvent donc se déplacer que légèrement par rapport à leur position d'équilibre.

Il y a alors formation de dipôles induits dans le matériau (chap. II.4), qui créent un champ de polarisation $\mathbf{P}(t, \mathbf{r})$, ce dernier étant une fonction du champ électrique appliqué (sect. 1.6). Les effets électriques sont représentés par un *champ de déplacement* $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ qu'on définit comme suit

$$\mathbf{D}(t, \mathbf{r}) = \epsilon_0 \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + \mathbf{P}(t, \mathbf{r}) \quad [\text{As/m}^2] \quad (1.5)$$

où $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm est la constante électrique [4] (§ 1.3.1). Dans le vide – et approximativement aussi dans l'air – il n'y a pas de polarisation $\mathbf{P}(t, \mathbf{r})$, et on a par conséquent $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$. La variation dans le temps du champ de déplacement $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$, représentée par sa dérivée partielle $\partial \mathbf{D}(t, \mathbf{r}) / \partial t$, est aussi appelée *courant de déplacement*.

1.3.7 Propriétés magnétiques

Les propriétés magnétiques des matériaux résultent d'une propriété quantique de l'électron que l'on appelle le *moment magnétique de spin*, qui peut être positif ou négatif. Dans la grande majorité des éléments, le nombre de spins positifs est égal à celui des spins négatifs: leurs effets se compensent exactement et le milieu considéré ne possède pas de propriétés magnétiques.

Dans certains matériaux de transition, dits *ferromagnétiques* (fer, nickel, cobalt et certaines terres rares, ainsi que leurs oxydes et alliages), il y a des nombres différents d'électrons à spin positif et à spin négatif. La résultante n'est plus nulle et donne lieu à une aimantation $\mathbf{M}(t, \mathbf{r})$ (chap. II.3).

On définit le champ magnétique $\mathbf{H}(t, \mathbf{r})$ au moyen de la relation

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \mu_0 [\mathbf{H}(t, \mathbf{r}) + \mathbf{M}(t, \mathbf{r})] \quad [\text{Vs/m}^2] \quad (1.6)$$

où $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am. Dans le vide, l'air et les matériaux non ferromagnétiques, l'aimantation $\mathbf{M}(t, \mathbf{r})$ est nulle ou négligeable et on a dans ce cas $\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{H}(t, \mathbf{r})$. On remarque un certain parallélisme entre les propriétés diélectriques et magnétiques des matériaux, mais également des différences dans les formulations.

1.3.8 Lignes de champ

Quand un champ vectoriel est connu dans une région de l'espace, on peut définir des lignes de champ, qui sont en tout point tangentes au vecteur du champ. Lorsqu'on dispose d'une relation analytique pour le champ, on obtient les équations des lignes de champ en faisant correspondre la direction de l'élément infinitésimal de ligne $d\mathbf{s}$ à celle du champ.

Par exemple, dans le cas d'un champ magnétique représenté dans un repère de coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) &= e_x H_x(t, \mathbf{r}) + e_y H_y(t, \mathbf{r}) + e_z H_z(t, \mathbf{r}) \quad [\text{A/m}] \\ d\mathbf{s} &= e_x dx + e_y dy + e_z dz \quad [\text{m}] \end{aligned} \quad (1.7)$$

où e_x est le vecteur unité dans la direction x et $H_x(t, \mathbf{r})$ est la composante du champ magnétique dans cette direction, et ainsi de suite selon y et z . Les composantes du champ sont proportionnelles à celles de l'élément $d\mathbf{s}$, ce qu'on exprime en égalant leurs quotients

$$\frac{dx}{H_x(t, \mathbf{r})} = \frac{dy}{H_y(t, \mathbf{r})} = \frac{dz}{H_z(t, \mathbf{r})} \quad [\text{m}^2/\text{A}] \quad (1.8)$$

On regroupe les fonctions de x dans un terme, celles de y dans un autre et celles de z dans un troisième. Ceci donne un ensemble d'équations différentielles qui, après intégration, fournissent l'équation des lignes de champ (familles de courbes). En représentant graphiquement l'allure des lignes de champ, on peut voir où les champs sont importants (lignes proches les unes des autres) et où ils sont plus faibles (lignes plus écartées).

1.3.9 Exemple de lignes de champ

Dans une lentille de focalisation magnétique de particules, que l'on utilise pour contenir un faisceau de particules ionisées (électrons ou ions) dans un accélérateur ou un tube de récepteur de télévision, on souhaite avoir un champ magnétique avec deux composantes cartésiennes qui varient linéairement en fonction de la position

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = A(x\mathbf{e}_x - y\mathbf{e}_y) \quad (1.9)$$

La composante du champ selon x est proportionnelle à la coordonnée x , celle selon y est proportionnelle à y , et il n'y a pas de composante dans la direction longitudinale z . On introduit la dépendance ainsi définie dans (1.8) et on obtient

$$dx/x = -dy/y \quad dz = 0 \quad (1.10)$$

Cette relation est facilement intégrable et donne

$$\ln x = -\ln y + \ln C \quad (1.11)$$

où C est une constante d'intégration, qui peut avoir des valeurs positives ou négatives. En développant (1.11), on obtient une équation générale pour les lignes de champ, qui sont représentées dans la figure 1.1

$$xy = C \quad (1.12)$$

Il s'agit d'une famille d'hyperboles équilatères qui ont toutes les mêmes asymptotes, qui sont les deux axes de coordonnées x et y . Les différentes courbes de cette famille correspondent à des valeurs différentes de la constante C .

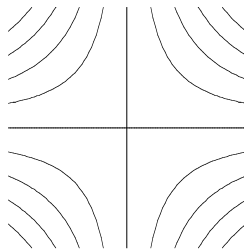


Fig. 1.1 Lignes de champ magnétique dans une lentille de focalisation.

En général, deux lignes de champ ne doivent pas se croiser, car cela signifierait qu'en un même point le champ peut avoir deux directions différentes. Ce n'est qu'aux endroits où le champ est nul – ici au centre de la structure – qu'on peut observer des croisements de lignes de champ, ou encore aux endroits où le champ devient infini en présence d'une charge ponctuelle q (§ 1.3.3).

1.4 ÉQUATIONS DE MAXWELL

1.4.1 Forme locale ou différentielle

En tout point de l'espace qui n'est pas situé sur une surface de séparation entre deux milieux, les équations de Maxwell spécifient que

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(t, \mathbf{r})}{\partial t} & \nabla \cdot \mathbf{D}(t, \mathbf{r}) &= \rho(t, \mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) &= \frac{\partial \mathbf{D}(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \mathbf{J}(t, \mathbf{r}) & \nabla \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) &= 0\end{aligned}\quad (1.13)$$

Tous les champs dans ces équations ont été définis dans la section 1.3. Sous cette forme, dite locale ou différentielle, les équations de Maxwell expriment des relations entre des variations spatiales de certains champs et des variations temporelles d'autres champs. L'opérateur différentiel *del* ou *nabla* ∇ (du grec $\nu\alpha\beta\lambda\alpha$ = petite harpe) sert à exprimer l'opération rotationnel $\nabla \times = \text{rot}$ et l'opération divergence $\nabla \cdot = \text{div}$. Les principales propriétés de cet opérateur, ainsi qu'une liste des principales relations qui en font usage sont présentées dans la section 14.1.

1.4.2 Remarque: absence de charge magnétique libre

La relation de droite en bas dans (1.13) n'est pas totalement indépendante de celle de gauche en haut, comme on peut le voir en prenant la divergence de cette dernière (14.16)

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \equiv 0 = -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{B}(t, \mathbf{r})}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) \quad [\text{V/m}^3] \quad (1.14)$$

Cela signifie que la divergence du champ d'induction $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$ ne varie pas dans le temps. Par analogie avec la relation de droite en haut de (1.13), cette grandeur devrait être une densité de charge magnétique libre. La découverte d'une telle charge a été annoncée à maintes reprises, pour être chaque fois démentie peu après, la présence d'une charge magnétique n'étant pas indispensable pour expliquer les phénomènes observés. Jusqu'à preuve du contraire, on admet donc que la charge magnétique libre n'existe pas.

1.4.3 Équation de continuité

Prenant la divergence de la relation de gauche en bas dans (1.13), on trouve (14.16)

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) \equiv 0 = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \mathbf{J}(t, \mathbf{r}) \right) = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D}(t, \mathbf{r}) + \nabla \cdot \mathbf{J}(t, \mathbf{r}) \quad (1.15)$$

On fait ensuite usage de la relation de droite en haut, et on obtient

$$\frac{\partial \rho(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}(t, \mathbf{r}) = 0 \quad [\text{A/m}^3] \quad (1.16)$$

La variation dans le temps de la densité de charge $\rho(t, \mathbf{r})$ est égale et de signe contraire à la variation spatiale de la densité de courant $\mathbf{J}(t, \mathbf{r})$, qui est produit par le déplacement des charges (§ 1.3.4). Cette relation exprime le fait que les charges électriques sont conservées et on l'appelle *équation de continuité*.

1.4.4 Dualité des équations de Maxwell

En comparant les quatre équations (1.13), on constate qu'il existe une certaine symétrie entre les phénomènes électriques et magnétiques, qui n'est toutefois pas complète suite à l'absence de charges magnétiques et, par conséquent, de courants magnétiques (§ 1.4.2).

Dans l'air ou dans le vide, les relations sont toutes symétriques ou duales. Lorsqu'on connaît la solution d'un problème électrique, on obtient la solution du problème magnétique dual en remplaçant les grandeurs électriques par les grandeurs magnétiques correspondantes, et vice versa.

Pour rétablir la dualité dans le cas général, il peut être souhaitable dans certaines situations d'introduire des charges et des courants magnétiques, même si ces grandeurs n'existent pas dans la réalité physique [5]. L'augmentation de complexité résultante est alors compensée par une formulation mathématique plus compacte. On utilise également des courants magnétiques pour tenir compte de certaines perturbations (§ XIII.2.7.2).

La dualité entre électricité et magnétisme se retrouve en théorie des circuits – entre la tension et le courant (§ IV.1.2.13). On retrouve aussi cette dualité dans les lignes de transmission (chap. 2): les deux équations des lignes (2.8) et (2.10) sont duales l'une de l'autre.

1.4.5 Forme globale ou intégrale

Les équations de Maxwell peuvent aussi être exprimées sous leur "forme globale," en termes de relations intégrales qui portent sur les champs dans des volumes, sur des surfaces et le long de contours (fig. 1.2). On obtient ces relations en intégrant les équations aux dérivées partielles (1.13) sur une surface ou sur un volume et en faisant usage de relations intégrales (sect. 14.2).

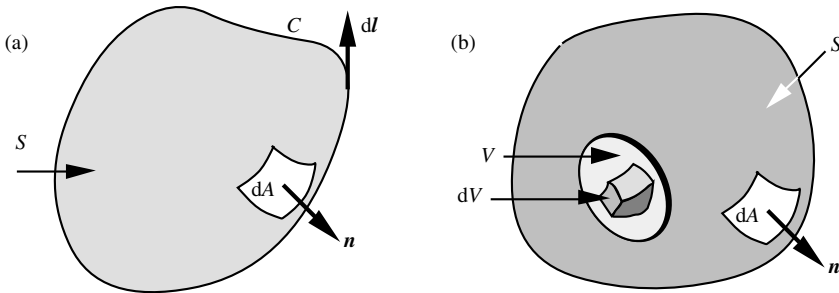


Fig. 1.2 Définitions des surfaces, volumes et contours d'intégration des équations de Maxwell: (a) surface S limitée par un contour C ; (b) volume V entouré d'une surface S .

Les deux équations rotationnelles de (1.13) deviennent, après intégration sur la surface de la figure 1.2(a) et en utilisant le théorème de Stokes (§ 14.2.6)

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} &= - \int_S \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}(t, \mathbf{r})}{\partial t} dA \\ \oint_C \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} &= \int_S \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \mathbf{J}(t, \mathbf{r}) \right) dA \end{aligned} \quad (1.17)$$

Ces deux expressions lient les circulations des champs électrique et magnétique sur le contour fermé C (intégrales à gauche des expressions) aux flux d'induction et de courant qui traversent la surface S (intégrales de droite). Ces deux relations sont aussi connues, respectivement, sous les noms de *loi d'induction de Faraday* et de *loi d'Ampère*.

Les deux équations en divergence de (1.13) deviennent, après intégration sur le volume de la figure 1.2(b) et en utilisant le théorème de la divergence

$$\oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}(t, \mathbf{r}) \, dA = \int_V \rho(t, \mathbf{r}) \, dV \quad \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) \, dA = 0 \quad (1.18)$$

Ces deux relations considèrent les flux qui traversent la surface fermée S . Le flux du champ de déplacement $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ est égal à la charge totale contenue dans le volume (*équation de Gauss*), tandis que le flux du champ d'induction est nul (*conservation du flux*) par suite de l'absence de charges magnétiques isolées.

Sous leur forme intégrale, les équations de Maxwell sont plus générales que sous leur forme différentielle, elles restent notamment valables quand on traverse une surface de séparation entre différents milieux (sect. 1.5). Elles permettent donc de déterminer les conditions aux (sect. 1.5) et servent résoudre des problèmes qui présentent des symétries particulières (sect. 12.1).

1.4.6 Potentiel vecteur magnétique

Sachant que la divergence d'un rotationnel est toujours nulle (14.16), et qu'il en va de même pour la divergence du champ d'induction $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$, on peut poser que $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$ est le rotationnel d'un vecteur $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ [Vs/m] que l'on appelle *potentiel vecteur magnétique*

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \equiv 0 \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = 0, \quad \text{donc} \quad \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \quad (1.19)$$

Cette relation ne définit $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ qu'à un vecteur irrotationnel près, c'est-à-dire qu'on peut remplacer $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ par $\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) + \nabla \Phi(t, \mathbf{r})$, où $\Phi(t, \mathbf{r})$ est une fonction arbitraire des coordonnées, car le rotationnel d'un gradient est toujours nul (14.17). On dispose ainsi d'une certaine liberté dans le choix de $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$, dont on tire profit pour simplifier la résolution de problèmes (chap. 12).

1.4.7 Potentiel scalaire électrique

Combinant (1.13) avec la première équation rotationnelle de Maxwell on obtient

$$\nabla \times \left(\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + \frac{\partial \mathbf{A}(t, \mathbf{r})}{\partial t} \right) = 0 \quad [\text{V/m}^2] \quad (1.20)$$

Sachant que le rotationnel d'un gradient est toujours nul (14.17), on définit une fonction scalaire $V(t, \mathbf{r})$ [V] telle que

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + \frac{\partial \mathbf{A}(t, \mathbf{r})}{\partial t} = -\nabla V(t, \mathbf{r}) \quad [\text{V/m}] \quad (1.21)$$

Le *potentiel scalaire électrique* $V(t, \mathbf{r})$ est défini à une constante près. On a choisi le signe négatif parce que, par convention, les lignes de champ (§ 1.3.8) vont du potentiel positif vers le potentiel négatif.

1.4.8 Equipotentielles

Le lieu des points de l'espace qui se trouvent au même potentiel scalaire est une équipotentielle, définie par la relation $V = \text{cste}$. Il s'agit d'une surface lorsqu'on considère un problème dans l'espace, qui devient une courbe dans le cas d'un problème à deux dimensions (sect. 10.7).

Le champ qui dérive du potentiel est perpendiculaire en tout point à l'équipotentielle: les lignes de champ (§ 1.3.8) sont donc orthogonales aux équipotentiels. La figure 1.3 représente les équipotentiels (lignes grises) et les lignes de champ (lignes noires) dans la section droite d'une ligne bifilaire (§ 2.4.3).

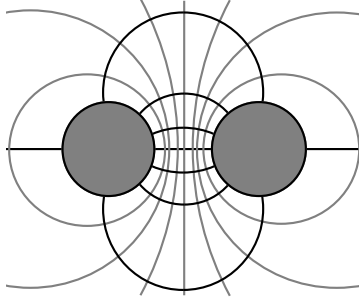


Fig. 1.3 Equipotentiels et lignes de champ dans une ligne bifilaire.

1.5 CONDITIONS AUX LIMITES

L'étude d'une structure qui comporte plusieurs régions homogènes détermine d'abord les champs dans chaque région avec la forme locale des équations de Maxwell, puis applique les conditions aux limites fournies par la forme globale des équations.

1.5.1 Détermination des conditions aux limites

On définit une surface ou un volume de part et d'autre de la surface de séparation (fig. 1.4) et on applique les équations de Maxwell sous forme intégrale (§ 1.4.6).

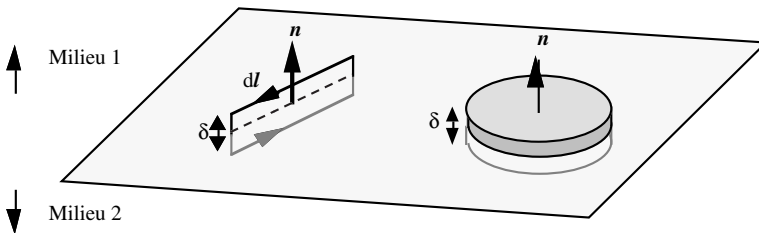


Fig. 1.4 Surface et volume d'intégration entre deux milieux.

On fait tendre δ vers zéro et on prend la limite des intégrales. Ceci fournit des relations entre certaines composantes des champs de part et d'autre de l'interface.

1.5.2 Conditions sur les composantes tangentielles

On applique les relations intégrales (1.17) à la surface de gauche dans la figure 1.3. Quand la hauteur du contour tend vers zéro, l'aire comprise à l'intérieur s'annule et il en va de même pour les flux des champs $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$ et $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$. En revanche, la contribution de la densité de courant ne s'annule pas lorsque la limite du produit $\mathbf{J}(t, \mathbf{r})\delta$ donne le courant de surface $\mathbf{J}_s(t, \mathbf{r})$ (§ 1.3.5). Comme la surface d'intégration a été choisie de façon arbitraire par rapport à la surface de séparation, la condition limite doit rester valable quelle que soit l'orientation, ce qui n'est possible que si

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{E}_1(t, \mathbf{r}) - \mathbf{E}_2(t, \mathbf{r})] = 0 \quad \mathbf{n} \times [\mathbf{H}_1(t, \mathbf{r}) - \mathbf{H}_2(t, \mathbf{r})] = \mathbf{J}_s(t, \mathbf{r}) \quad (1.22)$$

où le vecteur \mathbf{n} est perpendiculaire à la surface de séparation, allant du milieu 2 vers le milieu 1, et où $\mathbf{J}_s(t, \mathbf{r})$ est la densité de courant de surface défini au paragraphe 1.3.5 – qu'il ne faut pas confondre avec la densité volumique de courant $\mathbf{J}(t, \mathbf{r})$ qui apparaît dans les équations de Maxwell (1.13).

Les composantes du champ électrique tangentielles à la surface entre deux milieux sont toujours continues de part et d'autre de la surface. En revanche, les composantes tangentielles du champ magnétique sont discontinues lorsqu'une densité surfacique de courant $\mathbf{J}_s(t, \mathbf{r})$ circule sur la surface de séparation.

1.5.3 Conditions sur les composantes normales

On intègre les équations (1.18) sur la surface de droite de la figure 1.4 et on fait tendre δ vers zéro. Le volume et les contributions des parois latérales s'annulent et la seule charge qui reste est la charge de surface. Comme les relations doivent être valables quel que soit le volume choisi, on obtient les relations suivantes pour les composantes normales

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{D}_1(t, \mathbf{r}) - \mathbf{D}_2(t, \mathbf{r})] = \rho_s(t, \mathbf{r}) \quad \mathbf{n} \cdot [\mathbf{B}_1(t, \mathbf{r}) - \mathbf{B}_2(t, \mathbf{r})] = 0 \quad (1.23)$$

où $\rho_s(t, \mathbf{r})$ est la densité de charge de surface, définie au paragraphe 1.3.3. Ici, la composante normale de l'induction $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$ est toujours continue, tandis que celle du champ de déplacement $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ est discontinue lorsqu'il y a des charges de surface.

1.5.4 Remarques

Les quatre relations portent sur quatre champs différents. Dans deux cas, les composantes sont toujours continues, tandis que dans les deux autres les composantes peuvent être discontinues sous certaines conditions. Pour éviter des confusions, il faut bien noter lesquelles des composantes – normales ou tangentielles – de quel champ sont concernées par les différentes relations.

Une autre source permanente de confusion concerne les densités de charges et de courants électriques. Il faut nettement distinguer les densités volumiques – dans les équations de Maxwell (1.13) – des densités surfaciques, dans les conditions aux limites (1.22) et (1.23).

Lorsque les composantes tangentielles des champs satisfont les conditions aux limites et que les champs sont des solutions des équations de Maxwell de part et d'autre de la séparation, alors les conditions sur les composantes normales sont automatiquement satisfaites également.

1.6 PROPRIÉTÉS DES MATÉRIAUX

1.6.1 Formulation générale

Les deux grandeurs électriques $D(t, \mathbf{r})$ et $E(t, \mathbf{r})$, et les deux grandeurs magnétiques $B(t, \mathbf{r})$ et $H(t, \mathbf{r})$, qui apparaissent dans les équations de Maxwell (1.13), sont liées par les équations constitutives, dont la forme la plus générale est donnée par (1.5), (1.6) et (1.4)

$$D(t, \mathbf{r}) = \varepsilon_0 E(t, \mathbf{r}) + P(t, \mathbf{r}) \quad B(t, \mathbf{r}) = \mu_0 [H(t, \mathbf{r}) + M(t, \mathbf{r})] \quad J(t, \mathbf{r}) = \sigma E(t, \mathbf{r})$$

où ε_0 et μ_0 sont respectivement les constantes électrique et magnétique [4], et où le matériau produit une polarisation $P(t, \mathbf{r})$ (§ 1.3.6) et une aimantation $M(t, \mathbf{r})$ §1.3.7).

Ces deux grandeurs dépendent des champs électrique et magnétique. Dans le cas le plus général, on a des fonctions $P(E, H)$ et $M(E, H)$, et on parle de milieux chiraux, bi-isotropes et bi-anisotropes [6] – qu'on ne considère pas dans le présent ouvrage.

Dans les milieux couramment rencontrés en électrotechnique, les relations prennent la forme plus habituelle $P(E)$ et $M(H)$. Les dépendances peuvent être complexes et non linéaires. Heureusement, beaucoup de matériaux couramment utilisés ont des propriétés pratiquement linéaires – lorsque les amplitudes des champs ne sont pas excessives – et des modèles linéaires simples suffisent pour décrire leurs propriétés.

1.6.2 Milieux linéaires isotropes sans pertes

Dans un milieu linéaire, isotrope et sans pertes, la polarisation $P(t, \mathbf{r})$ est une fonction linéaire de $E(t, \mathbf{r})$ et, de même, l'aimantation $M(t, \mathbf{r})$ est directement proportionnelle à $H(t, \mathbf{r})$. On peut dans ce cas écrire que

$$D(t, \mathbf{r}) = \varepsilon E(t, \mathbf{r}) = \varepsilon_0 \varepsilon_r E(t, \mathbf{r}) \quad B(t, \mathbf{r}) = \mu H(t, \mathbf{r}) = \mu_0 \mu_r H(t, \mathbf{r}) \quad (1.24)$$

où ε et ε_r sont les permittivités absolue et relative du matériau, tandis que μ et μ_r sont ses perméabilités absolue et relative. La constante électrique vaut $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm, la constante magnétique $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am. On introduit ces relations dans les équations de Maxwell, qui prennent la forme

$$\begin{aligned} \nabla \times E(t, \mathbf{r}) &= -\mu \frac{\partial H(t, \mathbf{r})}{\partial t} & \nabla \cdot E(t, \mathbf{r}) &= \rho(t, \mathbf{r})/\varepsilon \\ \nabla \times H(t, \mathbf{r}) &= \varepsilon \frac{\partial E(t, \mathbf{r})}{\partial t} + J(t, \mathbf{r}) & \nabla \cdot H(t, \mathbf{r}) &= 0 \end{aligned} \quad (1.25)$$

où $J(t, \mathbf{r})$ et $\rho(t, \mathbf{r})$ sont des termes de sources.

1.6.3 Milieux anisotropes

Certains milieux – comme les cristaux – possèdent des axes de symétrie, et leurs propriétés varient avec l'orientation du champ. En dehors de quelques cas particuliers – lorsque les champs sont dirigés le long des axes principaux – les vecteurs $E(t, \mathbf{r})$ et $D(t, \mathbf{r})$ (ou $H(t, \mathbf{r})$ et $B(t, \mathbf{r})$) ne pointent pas dans la même direction (non équipollents), et on dit que le milieu est *anisotrope*. Pour représenter ses propriétés, on doit avoir recours à des tenseurs – que l'on appelle également dyadiques – de permittivité $\bar{\varepsilon}$ et de perméabilité $\bar{\mu}$.

Dans un matériau anisotrope linéaire sans pertes, on obtient les relations suivantes

$$\mathbf{D}(t, \mathbf{r}) = \bar{\bar{\epsilon}} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \epsilon_0 \bar{\bar{\epsilon}}_r \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \quad \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \bar{\bar{\mu}} \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) = \mu_0 \bar{\bar{\mu}}_r \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) \quad (1.26)$$

où les tenseurs peuvent être représentés par des matrices 3×3 – par exemple, dans le repère cartésien [7],

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad [\text{As/Vm}] \quad \bar{\bar{\mu}} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \quad [\text{Vs/Am}] \quad (1.27)$$

Les équations de Maxwell prennent aussi un caractère tensoriel. On peut souvent simplifier la notation à l'aide des valeurs propres et des vecteurs propres des matrices, qui correspondent aux conditions particulières d'excitation pour lesquels le milieu anisotrope se comporte comme un milieu isotrope (le long des axes principaux d'un cristal).

1.6.4 Milieux linéaires isotropes dissipatifs

Dans un matériau qui présente des pertes, une partie du signal est absorbée pour exciter les processus physiques internes du matériau, ce qui prend un certain temps [8]. La réponse est en retard sur l'excitation et ne lui est donc pas directement proportionnelle. On exprime mathématiquement ses propriétés par des convolutions [9]

$$\mathbf{D}(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon(t - \tau) \mathbf{E}(\tau, \mathbf{r}) d\tau \quad \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t - \tau) \mathbf{H}(\tau, \mathbf{r}) d\tau \quad (1.28)$$

Lorsqu'un matériau présente des pertes, les champs de déplacement $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ et d'induction $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$ ne dépendent pas simplement des champs électrique et magnétique qui existent au même moment, mais aussi de leur état antérieur, pondéré par des fonctions de transfert diélectrique et magnétique. Il devient difficile, voire pratiquement impossible, d'étudier un problème d'électromagnétisme dépendant du temps dans un milieu dissipatif.

1.6.5 Métaux

Dans la plupart des conducteurs métalliques en régime de fonctionnement normal, la densité de courant $\mathbf{J}(t, \mathbf{r})$ est directement proportionnelle au champ électrique $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$, le quotient étant la conductivité σ (1.4). Par ailleurs le courant de conduction $\mathbf{J}(t, \mathbf{r})$ est très supérieur au courant de déplacement $\partial \mathbf{D}(t, \mathbf{r}) / \partial t$ et, par conséquent, on néglige ce dernier terme dans les équations de Maxwell (1.13).

1.6.6 Conducteur électrique parfait (cep)

Dans un bon conducteur (cuivre, argent, aluminium, or) la conductivité σ est tellement grande qu'on admet souvent, en première approximation, qu'elle est infinie ($\sigma \approx \infty$). On a alors un *conducteur électrique parfait* (cep), dans lequel un courant peut circuler sans tension appliquée. La densité de courant $\mathbf{J}(t, \mathbf{r})$ ne peut pas être infinie, et si $\sigma = \infty$ dans (1.4) on doit avoir $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = 0$. Appliquant la condition (1.22) au bord d'un cep on obtient

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = 0 \quad (1.29)$$

Le champ électrique doit donc toujours être perpendiculaire à la surface d'un csp. Le concept de conducteur électrique parfait sert à simplifier les développements théoriques avec des conditions aux bords d'un conducteur. Les matériaux *supraconducteurs* ont des propriétés qui se rapprochent beaucoup de ce concept – il faut pour cela que la température soit suffisamment basse – tandis que le courant qu'ils conduisent et le champ magnétique qui les entoure ne doivent pas être trop élevés.

1.6.7 Conducteur magnétique parfait (cmp)

Dans certains matériaux ferromagnétiques, la perméabilité μ devient très grande et, par dualité, on admet en première approximation qu'elle est infinie ($\mu \approx \infty$). On a ainsi un *conducteur magnétique parfait* (cmp) dans lequel un champ d'induction peut exister en l'absence de champ magnétique. Comme l'induction $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$ ne peut pas devenir infinie, si ($\mu \approx \infty$) dans (1.6) on doit avoir $\mathbf{H}(t, \mathbf{r}) = 0$. Appliquant la condition (1.22) au bord d'un cmp on a, s'il n'y a pas de courant de surface au bord du matériau

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) = 0 \quad (1.30)$$

Le champ magnétique doit être perpendiculaire à la surface d'un cmp. Ce concept est également utile pour tenir compte de certaines symétries (plan de circuit ouvert).

1.6.8 Propriétés du vide

Le vide, et approximativement l'air, sont les milieux linéaires par excellence. Ils ne possèdent ni polarisation $\mathbf{P}(t, \mathbf{r})$, ni aimantation $\mathbf{M}(t, \mathbf{r})$ et il en résulte donc que leurs permittivité relative ϵ_r et leur perméabilité relative μ_r sont toutes deux égales à l'unité. La constante électrique ϵ_0 et la constante magnétique μ_0 sont liées par deux relations

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c_0 = 2,998 \dots 10^8 \cong 3 \cdot 10^8 \quad [\text{m/s}] \quad (1.31)$$

qui donne la vitesse de la lumière dans le vide c_0

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = Z_0 \cong 120 \pi \cong 376,6 \dots \quad [\Omega] \quad (1.32)$$

où Z_0 est appelée l'impédance caractéristique du vide.

1.7 ÉNERGIE ET PUISSANCE

1.7.1 Vecteur de Poynting

Le produit vectoriel du champ électrique $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ par le champ magnétique $\mathbf{H}(t, \mathbf{r})$ est appelé *vecteur de Poynting* $\mathbf{S}(t, \mathbf{r})$. C'est une densité de puissance qui représente en tout point la direction et l'amplitude de la puissance transportée par les champs électromagnétiques

$$\mathbf{S}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \times \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) \quad [\text{VA/m}^2] \quad (1.33)$$

1.7.2 Énergie électrique

Lors d'un changement infinitésimal de l'état thermodynamique d'un système électrique, le terme $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ représente la variation de la densité volumique d'énergie électrique. Il apparaît avec les autres termes qui correspondent aux variations des énergies potentielle, thermique, chimique du système [10]. Dans un milieu linéaire sans pertes (§ 1.6.2), cette variation peut être mise sous la forme (§ IX.2.10.8)

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{D}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \cdot \varepsilon d\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = (\varepsilon/2)dE^2(t, \mathbf{r}) = dW_e(t, \mathbf{r}) \quad [\text{J/m}^3] \quad (1.34)$$

où on a défini la densité d'énergie électrique par

$$W_e(t, \mathbf{r}) = (\varepsilon/2)\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = (\varepsilon/2)E^2(t, \mathbf{r}) \quad [\text{J/m}^3] \quad (1.35)$$

On trouve l'énergie électrique totale contenue dans un volume V en intégrant $W_e(t, \mathbf{r})$ dans tout le volume. Dans un système comportant des pertes ou dans un système non linéaire, les notions d'énergie sont plus difficiles à définir [11].

1.7.3 Énergie magnétique

La variation de la densité volumique d'énergie magnétique lors d'un changement infinitésimal est donnée par $\mathbf{H}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$. Dans un milieu linéaire sans pertes (§ 1.6.2) elle devient

$$\mathbf{H}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) \cdot \mu d\mathbf{H}(t, \mathbf{r}) = (\mu/2)dH^2(t, \mathbf{r}) = dW_m(t, \mathbf{r}) \quad [\text{J/m}^3] \quad (1.36)$$

où on a défini la densité d'énergie magnétique par

$$W_m(t, \mathbf{r}) = (\mu/2)\mathbf{H}(t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) = (\mu/2)H^2(t, \mathbf{r}) \quad [\text{J/m}^3] \quad (1.37)$$

L'énergie magnétique totale dans un volume V est obtenue en prenant l'intégrale de $W_m(t, \mathbf{r})$ dans ce volume.

1.7.4 Théorème de Poynting

Pour déterminer le transfert de puissance électromagnétique, on prend la divergence du vecteur de Poynting (§ 1.7.1) et on développe avec (1.13) les termes obtenus

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S}(t, \mathbf{r}) &= \nabla \cdot [\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \times \mathbf{H}(t, \mathbf{r})] = \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) \cdot \nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) - \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \cdot \nabla \times \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) \\ &= -\mathbf{H}(t, \mathbf{r}) \cdot \frac{\partial \mathbf{B}(t, \mathbf{r})}{\partial t} - \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \cdot \frac{\partial \mathbf{D}(t, \mathbf{r})}{\partial t} - \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}(t, \mathbf{r}) \quad [\text{VA/m}^3] \end{aligned} \quad (1.38)$$

On reconnaît dans cette relation les variations d'énergies électrique et magnétique (§ 1.7.2 et § 1.7.3). Quant au dernier terme, il représente l'énergie qui est mise sous une autre forme (calorifique, mécanique, etc.). Dans un milieu linéaire sans pertes diélectriques ou magnétiques, (1.38) devient, utilisant les développements de (1.34) et (1.36)

$$\nabla \cdot \mathbf{S}(t, \mathbf{r}) = -\frac{\partial W_m(t, \mathbf{r})}{\partial t} - \frac{\partial W_e(t, \mathbf{r})}{\partial t} - \sigma E^2(t, \mathbf{r}) \quad [\text{VA/m}^3] \quad (1.39)$$

Pour déterminer la signification physique de cette relation, on l'intègre sur un volume V entouré d'une surface fermée S (fig. 1.2) et on fait usage de l'équation de la divergence (1.39) pour développer le terme de gauche

$$\oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}(t, \mathbf{r}) dA = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V [W_m(t, \mathbf{r}) + W_e(t, \mathbf{r})] dV - \int_V \sigma E^2(t, \mathbf{r}) dV \quad [\text{VA}] \quad (1.40)$$

Il s'agit d'un bilan d'énergie: le flux de la puissance qui sort du volume V en traversant la surface S est égal à la diminution des énergies électrique et magnétique dans le volume V , moins la puissance perdue par transformation en autres formes d'énergie. On connaît ces deux relations sous le nom de *théorème de Poynting* (sous forme différentielle et sous forme intégrale).

Comme l'intégrale du vecteur de Poynting sur une surface fermée correspond à la puissance totale qui sort à travers cette surface, il semble normal que $\mathbf{S}(t, \mathbf{r})$ représente la densité de puissance en un point donné \mathbf{r} (comme indiqué au paragraphe 1.7.1). Cette conclusion fit toutefois l'objet de controverses car, pour certains chercheurs du temps de Maxwell, il n'était pas admissible qu'une puissance électromagnétique puisse exister en dehors de conducteurs: ils tentèrent de "corriger" ce paradoxe en ajoutant des termes qui font circuler la puissance au "bon" endroit, mais dont l'intégrale sur une surface fermée est nulle. Depuis la découverte du rayonnement électromagnétique, ces considérations sont dépassées et on admet sans problème que $\mathbf{S}(t, \mathbf{r})$ est la densité de puissance.

1.7.5 Théorème d'unicité

Dans un système déterministe stable, une cause donnée ne peut donner lieu qu'à un seul résultat – pour autant que les conditions initiales et les conditions aux limites soient préalablement spécifiées. Pour qu'un modèle mathématique représente la réalité physique, il doit conserver cette propriété appelée *unicité*. La solution d'un problème est alors unique, indépendante de la méthode utilisée pour l'obtenir.

Pour déterminer si les équations de Maxwell donnent bien une solution unique, on considère un volume V entièrement entouré par une surface S (fig. 1.2). On suppose (démonstration par l'absurde) qu'il existe deux solutions, auxquelles correspondent respectivement les champs $[\mathbf{E}_1(t, \mathbf{r}), \mathbf{H}_1(t, \mathbf{r})]$ et $[\mathbf{E}_2(t, \mathbf{r}), \mathbf{H}_2(t, \mathbf{r})]$. Faisant usage du principe de superposition, valable pour tout système linéaire, on peut former une infinité d'autres solutions en combinant linéairement les deux solutions supposées. On considère plus particulièrement ici leur différence, qui doit elle aussi être une solution:

$$\mathbf{E}_d(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_1(t, \mathbf{r}) - \mathbf{E}_2(t, \mathbf{r}) \quad \mathbf{H}_d(t, \mathbf{r}) = \mathbf{H}_1(t, \mathbf{r}) - \mathbf{H}_2(t, \mathbf{r}) \quad (1.41)$$

On introduit cette solution dans le théorème de Poynting (1.40)

$$\oint_S \mathbf{E}_d(t, \mathbf{r}) \times \mathbf{H}_d(t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dA = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} [\mu H_d^2(t, \mathbf{r}) + \varepsilon E_d^2(t, \mathbf{r})] dV - \int_V \sigma E_d^2(t, \mathbf{r}) dV \quad [\text{VA}] \quad (1.42)$$

Les conditions aux limites du problème requièrent que les composantes tangentielles *de l'un ou de l'autre* des champs soient spécifiées sur la face extérieure S du système. Il en résulte que les deux solutions doivent coïncider sur la limite, ce qui signifie que le terme de gauche dans (1.42) s'annule. On intègre par rapport au temps l'expression de droite

$$\int_V [\mu H_d^2(t, \mathbf{r}) + \varepsilon E_d^2(t, \mathbf{r})] dV - \int_V [\mu H_d^2(0, \mathbf{r}) + \varepsilon E_d^2(0, \mathbf{r})] dV + 2 \int_0^t \int_V \sigma E_d^2(t, \mathbf{r}) dV dt = 0 \quad [\text{VA}s] \quad (1.43)$$

Pour que le problème soit défini, on doit encore spécifier les valeurs initiales **du champ** $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ **et du champ** $\mathbf{H}(t, \mathbf{r})$ dans tout le volume V . Comme les deux solutions doivent débiter aux mêmes valeurs, leur différence au temps $t = 0$ est nulle, de sorte qu'on a $\mathbf{H}_d(0, \mathbf{r}) = 0$ et $\mathbf{E}_d(0, \mathbf{r}) = 0$. Les termes qui restent dans (1.43) sont tous des carrés, dont la somme est nulle, ce qui entraîne que chaque terme doit être nul et donc que

$$\mathbf{E}_1(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_2(t, \mathbf{r}) \quad \mathbf{H}_1(t, \mathbf{r}) = \mathbf{H}_2(t, \mathbf{r}) \quad (1.44)$$

Les deux solutions doivent être identiques, ce qui démontre le théorème d'unicité pour les champs. La solution est unique si les conditions suivantes sont satisfaites:

- les champs sont des solutions des équations de Maxwell, utilisées pour obtenir le théorème de Poynting;
- les composantes tangentielles du champ électrique **ou** du champ magnétique sont spécifiées sur la surface S qui entoure le volume; on peut avoir une solution mixte, dans laquelle un des champs est spécifié sur une partie de la surface et l'autre sur le reste de celle-ci;
- le champ électrique **et** le champ magnétique sont tous deux spécifiés en $t = 0$ dans tout le volume V .

1.8 ÉQUATIONS D'ONDE

Dans un milieu linéaire sans pertes (§ 1.6.2), les équations rotationnelles de Maxwell sont des équations aux dérivées partielles de premier ordre (1.25) qui portent sur le champ électrique $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ et sur le champ magnétique $\mathbf{H}(t, \mathbf{r})$. En vue d'éliminer un des deux champs, on les combine et on obtient des équations aux dérivées partielles de second ordre qui ne comportent chacune qu'un seul des deux champs.

1.8.1 Équation d'onde pour le champ électrique

On prend le rotationnel de la première relation rotationnelle de (1.25), puis on fait usage de la seconde relation rotationnelle et on obtient

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}(t, \mathbf{r})}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial \mathbf{J}(t, \mathbf{r})}{\partial t} \quad (1.45)$$

On développe ensuite le double rotationnel, puis on fait usage d'une relation (1.13)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) - \nabla^2 \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho(t, \mathbf{r}) - \nabla^2 \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \quad (1.46)$$

En regroupant les termes qui contiennent le champ électrique et on obtient ainsi

$$\nabla^2 \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}(t, \mathbf{r})}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho(t, \mathbf{r}) + \mu \frac{\partial \mathbf{J}(t, \mathbf{r})}{\partial t} \quad (1.47)$$

Cette équation d'onde inhomogène montre qu'un champ électrique est produit par des charges et aussi par des courants électriques. En l'absence de termes de sources (membre de droite nul), on obtient une équation d'onde homogène, que l'on appelle aussi équation de d'Alembert.

1.8.2 Équation d'onde pour le champ magnétique

On prend similairement le rotationnel de la seconde relation rotationnelle de (1.25) et on introduit la première relation dans l'expression obtenue, ce qui donne

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) = -\nabla^2 \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{J}(t, \mathbf{r}) = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}(t, \mathbf{r})}{\partial t^2} + \nabla \times \mathbf{J}(t, \mathbf{r}) \quad (1.48)$$

On a tenu compte du fait que la divergence de $\mathbf{H}(t, \mathbf{r})$ s'annule. En regroupant les termes on trouve que

$$\nabla^2 \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}(t, \mathbf{r})}{\partial t^2} = -\nabla \times \mathbf{J}(t, \mathbf{r}) \quad (1.49)$$

Il s'agit de l'équation d'onde inhomogène pour le champ magnétique. On constate qu'un champ magnétique est produit par des courants électriques, mais que la densité de charge n'apparaît pas dans la relation. En l'absence de sources, on obtient également une équation de d'Alembert.

1.8.3 Équations d'onde pour les potentiels

On établit similairement des équations d'ondes en termes du potentiel vecteur $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ (§ 1.4.6) et du potentiel scalaire $V(t, \mathbf{r})$ (§ 1.4.7). On introduit ces grandeurs dans les équations de Maxwell, en cherchant à éliminer tous les champs et l'un des deux potentiels. On obtient des équations séparées en $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ et en $V(t, \mathbf{r})$ si l'on pose que

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) + \mu\varepsilon \frac{\partial V(t, \mathbf{r})}{\partial t} = 0 \quad (1.50)$$

Cette relation est connue sous le nom de *jauge de Lorentz*. Les deux équations d'onde prennent alors la forme

$$\nabla^2 \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}(t, \mathbf{r})}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}(t, \mathbf{r}) \quad (1.51)$$

$$\nabla^2 V(t, \mathbf{r}) - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 V(t, \mathbf{r})}{\partial t^2} = -\frac{\rho(t, \mathbf{r})}{\varepsilon} \quad (1.52)$$

La densité de courant ne produit qu'un potentiel vecteur magnétique $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$, tandis que la densité de charge est la source unique du potentiel électrique scalaire $V(t, \mathbf{r})$. Les deux densités sont toutefois liées l'une à l'autre par l'équation de continuité (1.16).

1.9 EXERCICES

1.9.1 Déterminer les amplitudes des forces électrique et magnétique qui agissent sur un électron, dont la charge électrique est de $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ coulomb [As], qui se déplace à une vitesse de 100 km/h dans un champ électrique \mathbf{E} de 1000 V/m et perpendiculairement à un champ d'induction \mathbf{B} de 1 T. Si les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} sont équipollents (dirigés dans la même direction) quelle allure aura la trajectoire de l'électron?

1.9.2 Déterminer la relation mathématique qui donne les lignes de champ, dans le cas du champ électrique (indépendant du temps) spécifié par la relation suivante

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{a^2} (\mathbf{e}_x xz + 2\mathbf{e}_y yz) \quad [\text{V/m}]$$

De quelle famille de courbes s'agit-il? Esquisser leur allure et déterminer s'il existe des croisements entre les différentes courbes.

1.9.3 On demande de déterminer les valeurs de la divergence et le rotationnel du champ électrique donné dans le problème 1.9.2 et, sur la base des valeurs ainsi obtenues, déterminer si ce champ est susceptible de dériver, soit d'un potentiel scalaire, soit d'un potentiel vectoriel.

1.9.4 Déterminer si l'expression suivante est susceptible de représenter un champ d'induction magnétique \mathbf{B} et, si tel n'est pas le cas, expliquer pourquoi

$$\mathbf{B} = \frac{B_0}{a^2} (\mathbf{e}_x xz + \mathbf{e}_y yz + \mathbf{e}_z xy)$$

1.9.5 Le potentiel vecteur \mathbf{A} qui résulte d'une certaine distribution de courant indépendante du temps est donné par la relation

$$\mathbf{A} = \frac{A_0}{a^2} (\mathbf{e}_x x^2 y + \mathbf{e}_y xy^2 - 4\mathbf{e}_z xyz)$$

On demande de déterminer le champ d'induction \mathbf{B} qui dérive de ce potentiel vecteur, ainsi que la densité de courant \mathbf{J} qui est la source de ce champ magnétique et de ce potentiel vecteur.

1.9.6 Un champ d'induction \mathbf{B} indépendant du temps est défini par la relation suivante

$$\mathbf{B} = \frac{B_0}{a^5} (\mathbf{e}_y 2xy^3 z - \mathbf{e}_z 3xy^2 z^2)$$

On demande de déterminer le potentiel vecteur \mathbf{A} dont il dérive, avec les deux choix possibles suivants:

- \mathbf{A} n'a qu'une seule composante, qui est dirigée selon \mathbf{e}_x ;
- \mathbf{A} n'a pas de composante dirigée selon \mathbf{e}_x .

1.9.7 Est-ce qu'un champ magnétique qui varie dans le temps peut exister en l'absence d'un champ électrique qui lui soit associé?

Est-ce qu'un champ électrique qui varie dans le temps peut exister en l'absence d'un champ magnétique qui lui soit associé?

Commenter les résultats obtenus dans ces deux situations et examiner leur signification et leurs implications pratiques.

1.9.8 Deux milieux diélectriques homogènes sans pertes, caractérisés par les permittivités relatives ϵ_1 et ϵ_2 , sont séparés par un interface plan (fig. 1.5)

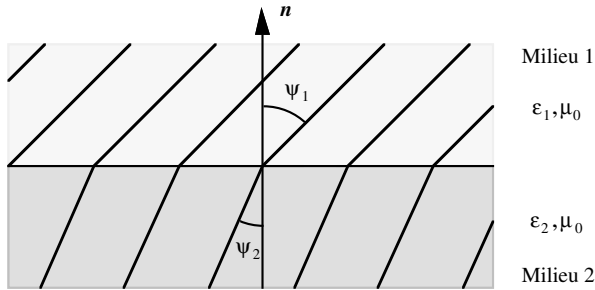


Fig. 1.5 Surface de séparation entre deux milieux diélectriques et définition des angles formés par le champ électrique avec la normale à la surface.

On demande de déterminer la relation qui lie entre eux les deux angles ψ_1 et ψ_2 , en fonction de la permittivité des matériaux. Dans quelles situations ces deux angles peuvent-ils prendre la même valeur? Les deux milieux sont non magnétiques, avec $\mu = \mu_0$, et il n'y a pas de charges déposées sur la surface entre les deux milieux.

1.9.9 Le champ électrique dans une structure est donné par la relation

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_y E_0 \cos(px) \sin(\omega t - \beta z)$$

où p , ω et β sont des constantes. On demande de déterminer le champ magnétique correspondant et le vecteur de Poynting.

1.9.10 Les champs électrique et magnétique dans l'air sont donnés par

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_x E_0 \sin(\omega t - \beta z) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_y \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} E_0 \sin(\omega t - \beta z)$$

On demande de déterminer les densités d'énergie électrique et magnétique, ainsi que le vecteur de Poynting, puis de vérifier que le théorème de Poynting est satisfait.

PREMIÈRE PARTIE

LIGNES DE TRANSMISSION

LIGNE DANS LE DOMAINE TEMPOREL

Dans pratiquement tous les domaines de l'électricité, on connecte des appareils (ordinateurs, téléphones, machines, locomotives, etc.) au moyen de conducteurs métalliques. La théorie des lignes de transmission traite de la propagation des signaux sur ces conducteurs, allant d'un générateur, ou source, vers un récepteur, ou terminaison, placés aux deux extrémités de la ligne (fig. 2.1). On peut ensuite étendre l'étude à d'autres structures de propagation, comme des guides d'ondes ou des fibres optiques (vol. XIII).

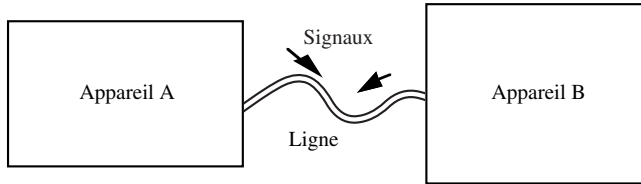


Fig. 2.1 Connexion de deux appareils par une ligne de transmission.

Les signaux électriques se déplacent à une vitesse élevée, qui reste toutefois bornée: la propagation le long d'une ligne requiert un certain temps, et produit de ce fait un retard. Le signal qui quitte la ligne est différent de celui qui est entré à son autre extrémité. Quand un signal varie rapidement (impulsions très courtes, signal de très haute fréquence), le temps de parcours peut devenir comparable à la durée d'une impulsion ou à une période du signal. Dans ces cas, on doit tenir compte du temps de propagation (§ 2.2.6).

Le premier chapitre traite de la propagation d'un signal, en fonction du temps, le long d'une ligne rectiligne uniforme, tout d'abord sans pertes, puis présentant des pertes dans le métal et dans les isolants. On choisit la coordonnée cartésienne z pour définir la direction de propagation. Les contraintes introduites par des terminaisons résistives (générateur et récepteur) aux extrémités de la ligne sont également considérées.

2.1 LIGNES SANS PERTES

2.1.1 Capacité

Quand on applique une tension u entre deux conducteurs d'une ligne (fig. 2.2), des charges électriques $+q$ et $-q$ apparaissent sur les conducteurs, qui forment les deux électrodes d'un condensateur. La capacité C est donnée par la relation (§ 1.5.4.2)

$$C = q/u \quad [F = As/V] \quad (2.1)$$

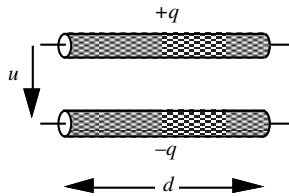


Fig. 2.2 Capacité d'un tronçon de ligne

On suppose la ligne assez longue pour pouvoir négliger l'effet des extrémités. La capacité linéique (par unité de longueur) est le quotient de la capacité par la longueur

$$C' = C/d \quad [\text{F/m} = \text{As/Vm}] \quad (2.2)$$

La capacité linéique C' dépend de la permittivité ϵ du milieu diélectrique et de la géométrie de la section droite (formes et dimensions)

$$C' = \epsilon f(\text{géom}) = \epsilon_0 \epsilon_r f(\text{géom}) \quad [\text{As/Vm}] \quad (2.3)$$

où $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm est la constante électrique [4] (permittivité du vide) et où ϵ_r est la permittivité relative du milieu entourant les conducteurs (§ 1.6.2). On suppose que le milieu est homogène et que les deux conducteurs sont uniformes, leur section droite ne variant pas le long de la ligne. On obtient la fonction $f(\text{géom})$ par l'étude électrostatique de la structure, en résolvant l'équation de Laplace en deux dimensions (sect 10.7).

2.1.2 Inductance

On injecte un courant i sur l'un des deux conducteurs, et ce courant revient ($-i$) sur l'autre conducteur, comme cela est indiqué dans la figure 2.3.

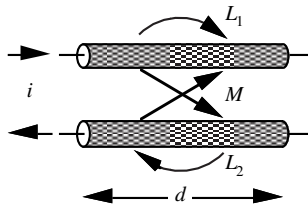


Fig. 2.3 Inductance d'un tronçon de ligne.

Les courants produisent un champ magnétique autour des conducteurs, et un flux d'induction traverse la surface située entre les deux. L'inductance globale L de la ligne est obtenue en sommant les inductances propres L_1 et L_2 des deux conducteurs, et en soustrayant deux fois l'inductance mutuelle M entre les deux conducteurs (§ 12.7.3)

$$L = L_1 + L_2 - 2M \quad [\text{H} = \text{Vs/A}] \quad (2.4)$$

Négligeant l'effet des extrémités du tronçon de ligne, on définit l'inductance linéique L' (par unité de longueur) par le quotient de l'inductance par la longueur

$$L' = L/d \quad [\text{H/m} = \text{Vs/Am}] \quad (2.5)$$

L'inductance linéique L' dépend de la perméabilité μ du milieu et de la géométrie de la section droite (formes et dimensions)

$$L' = \mu g(\text{géom}) = \mu_0 \mu_r g(\text{géom}) \quad [\text{Vs/Am}] \quad (2.6)$$

où $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am est la constante magnétique [4] (perméabilité du vide) et μ_r la perméabilité relative du milieu qui entoure les conducteurs (§ 1.6.2). Les lignes de transmission ne contiennent généralement pas de matériaux ferromagnétiques (fer, nickel, cobalt, etc.), de sorte qu'on a pratiquement toujours $\mu_r \cong 1$. Les conducteurs sont supposés uniformes. La fonction $g(\text{géom})$ se détermine au moyen d'une étude magnétostatique, c'est-à-dire en résolvant l'équation de Laplace en deux dimensions en présence des conducteurs (sect. 10.7.3).

2.1.3 Schéma équivalent

Un tronçon de ligne de longueur infinitésimale dz peut être représenté par un biporte équivalent formé d'une capacité $C'dz$ connectée en parallèle et d'une inductance $L'dz$ connectée en série (fig. 2.4).

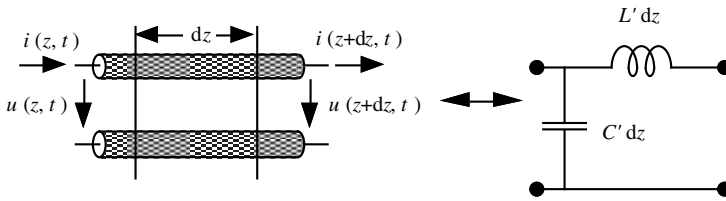


Fig. 2.4 Schéma équivalent d'un tronçon de ligne de longueur dz .

2.1.4 Somme des courants

Le premier lemme de Kirchhoff spécifie que la somme algébrique des courants circulant dans l'ensemble des branches incidentes au même nœud est nulle (§ 1.2.3.11). Appliquant le lemme au nœud de la figure 2.4, on obtient

$$i(t, z) - i(t, z + dz) - C'dz \frac{\partial u(t, z)}{\partial t} = 0 \quad [\text{A}] \quad (2.7)$$

On fait ensuite passer le dernier terme dans le membre de droite, et on divise de part et d'autre dz , pour prendre finalement la limite $dz \rightarrow 0$ qui fait apparaître la dérivée partielle par rapport à z . On obtient ainsi la première équation des lignes

$$\frac{\partial i(t, z)}{\partial z} = -C' \frac{\partial u(t, z)}{\partial t} \quad [\text{A/m}] \quad (2.8)$$

La variation spatiale du courant est proportionnelle à la variation temporelle de la tension. On rencontre le même type de dépendance, mais plus généralement pour tout le domaine de l'électromagnétisme, dans les équations rotationnelles de Maxwell (1.13). La première équation des lignes est donc une forme particulière des équations de Maxwell, appliquée au problème unidimensionnel de la ligne de transmission sans pertes.

2.1.5 Somme des tensions

Le second lemme de Kirchhoff spécifie que la somme algébrique des tensions aux bornes des branches constituant une maille est nulle (§ I.2.3.12). On applique le lemme à la maille de la figure 2.4 et on obtient

$$u(t, z) - u(t, z + dz) - L' dz \frac{\partial i(t, z)}{\partial t} = 0 \quad [\text{V}] \quad (2.9)$$

Faisant passer le dernier terme dans le membre de droite, puis divisant par dz et prenant ensuite la limite $dz \rightarrow 0$, on obtient la deuxième équation des lignes

$$\frac{\partial u(t, z)}{\partial z} = -L' \frac{\partial i(t, z)}{\partial t} \quad [\text{V/m}] \quad (2.10)$$

La variation spatiale de la tension est proportionnelle à la variation temporelle du courant. Il s'agit également d'une équation rotationnelle de Maxwell (1.13) appliquée au problème unidimensionnel de la ligne de transmission.

2.2 PROPAGATION LE LONG D'UNE LIGNE

2.2.1 Équations d'onde ou de d'Alembert

On souhaite disposer d'équations aux dérivées partielles qui ne comportent qu'une seule fonction, à savoir seulement la tension, ou seulement le courant, et il faut pour cela éliminer l'autre variable. On obtient ce résultat en prenant la dérivée par rapport à z de la seconde équation des lignes (2.10), puis la dérivée par rapport à t de la première équation (2.8), ce qui donne

$$\frac{\partial^2 u(t, z)}{\partial z^2} = -L' \frac{\partial^2 i(t, z)}{\partial t \partial z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 i(t, z)}{\partial z \partial t} = -C' \frac{\partial^2 u(t, z)}{\partial t^2} \quad (2.11)$$

Comme les dérivations par rapport à l'espace et au temps sont commutables en électromagnétisme, on peut combiner ces deux expressions et on obtient l'équation de d'Alembert ou équation d'onde pour les tensions

$$\frac{\partial^2 u(t, z)}{\partial z^2} = L' C' \frac{\partial^2 u(t, z)}{\partial t^2} \quad [\text{V/m}^2] \quad (2.12)$$

Il s'agit d'une équation de deuxième ordre aux dérivées partielles, qui ne comporte que la variable $u(t, z)$. On procède de façon tout à fait similaire pour obtenir l'équation de d'Alembert pour le courant $i(t, z)$

$$\frac{\partial^2 i(t, z)}{\partial z^2} = L' C' \frac{\partial^2 i(t, z)}{\partial t^2} \quad [\text{A/m}^2] \quad (2.13)$$

Ces deux équations correspondent, dans le problème unidimensionnel des lignes de transmission, aux équations d'onde obtenues dans la section 1.8 pour les champs et les potentiels électromagnétiques dans le cas plus général. Les signaux qui se propagent le long d'une ligne obéissent donc aux mêmes équations que les ondes qui se propagent dans l'espace (chap. 8) – ce qui est tout à fait normal puisqu'il s'agit effectivement de signaux électromagnétiques.

2.2.2 Méthode des caractéristiques

L'équation d'onde (2.12) comporte des dérivées partielles par rapport au temps et par rapport à la position. Pour pouvoir la résoudre, on cherche à la mettre sous la forme d'une différentielle totale exacte (dépendance d'une seule variable).

Pour ce faire, on suppose qu'il existe dans le diagramme espace-temps ($z-t$) certaines lignes particulières, sur lesquelles l'équation de d'Alembert devient une différentielle totale exacte. Ces lignes sont appelées *caractéristiques*. Sur une ligne de transmission uniforme, on est en droit d'admettre que la vitesse de propagation soit constante, et dans ce cas, les caractéristiques sont des droites, de pentes $\pm c$ (fig. 2.5)

$$t \pm \frac{z}{c} = \text{cste} \quad [\text{s}] \quad (2.14)$$

On définit alors une nouvelle variable $\xi = t - z/c$, qui est constante sur chacune des caractéristiques (en admettant que c peut être positif ou négatif).

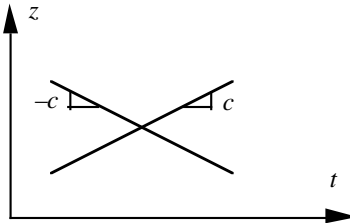


Fig. 2.5 Caractéristiques de pentes $\pm c$.

Sur une caractéristique, on doit alors avoir $t(\xi)$ et $z(\xi)$, de sorte que les dérivations par rapport au temps et à la position deviennent respectivement

$$\frac{\partial u(\xi)}{\partial z} = \frac{du(\xi)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{du(\xi)}{d\xi} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial u(\xi)}{\partial t} = \frac{du(\xi)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{du(\xi)}{d\xi} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial t^2} = \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \quad (2.16)$$

On introduit alors les expressions résultantes dans l'équation (2.12) et on constate qu'on obtient bien une équation différentielle totale de la variable ξ

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} = L' C' \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \quad \text{et donc} \quad \frac{1}{c^2} = L' C' \quad (2.17)$$

Comme le carré de c apparaît dans la relation, on trouve effectivement deux solutions pour c , à savoir $c_1 = +c$ et $c_2 = -c$, où c a désormais une valeur positive, et on obtient par conséquent

$$u(z, t) = u_+(t - z/c) + u_-(t + z/c) \quad [\text{V}] \quad (2.18)$$

La solution générale est donc la superposition de deux ondes qui se propagent dans des directions opposées.

2.2.3 Célérité ou vitesse de propagation

Le terme c dans l'équation (2.14) a la dimension d'une vitesse, appelée *vitesse de propagation* des signaux le long de la ligne, ou encore *célérité* des ondes. Sa valeur est tirée de l'équation (2.17)

$$c = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad [\text{m/s}] \quad (2.19)$$

Les signaux sont transmis le long de la ligne par des ondes électromagnétiques qui se propagent dans le milieu entre les conducteurs (chap. 8). La vitesse de propagation des ondes dépend directement des propriétés ϵ et μ du milieu – cette dépendance est également mentionnée dans l'équation (2.19). On a ainsi

$$\begin{array}{llll} \text{dans l'air ou le vide} & \epsilon = \epsilon_0 & \mu = \mu_0 & c = c_0 \\ \text{dans un diélectrique} & \epsilon = \epsilon_0\epsilon_r & \mu = \mu_0 & c = c_0/\sqrt{\epsilon_r} \end{array}$$

$$\text{où } c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = 2,997925 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cong 300 \text{ m}/\mu\text{s} \cong 300 \text{ mm/ns} \quad (2.20)$$

est la vitesse de la lumière dans le vide.

2.2.4 Fonctions de la géométrie

Introduisant les valeurs de C' et de L' des équations (2.3) et (2.6) dans l'équation (2.19) et simplifiant les termes communs, on constate qu'on doit avoir

$$f(\text{géom}) \cdot g(\text{géom}) = 1 \quad [-] \quad (2.21)$$

L'une des fonctions est donc exactement l'inverse de l'autre. Cela signifie que les distributions des champs électriques et magnétiques de la ligne sont intimement liées. Il en résulte qu'il n'est pas nécessaire d'effectuer deux études différentes de la structure – l'une électrostatique et l'autre magnéto-statique – mais qu'une étude unique suffit à déterminer la capacité et l'inductance linéiques de la ligne.

2.2.5 Ondes progressives et rétrogrades

Les fonctions u_+ et u_- qui apparaissent dans l'équation (2.18) sont pour l'instant quelconques – pour autant qu'elles puissent représenter des tensions physiquement réalisables. On peut injecter sur la ligne des impulsions de formes diverses, des sauts unités, des signaux alternatifs sinusoïdaux, des signaux modulés, etc. La forme du signal est déterminée par le générateur connecté en bout de ligne (sect. 2.6).

La dépendance en $\xi = t - z/c$ d'une fonction signifie que celle-ci se déplace avec une vitesse uniforme c . En effet, son argument reste inchangé lorsqu'une augmentation du temps t est compensée par une augmentation équivalente de la position z/c . Il en résulte un décalage vers les valeurs croissantes de z et l'onde est alors dite *progressive* (fig. 2.6).

De façon similaire, l'argument $t + z/c$ de la seconde solution reste constant lorsqu'une augmentation du temps t est compensée par une diminution correspondante de la position z/c . Cela correspond à une onde qui se déplace vers les valeurs négatives de z , que l'on appelle onde *rétrograde* (fig. 2.6).

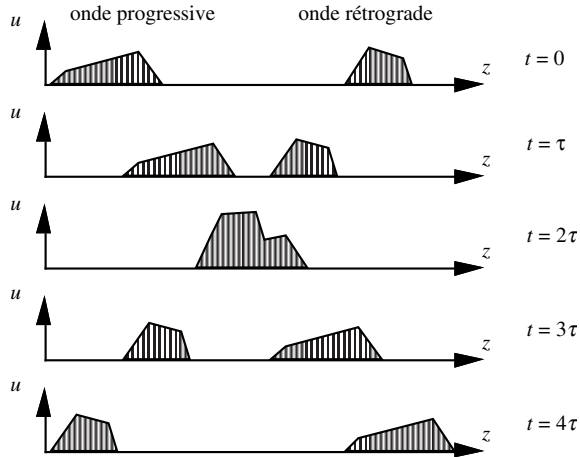


Fig. 2.6 Ondes progressive et rétrograde.

Sur une ligne idéale sans pertes, les deux ondes se propagent avec une vitesse constante, sans changer d'amplitude ni de forme. Leurs tensions se superposent lorsque les deux ondes se croisent, chacune des deux ondes recouvrant ensuite son amplitude et sa forme originale. Les deux ondes se propagent à la même vitesse, mais dans des directions opposées: on dit que la ligne de transmission est *réciproque* (§ 7.4.5).

Il faut bien noter ici que l'on n'a fait aucune supposition quant à la forme des deux ondes – à condition bien entendu que celle-ci soit physiquement réalisable. Des impulsions de forme quelconque ou des signaux périodiques peuvent donc se propager, tous à la même vitesse et sans se déformer ni changer d'amplitude.

2.2.6 Le temps de propagation est-il significatif?

Pour déterminer si le retard causé par la propagation le long d'une ligne est significatif ou non, il faut comparer ce retard à une durée caractéristique du signal transmis sur la ligne. S'il s'agit d'un signal impulsionnel, on compare le retard à la durée d'une impulsion, tandis que pour des signaux périodiques (par exemple sinusoïdaux), le retard est comparé à la période $T = 1/f$ du signal.

Dans le vide, et approximativement aussi dans l'air, une onde électromagnétique parcourt un 1 mètre en $1/(3 \cdot 10^8) \text{ s} = 3,3333 \dots \cdot 10^{-9} \text{ s} = 3,3333 \dots \text{ ns}$. Par conséquent, si une l'impulsion de signal a une durée de quelques nanosecondes, le retard produit par la propagation est du même ordre de grandeur, et on doit alors en tenir compte. En revanche, une impulsion longue de quelques microsecondes ne sera pratiquement pas affectée par le retard et on peut alors négliger cet effet.

Pour une tension alternative avec une fréquence de 50 Hz, la période du signal est de 20 ms. Un retard de 3,333... ns est dans ce cas tout à fait négligeable. Toutefois, comme les réseaux d'énergie électrique sont actuellement interconnectés à l'échelle continentale, le retard peut devenir significatif lorsqu'une ligne s'étend sur une très longues distance: un signal parcourt 1000 km en 3,333... ms, durée qui devient une fraction significative d'une période de 20 ms.

2.3 IMPÉDANCE ET PUISSANCE

2.3.1 Courant sur une ligne

Pour déterminer le courant $i(t, z)$ sur la ligne, on introduit la tension (2.18) dans l'équation (2.8), ce qui donne – le signe prime ' qui apparaît après la tension dénote la dérivation par rapport à son argument

$$\frac{\partial i(t, z)}{\partial z} = -C' [u'_+(t - z/c) + u'_-(t + z/c)] \quad [A/m] \quad (2.22)$$

On intègre cette expression par rapport à z pour obtenir le courant

$$i(t, z) = c C' [u_+(t - z/c) - u_-(t + z/c)] + \text{cste} = Y_c [u_+(t - z/c) - u_-(t + z/c)] + \text{cste} \quad [A] \quad (2.23)$$

Le terme $c C'$ qui apparaît dans cette relation est l'admittance caractéristique Y_c de la ligne, qui est l'inverse de son impédance caractéristique Z_c (§ 2.3.2). Du fait de l'intégration, il faut ajouter une constante arbitraire, qui indique qu'un courant constant quelconque (continu) peut circuler sur la ligne. Ce courant constant n'a aucun rapport avec le signal qui se propage sur la ligne, de sorte qu'on n'en tiendra pas compte dans la suite du développement.

2.3.2 Impédance et admittance caractéristiques

L'impédance caractéristique de la ligne et son inverse, l'admittance caractéristique de la ligne, sont données par la relation

$$Z_c = \frac{1}{Y_c} = c L' = \frac{1}{c C'} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} g(\text{géom}) \cong \frac{120 \pi}{\sqrt{\epsilon_r}} g(\text{géom}) \quad [\Omega] \quad (2.24)$$

Dans la pratique, on utilise souvent des lignes ayant des valeurs de l'impédance caractéristique normalisées à 50Ω , 60Ω , 75Ω , etc. Lorsqu'on connaît les paramètres primaires de la ligne L' et C' , on peut déterminer les paramètres secondaires c et Y_c , et vice versa. De façon plus générale, on peut déterminer deux de ces quatre grandeurs lorsque les deux autres sont connues.

Quand une onde progressive se propage seule sur la ligne de transmission, alors l'impédance caractéristique exprime le quotient de la tension par le courant de cette onde. Pour une onde rétrograde qui se propage seule, le quotient de la tension par le courant de l'onde donne également l'impédance caractéristique, mais cette fois-ci précédée par un signe négatif.

Dans le cas plus général où les deux ondes sont présentes, le quotient de la tension totale au courant total devient une fonction du temps et de la position, qu'on ne peut jamais représenter par l'impédance caractéristique, car celle-ci est définie comme étant une grandeur constante.

Il faut prendre bonne note – afin d'éviter une confusion qu'on rencontre malheureusement trop souvent – que l'impédance caractéristique **n'est en aucun cas** une résistance qu'on pourrait connecter à la place de la ligne pour obtenir un schéma équivalent de théorie des circuits.

2.3.3 Puissance sur une ligne

Connaissant la tension et le courant sur la ligne, la puissance est obtenue en faisant simplement leur produit

$$\begin{aligned} p(t, z) &= u(t, z)i(t, z) = [u_+(t - z/c) + u_-(t + z/c)]Y_c[u_+(t - z/c) - u_-(t + z/c)] \\ &= Y_c[u_+^2(t - z/c) - u_-^2(t + z/c)] \quad [\text{W}] \end{aligned} \quad (2.25)$$

La puissance transmise par l'onde progressive est positive, tandis que celle transmise par l'onde rétrograde est négative, ce qui signifie que l'onde se déplace dans la direction opposée. La puissance totale sur la ligne résulte de l'addition des puissances des deux ondes – il n'y a pas de terme mixte qui comporterait une contribution des deux ondes.

2.3.4 Théorème de Poynting

Comme dans le cas général des champs électromagnétiques (§ 1.7.4), on peut établir pour les lignes de transmission une relation qui lie la puissance et les énergies. On l'obtient à l'aide des deux équations des lignes (2.8) et (2.10)

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(t, z)}{\partial z} &= \frac{\partial[u(t, z)i(t, z)]}{\partial z} = u(t, z)\frac{\partial i(t, z)}{\partial z} + i(t, z)\frac{\partial u(t, z)}{\partial z} \\ &= -C'u(t, z)\frac{\partial u(t, z)}{\partial t} - L'i(t, z)\frac{\partial i(t, z)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{C'u^2(t, z)}{2} + \frac{L'i^2(t, z)}{2}\right] = -\frac{\partial(w_e + w_m)}{\partial t} \\ & \hspace{15em} [\text{W/m}] \end{aligned} \quad (2.26)$$

où les densités d'énergie électrique w_e et magnétique w_m sont définies par

$$w_e = C'\frac{u^2(t, z)}{2} \quad \text{et} \quad w_m = L'\frac{i^2(t, z)}{2} \quad [\text{J/m}] \quad (2.27)$$

La relation (2.26) indique que la variation spatiale de la puissance est liée à la variation temporelle de la densité d'énergie. On peut l'intégrer le long d'un tronçon de ligne de longueur d , ce qui donne

$$\int_0^d \frac{\partial p(t, z)}{\partial z} dz = p(t, d) - p(t, 0) = -\frac{d}{dt} \int_0^d [w_e(t, z) + w_m(t, z)] dz = -\frac{d}{dt} [W_e(t) + W_m(t)] \quad [\text{W}] \quad (2.28)$$

Connue sous le nom de *théorème de Poynting* pour les lignes, cette relation exprime un bilan d'énergie: lorsque de la puissance sort des extrémités du tronçon de ligne, l'énergie totale (électrique + magnétique) contenue dans la ligne diminue. Cette relation spécifie que l'énergie totale est conservée – ce qui laisse ouverte la possibilité d'avoir un transfert entre les deux formes d'énergie. Cette constatation est en tous points similaire à celle établie dans le paragraphe 1.7.4 pour les champs électromagnétiques.

Au moyen du théorème de Poynting pour les lignes, on peut démontrer – en suivant le même raisonnement que dans le paragraphe 1.7.5 – que lorsque les tensions et les courants satisfont les équations des lignes, que les valeurs des uns ou des autres satisfont les conditions aux extrémités et que leurs valeurs initiales sont spécifiées, alors les solutions obtenues sont uniques.

2.4 QUELQUES LIGNES

2.4.1 Ligne à plaques parallèles

La structure la plus simple qu'on puisse considérer comporte deux plaques métalliques parallèles (fig. 2.7). Lorsque leur largeur w est nettement plus grande que la distance qui sépare les plaques, on peut négliger les effets des bords et on obtient une relation simple pour la capacité linéique

$$C' \cong \epsilon w/h \quad \text{si } w \gg h \quad [\text{F/m}] \quad (2.29)$$

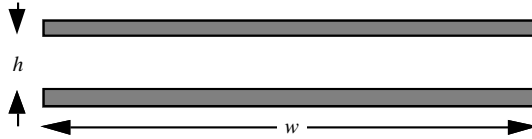


Fig. 2.7 Ligne à plaques parallèles.

L'impédance caractéristique est alors donnée par

$$Z_c \cong \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{h}{w} \cong \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{h}{w} \quad [\Omega] \quad (2.30)$$

Ce type de ligne n'est guère utilisée en pratique, mais il est très utile pour développer des modèles approchés applicables à d'autres géométries de lignes [12].

2.4.2 Ligne coaxiale

En très haute fréquence, pour éviter que la ligne de propagation rayonne on fait usage d'une structure fermée, où les champs sont contenus dans une enveloppe métallique (fig. 2.8). La capacité s'obtient en étudiant le condensateur tubulaire (§ 11.2.1).

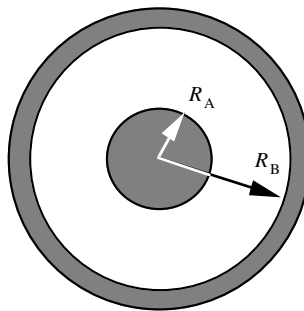


Fig. 2.8 Ligne coaxiale.

On obtient la capacité et l'impédance caractéristique suivantes

$$C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(R_B/R_A)} \quad Z_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{R_B}{R_A}\right) \cong \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{R_B}{R_A}\right) \quad (2.31)$$

2.4.3 Ligne bifilaire

Aux basses fréquences, où le risque de rayonnement est moindre, on utilise couramment des lignes bifilaires (fig. 2.9), formées de deux conducteurs cylindriques identiques. L'analyse de cette structure peut se faire de façon exacte au moyen d'une transformation conforme (§ 11.6.8).

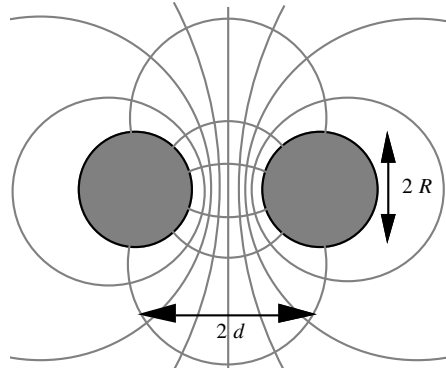


Fig. 2.9 Ligne bifilaire.

L'impédance caractéristique est donnée par la relation (§ 11.6.8)

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\pi} \operatorname{arcosh}\left(\frac{d}{R}\right) \cong \frac{120}{\sqrt{\varepsilon_r}} \operatorname{arcosh}\left(\frac{d}{R}\right) \quad [\Omega] \quad (2.32)$$

Dans toute structure ouverte, les champs s'étendent en principe jusqu'à l'infini. Lorsque la fréquence augmente, une structure bifilaire ne fonctionne plus comme une ligne de transmission, mais comme une antenne (§ 9.4.1).

2.4.4 Lignes asymétriques

Les lignes des deux paragraphes précédents sont en fait les cas limites d'une famille de structures formées de conducteurs cylindriques ou tubulaires (fig. 2.10), pour lesquelles on obtient une solution exacte avec une transformation conforme (§ 11.6.11).

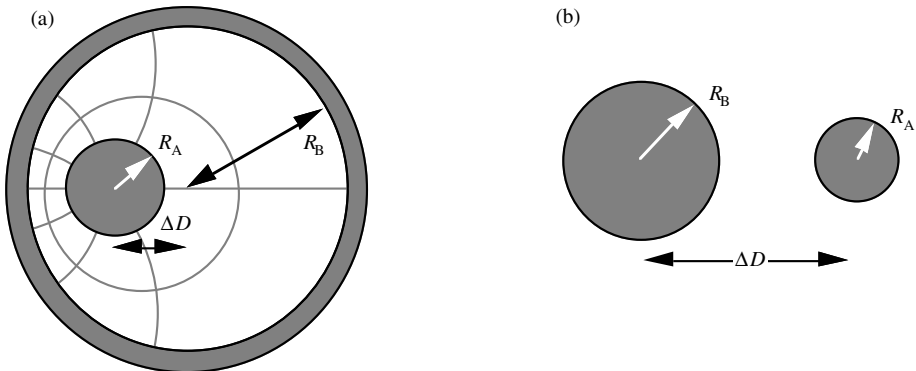


Fig. 2.10 (a) Ligne tubulaire désaxée; (b) Ligne bifilaire asymétrique.

On obtient la même impédance caractéristique pour ces deux structures [13]

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{2\pi} \operatorname{arccosh} \left| \frac{R_A^2 + R_B^2 - \Delta D^2}{2 R_A R_B} \right| \cong \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \operatorname{arccosh} \left| \frac{R_A^2 + R_B^2 - \Delta D^2}{2 R_A R_B} \right| \quad [\Omega] \quad (2.33)$$

On retrouve les cas des deux paragraphes précédents en introduisant les valeurs adéquates des paramètres.

2.4.5 Ligne à ruban équilibré, stripline

La structure formée d'un ruban conducteur placé entre deux plaques métalliques au même potentiel (plans de masse) est appelée *ligne à ruban équilibré* ou plus couramment *stripline* (fig. 2.11). Les champs y sont concentrés au voisinage du conducteur central et décroissent rapidement dans la direction latérale, de sorte que le rayonnement reste négligeable même si la structure est ouverte [14].

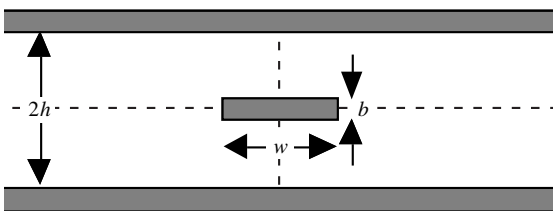


Fig. 2.11 Ligne à ruban équilibré.

Il est possible de trouver une solution exacte pour cette structure au moyen d'une transformation conforme obtenue par la méthode de Schwartz-Christoffel, qui permet de redresser les angles (sect. 11.7). Toutefois, les relations obtenues prennent une forme très complexe, et requièrent l'évaluation de fonctions mathématiques peu usuelles. Pour ces raisons, des relations approchées, d'un usage beaucoup plus simple, ont été développées pour l'impédance caractéristique [15]

$$Z_c \cong \frac{94,172}{\sqrt{\epsilon_r}} \left[\frac{xw}{2h} + \frac{\ln(F(x))}{\pi} \right]^{-1} \quad \text{où} \quad F(x) = \frac{(x+1)^{(x+1)}}{(x-1)^{(x-1)}} \quad \text{et} \quad x = \frac{1}{1-b/2h} \quad (2.34)$$

2.4.6 Ligne microruban

Un circuit imprimé est formé en déposant des couches métalliques de part et d'autre d'une plaque isolante, appelée *substrat diélectrique*. Pour de très hautes fréquences (hyperfréquences, vol. XIII), on utilise le plus souvent des lignes microrubans [16], pour lesquelles un côté est complètement recouvert de métal, tandis que l'autre comporte une piste conductrice (fig. 2.12).

Contrairement aux structures des sections précédentes, cette ligne est inhomogène, car elle comporte deux milieux de propagation: d'une part le substrat diélectrique, d'autre part l'air situé au-dessus. De ce fait, l'analyse rigoureuse de cette structure est difficile, car il faut déterminer les champs dans les différents milieux, puis satisfaire les conditions aux limites (sect. 1.5).

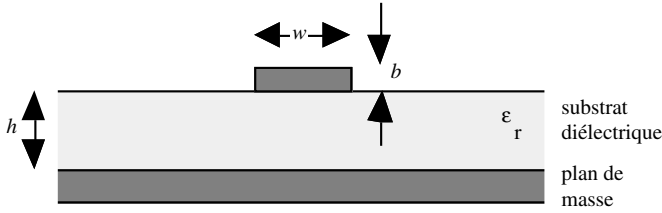


Fig. 2.12 Ligne microruban.

Pour la plupart des applications pratiques, d'importantes simplifications sont possibles en faisant usage d'approximations dérivées en basse fréquence. Le plus souvent, on remplace cette structure inhomogène par une structure homogène "équivalente", dans laquelle les conducteurs gardent la même géométrie, mais sont entourés d'un milieu homogène de permittivité relative ϵ_e [17].

$$\epsilon_e = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left(1 + 10 \frac{h}{w}\right)^{-ab} \quad [-] \quad (2.35)$$

avec

$$a = 1 + \frac{1}{49} \log \frac{\left(\frac{w}{h}\right)^4 + \left(\frac{1}{52} \frac{w}{h}\right)^2}{\left(\frac{w}{h}\right)^4 + 0,432} + \frac{1}{18,7} \log \left[1 + \left(\frac{1}{18,1} \frac{w}{h}\right)^3\right]$$

et avec

$$b = 0,564 \left(\frac{\epsilon_r - 0,9}{\epsilon_r + 3}\right)^{0,053}$$

L'analyse électromagnétique de la structure, au moyen d'une transformation conforme (sect. 11.6) donne des relations très compliquées, dont on a extrait une expression approchée pour évaluer l'impédance caractéristique, qui assure une précision meilleure que 0,03 % (par rapport à la transformation conforme) pour les valeurs $0 \leq w/h \leq 1000$ [17]

$$Z_c \cong \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} \log \left[F_1 \frac{h}{w} + \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{w}\right)^2} \right] \quad (2.36)$$

avec

$$F_1 = 6 + (2\pi - 6) \exp \left[- \left(30,666 \frac{h}{w}\right)^{0,7528} \right]$$

Cette approximation suppose que le conducteur supérieur a une épaisseur b nulle. Pour tenir compte de l'épaisseur non nulle d'un conducteur réel, on introduit une *largeur effective* w_{eff} qui est légèrement plus grande que la largeur physique w [16].

Les champs se concentrent dans le substrat du microruban, ce qui limite dans une certaine mesure le rayonnement. Toutefois, quand la fréquence devient suffisamment élevée, un microruban rayonne. On ne peut plus l'utiliser comme ligne de transmission, mais il peut alors servir à réaliser des antennes (§ 9.4.5).

2.5 LIGNE SANS PERTES AVEC TERMINAISON

2.5.1 Facteur de réflexion d'une terminaison résistive

Une ligne de transmission n'est jamais de longueur infinie: la ligne débute au générateur ($z = 0$) et se termine aux bornes d'un récepteur ou terminaison en $z = d$. On considère ici une terminaison purement résistive, définie par une résistance R_t (fig. 2.13).



Fig. 2.13 Ligne sans pertes avec terminaison résistive.

Au point $z = d$, la tension et le courant en bout de ligne doivent satisfaire la loi d'Ohm aux bornes de la résistance et, par conséquent

$$u(t, d) = u_+(t - d/c) + u_-(t + d/c) = R_t i(t, d) = R_t Y_c [u_+(t - d/c) - u_-(t + d/c)] \quad [\text{V}] \quad (2.37)$$

On tire de cette relation

$$u_-(t + d/c) = \frac{R_t Y_c - 1}{R_t Y_c + 1} u_+(t - d/c) = \frac{R_t - Z_c}{R_t + Z_c} u_+(t - d/c) = \rho_t u_+(t - d/c) \quad [\text{V}] \quad (2.38)$$

Le terme ρ_t défini par l'équation (2.38) est le *facteur de réflexion* de la terminaison. Il représente le quotient de l'onde réfléchie sur l'onde incidente aux bornes de celle-ci. Pour une terminaison passive (R_t positif), le facteur de réflexion est situé entre -1 et $+1$.

2.5.2 Onde réfléchie

L'onde rétrograde, réfléchie par la terminaison qui reçoit une onde incidente, est similaire à l'image renvoyée par un miroir non déformant mais partiellement absorbant. Son amplitude est celle de l'onde incidente multipliée par le facteur ρ_t , et sa dépendance spatiale est inversée par rapport à celle de l'onde incidente. Il s'agit d'une onde qui aurait pu être émise par une source image située dans le plan $z = 2d$

$$u_-(t + z/c) = \rho_t u_+[t - (2d - z)/c] \quad [\text{V}] \quad (2.39)$$

La tension et le courant sur la ligne sont alors obtenus en introduisant la tension de l'onde réfléchie donnée par (2.39) dans la relation (2.18)

$$\begin{aligned} u(t, z) &= u_+(t - z/c) + \rho_t u_+[t - (2d - z)/c] \quad [\text{V}] \\ i(t, z) &= Y_c \{ u_+(t - z/c) - \rho_t u_+[t - (2d - z)/c] \} \quad [\text{A}] \end{aligned} \quad (2.40)$$

Ces deux expressions satisfont d'une part les équations d'onde et d'autre part la condition de continuité du courant et de la tension aux bornes de la terminaison. Le signal réfléchi retourne vers le générateur, où il parvient avec un retard $2d/c$, proportionnel à la distance parcourue. Ce signal réfléchi, retournant vers le générateur, donne lieu à un effet d'écho qui est le plus souvent indésirable – en dehors du cas particulier des applications de radar (sect. XIII.8.1).

2.5.3 Terminaison adaptée

Lorsque la résistance $R_t = Z_c$, on constate que $\rho_t = 0$. Il n'y a pas d'onde réfléchie, et donc pas d'écho. Le signal incident est entièrement absorbé par la terminaison. On parle d'*adaptation aux sens des lignes*. Il s'agit de la situation idéale que l'on souhaiterait le plus souvent obtenir en haute fréquence.

2.5.4 Court-circuit

Un court-circuit donne une résistance $R_t = 0$, ce qui entraîne par (2.38) que $\rho_t = -1$. L'onde réfléchie a la même amplitude que l'onde incidente, mais sa polarité est inversée. La tension aux bornes du court-circuit est nulle. Il s'agit d'une situation de *réflexion totale*.

2.5.5 Ligne ouverte

Pour l'autre cas extrême, le courant aux bornes d'une ligne ouverte est nul, ce qui donne une résistance $R_t = \infty$ et, par (2.38) $\rho_t = +1$. L'onde réfléchie est de même amplitude et de même polarité que l'onde incidente, c'est aussi une *réflexion totale*.

2.5.6 Ligne sans pertes avec terminaison inductive

Lorsqu'une ligne se termine sur une terminaison inductive en $z = d$ (fig. 2.14), la tension et le courant en bout de ligne doivent satisfaire une relation avec des dérivées

$$u(t, d) = u_+(t - d/c) + u_-(t + d/c) = L_t \frac{di(t, d)}{dt} = L_t Y_c \left[\frac{du_+(t - d/c)}{dt} - \frac{du_-(t + d/c)}{dt} \right] \quad [\text{V}] \quad (2.41)$$



Fig. 2.14 Ligne sans pertes avec terminaison inductive.

La tension de l'onde réfléchie est alors donnée par une équation différentielle

$$L_t Y_c \frac{du_-(t + d/c)}{dt} + u_-(t + d/c) = L_t Y_c \frac{du_+(t - d/c)}{dt} - u_+(t - d/c) \quad (2.42)$$

Le terme de droite de (2.42) dépend de l'onde incidente, et peut être déterminé. Pour obtenir la tension de l'onde réfléchie il faut résoudre une équation différentielle – ou intégrale. En dehors de cas particuliers (chap. 3), le signal réfléchi n'a pas la même forme que le signal incident, et on ne peut pas définir simplement un facteur de réflexion.

2.5.7 Ligne sans pertes avec terminaison capacitive

On rencontre une situation similaire pour une ligne terminée par une capacité. Dans ce cas également, la tension de l'onde réfléchie est définie par une équation différentielle et on ne peut pas définir un facteur de réflexion.

2.6 EFFET DU GÉNÉRATEUR, RÉFLEXIONS MULTIPLES

2.6.1 Onde progressive fournie par le générateur

Le générateur de signal est connecté à la ligne à son extrémité en $z = 0$. Il est représenté par son schéma équivalent de Thévenin (§ I.6.7.9), qui définit la tension à vide du générateur $u_g(t)$ et sa résistance interne R_g .

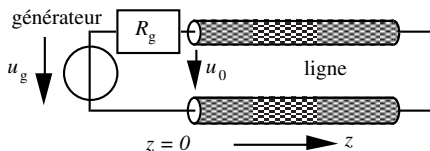


Fig. 2.15 Générateur connecté à l'extrémité de la ligne.

On considère en premier lieu l'onde progressive émise par le générateur, pendant le laps de temps qui précède le retour de l'onde réfléchie. Le lemme de Kirchhoff pour les tensions (§ I.2.3.12), appliqué à la boucle de la figure 2.15, donne la tension de l'onde progressive en début de ligne

$$u_0(t) = u_g(t) - R_g i_0(t) = u_g(t) - R_g Y_c u_0(t) \quad [\text{V}] \quad (2.43)$$

On en tire la tension de l'onde progressive en tout point le long de la ligne

$$u_0(t - z/c) = \frac{u_g(t - z/c)}{1 + R_g Y_c} \quad [\text{V}] \quad (2.44)$$

2.6.2 Réflexions multiples

L'onde progressive $u_0(t - z/c)$ émise par le générateur se propage le long de la ligne, puis atteint la terminaison en $z = d$. Une partie de cette onde est renvoyée dans l'autre direction, avec le facteur de réflexion ρ_t défini par l'équation (2.38).

L'onde réfléchie par la terminaison retourne au générateur, qui en réfléchit à son tour une partie, avec un facteur de réflexion ρ_g que l'on définit de la même façon que celui de la terminaison, au moyen de la relation

$$\rho_g = \frac{R_g Y_c - 1}{R_g Y_c + 1} = \frac{R_g - Z_c}{R_g + Z_c} \quad [-] \quad (2.45)$$

La tension à vide $u_g(t)$ du générateur n'intervient pas dans cette expression. Une deuxième onde progressive se propage alors vers la terminaison, qui en réfléchit une partie ρ_t , et ainsi de suite, indéfiniment. On se trouve en présence d'un régime de réflexions multiples, et la tension sur la ligne résulte de la superposition de toutes les ondes, incidente, réfléchie, et multiplement réfléchies

$$u(t, z) = \frac{1}{R_g Y_c + 1} \left\{ u_g(t - z/c) + \rho_t u_g[t - (2d - z)/c] + \rho_g \rho_t u_g[t - (2d + z)/c] + \rho_g \rho_t^2 u_g[t - (4d - z)/c] + \rho_g^2 \rho_t^2 u_g[t - (4d + z)/c] + \dots \right\} \quad [\text{V}] \quad (2.46)$$

L'onde progressive et l'onde rétrograde sont alors formées par des superpositions d'ondes, représentées par des séries infinies

$$u_+(t, z) = \frac{1}{R_g Y_c + 1} \sum_{m=0}^{\infty} (\rho_g \rho_t)^m u_g[t - z/c - 2md/c] \quad [V] \quad (2.47)$$

$$u_-(t, z) = \frac{\rho_t}{R_g Y_c + 1} \sum_{m=0}^{\infty} (\rho_g \rho_t)^m u_g[t + z/c - (2m+1)d/c] \quad [V] \quad (2.48)$$

2.6.3 Impulsions de longue durée, réponse au saut unité

Quand une impulsion est longue par rapport à la durée du parcours le long de la ligne, les ondes progressives et rétrogrades se superposent successivement. Pour le cas limite d'un échelon unité (impulsion infiniment longue), le diagramme des caractéristiques (§ 2.2.2) de la figure 2.16 indique combien d'ondes sont présentes à un moment t donné (abscisse) en un emplacement z_0 le long de la ligne (ordonnée). Le diagramme est divisé en triangles isocèles, séparés par les caractéristiques qui correspondent aux fronts d'ondes.

La tension $u(t, z_0)$ au point z_0 sur la ligne est calculée avec (2.46) et présentée dans la figure 2.17. Le courant $i(t, z_0)$ est similairement déterminé, et multiplié par Z_c pour pouvoir le comparer à la tension avec les mêmes échelles.

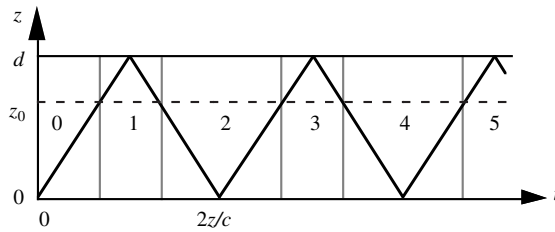


Fig. 2.16 Diagramme des caractéristiques.

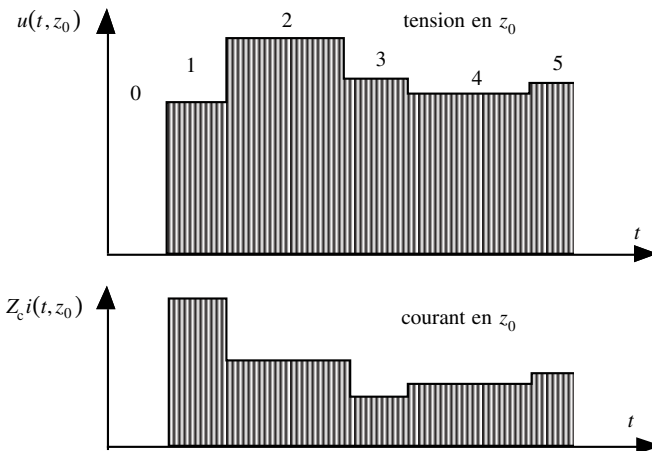


Fig. 2.17 Tension et courant pour un saut unité avec réflexions multiples, pour $R_t = 2,5 Z_c$ et $R_g = 0,25 Z_c$.

2.6.4 Diagramme de Bergeron

En présence de plusieurs réflexions, les calculs deviennent fastidieux et le diagramme de Bergeron [18] a été développé pour résoudre le problème par voie graphique (sect. XXII.6.5). Dans ce diagramme, représenté dans la figure 2.18 pour un cas particulier, les lignes épaisses représentent, respectivement, les caractéristiques du générateur et de la terminaison. En représentant $Z_c i$ en ordonnée et u en abscisse, on obtient les mêmes échelles sur les deux axes et les ondes apparaissent comme des trajectoires à $\pm 45^\circ$.

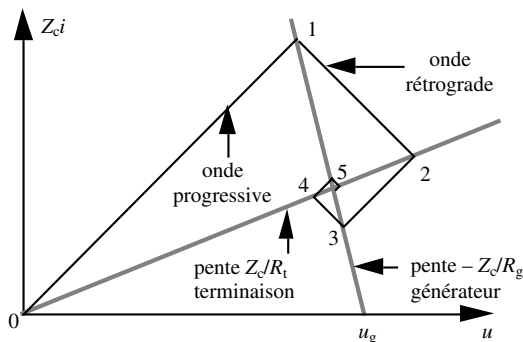


Fig. 2.18 Diagramme de Bergeron ($R_t = 2,5 Z_c$ et $R_g = 0,25 Z_c$).

Le point de départ – avant la première onde progressive – est au point 0. La première onde incidente mène à l'intersection de la ligne à 45° avec la caractéristique du générateur, au point 1. La première onde rétrograde amène au point 2, sur la caractéristique de la terminaison. L'adjonction d'ondes successives mène ici à la formation d'une pseudo-spirale dextrogyre – mais d'autres situations sont aussi possibles. La tension et le courant convergent vers la position finale d'équilibre, à l'intersection des deux caractéristiques.

Le diagramme de Bergeron peut aussi être utilisé pour des terminaisons résistives non linéaires – par exemple aux accès d'un transistor. Dans ce cas, les caractéristiques des terminaisons deviennent des courbes.

2.6.5 Impulsions de brève durée

Lorsque le générateur émet des impulsions dont la durée est plus courte que le temps $2d/c$ nécessaire à un aller et retour du signal, le récepteur reçoit, pour chaque impulsion émise, un train d'impulsions d'amplitudes décroissantes, espacées dans le temps par $2d/c$. La figure 2.19 montre la tension et le courant en un point z_0 de la ligne, indiqué par une ligne pointillée dans le diagramme. Il s'agit d'une situation pour laquelle la ligne est très fortement désadaptée à ses deux extrémités, de telle sorte que $\rho_t = 0,8$ et $\rho_g = 0,625$.

La première partie de la figure représente, sous forme de caractéristiques, la trajectoire des impulsions dans l'espace en fonction du temps. Le front de l'impulsion est indiqué par une ligne continue, sa fin par des traitillés, la durée de l'impulsion valant τ . Les impulsions sont séparées les unes des autres, sauf dans les régions proches du générateur et de la terminaison (triangles hâchurés), où il y a superposition d'une onde incidente et d'une onde réfléchie. Pour éviter les réflexions multiples, il faut soit avoir une terminaison adaptée ($\rho_t = 0$), soit avoir un générateur adapté ($\rho_g = 0$).

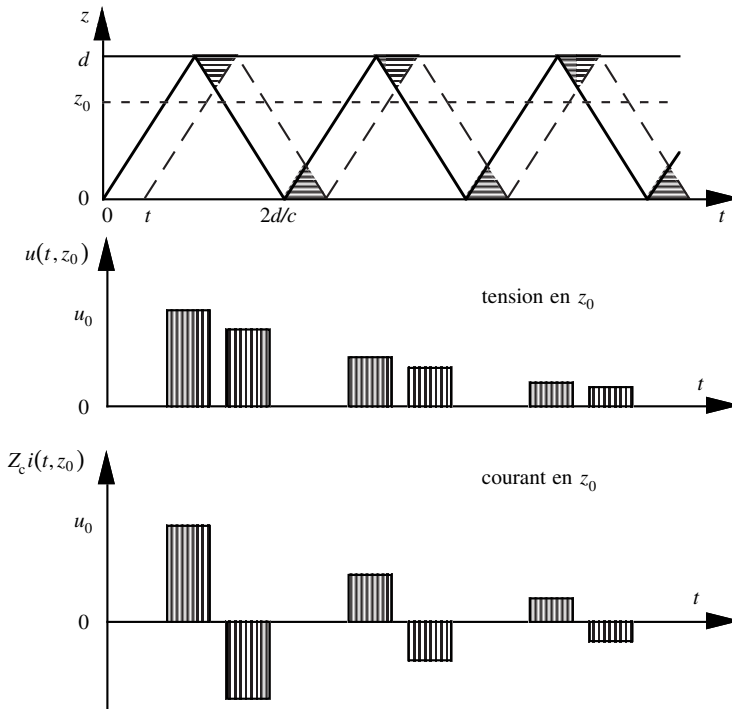


Fig. 2.19 Tension et courant d'une impulsion courte avec des réflexions multiples.

2.6.6 Réflectométrie temporelle (TDR)

La mesure du signal réfléchi à l'entrée d'une ligne de transmission fournit des informations importantes pour analyser le fonctionnement d'un système. Les connecteurs qui joignent des sections de câbles produisent des réflexions, et on peut détecter à distance la présence de défauts et, dans une certaine mesure, la nature de ceux-ci. Cette technique de mesure est connue sous le nom de *réflectométrie temporelle* – en anglais *Time Domain Reflectometry* ou *TDR*. Il est ainsi possible de détecter et de localiser les défauts qui peuvent apparaître sur la ligne.

On fait généralement usage d'une source d'échelon unité (§ IV.2.2.1) à front très raide, et on observe la tension à l'entrée de la ligne sur un oscilloscope (§ XIII.7.3.17). Toutes les discontinuités produisent des échos, qui apparaissent sur l'écran avec un retard (abscisse) qui correspond à la durée du parcours aller et retour, et donc à la distance du générateur à la discontinuité – selon le principe du radar.

La vitesse de la lumière dans le vide étant d'environ $300 \mu/\text{ms} = 300 \text{ mm/ns}$, on obtient un facteur d'échelle de $6,66\dots \text{ ps/mm}$ dans le cas d'une ligne à air. Pour un câble rempli d'un matériau diélectrique, la durée du temps de parcours est multipliée par le facteur $\sqrt{\epsilon_r}$, car la présence du diélectrique réduit de ce facteur la vitesse de propagation du signal électromagnétique.

2.7 LIGNES AVEC PERTES

Dans la réalité, une ligne de transmission présente toujours des pertes. Indépendamment du soin que l'on peut mettre à concevoir et réaliser un composant ou un système, une partie du signal est toujours perdue, soit transformée en chaleur, soit répartie dans l'espace environnant. La ligne sans pertes considérée dans les sections précédentes est un idéal que l'on sait inatteignable.

2.7.1 Pertes par effet Joule

Dans une ligne de transmission en fonctionnement normal, la contribution la plus importante aux pertes est celle des conducteurs, liée à la loi d'Ohm. Tout conducteur possède une résistivité non nulle, de sorte qu'une partie du courant est absorbée et produit un échauffement par effet Joule. Dans le cas de systèmes de forte puissance, on doit prévoir de refroidir la ligne pour éviter une augmentation excessive de la température. Dans les systèmes à très faible niveau de signal (entrée de récepteurs), toute résistance produit du bruit, qui réduit la sensibilité des appareils.

Les supraconducteurs ont une résistivité beaucoup plus faible que les métaux usuels, et leur usage a été préconisé pour améliorer le fonctionnement de composants et de lignes de transmission. On rencontre alors d'autres difficultés, notamment liées à la nécessité de travailler à des températures très basses. Les nouveaux supraconducteurs à "haute température" sont susceptibles de réduire à l'avenir les problèmes de refroidissement.

2.7.2 Pertes par courant de fuite

Quand les deux conducteurs se trouvent dans le vide, aucun courant de conduction ne peut circuler de l'un à l'autre. C'est encore approximativement le cas dans l'air, qui est un très bon isolant s'il n'est pas trop humide. Les isolants solides ou liquides sont en revanche susceptibles de conduire un faible courant de fuite, qui donne lieu à des pertes diélectriques. Cet effet est le plus souvent négligeable dans les isolants de bonne qualité, mais peut devenir significatif lorsqu'un matériau a été détérioré.

2.7.3 Pertes par rayonnement

De caractère tout à fait différent, les pertes par rayonnement apparaissent dans les lignes de transmission ouvertes. Elles sont liées à l'excitation d'ondes rayonnées ou propagées le long d'interfaces diélectriques, et leur étude requiert une analyse en termes de champs ou de potentiels électromagnétiques (chap. 7 et suivants).

Dans l'étude des lignes, l'emploi de concepts de circuits – comme les courants et les tensions – résulte d'une approximation, les dimensions transverses d'une ligne étant en général très petites par rapport à sa longueur. Pour des impulsions très courtes et des fréquences très élevées (chap. 3), cette approximation n'est plus suffisante. D'autres phénomènes – inexplicables en termes des courants et des tensions – apparaissent alors: modes supérieurs de propagation, spectre de rayonnement. Il existe toujours une limite supérieure pour l'utilisation d'une ligne de transmission, qu'elle soit ouverte ou fermée.

2.7.4 Schéma équivalent d'une ligne avec pertes

En première approximation, on peut tenir compte des pertes métalliques en ajoutant une résistance en série dans le schéma équivalent de la figure 2.4. Similairement, on introduit une conductance connectée en parallèle avec la capacité pour tenir compte de la présence de courants de fuite dans les isolants. On obtient ainsi le schéma équivalent de la figure 2.20.

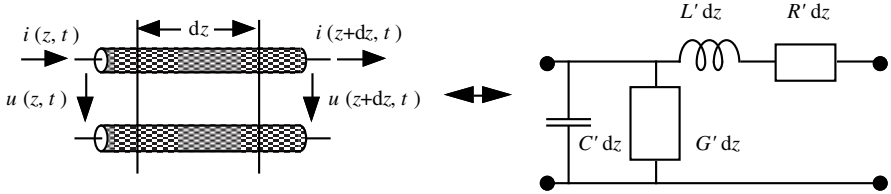


Fig. 2.20 Ligne avec pertes diélectriques et métalliques.

2.7.5 Équation des télégraphistes

On ajoute les contributions des éléments résistifs – qui représentent les pertes dans les conducteurs et dans les isolants – dans les deux équations des lignes (2.8) et (2.10), qui prennent ainsi la forme suivante

$$\frac{\partial u(t, z)}{\partial z} = -L' \frac{\partial i(t, z)}{\partial t} - R' i(t, z) \quad [\text{A/m}] \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial i(t, z)}{\partial z} = -C' \frac{\partial u(t, z)}{\partial t} - G' u(t, z) \quad [\text{V/m}] \quad (2.50)$$

On combine ces deux relations pour éliminer une des deux variables et on obtient ainsi l'équation d'ondes pour la tension sur une ligne avec pertes, que l'on appelle aussi *équation des télégraphistes*

$$\frac{\partial^2 u(t, z)}{\partial z^2} = L' C' \frac{\partial^2 u(t, z)}{\partial t^2} + (R' C' + L' G') \frac{\partial u(t, z)}{\partial t} + R' G' u(t, z) \quad [\text{V/m}^2] \quad (2.51)$$

On a comme précédemment une équation de second ordre aux dérivées partielles, mais qui comporte des termes additionnels de premier ordre, avec en plus la fonction $u(t, z)$ elle-même.

2.7.6 Condition de Heaviside

La présence de pertes entraîne toujours un affaiblissement du signal, et il est donc évident que les solutions obtenues dans l'équation (2.18) – qui ne comportent pas d'affaiblissement – ne peuvent donc pas être des solutions de (2.51).

On peut néanmoins postuler l'existence d'une solution qui possède une dépendance similaire à celle obtenue pour la ligne sans pertes, à laquelle on adjoint une décroissance exponentielle en introduisant un affaiblissement linéique α [Np/m]

$$u(t, z) = u_+(t - z/c) e^{-\alpha z} \quad [\text{V}] \quad (2.52)$$

On considère ici une onde progressive, le développement étant identique pour une onde rétrograde. Les dérivées premières et secondes par rapport à z donnent alors

$$\frac{\partial u(t, z)}{\partial z} = -\frac{1}{c} u'_+(t - z/c) e^{-\alpha z} - \alpha u_+(t - z/c) e^{-\alpha z} \quad [\text{V/m}] \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial^2 u(t, z)}{\partial z^2} = \left[\frac{1}{c^2} u''_+(t - z/c) + \frac{2\alpha}{c} u'_+(t - z/c) + \alpha^2 u_+(t - z/c) \right] e^{-\alpha z} \quad [\text{V/m}^2] \quad (2.54)$$

On introduit alors ces deux relations dans l'équation (2.51) et on identifie les coefficients des dérivées secondes, des dérivées premières et des fonctions u , ce qui donne

$$\frac{1}{c^2} = L'G' \quad \frac{2\alpha}{c} = (R'G' + L'G') \quad \alpha^2 = R'G' \quad (2.55)$$

On constate qu'on a obtenu trois relations, alors qu'il n'y a que deux inconnues à déterminer, c et α . Ces deux grandeurs valent respectivement

$$c = \frac{1}{\sqrt{L'G'}} \quad \alpha = \sqrt{R'G'} \quad (2.56)$$

La deuxième relation de (2.55) fournit une condition supplémentaire que doivent satisfaire les paramètres de la ligne. On en tire, après quelques calculs

$$R'G' = L'G' \quad [\text{s/m}^2] \quad (2.57)$$

Cette relation est connue sous le nom de *condition de Heaviside* [19]. La ligne définie avec ce rapport de paramètres réduit l'amplitude du signal, mais n'en modifie pas la forme. On dit alors que la ligne est non dispersive.

Pour les lignes de transmission usuelles, toutefois, les pertes diélectriques sont très faibles et $G' \cong 0$. Ces lignes ne satisfont donc pas la condition de Heaviside. Il faudrait augmenter les pertes diélectriques, et donc l'affaiblissement, pour réduire la dispersion.

2.7.7 Constatations

Ce n'est que pour une ligne avec des pertes à caractère très particulier qu'on obtient une solution amortie simple de l'équation des télégraphistes (2.51), et cette situation ne correspond pas à une ligne de transmission usuelle. Dans les autres cas possibles, la dépendance de la tension n'est pas celle de (2.52) et un signal se déforme en se propageant. On parle alors de dispersion de propagation et de distorsion du signal. Ces phénomènes ne peuvent pas être étudiés de façon rigoureuse pour des fonctions quelconques du temps.

On a aussi constaté, dans les paragraphes 2.5.6 et 2.5.7, que la réflexion produite par une terminaison réactive – inductance ou capacité en bout de ligne – ne peut pas être étudiée directement lorsque le signal incident est une fonction quelconque du temps.

En introduisant le schéma de la figure 2.20, on a implicitement admis que les quatre paramètres R', L', G' et C' qui définissent la ligne sont des constantes. La réalité est plus complexe, car en général ces paramètres dépendent aussi de certaines propriétés du signal.

À cause de ces différentes raisons, pour étudier une ligne de transmission dans des conditions de fonctionnement plus générales, on doit faire usage d'une technique mathématique plus sophistiquée, basée sur le développement des signaux en termes des fonctions propres du système qui, dans le cas de tout système linéaire, sont des sinusoides. L'exposition de cette technique fait l'objet des chapitres qui suivent.

2.8 EXERCICES

2.8.1 Déterminer le temps qu'il faut à un signal pour parcourir 1 kilomètre sur un câble rempli de diélectrique – non aimantable – ayant une permittivité relative $\epsilon_r = 2,10$.

Plus ou moins par définition, un diélectrique est supposé non aimantable, avec une perméabilité $\mu = \mu_0$. Cette définition sera toujours admise par défaut – si la perméabilité est différente de μ_0 , on le précisera dans les données du problème.

2.8.2 Une ligne bifilaire a une capacité linéique $C' = 35 \text{ nF/km}$ et une inductance linéique $L' = 0,7 \text{ mH/km}$. Déterminer la vitesse et l'impédance caractéristique.

2.8.3 Une ligne coaxiale a un conducteur intérieur de rayon $R_A = 1,2 \text{ mm}$ et un conducteur extérieur de rayon interne $R_B = 4 \text{ mm}$. Elle est remplie d'un diélectrique ayant une permittivité relative $\epsilon_r = 3,5$. Déterminer la vitesse et l'impédance caractéristique.

2.8.4 Une ligne bifilaire est formée de deux conducteurs de 1 mm de rayon à 4 mm de distance l'un de l'autre (distance entre les surfaces externes des conducteurs) entourés d'air. Quelle est son impédance caractéristique ?

2.8.5 Déterminer l'impédance caractéristique d'une ligne à ruban équilibré ayant les paramètres suivants: $w = 4 \text{ mm}$, $h = 1,2 \text{ mm}$, $b = 0,2 \text{ mm}$ et $\epsilon_r = 2,8$.

2.8.6 Déterminer le facteur de réflexion ρ_t résultant de la connexion d'une résistance de 10Ω à l'extrémité d'une ligne dont l'impédance caractéristique est de 50Ω .

2.8.7 Dans quelles situations la "spirale" dans le diagramme de Bergeron tourne-t-elle en direction opposée à celle de la figure 1.18 ? Dans quelles situations a-t-on une croissance monotone du courant ?

2.8.8 Déterminer le temps de parcours – aller et retour – observé par un réflectomètre temporel connecté à une ligne contenant un diélectrique de permittivité $\epsilon_r = 2,18$, la distance entre le générateur et la première discontinuité étant de 10 centimètres.

2.8.9 Une ligne bifilaire a une capacité linéique $C' = 35 \text{ nF/km}$, une inductance linéique $L' = 0,7 \text{ mH/km}$ et une résistance linéique de $R' = 120 \Omega/\text{km}$. Quelle conductance linéique faudrait-il avoir pour que la ligne ne soit pas dispersive ? À quelle distance de la source la tension du signal sera-t-elle réduite au dixième de sa valeur initiale ?

LIGNE DANS LE DOMAINE FRÉQUENTIEL

L'étude temporelle des lignes qui comportent des pertes ne permet pas d'obtenir une solution générale (chap. 2), du fait de la présence de dérivées partielles de plusieurs ordres par rapport au temps et à la direction de propagation. En éliminant la dérivation par rapport au temps, il ne reste que des différentielles totales. Pour ce faire, on introduit des fonctions proportionnelles à leur dérivée, les exponentielles. Si le facteur de proportionnalité entre la fonction et sa dérivée est réel, on obtient des exponentielles croissantes ou décroissantes, qui divergent en $t = \pm \infty$ et ne conviennent donc pas pour représenter des signaux. En revanche, une proportionnalité purement imaginaire fournit une fonction bornée dont la partie réelle est une sinusoïde. Tout signal qui varie dans le temps peut être représenté en superposant des fonctions sinusoïdales en formant une transformée de Fourier [20].

3.1 NOTATION COMPLEXE

3.1.1 Régime sinusoïdal permanent

La tension $u(t, z)$ d'un signal sinusoïdal permanent de pulsation ω sur une ligne de transmission est représentée dans la figure 3.1, en un point z_0 et en fonction du temps.

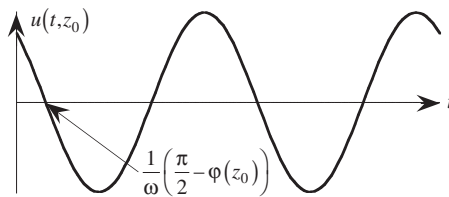


Fig. 3.1 Tension en régime sinusoïdal permanent.

Cette tension est représentée par la fonction

$$u(t, z) = \sqrt{2} U(z) \cos[\omega t + \varphi(z)] \quad [\text{V}] \quad (3.1)$$

où $U(z)$ est la valeur efficace de la tension en fonction de la position, $\varphi(z)$ est sa phase, qui indique à quels moments la tension passe par zéro. La phase dépend de la position le long de la ligne et est proportionnelle au temps de propagation. La fréquence f du signal est directement liée à la pulsation par la relation

$$\omega = 2\pi f \quad [\text{s}^{-1}] \quad (3.2)$$

3.1.2 Notation complexe : phaseurs

L'équation (3.1) peut aussi être écrite de la manière suivante

$$u(t, z) = \operatorname{Re} \left[\sqrt{2} \underline{U}(z) e^{j\omega t} \right] \quad [\text{V}] \quad (3.3)$$

où l'on a introduit le *phaseur de tension* (§ I.8.3.3)

$$\underline{U}(z) = U(z) e^{j\varphi(z)} \quad [\text{V}] \quad (3.4)$$

On indique qu'une grandeur est *complexe* en la soulignant. Le module est la valeur efficace de la tension (§ 3.1.6), et l'argument spécifie les passages par zéro (fig. 3.1). On définit de la même façon le phaseur de courant $\underline{I}(z)$. Comme les deux termes $\sqrt{2}$ et $e^{j\omega t}$ apparaissent dans toutes les relations, il est inutile de les répéter: les traitements ultérieurs ne considèrent que les phaseurs (grandeurs complexes) dans le *domaine fréquentiel*.

Sachant que $\operatorname{Re}(z) = (z + z^*)/2$, on peut exprimer la tension (3.3) comme suit

$$u(t, z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\underline{U}(z) e^{j\omega t} + \underline{U}^*(z) e^{-j\omega t} \right] \quad [\text{V}] \quad (3.5)$$

3.1.3 Remarque

Dans le présent ouvrage, on dénote la dépendance du temps par $e^{j\omega t}$, selon la notation couramment employée par les ingénieurs électriciens. D'autres publications introduisent une dépendance en $e^{-j\omega t}$ ou même en $e^{-\omega t}$, qui peuvent créer des confusions. Si l'on mélange les notations, on peut notamment obtenir des signaux dont l'amplitude augmente le long d'une ligne avec pertes, alors qu'elle devrait logiquement diminuer.

3.1.4 Dérivation par rapport au temps

La notation complexe permet de supprimer la dépendance du temps, et c'est pour cette raison qu'on l'a introduite. Comme le terme $e^{j\omega t}$ contient toute la dépendance temporelle, les phaseurs (complexes) sont des fonctions de la seule coordonnée spatiale z . En dérivant (3.3) par rapport au temps on obtient

$$\frac{\partial u(t, z)}{\partial t} = \operatorname{Re} \left[\sqrt{2} \underline{U}(z) \frac{de^{j\omega t}}{dt} \right] = \operatorname{Re} \left[\sqrt{2} j\omega \underline{U}(z) e^{j\omega t} \right] \quad [\text{V/s}] \quad (3.6)$$

On trouve le même résultat en multipliant, à l'intérieur des parenthèses carrées, le phaseur $\underline{U}(z)$ par le coefficient imaginaire $j\omega$. On établit ainsi les relations qui lient les phaseurs dans le domaine fréquentiel, en remplaçant partout $\partial/\partial t$ par le facteur $j\omega$. Les relations en phaseurs ne comportent alors plus que des dérivations par rapport à z .

3.1.5 Erreurs à éviter

- Un phaseur n'est pas une fonction du temps. Sa dérivée par rapport au temps est de ce fait toujours identiquement nulle.
- Un terme complexe n'a de sens que dans le domaine fréquentiel: il serait totalement faux de multiplier une fonction du temps par le terme imaginaire $j\omega$.
- Il est donc essentiel de clairement distinguer les domaines temporel et fréquentiel, afin d'éviter de commettre des erreurs.

3.1.6 Valeur efficace de la tension

La valeur moyenne de u^2 , proportionnelle à l'énergie électrique moyenne, est obtenue en intégrant u^2 sur une période du signal $T = 1/f = 2\pi/\omega$, et en divisant par T

$$\begin{aligned} \langle u^2(t, z) \rangle &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(t, z) u(t, z) dt = \frac{1}{2T} \int_t^{t+T} [\underline{U}(z)e^{j\omega t} + \underline{U}^*(z)e^{-j\omega t}] [\underline{U}(z)e^{j\omega t} + \underline{U}^*(z)e^{-j\omega t}] dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_t^{t+T} [\underline{U}^2(z)e^{2j\omega t} + \underline{U}^{*2}(z)e^{-2j\omega t} + 2\underline{U}(z)\underline{U}^*(z)] dt \end{aligned} \quad (3.7)$$

La contribution des deux premiers termes est nulle car

$$\int_t^{t+T} e^{\pm 2j\omega t} dt = \pm \frac{1}{2j\omega} e^{\pm 2j\omega t} \Big|_t^{t+T} = \pm \frac{1}{2j\omega} [e^{\pm 2j\omega(t+T)} - e^{\pm 2j\omega t}] = \pm \frac{1}{2j\omega} [e^{\pm 2j\omega T} - 1] \equiv 0 \quad [s] \quad (3.8)$$

du fait que $\omega T = 2\pi$. Il reste par conséquent

$$\langle u^2(t, z) \rangle = \underline{U}(z)\underline{U}^*(z) = |\underline{U}(z)|^2 \quad [V^2/m^2] \quad (3.9)$$

La valeur moyenne de u^2 est donc le module carré du phaseur \underline{U} . Cela résulte de l'introduction du facteur $\sqrt{2}$ dans la définition du phaseur, qui revient à utiliser la *valeur efficace* de la tension. La même constatation est valable pour le courant.

3.1.7 Valeur moyenne de la puissance

On fait de même pour déterminer la puissance moyenne avec $p(t, z) = u(t, z) i(t, z)$

$$\begin{aligned} \langle p(t, z) \rangle &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(t, z) i(t, z) dt = \frac{1}{2T} \int_t^{t+T} [\underline{U}(z)e^{j\omega t} + \underline{U}^*(z)e^{-j\omega t}] [\underline{I}(z)e^{j\omega t} + \underline{I}^*(z)e^{-j\omega t}] dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_t^{t+T} [\underline{U}(z)\underline{I}(z)e^{2j\omega t} + \underline{U}^*(z)\underline{I}^*(z)e^{-2j\omega t} + \underline{U}(z)\underline{I}^*(z) + \underline{U}^*(z)\underline{I}(z)] dt \\ & \quad [VA/m^2] \end{aligned} \quad (3.10)$$

Comme précédemment, les intégrales des deux premiers termes sont nulles et il reste

$$\langle p(t, z) \rangle = \frac{1}{2} [\underline{U}(z)\underline{I}^*(z) + \underline{U}^*(z)\underline{I}(z)] = \text{Re}[\underline{U}(z) \cdot \underline{I}^*(z)] = \text{Re}[\underline{S}(z)] = P(z) \quad [VA] \quad (3.11)$$

La puissance moyenne $P(z)$ est la partie réelle de la puissance complexe $\underline{S}(z)$, et on l'appelle la *puissance active* (§ I.8.5.3).

3.1.8 Remarque

Certains auteurs n'utilisent pas le facteur $\sqrt{2}$ dans la définition des phaseurs, qui correspondent alors à des valeurs de crête des tensions et des courants. Il faut dans ce cas un facteur 1/2 dans la définition de la puissance, et 1/4 dans celle des énergies.

3.2 LA LIGNE DE TRANSMISSION EN NOTATION COMPLEXE

3.2.1 Schéma équivalent

Le schéma équivalent d'une section infinitésimale de ligne (fig. 2.20) peut être représenté sous une forme plus générale en définissant l'impédance série par unité de longueur \underline{Z}' [Ω/m] et l'admittance parallèle par unité de longueur \underline{Y}' [S/m] et on obtient ainsi le schéma de la figure 3.2.

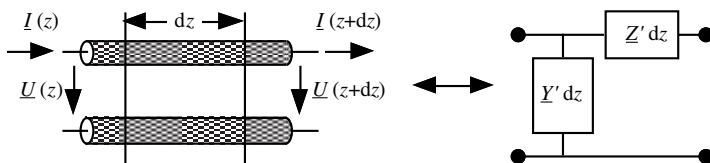


Fig. 3.2 Schéma équivalent d'une section infinitésimale dz de ligne.

Ce schéma permet de représenter non seulement la ligne bifilaire avec pertes de la section 2.7, mais également d'autres types de lignes qui ont d'autres schémas équivalents (sect. 3.4). Pour la ligne $L'C'$ avec pertes $R'G'$, l'impédance linéique et l'admittance linéique sont données par (sect. I.8.4)

$$\underline{Z}' = R' + j\omega L' \quad [\Omega/m] \quad \underline{Y}' = G' + j\omega C' \quad [S/m] \quad (3.12)$$

3.2.2 Équations des lignes

Avec le schéma équivalent de la figure 3.2, on détermine deux équations complexes pour les lignes, qui correspondent aux deux expressions (2.49) et (2.50) précédemment établies dans le domaine temporel

$$\frac{d\underline{I}(z)}{dz} = -\underline{Y}'\underline{U}(z) \quad [A/m] \quad (3.13)$$

$$\frac{d\underline{U}(z)}{dz} = -\underline{Z}'\underline{I}(z) \quad [V/m] \quad (3.14)$$

Il s'agit de deux équations différentielles totales exactes de premier ordre, avec des dérivées par rapport à la coordonnée longitudinale z de la ligne de transmission. La variation longitudinale de $\underline{I}(z)$ est proportionnelle à $\underline{U}(z)$ et, vice-versa, la variation longitudinale du phaseur de tension est proportionnelle au phaseur de courant.

3.2.3 Équations d'onde

En combinant les deux équations complexes des lignes (3.13) et (3.14), on obtient une équation différentielle de second ordre, qui ne contient plus que l'une des deux fonctions: tension ou courant. Ce sont les équations d'onde en notation complexe pour la ligne de transmission

$$\frac{d^2\underline{U}(z)}{dz^2} = \underline{Z}'\underline{Y}'\underline{U}(z) \quad [V/m^2] \quad \frac{d^2\underline{I}(z)}{dz^2} = \underline{Z}'\underline{Y}'\underline{I}(z) \quad [A/m^2] \quad (3.15)$$

3.2.4 Propagation le long d'une ligne

La solution de l'équation différentielle à coefficients constants (3.15) est formée de deux exponentielles

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_+ e^{-\underline{\gamma}z} + \underline{U}_- e^{+\underline{\gamma}z} \quad [\text{V}] \quad (3.16)$$

où l'on a introduit l'exposant de propagation $\underline{\gamma}$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}'\underline{Y}'} = \alpha + j\beta \quad [\text{m}^{-1}] \quad (3.17)$$

Comme il y a deux solutions, on choisit celle pour laquelle β est positif ou, si ce terme est nul, celle pour laquelle α est positif.

3.2.5 Ondes progressives et rétrogrades

Les deux constantes complexes \underline{U}_+ et \underline{U}_- , qui apparaissent dans l'équation (3.16), seront déterminées par les conditions aux limites aux deux extrémités de la ligne (récepteur et générateur, sect. 4.1 et 4.3). Les ondes se déplacent respectivement vers les valeurs croissantes de z (onde progressive) et vers les valeurs décroissantes (onde rétrograde).

3.2.6 Exposant de propagation

Pour déterminer la signification physique de l'exposant de propagation $\underline{\gamma}$, on introduit (3.16) dans la relation (3.3) et on obtient la tension en développant dans le domaine temporel

$$u(t, z) = \sqrt{2} U_+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_+) + \sqrt{2} U_- e^{+\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \varphi_-) \quad [\text{V}] \quad (3.18)$$

où $U_{\pm} = |\underline{U}_{\pm}|$ et $\varphi_{\pm} = \arg(\underline{U}_{\pm})$.

La tension qui correspond au premier terme de (3.18) est représentée à la figure 3.3 en fonction de la position le long de la ligne, pour deux valeurs du temps.

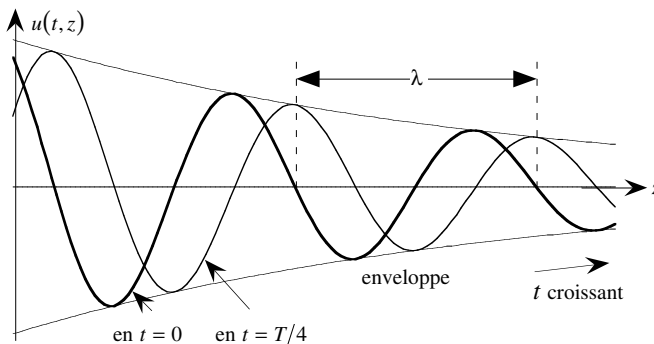


Fig. 3.3 Onde sinusoïdale amortie.

C'est une sinusoïde amortie, qui décroît dans la direction vers laquelle l'onde se propage. L'affaiblissement résulte de la partie réelle α de l'exposant de propagation, tandis que le déplacement de l'onde (déphasage) est lié à sa partie imaginaire $j\beta$.

3.2.7 Affaiblissement linéique

La valeur efficace de la tension de l'onde progressive, donnée par le module du phaseur (3.9), décroît exponentiellement (fig. 3.4)

$$|\underline{U}(z)| = U_+ e^{-\alpha z} \quad [\text{V}] \quad (3.19)$$

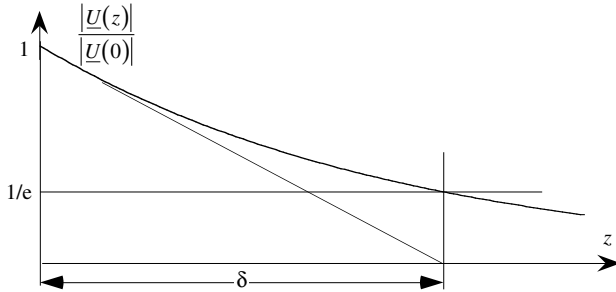


Fig. 3.4 Décroissance d'un signal sur une ligne avec pertes.

La partie réelle α de l'exposant de propagation est appelée *affaiblissement linéique* (par unité de longueur) et mesurée en néper par mètre [Np/m]. Le néper est une grandeur sans dimension indiquant qu'il s'agit d'un exposant en base e. Une décroissance de 1 néper correspond à un facteur de réduction de $e = 2,718\dots$

En pratique, on préfère utiliser la base 10, qui est plus pratique pour les calculs. On définit dans ce but un affaiblissement linéique en décibel par mètre [dB/m], dénoté α_{dB} , qui résulte de la relation

$$|\underline{U}(z)| = |\underline{U}(0)| 10^{-(\alpha_{\text{dB}} z)/20} \quad [\text{V}] \quad (3.20)$$

Identifiant (3.20) avec (3.19), la valeur α_{dB} est liée à celle de α en néper par

$$\alpha_{\text{dB}} = (20 / \ln 10) \alpha_{\text{Np}} = 8,686 \alpha_{\text{Np}} \quad [-] \quad (3.21)$$

Les affaiblissements correspondant à des rapports usuels de tensions sont donnés dans le tableau 3.5.

3.2.8 Profondeur de pénétration, effet pelliculaire

La distance pour laquelle l'affaiblissement est égal à un néper est appelée la profondeur de pénétration δ

$$\delta = 1/\alpha \quad [\text{m}] \quad (3.22)$$

Une ligne longue de N profondeurs de pénétration produit un affaiblissement de N népers. Le concept de profondeur de pénétration est surtout utilisé dans le cadre de la propagation d'ondes à l'intérieur des conducteurs, notamment dans des métaux (§ 1.6.5). Les champs électromagnétiques sont alors concentrés dans une couche mince en surface, d'épaisseur δ , et on parle d'effet de peau ou d'effet pelliculaire.

Tableau 3.5 Rapports d'affaiblissement en Np et en dB.

$ \underline{U}(z) / \underline{U}(0) $	$\alpha_{\text{Np}} z$	$\alpha_{\text{dB}} z$
1	0	0
0,8	0,233	1,94
0,5	0,693	6
0,2	1,61	14
0,1	2,30	20
0,05	3,00	26
0,01	4,60	40
0,001	6,90	60
0,0001	9,20	80
$\times 0,1$	+ 2,30	+ 20

3.2.9 Déphasage linéique

La partie imaginaire β de l'exposant de propagation $\underline{\gamma}$ est le *déphasage linéique* du signal, qui dénote le retard résultant de la propagation à une vitesse finie le long de la ligne. On le mesure en radian par mètre, ou encore en degré par mètre, le facteur de conversion étant de 1 radian = $180^\circ/\pi = 57,296$ degrés.

3.2.10 Longueur d'onde

Sur une ligne de transmission ayant des pertes, les ondes sont amorties dans la direction de propagation et on n'a pas de ce fait une périodicité rigoureuse. On peut néanmoins définir une *longueur d'onde* λ , qui est donnée par le double de la distance qui sépare deux zéros consécutifs de la tension (fig. 3.3). C'est la distance sur laquelle le déphasage $\beta\lambda = 2\pi$ et, par conséquent

$$\lambda = 2\pi/\beta \quad [\text{m}] \quad (3.23)$$

En revanche, en présence de pertes importantes, la distance qui sépare deux maxima (ou deux minima) successifs n'est pas égale à une longueur d'onde [21].

3.2.11 Vitesse de phase

Supposons qu'un observateur soit situé à un zéro de la tension et qu'il se déplace à la même vitesse que celui-ci. Sa vitesse correspond à une valeur constante de l'argument $(\omega t - \beta z)$, elle est appelée la vitesse de phase v_φ et vaut

$$v_\varphi = \omega/\beta \quad [\text{m/s}] \quad (3.24)$$

La vitesse de phase ne correspond pas à un transfert de puissance, elle peut dans certains cas devenir plus grande que la vitesse de la lumière dans le vide c_0 .

3.2.12 Vitesse de groupe

Une simple tension sinusoïdale ne transporte pas d'information, elle ne peut qu'être présente ou absente. Pour transmettre une information, on doit faire varier un paramètre en fonction du temps: l'amplitude $|U|$, la pulsation ω ou la phase φ et on dit alors que la tension est modulée. La figure 3.6 représente un signal modulé en amplitude.

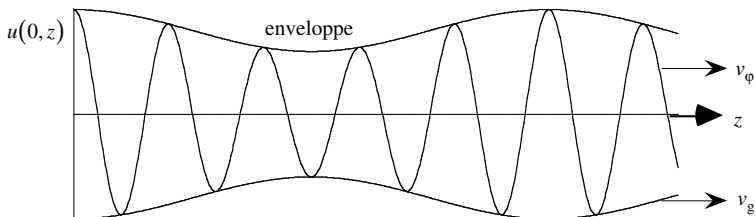


Fig. 3.6 Signal modulé en amplitude.

Un signal modulé est une superposition de sinusoïdes légèrement décalées en fréquence. Dans le cas le plus simple, on a deux sinusoïdes de même amplitude

$$\cos(\omega_1 t - \beta_1 z) + \cos(\omega_2 t - \beta_2 z) \quad [-] \quad (3.25)$$

Faisant usage de relations trigonométriques, on met cette expression sous la forme

$$2[\cos(\omega_m t - \beta_m z) \cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z)] \quad [-] \quad (3.26)$$

avec $\omega_m = (\omega_1 + \omega_2)/2$ $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$ $\beta_m = (\beta_1 + \beta_2)/2$ $\Delta\beta = (\beta_1 - \beta_2)/2$

On obtient ainsi un produit de deux fonctions, l'une de fréquence moyenne f_m appelée *porteuse*, l'autre de fréquence Δf appelée *enveloppe*. L'enveloppe se déplace à la vitesse $\Delta\omega/\Delta\beta$, et la vitesse de groupe est définie par la limite de ce quotient [22]

$$v_g = (\partial\beta/\partial\omega)^{-1} \quad [\text{m/s}] \quad (3.27)$$

Dans un système sans pertes, l'information ou l'énergie se déplacent à la vitesse de groupe, qui ne peut alors pas dépasser la vitesse de la lumière dans le vide c_0 . Ce n'est plus le cas lorsque le système a d'importantes pertes: v_g peut alors être supérieure à c_0 .

3.2.13 Représentation graphique

Le diagramme de dispersion représente β en fonction de ω (fig. 3.7). La vitesse de phase est inversement proportionnelle à la pente de la droite qui joint l'origine au point représentatif, et la vitesse de groupe à la pente de la tangente en ce point.

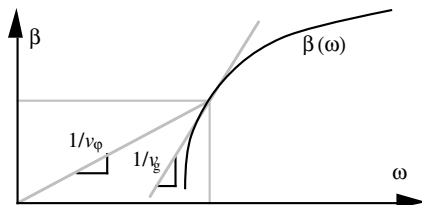


Fig. 3.7 Vitesses de phase et de groupe dans un diagramme de dispersion.

3.3 IMPÉDANCE ET PUISSANCE

3.3.1 Courant sur une ligne

On détermine le phaseur de courant $\underline{I}(z)$ sur la ligne en introduisant le phaseur de tension $\underline{U}(z)$ (3.16) dans l'équation (3.14), ce qui donne

$$\underline{I}(z) = \frac{\gamma}{Z'} \left(\underline{U}_+ e^{-\gamma z} - \underline{U}_- e^{+\gamma z} \right) = \underline{Y}_c \left(\underline{U}_+ e^{-\gamma z} - \underline{U}_- e^{+\gamma z} \right) \quad [\text{A}] \quad (3.28)$$

3.3.2 Impédance et admittance caractéristiques

L'impédance caractéristique \underline{Z}_c de la ligne est l'inverse de l'admittance caractéristique \underline{Y}_c qui apparaît dans (3.28). Elle est donnée par

$$\underline{Z}_c = \frac{1}{\underline{Y}_c} = \frac{Z'}{\underline{\gamma}} = \pm \sqrt{\frac{Z'}{Y'}} \quad [\Omega] \quad (3.29)$$

Il faut bien noter ici la présence du signe \pm dans le dernier terme de (3.29): le choix du signe est directement lié celui qui a été fait pour $\underline{\gamma}$ en (3.17), et il est en fait donné par le quotient $Z'/\underline{\gamma}$. Pour toutes les lignes de type courant, on doit prendre le signe positif tandis que pour certaines lignes très particulières, comme la ligne inverse, c'est le signe négatif qui apparaît (§ 3.4.5).

3.3.3 Puissance sur une ligne

Connaissant les phaseurs de tension et de courant sur la ligne, la puissance complexe en un point quelconque est obtenue en effectuant le produit $\underline{U}\underline{I}^*$ du phaseur de tension par le *conjugué complexe* du tenseur de courant (3.11)

$$\begin{aligned} \underline{S}(z) &= \underline{U}(z)\underline{I}^*(z) = \left(\underline{U}_+ e^{-\gamma z} + \underline{U}_- e^{+\gamma z} \right) \underline{Y}_c^* \left(\underline{U}_+^* e^{-\gamma^* z} - \underline{U}_-^* e^{+\gamma^* z} \right) \\ &= \underline{Y}_c^* \left[|\underline{U}_+|^2 e^{-2\alpha z} - |\underline{U}_-|^2 e^{+2\alpha z} + 2j \operatorname{Im} \left(\underline{U}_+^* \underline{U}_- e^{+2j\beta z} \right) \right] \quad [\text{VA}] \quad (3.30) \end{aligned}$$

La partie réelle de (3.30) fournit la puissance active transportée par la ligne

$$P(z) = \operatorname{Re}[\underline{S}(z)] = \operatorname{Re}(\underline{Y}_c) \left[|\underline{U}_+|^2 e^{-2\alpha z} - |\underline{U}_-|^2 e^{+2\alpha z} \right] + 2 \operatorname{Im}(\underline{Y}_c) \operatorname{Im} \left(\underline{U}_+ \underline{U}_-^* e^{+2j\beta z} \right) \quad [\text{W}] \quad (3.31)$$

On note que, lorsque l'admittance caractéristique est complexe, la puissance active comprend deux termes liés à l'onde progressive et à l'onde rétrograde, mais aussi un terme croisé, qui est le produit des tensions des deux ondes.

Si l'admittance caractéristique est réelle – ligne courante sans pertes ou ligne avec pertes remplissant la condition de Heaviside (§ 2.7.6) – le terme croisé est nul et il ne reste que les contributions individuelles des deux ondes. Si, en revanche, l'admittance est purement imaginaire – guide d'ondes sans pertes en dessous de la coupure (§ 3.4.4) – le seul terme non nul est le terme croisé: pour qu'on ait un transport de puissance, il faut que les deux ondes soient simultanément présentes.

3.4 QUELQUES LIGNES

3.4.1 Ligne bifilaire sans pertes

Pour la ligne bifilaire sans pertes (fig. 2.4), on obtient simplement

$$\underline{Z}' = j\omega L' \quad [\Omega/m] \quad \text{et} \quad \underline{Y}' = j\omega C' \quad [S/m] \quad (3.32)$$

L'exposant de propagation est dans ce cas purement imaginaire, il n'y a pas d'affaiblissement

$$\underline{\gamma} = j\beta = \sqrt{j\omega L' j\omega C'} = j\omega\sqrt{L'C'} \quad [m^{-1}] \quad (3.33)$$

Comme β est une fonction linéaire de ω , les pentes des deux droites dans le diagramme de dispersion (fig. 3.7) sont confondues, et les vitesses de phase et de groupe ont la même valeur

$$v_\varphi = v_g = 1/\sqrt{L'C'} \quad [m/s] \quad (3.34)$$

L'impédance caractéristique est alors donnée par (3.29)

$$Z_c = \sqrt{j\omega L' / j\omega C'} = \sqrt{L'/C'} \quad [\Omega] \quad (3.35)$$

Il s'agit d'une ligne de transmission idéale, sur laquelle un signal se propage sans changer d'amplitude ni de forme: il n'y a pas d'affaiblissement ni de dispersion. C'est la situation dont on souhaite se rapprocher le plus possible dans la pratique.

On rencontre une situation similaire pour la propagation d'une onde plane uniforme dans un milieu sans pertes, pour laquelle on a (§ 8.1.5)

$$\underline{Z}' = j\omega\mu \quad [\Omega/m] \quad \text{et} \quad \underline{Y}' = j\omega\epsilon \quad [S/m] \quad (3.36)$$

3.4.2 Ligne bifilaire avec pertes

Pour la ligne bifilaire avec pertes (fig. 2.20), l'impédance et l'admittance linéiques prennent la forme

$$\underline{Z}' = R' + j\omega L' \quad [\Omega/m] \quad \text{et} \quad \underline{Y}' = G' + j\omega C' \quad [S/m] \quad (3.37)$$

L'exposant de propagation a une partie réelle et une partie imaginaire non nulles, il y a alors propagation avec affaiblissement

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta \quad [m^{-1}] \quad (3.38)$$

Pour déterminer α et β , on doit extraire la racine d'un nombre complexe, ce qui donne après quelques calculs

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(R'^2 + \omega^2 L'^2)(G'^2 + \omega^2 C'^2)} + R'G' - \omega^2 L'C' \right]} \quad [m^{-1}] \quad (3.39)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(R'^2 + \omega^2 L'^2)(G'^2 + \omega^2 C'^2)} - R'G' + \omega^2 L'C' \right]} \quad [m^{-1}] \quad (3.40)$$

Les dépendances fréquentielles de α et de β sont représentées graphiquement dans le diagramme de dispersion (fig. 3.8). Comme β n'est pas une fonction linéaire de ω , les

pentés des deux droites dans le diagramme de dispersion (fig. 3.7) ne sont plus les mêmes, et les vitesses de phase et de groupe sont différentes.

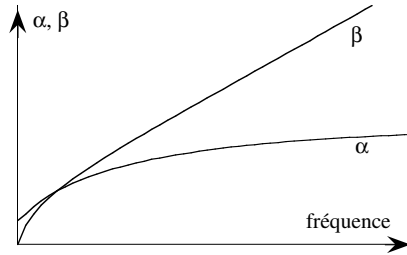


Fig. 3.8 Déphasage et affaiblissement linéiques sur une ligne avec pertes.

Aux très basses fréquences, avec ω très petit et quand G' est négligeable (ce qui est habituellement le cas des lignes d'usage courant), on obtient l'approximation

$$\alpha \cong \beta \cong \sqrt{\omega R' C' / 2} \quad [\text{m}^{-1}] \quad (3.41)$$

Pour les grandes valeurs de ω , on obtient en effectuant des développements limités

$$\alpha \cong \frac{R'}{2} \sqrt{\frac{C'}{L'}} + \frac{G'}{2} \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad \beta \cong \omega \sqrt{L' C'} \quad [\text{m}^{-1}] \quad (3.42)$$

L'impédance caractéristique de la ligne avec pertes est donnée par (3.29)

$$\underline{Z}_c = \sqrt{(R' + j\omega L') / (G' + j\omega C')} = R_c + jX_c \quad [\Omega] \quad (3.43)$$

Les valeurs des quatre paramètres primaires des lignes pour quelques lignes de transmission d'usage courant sont données dans le tableau 3.9.

Tableau 3.9 Paramètres de quelques lignes de transmission.

Ligne ↓		L'	C'	R'	G'
		mH/km	nF/km	Ω/km	nS/km
Téléphonique abonnés 0,4 mm de diamètre	en basse	0,7	35	279	$\approx 0,1$
Téléphonique rurale 1 mm de diamètre	fréquence	0,7	35	43,8	$\approx 0,1$
Aérienne 2 mm diamètre, 30 cm écartement	"	2,4	4,9	11	$\approx 0,1$
Haute tension 12,4 mm diamètre, 3 m écartement	"	2,6	4,5	0,46	$\approx 0,01$
Coaxiale $R_A = 2,6$ mm $R_B = 9,5$ mm	à 100 kHz	0,265	47	12,8	$\approx 1,0$

On rencontre une situation similaire pour la propagation d'une onde plane uniforme dans un milieu avec pertes (§ 8.2.2), pour laquelle on a

$$\underline{Z}' = j\omega \underline{\mu} \quad [\Omega/\text{m}] \quad \text{et} \quad \underline{Y}' = \sigma + j\omega \underline{\epsilon} \quad [\text{S}/\text{m}] \quad (3.44)$$

3.4.3 Pertes en haute fréquence

On a implicitement supposé que les quatre paramètres primaires de la ligne R' , L' , G' et C' sont constants. C'est bien le cas aux basses fréquences, mais aux fréquences élevées ils varient – surtout les termes de l'impédance série, du fait que les courants se concentrent à la surface des conducteurs par effet pelliculaire (§ 8.2.6).

En moyenne fréquence, la résistance d'un fil circulaire vaut approximativement

$$R' = R'_0 \left[1 + \frac{1}{48} \left(\frac{a}{\delta} \right)^4 \right] \quad [\Omega/\text{m}] \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \quad [\text{m}] \quad (3.45)$$

où R'_0 est la résistance linéique en continu, δ la profondeur de pénétration dans le métal, de conductivité σ et de permittivité μ , ayant un rayon a .

Aux fréquences plus élevées, on utilise une méthode de perturbation pour évaluer l'effet des pertes métalliques. On admet que ces pertes produisent une petite "perturbation" du système sans pertes (connu), et en comparant les deux systèmes, on formule une relation exprimant leur différence. Si cette différence est petite, des approximations permettent d'évaluer l'effet résultant. Pour les pertes dans le conducteur d'une ligne, on obtient ainsi

$$\underline{\gamma} = j\beta_0 + \kappa \sqrt{j\omega} \quad [\text{m}^{-1}] \quad (3.46)$$

où β_0 est le déphasage linéique dans la ligne sans pertes et κ est un facteur qui dépend du métal et de la géométrie – donné pour une ligne coaxiale (§ 2.4.2) par [13]

$$\kappa = \sqrt{\frac{\mu}{\sigma}} \left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} \right) \frac{1}{240 \pi \ln(R_B/R_A)} \quad [\text{m}^{-1}] \quad (3.47)$$

Les pertes introduisent un affaiblissement, mais modifient aussi le déphasage. Comme la variation de β est généralement minimale, le second effet est souvent négligé en pratique, ce qui peut donner lieu à des réponses non causales (§ 7.3.3) [23].

3.4.4 Guide d'ondes

En hyperfréquences, on utilise des tuyaux métalliques ou *guides d'ondes*, souvent de forme rectangulaire (fig. 3.10), pour transmettre des signaux dans des systèmes de radars ou de télécommunications (chap. XIII.2).

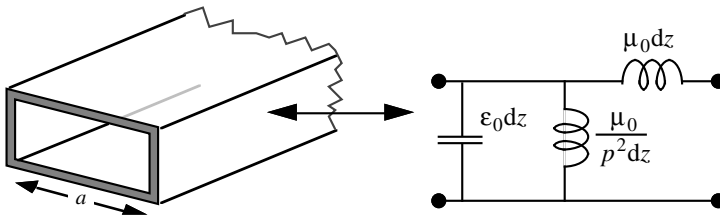


Fig. 3.10 Guide d'ondes rectangulaire et schéma équivalent: (a) section droite, (b) schéma équivalent d'une section de longueur infinitésimale.

En étudiant les champs électromagnétiques dans le guide (§ XIII.2.2.11), on dérive le schéma équivalent de la figure 3.10(b) – en négligeant les pertes ohmiques dans les parois.

L'impédance et l'admittance linéiques ont alors la forme suivante

$$\underline{Z}' = j\omega\mu_0 \quad [\Omega/m] \quad \text{et} \quad \underline{Y}' = j\omega\varepsilon_0 + p^2/j\omega\mu_0 \quad [S/m] \quad (3.48)$$

On obtient alors l'exposant de propagation

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{p^2 - \omega^2\varepsilon_0\mu_0} \quad [m^{-1}] \quad (3.49)$$

Le terme sous la racine est purement réel, mais peut être positif ou négatif, selon la fréquence. Le diagramme de dispersion est donné à la figure 3.11.

Quand la pulsation ω est inférieure à la limite $\omega_c = pc$, l'exposant de propagation est purement réel, le guide affaiblit le signal mais ne le propage pas. En revanche, pour des valeurs plus élevées, il y a propagation sans affaiblissement. On obtient plusieurs valeurs de p pour différentes configurations de champs, appelés *modes de propagation*.

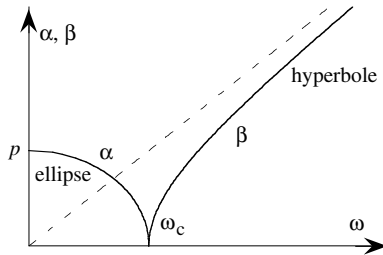


Fig. 3.11 Diagramme de dispersion d'un guide d'ondes.

Dans un guide rectangulaire de largeur a , la plus basse valeur de p vaut $p = \pi/a$. La fréquence de coupure correspondante est donnée par

$$f_c = \omega_c/2\pi = pc_0/2\pi = c_0/2a \quad [Hz] \quad (3.50)$$

Par exemple, un tuyau rectangulaire de 2,286 cm de large rempli d'air a une fréquence de coupure de 6,56 GHz: les guides d'ondes ne sont utilisés qu'aux fréquences très élevées. Les vitesses de phase et de groupe dans la bande de propagation sont

$$v_\phi = \frac{c_0}{\sqrt{1 - (pc_0/\omega)^2}} \quad v_g = c_0\sqrt{1 - (pc_0/\omega)^2} \quad [m/s] \quad (3.51)$$

Le produit $v_\phi v_g$ vaut c_0^2 : la vitesse de groupe est plus petite que c_0 et la vitesse de phase plus grande. Comme elles dépendent de la fréquence, la propagation est dispersive.

L'impédance caractéristique du guide d'ondes est donnée par

$$Z_c = \sqrt{\frac{\omega^2\mu_0^2}{\omega^2\mu_0\varepsilon_0 - p^2}} = \frac{\omega\mu_0}{\sqrt{\omega^2\mu_0\varepsilon_0 - p^2}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{1 - (pc_0/\omega)^2}} \quad [\Omega] \quad (3.52)$$

En dessous de la fréquence de coupure, l'impédance caractéristique est purement imaginaire, et devient réelle lorsque la fréquence est au-dessus de la coupure. L'effet des pertes dans les parois est déterminée par perturbation (§ 3.4.3).

On obtient le même diagramme de dispersion pour une onde qui se propage dans un plasma simple (milieu ionisé sans champ magnétique, § XIII.8.2.5). La fréquence de coupure est alors proportionnelle à la racine de la densité de particules ionisées.

3.4.5 Ligne inverse

Que se passe-t-il si l'on intervertit inductance et capacité dans le schéma équivalent de la ligne sans pertes (fig. 2.4) de façon à obtenir le schéma de la figure 3.12(a) ?

Sur le plan dimensionnel, cette ligne est représentée par une capacité \times unité de longueur C^\times en série et une inductance \times unité de longueur L^\times en parallèle – puisque ce sont les inverses de ces quantités qui s'ajoutent lors de la mise en cascade de sections.

L'impédance et l'admittance linéiques ont alors la forme suivante

$$\underline{Z}' = 1/j\omega C^\times \quad \text{et} \quad \underline{Y}' = 1/j\omega L^\times \quad (3.53)$$

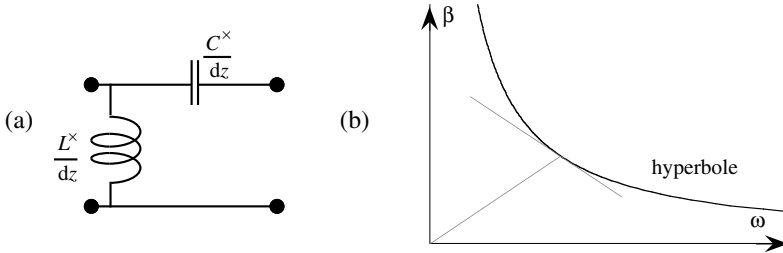


Fig. 3.12 Ligne inverse: (a) schéma équivalent; (b) diagramme de dispersion.

L'exposant de propagation est toujours imaginaire, de sorte qu'il y a propagation sans affaiblissement. Le déphasage linéique est donné par

$$\beta = \frac{1}{\omega \sqrt{C^\times L^\times}} \quad [\text{m}^{-1}] \quad (3.54)$$

Le diagramme de dispersion est donné à la figure 3.12(b) (hyperbole équilatère). Les vitesses de phase et de groupe sont ici de même valeur mais de signe opposé

$$v_\varphi = \omega^2 \sqrt{C^\times L^\times} \quad v_g = -\omega^2 \sqrt{C^\times L^\times} \quad [\text{m/s}] \quad (3.55)$$

On a ici une situation paradoxale, dans laquelle le signal "a l'air" de se déplacer dans une direction, tandis que l'énergie et l'information que le signal transporte vont en direction opposée. On parle dans ce cas d'*onde inverse*. On rencontre ce type de propagation dans des lignes hélicoïdales et les lignes à obstacles périodiques (chap. 4).

Toutefois, la ligne inverse telle qu'elle est définie par le schéma équivalent de la figure 3.12 n'est pas **physiquement réalisable**, car quand la fréquence augmente, la vitesse de groupe augmente indéfiniment et dépasse la vitesse de la lumière pour une valeur finie de la fréquence, ce qui est en contradiction avec les exigences de la physique [24]. Une ligne inverse physiquement réalisable doit comporter d'autres composants, et on n'obtient la caractéristique inverse que sur une bande limitée de fréquences.

L'impédance caractéristique est ici donnée par

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{Z}'}{\underline{Y}'} = -\sqrt{\frac{L^\times}{C^\times}} \quad [\Omega] \quad (3.56)$$

Elle a une valeur négative, qui résulte de l'inversion apparente de la direction de propagation signalée plus haut.

3.5 MATRICES ET SCHÉMAS ÉQUIVALENTS

3.5.1 Facteur de réflexion

Le facteur de réflexion, en un point quelconque z de la ligne, est défini par le quotient des tensions de l'onde rétrograde et de l'onde progressive

$$\underline{\rho}(z) = \frac{\underline{U}_- e^{+\gamma z}}{\underline{U}_+ e^{-\gamma z}} = \frac{\underline{U}_-}{\underline{U}_+} e^{+2\gamma z} = \underline{\rho}(0) e^{+2\gamma z} \quad [-] \quad (3.57)$$

Il représente un phaseur dans le plan complexe, dont l'extrémité décrit une spirale lorsqu'on se déplace le long de la ligne (fig. 3.13). Les trois figures qui suivent correspondent à trois affaiblissements différents et ont été normalisées de façon à avoir $\underline{\rho} = 1$ à l'extrémité de la ligne.

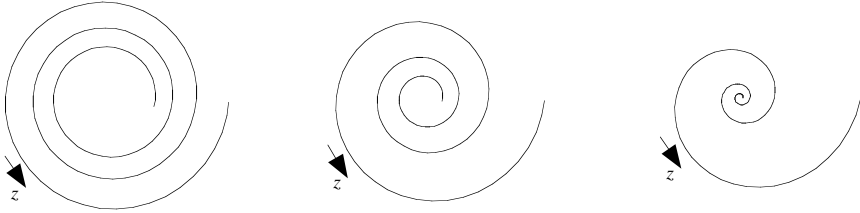


Fig. 3.13 Lieu de l'extrémité du phaseur $\underline{\rho}(z)$ en fonction de la position le long de la ligne, pour trois valeurs du rapport α/β : 0,05, 0,1 et 0,2.

En l'absence de pertes, la spirale devient un cercle (§ 3.6.1). Lorsque l'affaiblissement est important, le facteur de réflexion diminue rapidement lorsqu'on se déplace vers des valeurs décroissantes de z .

On peut simplifier les relations qui donnent la tension (3.16), le courant (3.28) et la puissance complexe (3.30) en faisant usage du facteur de réflexion

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_+ e^{-\gamma z} [1 + \underline{\rho}(z)] \quad [V] \quad (3.58)$$

$$\underline{I}(z) = \underline{Y}_c \underline{U}_+ e^{-\gamma z} [1 - \underline{\rho}(z)] \quad [A] \quad (3.59)$$

$$\underline{S}(z) = P(z) + jQ(z) = \underline{U}(z) \underline{I}^*(z) = \underline{Y}_c^* |\underline{U}_+|^2 e^{-2\alpha z} [1 - |\underline{\rho}(z)|^2 + 2j \operatorname{Im}\{\underline{\rho}(z)\}] \quad (3.60)$$

où $P(z)$ est la puissance active et $Q(z)$ la puissance réactive.

On constate, comme indiqué précédemment, que la puissance comporte trois termes. Le premier est la contribution de l'onde progressive, le deuxième celle de l'onde rétrograde, tandis que le troisième est un terme mixte qui n'apparaît qu'en présence simultanée des deux ondes. Quand l'admittance caractéristique est réelle, seuls les deux premiers termes contribuent à la puissance active, tandis que lorsque l'admittance caractéristique est purement imaginaire, il ne peut y avoir de puissance active que si $\underline{\rho}(z)$ a une partie imaginaire non nulle.

3.5.2 Impédance localisée

L'impédance localisée en un point quelconque le long de la ligne est définie par le quotient de la tension à cet endroit par le courant en ce point, ce qui donne

$$\underline{Z}(z) = \frac{\underline{U}(z)}{\underline{I}(z)} = \frac{\underline{U}_+ e^{-\gamma z} [1 + \underline{\rho}(z)]}{\underline{Y}_c \underline{U}_+ e^{-\gamma z} [1 - \underline{\rho}(z)]} = \underline{Z}_c \frac{1 + \underline{\rho}(z)}{1 - \underline{\rho}(z)} \quad [\Omega] \quad (3.61)$$

Le facteur de réflexion se déduit de l'impédance localisée par

$$\underline{\rho}(z) = \frac{\underline{Z}(z) - \underline{Z}_c}{\underline{Z}(z) + \underline{Z}_c} = \frac{\underline{Z}(z)/\underline{Z}_c - 1}{\underline{Z}(z)/\underline{Z}_c + 1} \quad [-] \quad (3.62)$$

3.5.3 Quadripôle équivalent

Une section de ligne de transmission, de longueur d (non infinitésimale), peut être représentée par un quadripôle (ou biporte) équivalent (fig. 3.14, chap. IV.6).

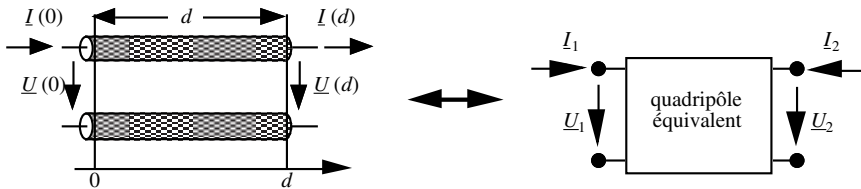


Fig. 3.14 Quadripôle équivalent d'un tronçon de ligne de transmission.

Les tensions et courants à l'entrée et à la sortie sont identifiés comme suit

$$\underline{U}_1 = \underline{U}(0) \quad \underline{I}_1 = \underline{I}(0) \quad \underline{U}_2 = \underline{U}(d) \quad \underline{I}_2 = -\underline{I}(d) \quad (3.63)$$

Il faut noter le changement de signe de \underline{I}_2 qui résulte de leurs définitions respectives en directions opposées (fig. 3.14). Pour trouver les relations entre ces quatre grandeurs qui définissent le quadripôle, on part des équations (3.16) et (3.28) et on élimine \underline{U}_+ et \underline{U}_- .

3.5.4 Matrice d'impédance

Les tensions à l'entrée et à la sortie sont exprimées en fonction des courants au moyen de la *matrice d'impédance* (§ IV.6.1.3). Avec (3.16) et (3.28), on obtient

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \underline{Z}_c \begin{bmatrix} \coth(\underline{\gamma}d) & 1/\sinh(\underline{\gamma}d) \\ 1/\sinh(\underline{\gamma}d) & \coth(\underline{\gamma}d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

3.5.5 Matrice d'admittance

La *matrice d'admittance* (§ IV.6.1.8) définit les courants en fonction des tensions

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \underline{Y}_c \begin{bmatrix} \coth(\underline{\gamma}d) & -1/\sinh(\underline{\gamma}d) \\ -1/\sinh(\underline{\gamma}d) & \coth(\underline{\gamma}d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

3.5.6 Relations entre les matrices d'impédance et d'admittance

Lorsque leurs déterminants respectifs ne sont pas nuls, la matrice d'admittance est l'inverse de la matrice d'impédance, et vice-versa

$$[\mathbf{Y}] = [\mathbf{Z}]^{-1} \quad \text{et} \quad [\mathbf{Z}] = [\mathbf{Y}]^{-1} \quad (3.66)$$

En développant ces deux relations, on obtient

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{11} &= \frac{Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} & \underline{Y}_{12} &= \frac{-Z_{21}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} \\ \underline{Y}_{21} &= \frac{-Z_{12}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} & \underline{Y}_{22} &= \frac{Z_{11}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} \end{aligned} \quad (3.67)$$

et

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{11} &= \frac{Y_{22}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}} & \underline{Z}_{12} &= \frac{-Y_{21}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}} \\ \underline{Z}_{21} &= \frac{-Y_{12}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}} & \underline{Z}_{22} &= \frac{Y_{11}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}} \end{aligned}$$

3.5.7 Matrice de chaîne

La matrice de chaîne (§ IV.6.1.20), aussi connue sous le nom de *matrice ABCD*, exprime le courant et la tension à la sortie du quadripôle en fonction de leurs valeurs à l'entrée. Elle est également obtenue à l'aide des deux relations (3.16) et (3.28) qui définissent la tension et le courant le long de la ligne de transmission

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\underline{\gamma}d) & -\underline{Z}_c \sinh(\underline{\gamma}d) \\ -\underline{Y}_c \sinh(\underline{\gamma}d) & \cosh(\underline{\gamma}d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Le déterminant de cette matrice est égal à l'unité, ce qui signifie que le quadripôle (ligne de transmission) est réciproque (§ IV.6.1.22).

Les termes de la matrice de chaîne sont liés à ceux des matrices d'admittance et d'impédance par les relations suivantes

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \frac{Z_{22}}{Z_{12}} = -\frac{Y_{11}}{Y_{12}} & \underline{B} &= \frac{Z_{12}Z_{21} - Z_{11}Z_{22}}{Z_{12}} = \frac{1}{\underline{Y}_{12}} \\ \underline{C} &= \frac{-1}{Z_{12}} = \frac{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}{Y_{12}} & \underline{D} &= \frac{Z_{11}}{Z_{12}} = -\frac{Y_{22}}{Y_{12}} \end{aligned} \quad (3.69)$$

La matrice de chaîne présente un intérêt particulier pour connecter des composants en cascade. En effet, la matrice de chaîne résultant d'une connexion de deux quadripôles s'obtient simplement en multipliant les matrices des deux quadripôles (fig. 3.15).

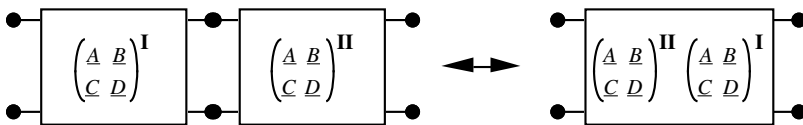


Fig. 3.15 Mise en cascade de deux quadripôles.

On peut bien entendu généraliser le processus à l'assemblage en cascade d'un nombre quelconque N de quadripôles (chap. 4). Lorsque les quadripôles sont définis en termes de leurs matrices d'impédance ou d'admittance, on détermine d'abord les matrices de chaîne correspondantes, que l'on multiplie pour obtenir la matrice de chaîne de l'ensemble. Il est alors possible de trouver la matrice d'impédance ou la matrice d'admittance de l'ensemble au moyen des relations inverses de (3.69).

3.5.8 Schémas équivalents

Un tronçon de ligne de longueur d peut aussi être remplacé par des circuits équivalents en T et en Π , que l'on obtient, respectivement, à l'aide de la matrice d'impédance et de la matrice d'admittance (fig. 3.16).

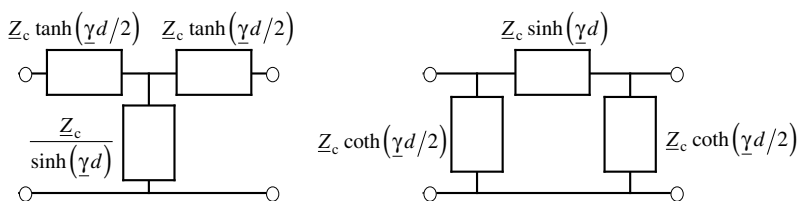


Fig. 3.16 Schémas équivalents en T et en Π d'un tronçon de ligne de transmission (toutes les valeurs indiquées sont des impédances).

On peut vérifier que lorsque la longueur d devient très petite (limite $dz \rightarrow 0$), la valeur des fonctions hyperboliques \sinh et \tanh tend vers la valeur de leur argument et, en développant, on retrouve le schéma équivalent de la figure 3.2.

Les schémas équivalents en T et en Π peuvent être utilisés pour analyser l'assemblage de tronçons de lignes connectées en cascade. On fait alors usage des règles de mise en équation des réseaux définies pour la théorie des circuits (chap. IV.4).

3.5.9 Matrice de réflexion

Pour certaines applications, il est intéressant de définir les signaux qui sortent d'un quadripôle en fonctions des signaux qui y entrent. Pour ce faire, on représente les tensions et courants aux deux accès par la superposition de leurs composantes progressives et rétrogrades, comme suit

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{1+} + \underline{U}_{1-} \quad \underline{I}_1 = \underline{Y}_{c1}(\underline{U}_{1+} - \underline{U}_{1-}) \quad \underline{U}_2 = \underline{U}_{2+} + \underline{U}_{2-} \quad \underline{I}_2 = -\underline{Y}_{c2}(\underline{U}_{2+} - \underline{U}_{2-}) \tag{3.70}$$

Le quadripôle avec les signaux entrants et sortants est représenté par la figure 3.17.

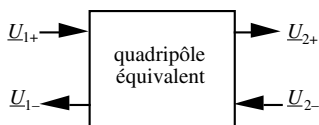


Fig. 3.17 Ondes incidentes et réfléchies aux deux accès d'un quadripôle.

La matrice de réflexion définit les signaux qui sortent des deux accès du quadripôle en fonction des signaux qui entrent dans ces deux accès

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{1-} \\ \underline{U}_{2+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \rho_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{1+} \\ \underline{U}_{2-} \end{bmatrix} \quad [\text{V}] \quad (3.71)$$

Les termes diagonaux (ρ_i) correspondent à des réflexions à l'un des deux accès, les termes hors diagonale (τ_{ij}) à des transmissions d'un accès à l'autre. On peut exprimer ces quatre termes en fonction des impédances ou des admittances – après quelques calculs

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{-(Z_{c2} - Z_{11})(Z_{c1} + Z_{22}) - Z_{12}Z_{21}}{(Z_{c2} + Z_{11})(Z_{c1} + Z_{22}) - Z_{12}Z_{21}} = \frac{(Y_{c1} - Y_{11})(Y_{c2} + Y_{22}) + Y_{12}Y_{21}}{(Y_{c1} + Y_{11})(Y_{c2} + Y_{22}) - Y_{12}Y_{21}} \\ \rho_2 &= \frac{-(Z_{c2} + Z_{11})(Z_{c1} - Z_{22}) - Z_{12}Z_{21}}{(Z_{c2} + Z_{11})(Z_{c1} + Z_{22}) - Z_{12}Z_{21}} = \frac{(Y_{c1} + Y_{11})(Y_{c2} - Y_{22}) + Y_{12}Y_{21}}{(Y_{c1} + Y_{11})(Y_{c2} + Y_{22}) - Y_{12}Y_{21}} \\ \tau_{12} &= \frac{2Z_{c1}Z_{12}}{(Z_{c2} + Z_{11})(Z_{c1} + Z_{22}) - Z_{12}Z_{21}} = \frac{-2Y_{c2}Y_{12}}{(Y_{c1} + Y_{11})(Y_{c2} + Y_{22}) - Y_{12}Y_{21}} \\ \tau_{21} &= \frac{2Z_{c2}Z_{21}}{(Z_{c2} + Z_{11})(Z_{c1} + Z_{22}) - Z_{12}Z_{21}} = \frac{-2Y_{c1}Y_{21}}{(Y_{c1} + Y_{11})(Y_{c2} + Y_{22}) - Y_{12}Y_{21}} \end{aligned} \quad (3.72)$$

La matrice de réflexion d'une ligne de longueur d prend une forme très simple

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{1-} \\ \underline{U}_{2+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e^{-\gamma d} \\ e^{-\gamma d} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{1+} \\ \underline{U}_{2-} \end{bmatrix} \quad [\text{V}] \quad (3.73)$$

L'usage de la matrice de réflexion devient intéressant pour représenter des structures plus complexes qu'une simple ligne de transmission (sect. 3.7).

3.5.10 Graphes orientés ou graphes de fluence

Une façon pratique de représenter les différents signaux transmis et réfléchis est l'emploi des graphes de fluence [25]. On considère un nœud, sur lequel arrive une flèche qui représente le signal incident, et d'où partent deux flèches, qui correspondent respectivement aux signaux transmis (τ_{ij}) et réfléchi (ρ_i) (fig. 3.18).

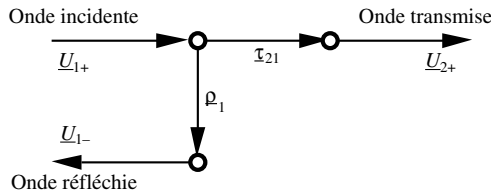


Fig. 3.18 Transmission et réflexion dans un graphe de fluence.

Pour obtenir le signal transmis, on multiplie le signal incident par le facteur τ_{ij} qui correspond à la flèche. De même, le signal réfléchi s'obtient en multipliant par ρ_i . Lorsque plusieurs flèches aboutissent à un nœud, le signal sur le nœud est la somme des signaux qui aboutissent.

Cette représentation graphique sert à déterminer les signaux transmis et réfléchis par des éléments connectés en cascade, en faisant usage de quelques règles simples de composition (fig. 3.19):

- multiplication – deux flèches disposées en série sont remplacées par une seule flèche, le facteur résultant étant le produit des facteurs des deux flèches;
- addition – deux flèches en parallèle et dans le même sens sont remplacées par une seule flèche, le facteur résultant étant la somme des facteurs des deux flèches;
- rétroaction – deux flèches en parallèle, mais *en sens opposé* sont remplacées par une seule flèche, le facteur résultant tenant compte de la boucle de rétroaction.

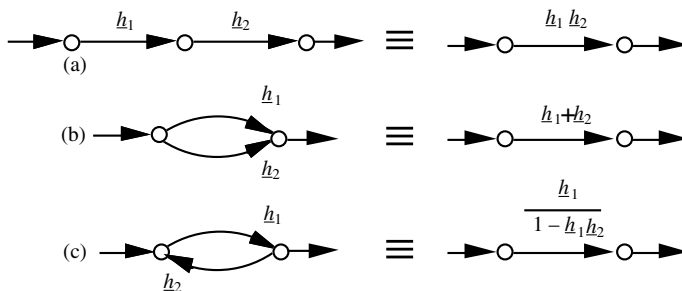


Fig. 3.19 Règles de composition en graphes de fluence: (a) multiplication, (b) addition, (c) rétroaction.

3.5.11 Matrice de répartition

Dans beaucoup d'applications, notamment dans les domaines des hautes fréquences et des hyperfréquences, on choisit de normaliser les tensions des signaux, en les divisant par la racine de l'impédance caractéristique de la ligne – supposée sans pertes – connectée à l'accès du quadripôle [26]. La matrice obtenue de cette façon est appelée *matrice de répartition* (sect. IV.6.3, sect. XIII.6.1), ou matrice $[S]$ (de l'anglais : *scattering matrix*)

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{1-} & \sqrt{Z_{c1}} \\ \underline{U}_{2+} & \sqrt{Z_{c2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} \\ \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{1+} & \sqrt{Z_{c1}} \\ \underline{U}_{2-} & \sqrt{Z_{c2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\rho}_1 & \underline{\tau}_{12} \frac{\sqrt{Z_{c2}}}{\sqrt{Z_{c1}}} \\ \underline{\tau}_{21} \frac{\sqrt{Z_{c1}}}{\sqrt{Z_{c2}}} & \underline{\rho}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{1+} & \sqrt{Z_{c1}} \\ \underline{U}_{2-} & \sqrt{Z_{c2}} \end{bmatrix} \quad [W^{1/2}] \quad (3.74)$$

Les dimensions des signaux sont ici des racines de puissances: les modules carrés fournissent directement les puissances transportées par les différents signaux. Les termes \underline{S}_{ij} de la matrice de répartition sont liés aux termes de la matrice de réflexion, comme suit

$$\underline{S}_{11} = \underline{\rho}_1 \quad \underline{S}_{12} = \underline{\tau}_{12} \frac{\sqrt{Z_{c2}}}{\sqrt{Z_{c1}}} \quad \underline{S}_{21} = \underline{\tau}_{21} \frac{\sqrt{Z_{c1}}}{\sqrt{Z_{c2}}} \quad \underline{S}_{22} = \underline{\rho}_2 \quad [-] \quad (3.75)$$

Lorsque les deux lignes de transmission ont la même impédance caractéristique, la matrice de répartition est identique à la matrice de réflexion. On peut aussi faire usage des graphes orientés (§ 3.5.10) pour représenter les composantes de la matrice de répartition.

3.6 CAS PARTICULIER: LIGNE SANS PERTES

Dans le cas idéal où la propagation sur une ligne s'effectue sans affaiblissement, l'exposant de propagation devient purement imaginaire et l'impédance caractéristique est réelle. Les fonctions hyperboliques de variables complexes deviennent alors des fonctions trigonométriques de variables réelles.

3.6.1 Facteur de réflexion

Le facteur de réflexion (3.57) sur une ligne sans pertes prend la forme suivante

$$\underline{\rho}(z) = (\underline{U}_- / \underline{U}_+) e^{+2j\beta z} = \underline{\rho}(0) e^{+2j\beta z} \quad [-] \quad (3.76)$$

Son module ne dépend pas de la position, mais sa phase varie linéairement avec z . Un déplacement sur la ligne entraîne une rotation du phaseur $\underline{\rho}(z)$ autour de l'origine du plan complexe (fig. 3.20), un déplacement Δz produisant une rotation de $2\beta\Delta z$ radians.

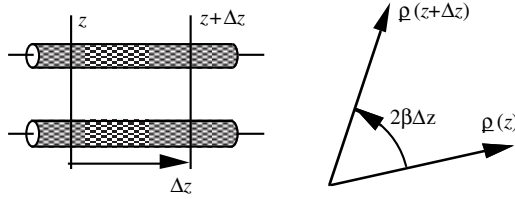


Fig. 3.20 Effet d'un déplacement le long de la ligne sur le facteur de réflexion.

Quand l'angle de rotation vaut 2π , le phaseur $\underline{\rho}(z)$ effectue un tour complet dans le plan complexe, revenant au point de départ. Il en résulte une périodicité en $\lambda/2$

$$\underline{\rho}(z \pm n\lambda/2) = \underline{\rho}(z) \quad \text{avec} \quad \lambda = 2\pi/\beta \quad \text{où } n \text{ est un nombre entier} \quad (3.77)$$

La tension (3.16), le courant (3.28) et la puissance active (3.31) sont donnés par

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_+ e^{-j\beta z} [1 + \underline{\rho}(z)] \quad [\text{V}] \quad (3.78)$$

$$\underline{I}(z) = \underline{Y}_c \underline{U}_+ e^{-j\beta z} [1 - \underline{\rho}(z)] \quad [\text{A}] \quad (3.79)$$

$$P(z) = \text{Re}[\underline{U}(z)\underline{I}^*(z)] = Y_c \left[|\underline{U}_+|^2 - |\underline{U}_-|^2 \right] = Y_c |\underline{U}_+|^2 \left[1 - |\underline{\rho}(0)|^2 \right] \quad [\text{W}] \quad (3.80)$$

Les allures de la tension et du courant le long de la ligne de transmission sont représentées à la figure 3.21 pour le cas particulier $|\underline{\rho}| = 0,5$.

La puissance active reste constante le long de la ligne, donnée par la superposition de la puissance de l'onde progressive, avec un signe positif, et de celle de l'onde réfléchie, avec un signe négatif. Le terme croisé, qui contient le produit des deux tensions, devient ici purement imaginaire et contribue uniquement à la puissance réactive $Q(z)$, qui indique la présence de concentrations locales d'énergie.

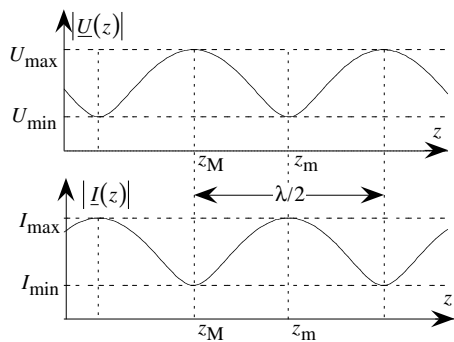


Fig. 3.21 Tension et courant sur une ligne sans pertes.

3.6.2 Ondes stationnaires

La superposition d'une onde progressive et d'une onde rétrograde produit une onde stationnaire. Les termes dans les parenthèses de (3.78) et (3.79) sont donnés par la somme de deux phaseurs, le premier fixe et unitaire, le second tournant (fig. 3.22).

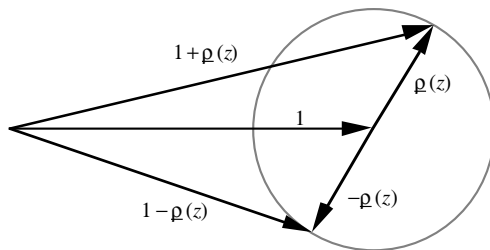


Fig. 3.22 Représentation graphique de $1 + \underline{\rho}(z)$ et de $1 - \underline{\rho}(z)$.

L'amplitude des phaseurs résultants est donnée par

$$|1 \pm \underline{\rho}(z)| = \sqrt{[1 \pm \rho_0 \cos(2\beta z + \varphi_\rho)]^2 + \rho_0^2 \sin^2(2\beta z + \varphi_\rho)} = \sqrt{1 + \rho_0^2 \pm 2\rho_0 \cos(2\beta z + \varphi_\rho)} \quad [-] \quad (3.81)$$

avec $\underline{\rho}(0) = \rho_0 e^{j\varphi_\rho}$. Ces expressions passent par les extrema suivants

$$\text{en } z_M = \left(\frac{n}{2} - \frac{\varphi_\rho}{4\pi}\right)\lambda \quad |\underline{U}(z_M)| = |\underline{U}_+|(1 + \rho_0) = U_{\max} \quad |\underline{I}(z_M)| = Y_c |\underline{U}_+|(1 - \rho_0) = I_{\min} \quad (3.82)$$

$$\text{en } z_m = \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\varphi_\rho}{4\pi}\right)\lambda \quad |\underline{U}(z_m)| = |\underline{U}_+|(1 - \rho_0) = U_{\min} \quad |\underline{I}(z_m)| = Y_c |\underline{U}_+|(1 + \rho_0) = I_{\max} \quad (3.83)$$

où n est un nombre entier quelconque. On constate que lorsque la tension est maximale (en z_M), le courant passe par un minimum, et vice-versa en z_m .

3.6.3 Rapport d'ondes stationnaires

Le quotient de la tension maximale par la tension minimale est appelé *rapport d'ondes stationnaires* s ou ROS – anciennement taux d'ondes stationnaires, ou TOS, en anglais, SWR = *standing wave ratio*, ou VSWR = *voltage standing wave ratio*

$$s = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{|\underline{U}_+ + \underline{U}_-|}{|\underline{U}_+ - \underline{U}_-|} = \frac{1 + |\underline{\rho}|}{1 - |\underline{\rho}|} \quad (3.84)$$

On a implicitement supposé que $|\underline{U}_+| > |\underline{U}_-|$, c'est-à-dire que l'onde rétrograde est de plus faible amplitude que l'onde progressive. Dans ce cas, le ROS varie entre 1 (absence d'onde rétrograde) et ∞ (deux ondes de même amplitude). Lorsqu'on connaît le ROS, on peut en déduire le module du facteur de réflexion (mais non sa phase)

$$|\underline{\rho}| = \frac{s-1}{s+1} \quad (3.85)$$

Le ROS définit l'amplitude de la réflexion, c'est une grandeur souvent utilisée dans la pratique pour spécifier des composants.

Des ouvrages et articles britanniques définissent le SWR par le rapport inverse U_{\min}/U_{\max} , entre 0 et 1 [27]. Comme le module du facteur de réflexion $|\underline{\rho}|$ varie aussi entre 0 et 1, des confusions entre ces deux grandeurs sont alors possibles.

Dans la réalité, les lignes présentent toujours des pertes, qui sont suffisamment faibles dans beaucoup de situations pratiques pour qu'on puisse les négliger en première approximation. Le ROS est alors utilisé même si, strictement parlant, il s'agit d'un concept défini pour une ligne sans pertes.

3.6.4 Mesures à la ligne fendue

On détermine l'amplitude et la phase de l'onde réfléchie en prélevant une partie du signal avec une sonde qui se déplace le long de la ligne. Le signal capté par la sonde sert à déterminer les maxima et minima de tension, ainsi que le ROS. La ligne de transmission doit être ouverte, au moins localement, pour permettre d'insérer et de déplacer la sonde, et la longueur de mesure doit s'étendre au moins sur une demi-longueur d'onde. Le couplage de la sonde doit être très faible, pour ne pas perturber les signaux sur la ligne. Cette méthode est utilisée en hyperfréquences (sect. XIII.7.2) et en acoustique (§ XXI.4.3.11).

3.6.5 Matrice d'impédance

Sur une ligne de transmission sans pertes, on remplace partout $\underline{\gamma}$ par $j\beta$, de sorte que les fonctions hyperboliques du paramètre complexe $\underline{\gamma}$ deviennent des fonctions trigonométriques de la variable réelle β , comme suit

$$\cosh(\underline{\gamma}z) = \cosh(j\beta z) = \cos(\beta z) \quad \text{et} \quad \sinh(\underline{\gamma}z) = \sinh(j\beta z) = j \sin(\beta z) \quad (3.86)$$

La matrice d'impédance (3.64) d'une ligne sans pertes est donnée par

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = -jZ_c \begin{bmatrix} \cotan(\beta d) & 1/\sin(\beta d) \\ 1/\sin(\beta d) & \cotan(\beta d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

Tous les termes de la matrice sont purement imaginaires.

3.6.6 Matrice d'admittance

De même, la matrice d'admittance (3.65) devient pour une ligne sans pertes

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = jY_c \begin{bmatrix} -\cotan(\beta d) & 1/\sin(\beta d) \\ 1/\sin(\beta d) & -\cotan(\beta d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

3.6.7 Matrice de chaîne

La matrice de chaîne pour une ligne (3.68) sans pertes est ensuite donnée par (3.68)

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta d) & -jZ_c \sin(\beta d) \\ -jY_c \sin(\beta d) & \cos(\beta d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

Les termes sur la diagonale sont réels, et les autres sont purement imaginaires.

3.6.8 Schémas équivalents

Les schémas équivalents en T et en Π (fig. 3.16), qui représentent un tronçon de ligne sans pertes de longueur d , sont donnés à la figure 3.23.

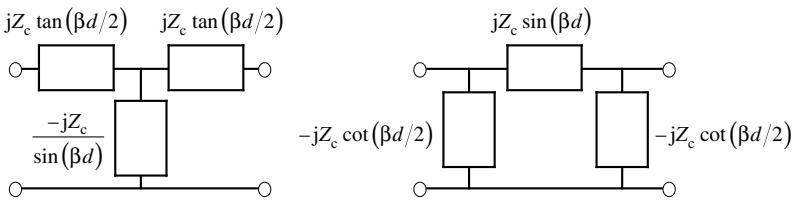


Fig. 3.23 Schémas équivalents d'un tronçon de ligne de transmission sans pertes (toutes les valeurs indiquées sont des impédances).

Les composants des deux schémas équivalents sont tous purement réactifs, définis par des impédances ou des admittances purement imaginaires. L'adjonction d'une composante résistive dans un des schémas introduirait une dissipation, qui ne peut pas exister sur une ligne de transmission sans pertes.

3.6.9 Remarques

Dans la réalité, un conducteur possède toujours une résistance non nulle, et une partie du signal est donc transformée en chaleur: une ligne strictement sans pertes n'est pas réalisable. On peut se rapprocher du cas idéal non dissipatif en faisant usage d'un métal supraconducteur, qu'il faut toutefois refroidir à une température de l'ordre de quelques Kelvins. L'apparition récente de céramiques supraconductrices à "haute température" peut considérablement étendre les domaines d'application de la supraconductivité, car il n'est plus nécessaire de les refroidir à des températures aussi basses [28].

Les pertes sont souvent très petites et peuvent être négligées – en première approximation. On fait une étude préliminaire avec un système sans pertes, puis on évalue approximativement l'effet des pertes avec une méthode de perturbation (sect. XIII.2.7).

3.7 CAS PARTICULIER: CONNEXION DE DEUX LIGNES

3.7.1 Description de la structure

On considère la mise en cascade de deux lignes de transmission dont les caractéristiques de propagation sont différentes (fig. 3.24). On admet ici qu'il n'y a pas de composant connecté – en parallèle ou en série – dans le plan de la jonction.

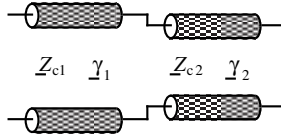


Fig. 3.24 Connexion de deux lignes de transmission différentes.

3.7.2 Continuité des courants et des tensions

On considère en premier lieu un signal incident \underline{U}_{1+} provenant de la gauche (côté 1) tandis que la ligne de droite s'étend jusqu'à l'infini et qu'aucun signal ne vient de ce côté-là ($\underline{U}_{2-} = 0$). On exprime la continuité de la tension et du courant par

$$\underline{U}_{1+} + \underline{U}_{1-} = \underline{U}_{2+} \quad \text{et} \quad \underline{Y}_{c1}(\underline{U}_{1+} - \underline{U}_{1-}) = \underline{Y}_{c2} \underline{U}_{2+} \quad (3.90)$$

Introduisant les facteurs de réflexion et de transmission de (3.71), on obtient

$$1 + \rho_1 = \tau_{21} \quad \text{et} \quad 1 - \rho_1 = \tau_{21}(\underline{Y}_{c2}/\underline{Y}_{c1}) = \tau_{21}(\underline{Z}_{c1}/\underline{Z}_{c2}) \quad [-] \quad (3.91)$$

d'où l'on extrait

$$\rho_1 = \frac{\underline{Z}_{c2} - \underline{Z}_{c1}}{\underline{Z}_{c2} + \underline{Z}_{c1}} \quad \text{et} \quad \tau_{21} = \frac{2\underline{Z}_{c2}}{\underline{Z}_{c2} + \underline{Z}_{c1}} \quad [-] \quad (3.92)$$

On considère ensuite un signal incident \underline{U}_{2-} provenant de la droite (côté 2) et on procède de la même manière, ce qui revient à intervertir les indices.

3.7.3 Matrice de réflexion

La matrice de réflexion (3.71) qui correspond à la connexion de deux lignes est

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{1-} \\ \underline{U}_{2+} \end{bmatrix} = \frac{1}{\underline{Z}_{c2} + \underline{Z}_{c1}} \begin{bmatrix} \underline{Z}_{c2} - \underline{Z}_{c1} & 2\underline{Z}_{c1} \\ 2\underline{Z}_{c2} & \underline{Z}_{c1} - \underline{Z}_{c2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{1+} \\ \underline{U}_{2-} \end{bmatrix} \quad [\text{V}] \quad (3.93)$$

3.7.4 Matrice de répartition

On trouve similairement la matrice de répartition à l'aide de (3.74)

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{1-} \sqrt{\underline{Z}_{c1}} \\ \underline{U}_{2+} \sqrt{\underline{Z}_{c2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\underline{Z}_{c2} + \underline{Z}_{c1}} \begin{bmatrix} \underline{Z}_{c2} - \underline{Z}_{c1} & 2\sqrt{\underline{Z}_{c1}\underline{Z}_{c2}} \\ 2\sqrt{\underline{Z}_{c1}\underline{Z}_{c2}} & \underline{Z}_{c1} - \underline{Z}_{c2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{1+} \sqrt{\underline{Z}_{c1}} \\ \underline{U}_{2-} \sqrt{\underline{Z}_{c2}} \end{bmatrix} \quad [\text{W}^{1/2}] \quad (3.94)$$

3.8 EXERCICES

3.8.1 Est-il possible de déterminer la puissance dans le domaine temporel $p(z,t)$ transmise par un signal sinusoïdal en fonction de la puissance complexe $\underline{S}(z)$?

3.8.2 Déterminer l'affaiblissement, en Népers et en décibels, qui correspond à une réduction de la puissance du signal par un facteur de 100 000. Indiquer également quel est le rapport des tensions.

3.8.3 Étudier la propagation sur des lignes dont les schémas équivalents (pour des longueurs infinitésimales de ligne dz) sont donnés ci-après.

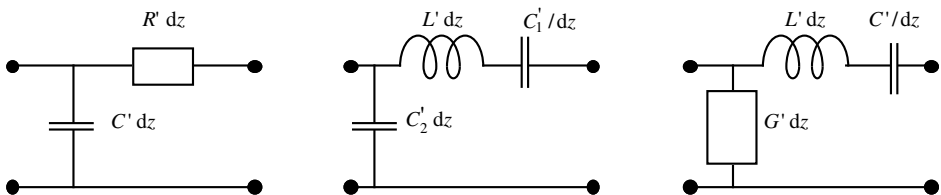


Fig. 3.25 Schémas équivalents de sections infinitésimales de lignes.

Déterminer dans chaque cas l'exposant de propagation, l'impédance caractéristique, les vitesses de phase et de groupe, en fonction de la pulsation ω .

3.8.4 Une ligne de transmission sans pertes peut-elle avoir un exposant de propagation qui soit purement réel ? Pour quelles structures peut-on rencontrer une telle situation ? Que devient dans ce cas l'impédance caractéristique de la ligne, et une telle ligne peut-elle transporter une puissance active ?

3.8.5 Pour quelles situations la vitesse de groupe sur une ligne avec pertes est-elle indépendante de la fréquence ? Donner l'affaiblissement et l'impédance caractéristique.

3.8.6 Déterminer l'exposant de propagation d'une ligne de transmission hypothétique définie par une impédance linéique en série de $\underline{Z}' = j(\omega - \omega_0)L'$ et une impédance linéique en parallèle de $\underline{Y}' = j\omega C'$, où ω_0 , L' et C' sont des constantes.

3.8.7 Déterminer le module du facteur de réflexion ρ et les valeurs maximales et minimales prises par la tension et le courant sur une ligne de transmission lorsque son impédance caractéristique vaut 50Ω , l'amplitude (valeur efficace) de l'onde incidente est de 10 V et les rapport d'onde stationnaire (ROS) est de 3.

3.8.8 Une ligne de transmission sans pertes a une impédance caractéristique de 50Ω . On demande de déterminer les matrices d'impédance, d'admittance et de chaîne, puis de dessiner les schémas équivalents en T et en Π pour les longueurs de ligne suivantes

$$d = 0,01 \lambda \quad d = 0,1 \lambda \quad d = 0,25 \lambda \quad d = 0,4 \lambda \quad d = 0,5 \lambda \quad d = 0,6 \lambda \quad d = \lambda.$$

Commenter les résultats obtenus.

3.8.9 On connecte une ligne de transmission dont l'impédance caractéristique vaut 75Ω à une autre ligne qui a une impédance caractéristique de 50Ω . Déterminer les facteurs de réflexion et de transmission, ainsi que la matrice de répartition. Quels sont les pourcentages de puissance réfléchis et transmis ?

TERMINAISONS ET ADAPTATION

En réalité, une ligne a toujours une longueur finie, et la présence de terminaisons à ses deux extrémités impose des conditions supplémentaires à la tension et au courant. Les ondes progressive et rétrograde deviennent respectivement onde incidente et onde réfléchie, liées par la condition à la terminaison. Le quotient des tensions des deux ondes définit le facteur de réflexion, celui de la tension par le courant donne l'impédance. Ces deux grandeurs sont déterminées par la terminaison, et varient le long de la ligne. En tenant compte des caractéristiques du générateur, on détermine le transfert de puissance, que l'on optimise au moyen de différents types d'adaptations.

4.1 LIGNE AVEC TERMINAISON

4.1.1 Facteur de réflexion d'une terminaison

Une ligne de transmission se termine en $z = d$ aux bornes d'un récepteur, ou terminaison, spécifié par son impédance \underline{Z}_t (fig. 4.1).

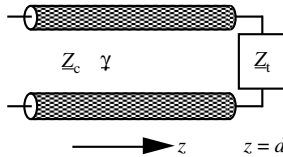


Fig. 4.1 Ligne de transmission terminée par un récepteur.

Contrairement au cas du paragraphe 2.5.1, la terminaison peut ici correspondre à une impédance linéaire arbitraire, formée de résistances, de capacités et d'inductances. On admet qu'elle soit passive, avec la partie réelle de \underline{Z}_t positive ou nulle. La tension en bout de ligne ($z = d$) s'applique aux bornes de la terminaison, et le courant la traverse – ces grandeurs sont continues. L'impédance en $z = d$ doit être égale à celle de la terminaison

$$\underline{Z}(d) = \underline{Z}_t = \frac{\underline{U}(d)}{\underline{I}(d)} = \frac{\underline{U}_+ e^{-\gamma d} [1 + \underline{\rho}(d)]}{\underline{Y}_c \underline{U}_+ e^{-\gamma d} [1 - \underline{\rho}(d)]} = \underline{Z}_c \frac{1 + \underline{\rho}(d)}{1 - \underline{\rho}(d)} = \underline{Z}_c \frac{1 + \underline{\rho}_t}{1 - \underline{\rho}_t} \quad [\Omega] \quad (4.1)$$

On tire de cette relation le facteur de réflexion de la terminaison $\underline{\rho}_t = \underline{\rho}(d)$

$$\underline{\rho}_t = \underline{\rho}(d) = \frac{\underline{Z}_t - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_t + \underline{Z}_c} = \underline{\rho}(0) e^{2\gamma d} \quad [-] \quad (4.2)$$

4.1.2 Facteur de réflexion et impédance localisée

Connaissant le facteur de réflexion à l'extrémité de la ligne $z = d$, on détermine sa valeur en tout point z le long de la ligne

$$\underline{\rho}(z) = \underline{\rho}(0)e^{2\gamma z} = \frac{\underline{Z}_t - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_t + \underline{Z}_c} e^{2\gamma(z-d)} \quad [-] \quad (4.3)$$

L'impédance localisée est alors obtenue à l'aide de l'équation (3.61)

$$\underline{Z}(z) = \underline{Z}_c \frac{1 + \underline{\rho}(z)}{1 - \underline{\rho}(z)} = \underline{Z}_c \frac{(\underline{Z}_t + \underline{Z}_c) + (\underline{Z}_t - \underline{Z}_c)e^{2\gamma(z-d)}}{(\underline{Z}_t + \underline{Z}_c) - (\underline{Z}_t - \underline{Z}_c)e^{2\gamma(z-d)}} = \underline{Z}_c \frac{\underline{Z}_t - \underline{Z}_c \tanh[\underline{\gamma}(z-d)]}{\underline{Z}_c - \underline{Z}_t \tanh[\underline{\gamma}(z-d)]} \quad [\Omega] \quad (4.4)$$

L'impédance localisée en fonction de la position z le long de la ligne est donnée par une relation qui comporte des fonctions hyperboliques d'arguments complexes. Pour une ligne sans pertes, les fonctions hyperboliques deviennent des fonctions trigonométriques, mais l'expression résultante reste complexe

$$\underline{Z}(z) = \underline{Z}_c \frac{\underline{Z}_t - j\underline{Z}_c \tan[\beta(z-d)]}{\underline{Z}_c - j\underline{Z}_t \tan[\beta(z-d)]} \quad [\Omega] \quad (\text{ligne sans pertes}) \quad (4.5)$$

4.1.3 Terminaison adaptée sans réflexion

Quand $\underline{Z}_t = \underline{Z}_c$, on a $\underline{\rho}(z) = 0$ et il n'y a pas d'onde réfléchie: tout le signal incident est absorbé par la terminaison. Il s'agit d'une *adaptation sans réflexion*, ou *adaptation au sens des lignes* (§ 4.4.2). C'est la situation idéale qu'on cherche à réaliser en haute fréquence. Pour une ligne sans pertes, le rapport d'onde stationnaire (ROS) vaut 1.

4.1.4 Court-circuit

La tension aux bornes d'un court-circuit est nulle, de sorte que son impédance vaut $\underline{Z}_t = 0$, ce qui entraîne par (4.2) que $\underline{\rho}(d) = -1$. Dans ce cas, l'onde réfléchie par la terminaison a la même amplitude que l'onde incidente, il s'agit d'une situation de *réflexion totale*, avec deux ondes de polarités opposées. Le facteur de réflexion et l'impédance localisée le long de la ligne sont donnés par

$$\underline{\rho}(z) = -e^{2\gamma(z-d)} \quad [-] \quad (4.6)$$

$$\underline{Z}(z) = -\underline{Z}_c \tanh[\underline{\gamma}(z-d)] \quad [\Omega] \quad (4.7)$$

Si la ligne est sans pertes, le rapport d'onde stationnaire (ROS) est égal à ∞ .

4.1.5 Ligne ouverte

Pour l'autre cas limite, le courant aux bornes d'une ligne ouverte est nul, correspondant à une impédance infinie $\underline{Z}_t = \infty$, et entraînant par (4.2) que $\underline{\rho}(d) = +1$. Dans ce cas, l'onde réfléchie par la terminaison est de même amplitude et de même polarité que l'onde incidente, et on a également une situation de *réflexion totale*. Le long de la ligne, le facteur de réflexion et l'impédance localisées deviennent

$$\underline{\rho}(z) = e^{2\gamma(z-d)} \quad [-] \quad (4.8)$$

$$\underline{Z}(z) = -\underline{Z}_c \coth[\gamma(z-d)] \quad [\Omega] \quad (4.9)$$

Si la ligne est sans pertes, le rapport d'onde stationnaire (ROS) est égal à ∞ .

4.1.6 Terminaison réactive

Une terminaison purement réactive, formée exclusivement de capacités et d'inductances ne peut pas absorber de puissance, et réfléchit par conséquent le signal incident. Son impédance est imaginaire $\underline{Z}_t = jX_t$. Si l'impédance caractéristique de la ligne est réelle, le module du facteur de réflexion vaut 1 et, pour une ligne sans pertes, le ROS est égal à ∞ .

4.1.7 Constataion

Quand une ligne présente des pertes, le module du facteur de réflexion diminue lorsqu'on s'éloigne de la terminaison (fig. 3.13). Si la ligne est suffisamment longue, il devient même négligeable. L'effet des réflexions s'estompe et l'impédance à l'entrée de la ligne se rapproche de l'impédance caractéristique de la ligne. On n'a pas de réflexions multiples, mais le générateur doit fournir une puissance plus importante afin que le signal qui atteint le récepteur soit détectable et utilisable.

Au contraire, quand les pertes sur la ligne sont faibles, le signal réfléchi ne décroît que lentement et retourne au générateur. Un régime de réflexions multiples peut s'établir (§ 2.6.2), qui peut détériorer la qualité de la transmission. La situation la plus défavorable est obtenue dans le cas limite d'une ligne sans pertes. Dans la mesure du possible, on évite cette situation en adaptant la terminaison à la ligne (sect. 4.4).

4.2 ABAQUE DE SMITH

Le "problème standard" que l'on rencontre le plus souvent en pratique est la détermination de l'impédance à l'entrée d'une ligne, fournie par une relation qui comporte des fonctions hyperboliques d'arguments complexes (4.4 ou 4.5). Avant l'avènement des ordinateurs, les calculs complexes étaient très laborieux et pour simplifier la procédure Philip Smith mit au point en 1945 une méthode graphique [29]. On considère le plan complexe de $\underline{\rho}$, dans lequel on projette le système de coordonnées du plan complexe de l'impédance normalisée $\underline{Z}(z)/\underline{Z}_c$. On peut ainsi tirer profit de la propriété de rotation de $\underline{\rho}$, qui correspond à une translation le long d'une ligne sans pertes (fig. 3.20).

4.2.1 Transformation conforme

La relation (3.62) représente une transformation conforme, que l'on peut développer de la manière suivante

$$\underline{\rho}(z) = \frac{\underline{Z}(z) - \underline{Z}_c}{\underline{Z}(z) + \underline{Z}_c} = \frac{\underline{Z}(z)/\underline{Z}_c - 1}{\underline{Z}(z)/\underline{Z}_c + 1} = 1 - \frac{2}{\underline{Z}(z)/\underline{Z}_c + 1} \quad [-] \quad (4.10)$$

La transformation est formée successivement d'une translation, d'une inversion et d'une seconde translation. Ces trois opérations conservent les angles et les cercles, si l'on admet qu'une droite est un cercle qui passe par le point à l'infini. Un réseau de lignes orthogonales dans le plan $\underline{Z}(z)/\underline{Z}_c$ devient un réseau de lignes orthogonales dans le plan $\underline{\rho}$ et vice-versa.

On considère tout d'abord les trois terminaisons des paragraphes 4.1.3 à 4.1.5, puis les terminaisons purement résistives et purement réactives (axes réel et imaginaire), et on en déduit que le demi-plan de droite de $\underline{Z}(z)/\underline{Z}_c$ est projeté sur l'intérieur du cercle unité du plan $\underline{\rho}$ (tab. 4.2 et fig. 4.3).

Tableau 4.2 Transformation du plan $\underline{Z}/\underline{Z}_c$ dans le plan $\underline{\rho}$.

Terminaison adaptée (AD)	$\underline{Z}/\underline{Z}_c = 1$	$\underline{\rho} = 0$	Centre de l'abaque (plan $\underline{\rho}$)
Court-circuit (CC)	$\underline{Z}/\underline{Z}_c = 0$	$\underline{\rho} = -1$	Point à gauche de l'abaque
Ligne ouverte (LO)	$\underline{Z}/\underline{Z}_c = \infty$	$\underline{\rho} = 1$	Point à droite de l'abaque
Axe réel	$\underline{Z}/\underline{Z}_c = \xi$	$\underline{\rho} = a = 1 - 2/(1 + \xi)$	Axe réel avec $-1 \leq a \leq 1$
Axe imaginaire	$\underline{Z}/\underline{Z}_c = j\zeta$	$\underline{\rho} = (j\zeta - 1)/(j\zeta + 1)$,	Cercle unité $ \underline{\rho} = 1$

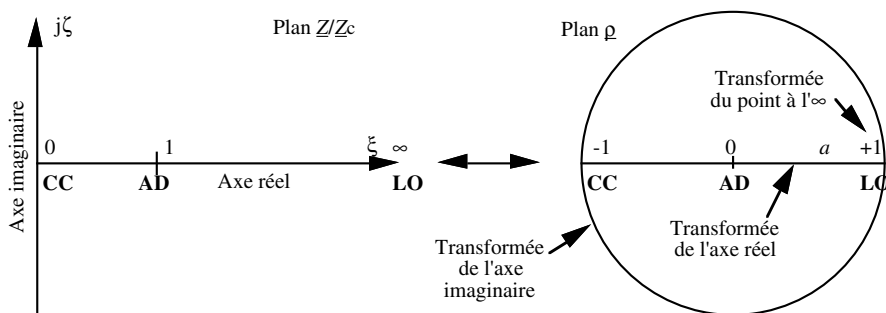


Fig. 4.3 Transformations des axes réel et imaginaire du plan $\underline{Z}/\underline{Z}_c$.

4.2.2 Équations des principales courbes

De façon plus générale, on cherche les courbes qui correspondent, dans le plan $\underline{\rho}$, aux horizontales et aux verticales du plan des impédances normalisées $\underline{Z}(z)/\underline{Z}_c$. On développe ce quotient en définissant ses parties réelle ξ et imaginaire ζ de la manière suivante

$$\underline{Z}(z)/\underline{Z}_c = \xi + j\zeta \quad [-] \quad \text{et} \quad \underline{\rho} = a + jb \quad [-] \quad (4.11)$$

On introduit ces expressions dans l'équation (4.10) et on la développe en éliminant respectivement ξ et ζ , ce qui donne après quelques calculs les équations des deux familles de cercles $\xi = \text{cste}$, et $\zeta = \text{cste}$, dans le plan $\underline{\rho}$, qui forment l'abaque de Smith (fig. 4.4)

$$\left(a - \frac{\xi}{\xi + 1} \right)^2 + b^2 = \left(\frac{1}{\xi + 1} \right)^2 \quad [-] \quad (4.12)$$

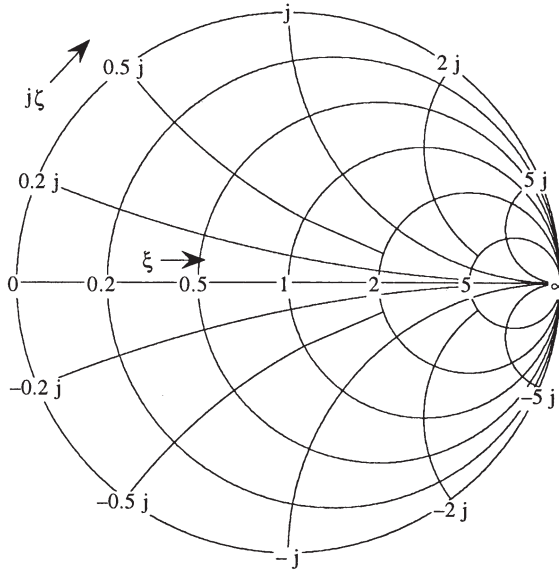


Fig. 4.4 Abaque de Smith.

Les lignes verticales ($\xi = \text{cste}$) du plan $\underline{Z}(z)/\underline{Z}_c$ deviennent des cercles de rayon $1/(\xi + 1)$, dont le centre est situé sur l'axe réel au point $\xi/(\xi + 1)$. Les deux intersections du cercle avec l'axe réel se situent en $(\xi - 1)/(\xi + 1)$ et en $+1$.

$$(a-1)^2 + \left(b - \frac{1}{\zeta}\right)^2 = \left(\frac{1}{\zeta}\right)^2 \quad [-] \quad (4.13)$$

Les lignes horizontales ($\zeta = \text{cste}$) du plan $\underline{Z}(z)/\underline{Z}_c$ deviennent des cercles de rayon $1/\zeta$, dont le centre est situé au point $(1 + j/\zeta)$. Tous les cercles passent par le point $+1$, qui est la transformée du point à l'infini du plan $\underline{Z}(z)/\underline{Z}_c$.

En traçant ces deux familles de courbes, respectivement les transformées des lignes verticales et horizontales du plan $\underline{Z}(z)/\underline{Z}_c$, on obtient l'abaque de Smith (fig. 4.4). On a ainsi réalisé une bijection du plan complexe des impédances normalisées sur le plan complexe du facteur de réflexion.

L'abaque de Smith permet d'effectuer sur le même graphique des opérations portant sur des impédances (§ 4.2.3), sur des admittances (§ 4.2.4) et bien entendu, sur le facteur de réflexion lui-même.

4.2.3 Application: détermination de l'impédance d'entrée

L'emploi de l'abaque de Smith est ici illustré par un exemple: on désire connaître l'impédance d'entrée du circuit dessiné en haut de la figure 4.5, qui est formé d'une ligne de transmission sans pertes dans laquelle on a connecté en série plusieurs composants, et qui aboutit à une terminaison d'impédance complexe.

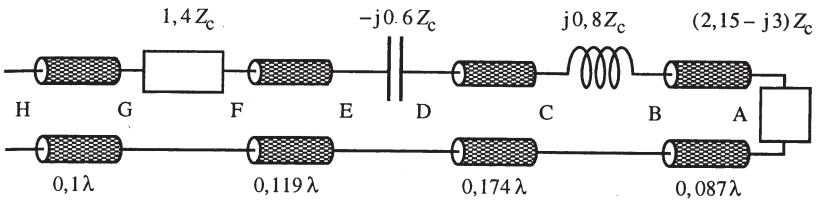
La résolution par calcul nécessiterait plusieurs applications successives de la relation (4.5), une fois pour chaque tronçon de ligne. On détermine d'abord l'impédance d'entrée du tronçon de ligne connecté à la terminaison, auquel on ajoute la réactance série produite par l'inductance. L'impédance ainsi obtenue devient la terminaison du deuxième tronçon de ligne, et une deuxième application de (4.5) donne l'impédance d'entrée de ce tronçon de ligne, et ainsi de suite.

Dans l'abaque de Smith, ces mêmes opérations sont effectuées graphiquement: tout tronçon de ligne produit une rotation autour du centre de l'abaque, l'angle de rotation étant proportionnel au quotient de la longueur du tronçon de ligne par la longueur d'onde. La connexion en série d'une impédance est représentée par l'addition de sa valeur à l'impédance d'entrée du tronçon. Pour une réactance pure, le point caractéristique se déplace ainsi le long d'un cercle $\xi = \text{cste}$, tandis qu'une résistance produit un déplacement le long d'un cercle $\zeta = \text{cste}$.

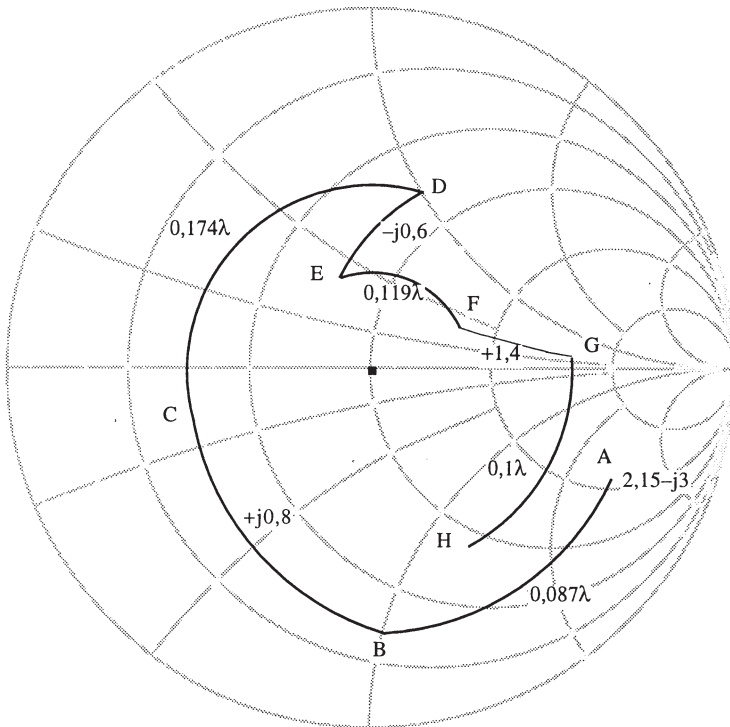
Une première phase du travail consiste à calculer les grandeurs normalisées: les impédances de tous les composants sont divisées par l'impédance caractéristique de la ligne, tandis que les tronçons de ligne sont normalisés par rapport à la longueur d'onde. Les valeurs normalisées sont reportées dans le schéma du haut de la figure 4.5.

Il faut noter que les réactances normalisées et les longueurs normalisées dépendent de la fréquence: lorsqu'on veut déterminer sur une certaine plage de fréquences l'impédance d'entrée d'un circuit formé de tronçons de ligne et de réactances, il faut répéter toute la procédure pour plusieurs fréquences judicieusement choisies. Voici la séquence des opérations pour étudier sur l'abaque de Smith le schéma du haut de la figure 4.5:

- La terminaison connectée à la ligne (à droite) a une impédance $Z_t = (2,15 - j3)Z_c$. Le point qui correspond dans l'abaque est le point A, situé au croisement des cercles $\xi = 2,15$ et $\zeta = -3$.
- Le tronçon de ligne de longueur $0,087 \lambda$ donne dans l'abaque une rotation de $0,087 \cdot 720^\circ = 62,5^\circ$ autour du centre de l'abaque, en direction du générateur (vers les valeurs décroissantes de z), c'est-à-dire dans le sens des aiguilles d'une montre. Le déplacement du point A au point B s'effectue sur un cercle concentrique à l'abaque. L'impédance normalisée au point B se lit sur l'échelle des impédances de l'abaque: $(0,3 - j)$. En multipliant cette valeur par Z_c , on trouve l'impédance d'entrée du tronçon de ligne.
- Il faut ensuite ajouter à cette impédance $j0,8Z_c$, ce qui donne $(0,3 - j0,2)$, les coordonnées du point C. Le passage de B à C se fait le long d'un cercle $\xi = \text{cste}$.
- Le tronçon de ligne entre C et D produit de nouveau une rotation autour du centre de l'abaque, d'un angle $0,174 \cdot 720^\circ = 125,3^\circ$. L'impédance à l'entrée du deuxième tronçon de ligne, au point D, vaut $(0,65 + j)Z_c$.
- L'insertion en série du condensateur ajoute une réactance négative $-j0,6Z_c$, qui amène, sur une courbe $\xi = \text{cste}$, au point E de coordonnées $(0,65 + j0,4)Z_c$.
- La section de ligne entre E et F produit une rotation autour du centre de l'abaque, d'un angle $0,119 \cdot 720^\circ = 85,7^\circ$.
- L'adjonction d'une résistance série entre F et G correspond à un déplacement sur un cercle $\zeta = \text{cste}$ entre les lignes de coordonnées $\xi = 1,6$ et $\xi = 3$.
- Finalement, la section de ligne entre G et H produit une dernière rotation autour du centre de l'abaque, d'un angle $0,1 \cdot 720^\circ = 72^\circ$, et on trouve l'impédance d'entrée de l'ensemble $(0,9 - j1,15)Z_c$.



Composants connectés en série



Composants connectés en parallèle

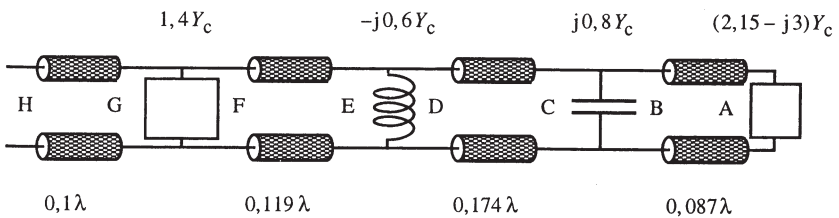


Fig. 4.5 Exemple d'utilisation de l'abaque de Smith.

4.2.4 Abaque de Smith des admittances

Dans beaucoup de situations pratiques, on préfère connecter des éléments en parallèle sur la ligne, et non pas en série. Dans le cas d'une ligne bifilaire, il est recommandé de ne pas couper des conducteurs, afin que des erreurs éventuelles de positionnement n'affectent pas trop la réalisation. Par ailleurs, dans la technologie des lignes microruban [16] et dans celle des guides d'ondes, il est plus facile de réaliser des éléments réactifs connectés en parallèle que des éléments série. Comme les admittances de composants connectés en parallèle s'additionnent, il est préférable d'utiliser des admittances pour faire les calculs.

La transformation qui lie l'admittance, normalisée par rapport à l'admittance caractéristique de la ligne, au facteur de réflexion est donnée par

$$\frac{\underline{Y}(z)}{\underline{Y}_c} = \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}(z)} = \frac{1 - \underline{\rho}(z)}{1 + \underline{\rho}(z)} = \frac{1 + [-\underline{\rho}(z)]}{1 - [-\underline{\rho}(z)]} \quad [-] \quad (4.14)$$

La relation est la même que celle qui donne le rapport des impédances (4.5), si l'on remplace $\underline{\rho}(z)$ par $-\underline{\rho}(z)$. Dans l'abaque de Smith, le point qui correspond à l'admittance normalisée $\underline{Y}(z)/\underline{Y}_c$ est situé symétriquement par rapport au point $\underline{Z}(z)/\underline{Z}_c$ (fig. 4.6).

On peut par conséquent utiliser l'abaque de Smith pour déterminer l'inverse d'un nombre complexe (pour autant que la partie réelle de celui-ci soit positive).

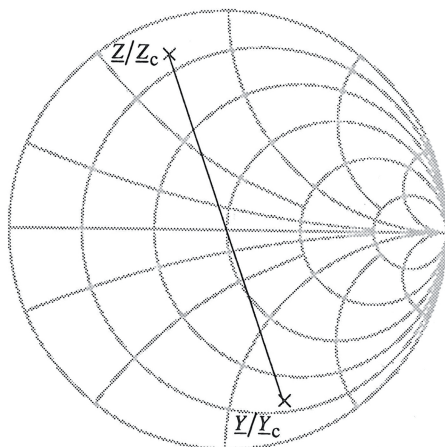


Fig. 4.6 Détermination de l'admittance en fonction de l'impédance.

4.2.5 Exemple d'application de l'abaque de Smith pour les admittances

On désire déterminer l'admittance d'entrée d'une ligne de transmission comportant une capacité, une inductance et une résistance connectées en parallèle, séparées par des tronçons de ligne d'impédance caractéristique Z_c , comme indiqué dans le schéma du bas de la figure 4.5. La procédure à suivre est exactement la même que celle utilisée dans le paragraphe 4.2.2 pour des éléments connectés en série dans l'abaque des impédances, l'abaque des admittances étant simplement le plan $-\underline{\rho}(z)$.

On suit le même cheminement dans l'abaque, (points A à H). Dans ce cas-ci, on commence par introduire dans l'abaque la valeur de l'admittance de la terminaison, on ajoute ensuite les tronçons de lignes et les composants connectés en série, et on trouve l'admittance d'entrée $\underline{Y}_t = (0,9 - j1,15)Y_c$. On détermine ensuite, si nécessaire, l'impédance d'entrée en prenant le point symétrique par rapport au centre de l'abaque (fig. 4.6).

4.2.6 Utilisation mixte de l'abaque de Smith

Il est tout à fait possible d'utiliser le même abaque de Smith pour les impédances et pour les admittances, en faisant usage de la propriété de symétrie énoncée dans le paragraphe 4.2.4. Il s'agit dans ce cas de bien distinguer les points et les lignes qui correspondent à des admittances de ceux qui sont liés à des impédances.

On souhaite ici connaître l'impédance d'entrée d'un circuit en T formé de deux capacités série et d'une inductance parallèle, terminé sur une terminaison d'impédance normalisée $\underline{Z}_t = (2 + j)Z_c$ selon le schéma de la figure 4.7.

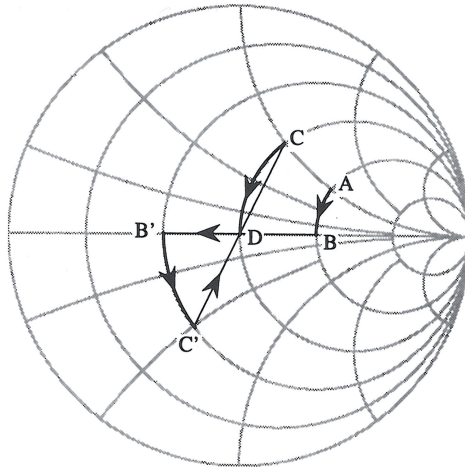


Fig. 4.7 Application mixte de l'abaque de Smith.

- L'impédance de la terminaison vaut $\underline{Z}_t/Z_c = 2 + j$, on reporte le point correspondant en A sur l'abaque des impédances.
- On ajoute une capacité en série, qui correspond à un déplacement le long d'une ligne $\xi = \text{cte}$ dans le diagramme des impédances. Lorsque la réactance capacitive vaut $X/Z_c = -1$, on atteint le point B en $\underline{Z}/Z_c = 2$.
- Comme l'élément suivant doit être connecté en parallèle, on passe dans l'abaque des admittances en prenant le point B', situé vis-à-vis de B, en $\underline{Y}/Y_c = 0,5$. L'indice prime (') est utilisé ici pour indiquer que le point se trouve dans l'abaque des admittances.
- L'adjonction d'une susceptance inductive $B/Y_c = -1$ en parallèle produit un déplacement sur un cercle $\xi' = \text{cte}$ qui amène au point C' en $\underline{Y}/Y_c = 0,5(1 - j)$.

- L'élément suivant doit être connecté en série, et pour ce faire on retourne dans l'abaque des admittances au point C, symétrique de C' par rapport au centre de l'abaque, en $\underline{Z}/Z_c = 1 + j$.
- On ajoute la réactance $X/Z_c = -1$ de la seconde capacité, en procédant de la même façon que pour la première. La valeur indiquée au point D est l'impédance d'entrée du circuit. On constate que, dans ce cas particulier, on a atteint le centre de l'abaque, et donc qu'en connectant trois éléments réactifs on peut supprimer totalement les réflexions. Ce schéma équivalent correspond à un "adaptateur E-H" utilisé en hyperfréquences (§ XIII.6.5.28).

Il faut bien noter ici que les points A, B, C et D représentent des impédances normalisées, tandis que les points B' et C' correspondent à des admittances normalisées, et que tous ces points se trouvent dans le même abaque de Smith. Afin d'éviter des confusions, il faut bien distinguer ces deux situations: on peut, par exemple, utiliser des couleurs différentes pour représenter des impédances et des admittances.

4.2.7 Effet des pertes

On n'a considéré jusqu'ici que des lignes sans pertes, pour lesquelles l'extrémité du phaseur ρ parcourt un cercle dans l'abaque de Smith quand on se déplace sur la ligne. On peut aussi – en principe – utiliser l'abaque pour des lignes ayant des pertes, mais alors le point caractéristique se déplace sur une spirale (fig. 3.13): l'usage de l'abaque perd alors son principal intérêt.

Sur une ligne avec pertes, par ailleurs, le module du facteur de réflexion produit par une terminaison passive peut dépasser l'unité, et il faut par conséquent étendre la surface de l'abaque [30].

Pour étudier une ligne qui présente des pertes importantes, il est préférable de faire appel à l'ordinateur, qui peut traiter de façon rigoureuse la propagation des lignes avec pertes, connecter des éléments en parallèle et en série, et qui peut également considérer la connexion de tronçons de ligne d'impédances différentes [31, 32].

4.2.8 Commentaire

L'abaque de Smith a été mis au point à une époque où l'on ne disposait pas d'ordinateurs, et les moyens graphiques ne fournissent qu'une précision limitée, dépendant de l'habileté du dessinateur. On pourrait donc s'attendre à voir cette représentation graphique tomber en désuétude, remplacée par des moyens informatiques plus performants.

Or on doit constater qu'il n'en est rien, et qu'actuellement les appareils de mesure les plus perfectionnés pour les très hautes fréquences (vol. XIII) affichent leurs résultats sur un abaque de Smith. Beaucoup de logiciels d'analyse et de synthèse font de même.

La représentation graphique du facteur de réflexion sert à "visualiser" le fonctionnement d'un dispositif ou d'un circuit, et il est plus facile de comprendre une image qu'un tableau de chiffres. L'abaque de Smith garde donc un grand intérêt pour l'affichage de résultats dans les applications pratiques, et permet de définir les bases pour la conception d'un circuit, en choisissant la structure la plus adéquate et en fournissant le point de départ des processus sophistiqués d'optimisation à l'ordinateur (§ 4.6.10).

4.3 EFFET DU GÉNÉRATEUR, TRANSFERT DE PUISSANCE

4.3.1 Circuit équivalent

Le générateur, ou source de signal, est connecté à la ligne de transmission dans le plan $z = 0$. On le représente par un modèle linéaire simple de Thévenin (§ I.6.7.9), formé d'une source idéale de tension sinusoïdale \underline{U}_g et d'une impédance interne de générateur \underline{Z}_g connectée en série (fig. 4.8).

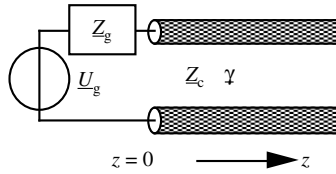


Fig. 4.8 Ligne de transmission connectée au générateur.

4.3.2 Conditions aux limites aux bornes du générateur

La tension et le courant à l'entrée de la ligne, en $z = 0$, doivent satisfaire les conditions aux bornes du générateur

$$\underline{U}(0) = \underline{U}_g - \underline{Z}_g \underline{I}(0) \quad [\text{V}] \quad (4.15)$$

On introduit les expressions de $\underline{U}(0)$ et de $\underline{I}(0)$ définies dans (3.58) et (3.59)

$$\underline{U}_+ [1 + \underline{\rho}(0)] = \underline{U}_g - \underline{Z}_g \underline{Y}_c \underline{U}_+ [1 - \underline{\rho}(0)] \quad [\text{V}] \quad (4.16)$$

d'où l'on tire

$$\underline{U}_+ = \frac{\underline{U}_g}{\underline{Z}_g \underline{Y}_c [1 - \underline{\rho}(0)] + [1 + \underline{\rho}(0)]} = \frac{\underline{U}_g}{2} \frac{1 - \underline{\rho}_g}{1 - \underline{\rho}_g \underline{\rho}_t e^{-2\gamma d}} \quad [\text{V}] \quad (4.17)$$

où $\underline{\rho}_t$ est le facteur de réflexion de la terminaison, défini en (4.2), tandis que $\underline{\rho}_g$ est le facteur de réflexion du générateur, que l'on définit de façon similaire par

$$\underline{\rho}_g = \frac{\underline{Z}_g - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_g + \underline{Z}_c} = \frac{\underline{Y}_c \underline{Z}_g - 1}{\underline{Y}_c \underline{Z}_g + 1} \quad [-] \quad (4.18)$$

4.3.3 Tension et courant le long de la ligne

Connaissant maintenant la constante \underline{U}_+ , on peut exprimer complètement la tension et le courant le long de la ligne

$$\underline{U}(z) = \frac{\underline{U}_g}{2} \frac{(1 - \underline{\rho}_g) [e^{-\gamma z} + \underline{\rho}_t e^{\gamma(z-2d)}]}{1 - \underline{\rho}_g \underline{\rho}_t e^{-2\gamma d}} \quad [\text{V}] \quad (4.19)$$

$$\underline{I}(z) = \frac{Y_c \underline{U}_g}{2} \frac{(1 - \underline{\rho}_g) \left[e^{-\underline{\gamma}z} - \underline{\rho}_t e^{\underline{\gamma}(z-2d)} \right]}{1 - \underline{\rho}_g \underline{\rho}_t e^{-2\underline{\gamma}d}} \quad [\text{A}] \quad (4.20)$$

On peut vérifier qu'on retrouve bien l'impédance de la terminaison en prenant le quotient de la tension et le courant qui atteignent la terminaison en $z = d$.

Les amplitudes et les phases des deux ondes, progressive et rétrograde, dépendent de tous les paramètres suivants:

- du schéma équivalent et des caractéristiques de la ligne de transmission, qui définissent son exposant de propagation $\underline{\gamma}$ et son impédance caractéristique Z_c (ou son admittance caractéristique Y_c);
- de la longueur d de la ligne, généralement normalisée par rapport à la longueur d'onde λ ;
- de la position z le long de la ligne, aussi rapportée à la longueur d'onde λ ;
- de l'impédance Z_t de la terminaison, qui apparaît dans le rapport Z_t/Z_c qui définit le facteur de réflexion $\underline{\rho}_t$;
- de la tension \underline{U}_g et de l'impédance Z_g du générateur, qui apparaît dans le quotient Z_g/Z_c définissant le facteur de réflexion $\underline{\rho}_g$.

Le circuit complet, formé d'une ligne de transmission de longueur d qui connecte un générateur à une terminaison, est représenté schématiquement à la figure 4.9.

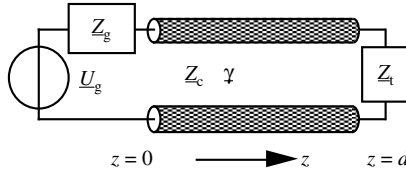


Fig. 4.9 Circuit comportant un générateur, une ligne et une terminaison.

4.3.4 Puissance le long de la ligne

On obtient la puissance complexe sur la ligne de transmission en faisant le produit du phaseur de tension par le complexe conjugué du phaseur de courant:

$$\underline{S}(z) = \underline{U}(z) \underline{I}^*(z) = \frac{Y_c^* |\underline{U}_g|^2}{4} \frac{|1 - \underline{\rho}_g|^2 \left[e^{-2\underline{\alpha}z} - |\underline{\rho}_t|^2 e^{2\underline{\alpha}(z-2d)} + 2j \operatorname{Im} \left\{ \underline{\rho}_t e^{2j\beta z - 2\underline{\gamma}d} \right\} \right]}{|1 - \underline{\rho}_g \underline{\rho}_t e^{-2\underline{\gamma}d}|^2} \quad [\text{VA}] \quad (4.21)$$

Comme précédemment (§ 3.3.3), on constate la présence de trois contributions: celle de l'onde progressive, celle de l'onde rétrograde, et un terme croisé qui contient le produit des deux ondes. Lorsque l'impédance caractéristique est réelle, l'onde progressive transporte une puissance active positive et l'onde rétrograde une puissance active négative. Quand l'impédance caractéristique est imaginaire, seul le dernier terme de (4.21) peut correspondre à une puissance active.

4.3.5 Puissance absorbée par la terminaison

La puissance complexe qui atteint la terminaison en $z = d$ est obtenue à l'aide de la relation (4.21)

$$\underline{S}_t = \underline{U}(d)\underline{I}^*(d) = \frac{\underline{Y}_c^* |\underline{U}_g|^2}{4} \frac{|1 - \underline{\rho}_g|^2 (1 + \underline{\rho}_t) (1 - \underline{\rho}_t^*) e^{-2\alpha d}}{|1 - \underline{\rho}_g \underline{\rho}_t e^{-2\gamma d}|^2} \quad [\text{VA}] \quad (4.22)$$

La terminaison absorbe la puissance active, donnée par la partie réelle de la puissance complexe de l'expression (4.22)

$$P_t = R_t |\underline{I}(d)|^2 = \frac{R_t |\underline{Y}_c|^2 |\underline{U}_g|^2}{4} \frac{|1 - \underline{\rho}_g|^2 |1 - \underline{\rho}_t|^2 e^{-2\alpha d}}{|1 - \underline{\rho}_g \underline{\rho}_t e^{-2\gamma d}|^2} \quad [\text{W}] \quad (4.23)$$

La puissance maximale qu'un générateur peut fournir est sa puissance d'échange

$$P_e = |\underline{U}_g|^2 / (4R_g) \quad [\text{W}] \quad (4.24)$$

On normalise comme suit la puissance active absorbée

$$\frac{P_t}{P_e} = R_g R_t |\underline{Y}_c|^2 \frac{|1 - \underline{\rho}_g|^2 |1 - \underline{\rho}_t|^2 e^{-2\alpha d}}{|1 - \underline{\rho}_g \underline{\rho}_t e^{-2\gamma d}|^2} \quad [-] \quad (4.25)$$

Les facteurs de réflexion peuvent encore être développés en termes des paramètres de la ligne, de la terminaison et du générateur, ce qui donne après quelques calculs

$$\frac{P_t}{P_e} = \frac{4R_g R_t |\underline{Y}_c|^2}{|(\underline{Z}_g \underline{Z}_t \underline{Y}_c^2 + 1) \sinh(\gamma d) + (\underline{Z}_g + \underline{Z}_t) \underline{Y}_c \cosh(\gamma d)|^2} \quad [-] \quad (4.26)$$

La figure 4.10 présente ce rapport, en fonction de la longueur électrique βd pour une ligne sans pertes et des impédances de générateur et de terminaison purement réelles.

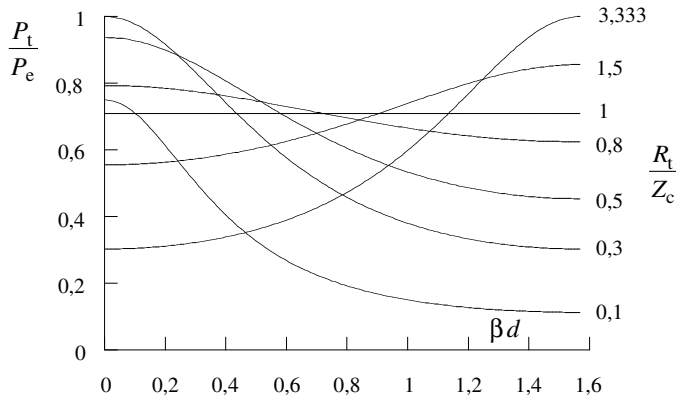


Fig. 4.10 Transfert de puissance pour un cas particulier.

La figure 4.10 considère un générateur mal adapté à la ligne ($R_g/Z_c = 0,3$), avec comme paramètre l'impédance de la terminaison, normalisée par rapport à la ligne R_t/Z_c . Pour ce cas particulier, on obtient le transfert maximum de puissance $P_t = P_e$ lorsque R_t/Z_c vaut aussi 0,3 et $\beta d = 0$ (ou $\pm 2n\pi$). Une autre possibilité de transfert maximum apparaît pour la situation symétrique où $R_t/Z_c = 1/0,3 = 3,333\dots$ et $\beta d = \pi/2$. D'autre part, le transfert de puissance est indépendant de βd lorsque $R_t/Z_c = 1$.

Une analyse plus approfondie du transfert de puissance, avec des impédances complexes quelconques et des pertes sur la ligne, fait appel à beaucoup de paramètres et par conséquent, il est difficile de représenter les résultats sous forme graphique. Des logiciels sont disponibles pour effectuer facilement et rapidement ces calculs [32].

4.3.6 Cas particulier: impédance caractéristique réelle

Lorsque la ligne de transmission a une impédance caractéristique réelle, des simplifications sont possibles dans (4.25)

$$\begin{aligned} R_g Y_c \left| 1 - \underline{\rho}_g \right|^2 &= \operatorname{Re} \left\{ Z_g Y_c \left(1 - \underline{\rho}_g \right) \left(1 - \underline{\rho}_g^* \right) \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 + \underline{\rho}_g}{1 - \underline{\rho}_g} \left(1 - \underline{\rho}_g \right) \left(1 - \underline{\rho}_g^* \right) \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \left(1 + \underline{\rho}_g \right) \left(1 - \underline{\rho}_g^* \right) \right\} = 1 - \left| \underline{\rho}_g \right|^2 \quad [-] \end{aligned} \quad (4.27)$$

On procède de la même façon avec le terme qui concerne la terminaison, et on obtient

$$\frac{P_t}{P_e} = \frac{\left(1 - \left| \underline{\rho}_g \right|^2 \right) \left(1 - \left| \underline{\rho}_t \right|^2 \right) e^{-2\alpha d}}{\left| 1 - \underline{\rho}_g \underline{\rho}_t e^{-2\gamma d} \right|^2} \quad [-] \quad (4.28)$$

Les trois termes du numérateur impliquent séparément la réflexion du générateur, celle de la terminaison et l'affaiblissement sur la ligne. Les interactions entre la ligne et ses deux extrémités apparaissent au dénominateur (effet de boucle, réflexions multiples).

L'impédance caractéristique d'une ligne de transmission sans pertes est réelle. Une ligne avec pertes n'a une impédance caractéristique réelle que lorsque ses paramètres satisfont la condition de Heaviside (§ 2.7.6).

4.3.7 Transfert maximal de puissance sur une ligne sans pertes

Avec une terminaison passive, le quotient P_t/P_e est inférieur ou égal à l'unité. L'égalité est obtenue sur une ligne sans pertes avec des terminaisons qui remplissent les conditions d'amplitude et de phase suivantes

$$\left| \underline{\rho}_g \right| = \left| \underline{\rho}_t \right| \quad [-] \quad \text{et} \quad \arg \left(\underline{\rho}_g \underline{\rho}_t e^{-2j\beta d} \right) = 2n\pi \quad [\text{rad}] \quad \text{avec } n \text{ entier} \quad (4.29)$$

Pour que cette condition soit satisfaite, il faut que le facteur de réflexion de la terminaison, ramené à l'entrée de la ligne, soit le conjugué complexe de celui du générateur et, par conséquent, l'impédance à l'entrée de la ligne doit être le conjugué complexe de l'impédance du générateur. Cette situation est connue sous le nom d'*adaptation conjuguée* (§ 4.4.1).

4.4 ADAPTATION

On utilise une ligne de transmission pour transférer un signal d'un générateur à un récepteur, et on souhaite que ce transfert soit optimal, aussi bien en quantité qu'en qualité. Le transfert de puissance dépend des propriétés de la ligne, du générateur et de la terminaison. Pour que la transmission du signal soit aussi efficace que possible, les composants du système doivent être compatibles, ou adaptés les uns aux autres, et des techniques d'adaptation ont été développées à cet effet.

4.4.1 Adaptation conjuguée

A une fréquence donnée, on obtient un transfert maximum de puissance à l'adaptation conjuguée (§ 4.3.7), lorsque l'impédance à l'entrée de la ligne est le conjugué complexe de l'impédance du générateur. Comme on peut le constater dans la figure 4.10, cette adaptation dépend de la phase, elle est donc sensible à toute variation de fréquence ou de longueur de ligne. Elle ne peut donc être réalisée que lorsque le signal a une bande de fréquence étroite ou lorsque la ligne de connexion est beaucoup plus courte qu'une longueur d'onde.

4.4.2 Inconvénients produits par les réflexions

Lorsqu'une onde réfléchie retourne vers le générateur et atteint celui-ci, elle affecte son fonctionnement, ce qui peut provoquer un glissement de fréquence du signal, voire même, dans certains cas extrêmes, des oscillations simultanées à plusieurs fréquences.

La présence d'ondes stationnaires sur une ligne de transmission augmente localement les amplitudes de la tension et du courant (fig. 3.21), et donc celles des champs électrique et magnétique correspondants. La capacité de transfert de puissance de la ligne est par conséquent réduite. L'augmentation locale du courant produit un échauffement supplémentaire des conducteurs, qui se répercute par un accroissement de l'affaiblissement.

La présence de réflexions multiples entre le générateur et la terminaison peut modifier considérablement l'allure du signal, surtout lorsqu'il s'agit d'un signal à large spectre de fréquences, par exemple en régime impulsionnel (sect. 2.6).

De façon générale, les réflexions perturbent le bon fonctionnement d'un système de transmission, leurs effets pouvant être plus ou moins graves selon les applications. Dans beaucoup d'applications pratiques, on souhaite donc les réduire le plus possible, voire même les supprimer complètement.

4.4.3 Adaptation sans réflexion

Lorsqu'un signal possède un large spectre de fréquence et que la ligne de transmission est longue, on ne peut pas réaliser l'adaptation conjuguée – le transfert de puissance maximal n'est obtenu que pour certaines fréquences, tandis que pour d'autres fréquences les réflexions multiples affaiblissent le signal. L'affaiblissement varie avec la fréquence, de sorte que le signal subit une distorsion. Pour éviter cet effet, on réalise un transfert de puissance constant en supprimant la réflexion produite par la terminaison (fig. 4.10).

Cette situation est connue sous le nom d'adaptation sans réflexion ou adaptation au sens des lignes, et elle est pratiquement toujours utilisée en hyperfréquences. On cherche à réduire autant que possible le facteur de réflexion, et donc à fonctionner au voisinage immédiat du centre de l'abaque de Smith. En hyperfréquences, les composants sont spécifiés par leur ROS, qui doit être inférieur à une valeur limite fixée par l'utilisateur.

4.4.4 Adaptation à bruit minimal

Il faut encore mentionner un troisième type d'adaptation, dont on fait usage dans les amplificateurs pour signaux de très faible amplitude. On cherche alors à optimiser le rapport signal sur bruit, et non le transfert de puissance ni la réflexion. Le facteur de bruit d'un transistor est minimal lorsque son entrée est connectée à un générateur qui présente une valeur particulière d'impédance, en général indiquée par le fabricant [33].

4.4.5 Principe de base de l'adaptation

La terminaison produit une réflexion, qu'il s'agit soit de supprimer (adaptation sans réflexion), soit de modifier pour obtenir un fonctionnement plus favorable (adaptation conjuguée ou à bruit minimal). Comme on n'a généralement pas accès à l'intérieur de la terminaison elle-même, on ne peut pas intervenir au niveau des causes primordiales de la réflexion en vue de les supprimer.

On doit donc procéder indirectement: on introduit une autre réflexion, dont on ajuste l'amplitude et la phase de façon à ce qu'elle compense aussi exactement que possible la réflexion produite par la terminaison. On fait usage pour cela de composants réactifs (sans pertes) que l'on connecte sur des tronçons de lignes. Dans la mesure du possible, on évite d'insérer des éléments résistifs dans le processus d'adaptation, car ils absorbent une partie du signal et réduisent de ce fait la puissance fournie à la terminaison.

Les sections qui suivent traitent de l'adaptation sans réflexion, dans laquelle on cherche à atteindre le centre de l'abaque de Smith. On procède de la même façon pour les autres adaptations, en modifiant seulement le point à atteindre. On suppose ici que les lignes de transmission et tous les éléments utilisés pour l'adaptation n'ont pas de pertes. L'effet de pertes dans des composants réels peut être déterminé par la suite et compensé au moyen d'une simulation sur ordinateur (§ 4.4.10).

4.4.6 Adaptation avec une section de ligne et une réactance série

On connecte à la terminaison un tronçon de ligne, de longueur telle qu'à son entrée on ait une impédance de la forme $\underline{Z} = Z_c + jX$. Pour adapter, il suffit alors de connecter une réactance série $-X$, qui compense la partie imaginaire de l'impédance d'entrée.

Ce processus est esquissé sur l'abaque de Smith de la figure 4.11, il consiste à trouver les intersections du cercle $|\rho| = \text{cste}$ qui passe par l'impédance de la terminaison avec le cercle $\xi = 1$, qui sont situées aux points A et B. L'impédance au point A a une partie imaginaire positive, et pour adapter il faut connecter en série une réactance négative, c'est-à-dire une capacité. Au point B, en revanche, l'impédance a une partie imaginaire négative, et on connecte en série une inductance.

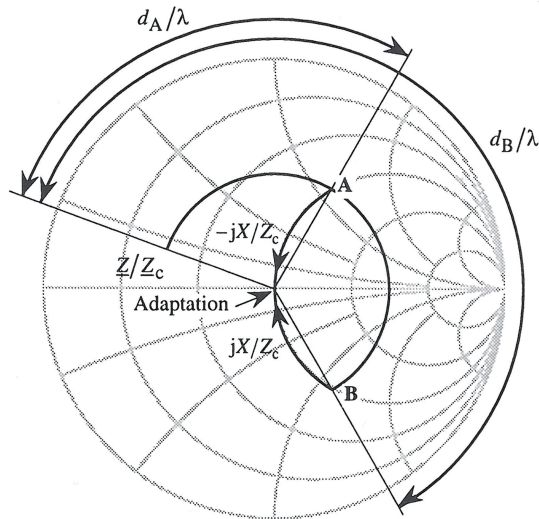


Fig. 4.11 Adaptation sans réflexion avec une réactance connectée en série.

4.4.7 Adaptation avec une section de ligne et une susceptance en parallèle

La procédure à suivre pour adapter avec des composants réactifs connectés en parallèle est tout à fait similaire, en utilisant l'abaque des admittances. On connecte un tronçon de ligne, dont la longueur est telle qu'à son entrée l'admittance vaut $\underline{Y} = Y_c + jB$. En connectant une susceptance $-B$ qui compense la partie imaginaire de l'admittance, on atteint le centre de l'abaque. Le processus est illustré dans la figure 4.12, pour la même terminaison que dans la section précédente. Les intersections sont ici aux points C et D. L'admittance au point C a une partie imaginaire positive, que l'on compense avec une susceptance négative (inductance). L'adaptation au point D requiert une capacité.

Comparant les figures 4.11 et 4.12, on constate que, pour adapter la même terminaison, on doit avoir les mêmes valeurs pour la réactance normalisée X/Z_c et pour la susceptance normalisée B/Y_c . Quant aux longueurs de lignes nécessaires pour l'adaptation, la différence entre les deux cas est de $\pm\lambda/2$.

Pour l'exemple considéré, la ligne est la plus courte pour le point D de la figure 4.12, avec l'adaptation faite par une capacité en parallèle. L'adaptation avec une inductance en parallèle requiert la ligne la plus longue, au point C dans la figure 4.12. Pour adapter avec des réactances en série, la capacité requiert la ligne la plus courte (point A de la fig. 4.11). Mais ceci n'est qu'un cas particulier, et on peut rencontrer des situations différentes.

En pratique, les éléments connectés en parallèle sont plus faciles à réaliser sur les lignes d'usage courant. Un court tronçon de ligne ouverte fournit une capacité (§ 4.1.5), tandis qu'un court tronçon de ligne terminé par un court circuit sert à réaliser une inductance (§ 4.1.4). Pour connecter des éléments en parallèle, on n'a pas besoin de couper la ligne, et il est donc plus facile de corriger des erreurs de positionnement.

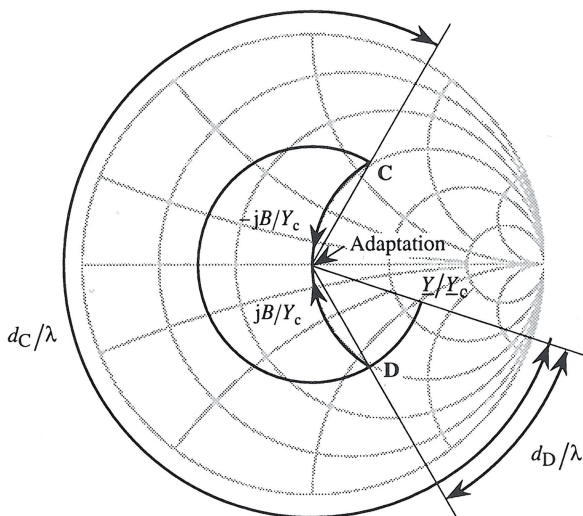


Fig. 4.12 Adaptation sans réflexion avec une susceptance connectée en parallèle.

4.4.8 Transformateur quart d'onde

On peut également adapter avec un tronçon de ligne d'impédance caractéristique différente Z_x , placée directement devant la terminaison. Cette méthode est généralement utilisée avec des terminaisons purement résistives, ou pour connecter des lignes ayant des impédances caractéristiques différentes. Dans les deux cas, on considère que l'impédance à adapter est réelle $Z_L = R_L$ (fig. 4.13).

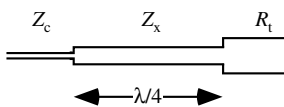


Fig. 4.13 Adaptation avec un transformateur quart d'onde.

Le transformateur est un tronçon de ligne d'un quart de longueur d'onde ($\lambda/4$), dont l'impédance caractéristique est la moyenne géométrique des impédances de part et d'autre

$$Z_x = \sqrt{Z_c R_L} \quad [\Omega] \tag{4.30}$$

Le transformateur quart d'onde remplit une fonction d'*inverseur d'impédance*, similaire à celle des transformateurs bobinés utilisés aux basses fréquences.

Bien entendu, la longueur du tronçon de ligne n'est égale à un quart de longueur d'onde qu'à une fréquence unique f_0 , et l'adaptation se dégrade progressivement à mesure que l'on s'éloigne de cette fréquence. Le rapport d'onde stationnaire pour plusieurs terminaisons est présenté en fonction de la fréquence à la figure 4.14.

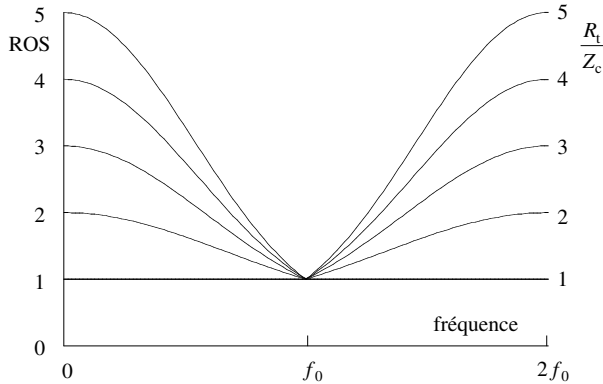


Fig. 4.14 ROS à l'entrée d'un transformateur quart d'onde.

On peut adapter une terminaison sur une bande de fréquence plus large en utilisant un transformateur quart d'onde formé de plusieurs sections successives. En ajustant correctement les longueurs des lignes et leurs impédances caractéristiques, les réflexions produites par les discontinuités entre les différentes sections successives se compensent sur une bande de fréquences plus large [34, 35].

4.4.9 Limitations en fréquence

Les réactances et les tronçons de ligne utilisés pour adapter ont des propriétés qui dépendent de la fréquence, de sorte que l'adaptation ne peut être réalisée que sur une bande limitée. On peut adapter parfaitement à une fréquence f_0 une terminaison, à condition que ce ne soit pas pas un court-circuit, une ligne ouverte ou une réactance pure. Lorsqu'on s'écarte de cette fréquence, l'adaptation se dégrade (fig. 4.14). On définit généralement une bande de fréquence dans laquelle le ROS reste inférieur à une valeur limite tolérable.

On peut augmenter la bande de fréquence utilisable en choisissant un dispositif d'adaptation et des composants ayant des propriétés fréquentielles complémentaires [36].

4.4.10 Conception assistée par ordinateur

On peut aussi élargir la bande de fréquence avec un circuit d'adaptation plus complexe, plus de composants, et donc plus de degrés de liberté. Les calculs sont alors compliqués, et un calcul à l'ordinateur devient pratiquement indispensable [37].

La technique utilisée est esquissée schématiquement à la figure 4.15, qui montre les principales étapes du processus. L'utilisateur doit d'abord définir l'impédance à adapter, en fonction de la fréquence, et spécifier le niveau d'adaptation qu'il souhaite obtenir (bande de fréquence et valeur maximale acceptable pour le ROS). La configuration du circuit à utiliser pour l'adaptation doit aussi être introduite, en précisant comment les composants et les sections de ligne doivent être disposés. Finalement, il est recommandé de proposer des valeurs approximatives pour les éléments du circuit, qui servent de point de départ au processus d'optimisation que l'ordinateur va effectuer [38].

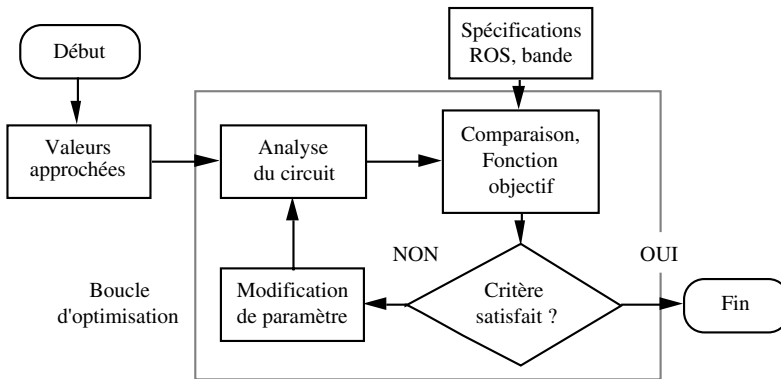


Fig. 4.15 Conception assistée par ordinateur pour l’adaptation à large bande.

Le processus d’optimisation peut alors débuter: l’ordinateur commence par analyser le circuit formé avec les valeurs approchées des éléments, il calcule l’impédance d’entrée sur toute la bande de fréquences et compare les valeurs obtenues avec les spécifications. Il calcule la valeur d’une *fonction objectif*, qui mesure la distance entre les valeurs calculées et l’objectif à atteindre. Si les spécifications sont satisfaites – ce qui est peu probable au stade initial des opérations – le processus s’arrête. Si tel n’est pas le cas, un des paramètres des composants d’adaptation (réactance ou tronçon de ligne) est modifié, et le circuit analysé à nouveau. Si le nouveau résultat est meilleur que le précédent, on fait de nouveau varier le même paramètre, jusqu’à ce qu’on atteigne un minimum de la fonction objectif. Le processus est alors répété avec un autre paramètre, et ainsi de suite.

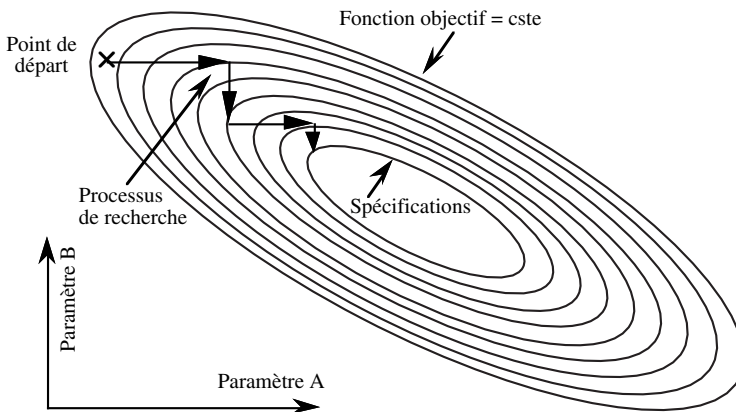


Fig. 4.16 Recherche du minimum d’une fonction objectif par la méthode du gradient.

Le processus (recherche du gradient) est illustré à la figure 4.16, pour un problème à deux paramètres. On le répète jusqu’à ce qu’on obtienne les performances souhaitées, pour autant que le nombre d’itérations ne dépasse pas un nombre maximum spécifié.

L'utilisateur doit bien entendu préciser quels sont les paramètres ajustables, avec leurs limites, afin que le circuit fourni par le processus soit physiquement réalisable.

Si les résultats obtenus n'atteignent pas les performances spécifiées, cela signifie que la configuration choisie ne permet pas d'adapter le circuit, et qu'il faut soit ajouter plus de réactances et des tronçons de ligne, soit choisir une autre configuration. On doit toutefois se rappeler que le processus obéit aux lois de la physique et qu'on ne pourra jamais adapter un résonateur (sect. 4.5) sur une large bande de fréquences [39] – à moins d'utiliser des éléments dissipatifs. Le circuit d'adaptation peut par ailleurs être trop long, ou trop grand, par rapport à l'espace disponible.

Il n'est pas certain que le processus d'optimisation converge vers la meilleure solution possible, car la fonction objectif peut avoir un minimum local. D'autre part, on ne dispose pas toujours de valeurs approchées pour démarrer le processus. On peut alors faire appel à une optimisation stochastique, connue sous le nom de méthode de Monte-Carlo. On donne des valeurs aléatoires aux paramètres, à l'intérieur d'une fourchette de valeurs acceptables, et on analyse le circuit obtenu. À la fin de chaque opération, on compare la fonction objectif calculée à la meilleure valeur précédente, et on conserve la meilleure des deux. La méthode de Monte-Carlo ne converge pas de façon régulière.

On peut aussi combiner les deux concepts: la méthode stochastique détermine grossièrement où se situe le minimum de la fonction objectif, et la méthode du gradient sa position précise. Comme le processus s'arrête dès que les spécifications sont satisfaites, la position exacte du minimum n'est atteinte que lorsqu'il n'y a pas de solution acceptable.

4.5 RÉSONATEURS

4.5.1 Description d'un résonateur fermé

Quand une ligne de transmission sans pertes se termine par un court-circuit (§ 4.1.4), l'impédance $\underline{Z}(z)$ sur la ligne passe périodiquement par zéro toutes les demi-longueurs d'onde (tour complet sur l'abaque de Smith, sect. 4.2). On peut placer un second court-circuit à une position d'impédance nulle sans modifier le courant ni la tension, et on obtient ainsi une structure fermée appelée résonateur (fig. 4.17).

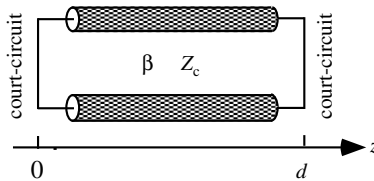


Fig. 4.17 Résonateur formé d'une ligne de transmission avec deux court-circuits.

La condition $\underline{U}(d) = 0$ impose une relation entre \underline{U}_- et \underline{U}_+ et (3.16) devient

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_+ e^{-j\beta z} - \underline{U}_+ e^{-j\beta(2d-z)} = \underline{U}_+ e^{-j\beta d} \left(e^{j\beta(d-z)} - e^{-j\beta(d-z)} \right) = 2j \underline{U}_+ e^{-j\beta d} \sin[\beta(d-z)] \quad [\text{V}] \quad (4.31)$$

Le second court-circuit impose $\underline{U}(0) = 0$ et donc $\sin(\beta d) = 0$. Il faut que $\beta d = n\pi$ et de ce fait que $\beta = n\pi/d$, où n est un entier non nul. La tension est représentée dans la figure 4.18.

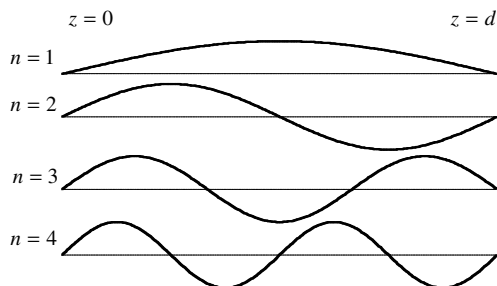


Fig. 4.18 Tension le long d'une ligne court-circuitée à ses deux extrémités.

On trouve aussi que $d = n\pi/\beta = n\lambda/2$ et les fréquences de résonance pour un résonateur formé par une ligne sans pertes $L'C'$ sont données par

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{\beta_n c}{2\pi} = \frac{nc}{2d} = \frac{n}{2d\sqrt{L'C'}} \quad [\text{Hz}] \quad (4.32)$$

Lorsque les paramètres caractéristiques de la ligne sont indépendants de la fréquence, les fréquences de résonance forment une série arithmétique avec ($f_n = nf_1$).

4.5.2 Résonateur formé d'une ligne et de deux réactances

Les deux court-circuits qui terminent le résonateur de la figure 4.17 peuvent être remplacés par des réactances pures X_1 et X_2 (fig. 4.19).

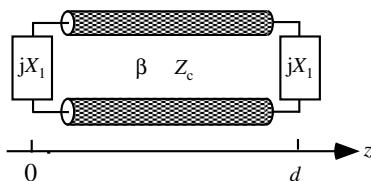


Fig. 4.19 Résonateur formé d'un tronçon de ligne entre deux réactances.

On obtient la condition de résonance en annulant la somme de l'impédance d'entrée et de la réactance qui y est connectée, ce qui donne la relation

$$\tan \beta d = \frac{Z_c(X_1 + X_2)}{X_1 X_2 - Z_c^2} \quad [-] \quad (4.33)$$

En dehors des cas particuliers $X = 0$ (court-circuit) et $X = \infty$ (ligne ouverte), la fréquence apparaît dans plusieurs termes : β , X_1 et X_2 . Il s'agit donc résoudre numériquement une équation transcendante, et on n'obtient pas les fréquences de résonance sous forme explicite.

4.5.3 Schéma équivalent

Un résonateur peut être représenté par un schéma équivalent formé d'une capacité représentant l'énergie électrique emmagasinée et d'une inductance qui tient compte de l'énergie magnétique, auxquelles on doit ajouter une conductance, car dans la réalité les dispositifs ne sont pas idéaux mais comportent toujours des pertes (fig. 4.20).

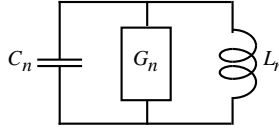


Fig. 4.20 Schéma équivalent d'un résonateur fermé.

Les composantes du circuit prennent des valeurs distinctes pour les différentes résonances, de sorte que chacune d'elles a son propre schéma équivalent, caractérisé par sa fréquence de résonance f_n et son facteur de qualité (non chargé) Q_n

$$f_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_n C_n}} \quad [\text{Hz}] \quad Q_n = \frac{1}{G_n} \sqrt{\frac{C_n}{L_n}} \quad [-] \quad (4.34)$$

4.5.4 Résonateur couplé à une ligne de transmission

Pour utiliser un résonateur, il faut le connecter au monde extérieur, par exemple au moyen d'une ligne de transmission, ce qui donne la structure de la figure 4.21. Une étude rigoureuse devient très complexe car toutes les résonances (fig. 4.20) sont couplées entre elles (ch. XIII.3). Si les pertes sont faibles et les résonances bien distinctes, des simplifications sont possibles et on peut représenter la cavité au moyen d'un seul circuit GLC en parallèle. Ce circuit n'est toutefois valable qu'à un endroit particulier sur la ligne, appelé plan du court-circuit désaccordé, et au voisinage immédiat d'une résonance. Le schéma pour d'autres endroits le long de la ligne est en général beaucoup plus complexe.

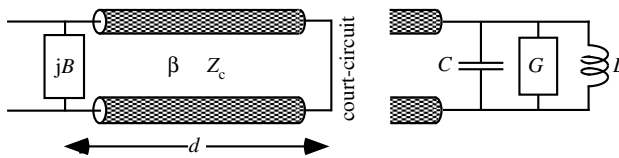


Fig. 4.21 Résonateur couplé à une ligne de transmission, avec son schéma équivalent dans le plan du court-circuit désaccordé.

On définit un facteur de couplage $\chi = Y_c/G$. La réflexion en puissance sur la ligne de transmission est alors approximativement donnée par (§ XIII 3.5.7)

$$\frac{P_r}{P_{in}} = |\underline{\rho}|^2 \cong 1 - \frac{4\chi}{(\chi+1)^2 + (2Q_0\Delta f/f_0)^2} \quad [-] \quad (4.35)$$

où P_r est la puissance réfléchie, P_{in} la puissance incidente, f_0 la fréquence de résonance, $\Delta f = f - f_0$ la différence de fréquences et Q_0 le facteur de qualité non chargé (4.33).

Les rapports de puissance réfléchi sont présentés à la figure 4.22 pour plusieurs couplages entre la ligne et la cavité, pour la même fréquence de résonance f_0 et le même facteur de qualité Q_0 .

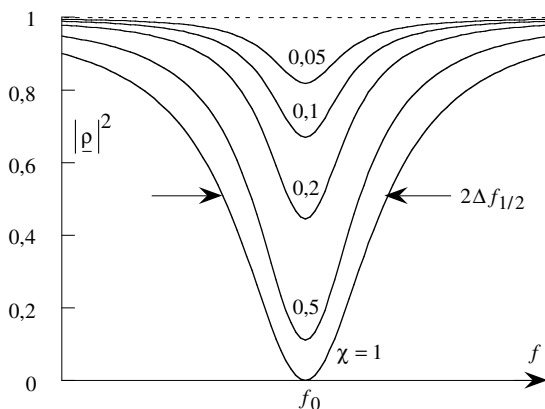


Fig. 4.22 Puissance réfléchi par un résonateur connecté à une ligne.

La réflexion est minimale lorsque $f = f_0$ et donc $\Delta f = 0$, qui correspond à une résonance de la cavité. Le rapport des puissances de l'équation (4.35) devient alors

$$\frac{P_r}{P_{in}} \Big|_{f=f_0} = |\rho_{\min}|^2 \cong 1 - \frac{4\chi}{(\chi+1)^2} \quad [-] \quad (4.36)$$

C'est lorsque la fréquence du signal est égale à la fréquence de résonance que la cavité absorbe le plus de puissance. L'absorption devient totale lorsque $\chi = 1$, auquel cas le résonateur est une terminaison adaptée sans réflexion (§ 3.3.3) – on parle dans ce cas de *couplage critique*. Le résonateur est dit *sous-couplé* lorsque $\chi < 1$, et il devient *surcouplé* lorsqu'on a $\chi > 1$.

La largeur de la résonance dépend du facteur de qualité, mais aussi du couplage. Quand les deux termes au dénominateur de (4.35) sont égaux, la puissance absorbée est la moitié de la valeur maximale (4.36), et on définit comme suit $\Delta f_{1/2}$

$$\Delta f_{1/2} = f_0 \frac{\chi+1}{2Q_0} \quad [\text{Hz}] \quad (4.37)$$

4.5.5 Applications des résonateurs

Les résonateurs (ou cavités résonnantes) sont utilisés dans les techniques des très hautes fréquences ou hyperfréquences (centaines de MHz et GHz (vol. XIII), permettant de remplir des fonctions de caractère très différent. Elles sont notamment utilisées pour mesurer la fréquence des signaux, pour stabiliser des oscillateurs [40], pour réaliser des filtres, pour chauffer et traiter divers matériaux (fours micro-ondes) et pour mesurer leurs propriétés électriques et magnétiques [41].

4.6 EXERCICES

4.6.1 Une ligne de transmission ayant une impédance caractéristique de 50Ω aboutit à une terminaison dont l'impédance vaut $150 + j20 \Omega$. Déterminer, en fonction de la longueur de la ligne, le facteur de réflexion, l'impédance, la tension, le courant, les composantes active et réactive de la puissance.

4.6.2 Déterminer l'impédance d'entrée d'une ligne de transmission de longueur d terminée par une capacité C_t . Trouver pour quelles fréquences l'impédance d'entrée est celle d'un court-circuit ou une ligne ouverte.

4.6.3 L'impédance d'entrée d'une ligne de longueur d terminée par un court-circuit, vaut $Z_{in} = j 20 \Omega$. Quand l'extrémité de la ligne est ouverte, l'impédance d'entrée devient $Z_{in} = -j 120 \Omega$. Calculer l'impédance caractéristique et l'exposant de propagation.

4.6.4 On veut déterminer l'affaiblissement d'une ligne de transmission longue de 100 mètres. Dans ce but, on court-circuite son extrémité, et on mesure alors à l'entrée un ROS de 5. Calculer l'affaiblissement en dB/m.

4.6.5 Déterminer dans l'abaque de Smith le lieu des points pour lesquels:

(a) $|\underline{Z}/\underline{Z}_c| = 2$ (b) $\arg(\underline{Z}/\underline{Z}_c) = 45^\circ$

sur quelles courbes se trouvent ces familles de points ?

4.6.6 Déterminer le transfert de puissance entre un générateur avec une impédance $\underline{Z}_g = 45 + j6 \Omega$, et une terminaison dont l'impédance est donnée par $\underline{Z}_t = 73 - j16 \Omega$, connectés par une ligne de transmission longue de 100 mètres, qui a un exposant de propagation $\underline{\gamma} = 0,05 + j1,5 \text{ m}^{-1}$ et une admittance caractéristique $\underline{Y}_c = 0,05 + j0,00166 \text{ S}$.

4.6.7 Une terminaison ayant une impédance $\underline{Z}_t = 20 + j20 \Omega$ est connectée à une ligne d'impédance caractéristique $\underline{Z}_c = 100 \Omega$. On veut l'adapter, au moyen d'un segment de ligne de transmission et d'un élément réactif connecté en série ou en parallèle. On veut que la ligne de transmission soit la plus courte possible.

4.6.8 Dans la situation spécifiée dans le problème 4.6.7, on demande d'adapter au moyen d'un transformateur, quart d'onde ou généralisé.

4.6.9 Un tronçon de câble coaxial de 40 centimètres de long est terminé par des court-circuits à ses deux extrémités, formant un résonateur. Déterminer les fréquences de résonance, lorsque le matériau isolant qui remplit le câble a la permittivité suivante

(a) $\epsilon_r = 1$ (air) (b) $\epsilon_r = 4$ (c) $\epsilon_r = 620$.

LIGNE À OBSTACLES PÉRIODIQUES

5.1 INTRODUCTION

5.1.1 Description

Une structure périodique comporte une suite de tronçons de lignes de transmission identiques de longueur d séparés les uns des autres par des obstacles. Quand ces obstacles sont minces, on peut les représenter par des susceptances équivalentes connectées en parallèle [42], ce qui donne le circuit de la figure 5.1.

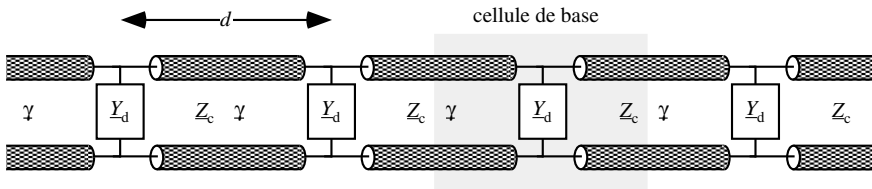


Fig. 5.1 Ligne de transmission périodiquement chargée d'admittances en parallèle.

On a représenté dans la figure une *cellule de base* symétrique, et l'ensemble est obtenu en connectant N cellules identiques les unes aux autres. Il s'agit ici d'un *modèle simple* de ligne périodique, qui permet néanmoins d'étudier la propagation dans beaucoup de structures dont les paramètres varient de façon périodique le long de la direction de propagation z , avec une longueur de récurrence d . Un modèle plus élaboré considère une alternance de tronçons de lignes de transmission ayant deux caractéristiques de propagation différentes (§ 5.2.7).

5.1.2 Fonctionnement dans deux cas limites

On rencontre deux régimes différents de propagation sur une ligne à obstacles périodiques, dépendant de l'espacement électrique entre discontinuités successives et donc de la fréquence du signal.

Dans l'un des cas, les réflexions produites par les discontinuités "ont tendance" à s'additionner, de sorte que la réflexion de l'ensemble croît avec le nombre N d'obstacles disposés périodiquement sur la ligne, et le signal est surtout réfléchi vers la source.

Pour l'autre cas, les réflexions "ont tendance" à se compenser, de telle sorte que leur somme vectorielle reste faible et le signal se propage vers l'autre extrémité de la ligne.

Ces deux cas limites sont représentés sur l'abaque de Smith à la figure 5.2.

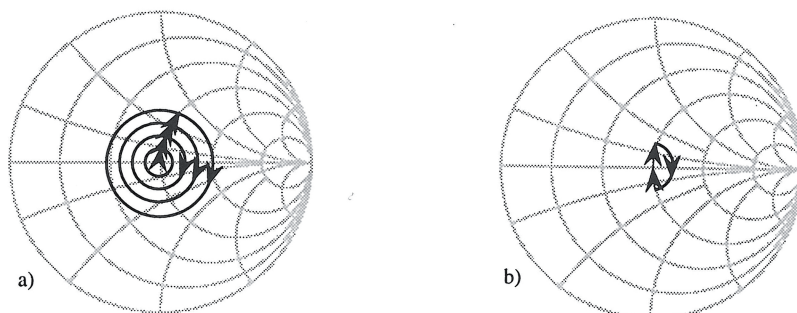


Fig. 5.2 Deux cas limites de propagation sur une ligne à obstacles périodiques : (a) $d = \lambda/2$, (b) $d \equiv \lambda/4$.

Dans la figure 5.2(a), la distance d entre deux obstacles successifs est égale à une demi-longueur d'onde $\lambda/2$, ou à un nombre entier de demi-longueurs d'onde. De ce fait, on effectue un ou plusieurs tours sur l'abaque entre deux discontinuités successives, s'il s'agit d'une ligne sans pertes. Les susceptances s'ajoutent les unes aux autres et le circuit équivalent de N sections devient égal à une unique susceptance équivalente NB . Quand N est grand, la réflexion devient importante et la transmission est fortement réduite. En présence de pertes sur la ligne de transmission, l'effet d'obstacles successifs est réduit.

La situation change dans la figure 5.2(b), où la distance d est proche de $\lambda/4 \pm m\lambda/2$, ce qui produit approximativement un demi-tour sur l'abaque de Smith. Dans ce cas, les effets de deux obstacles successifs s'annulent. Le circuit résultant ne comporte plus qu'une susceptance B si N est impair, et aucune si N est pair. La réflexion est petite ou nulle, et le signal est transmis presque sans affaiblissement vers l'autre extrémité de la ligne.

Ces deux situations s'observent *sur la même structure*, mais à des *fréquences différentes*: la propagation sur une ligne chargée périodiquement varie avec la fréquence. À certaines fréquences, le signal se propage pratiquement sans affaiblissement ni réflexion, tandis qu'à d'autres, il est fortement réfléchi et n'atteint pas l'autre extrémité de la ligne. Une étude complète détermine ce qui se passe entre les deux cas limites de la figure 5.2.

On rencontre des structures périodiques de types très divers, dont quelques exemples sont décrits dans les paragraphes qui suivent. La nature périodique de structures est souvent indésirable, à cause des réflexions qui apparaissent à certaines fréquences.

5.1.3 Connexions disposées périodiquement le long de la ligne

Pour des raisons pratiques, on connecte souvent les terminaux de façon périodique le long d'un bus informatique [43]. Lorsque tous les terminaux ont la même impédance d'entrée, on obtient une structure comme celle représentée à la figure 5.1.

5.1.4 Variations périodiques de l'impédance caractéristique

Les lignes de transmission sont fabriquées sur des machines rotatives: des irrégularités mécaniques mineures peuvent produire des petits défauts qui se répètent de nombreuses fois le long de la ligne. En fait, certains défauts sont tellement petits qu'on ne peut pas les détecter individuellement, mais leur répétition de façon périodique des milliers de fois le long de la ligne produit des réflexions importantes aux fréquences auxquelles les effets s'additionnent (fig. 5.3). On rencontre cet effet en télévision câblée où il est connu sous le nom de *perte structurelle en retour* (*structural return loss*) [44]. Des "trous" étroits apparaissent dans le spectre du signal transmis, ce qui dégrade la qualité de l'image reçue.

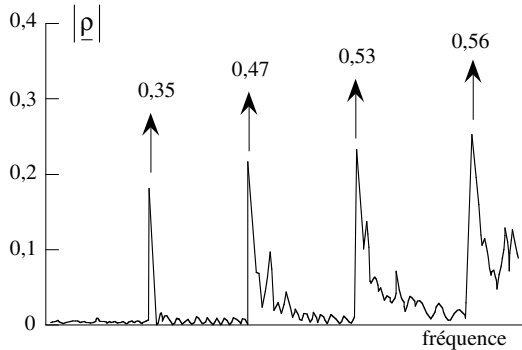


Fig. 5.3 Perte structurelle en retour pour un câble de transmission de télévision.

5.1.5 Ligne téléphonique pupinisée

L'affaiblissement sur une ligne de transmission est principalement produit par les pertes dans les conducteurs (§ 2.7.1). D'après l'équation (3.42), on peut réduire l'affaiblissement en augmentant l'inductance (§ 3.4.2). En pratique, toutefois, il n'est guère pratique d'augmenter l'inductance de façon distribuée, de sorte qu'on préfère insérer des bobines d'inductance le long des lignes téléphoniques, selon la méthode développée par Pupin [45]. Ici aussi, on a choisi pour des raisons pratiques d'insérer des tronçons de ligne de longueur identique entre les bobines, ce qui produit une structure périodique (fig. 5.4).

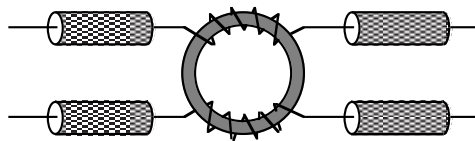


Fig. 5.4 Insertion d'une bobine Pupin sur une ligne de transmission.

L'insertion périodique de bobines d'inductance réduit l'affaiblissement sur tout le spectre de la parole, mais réduit également la bande de fréquences utilisable, et donc le débit de la ligne. Cette limitation est gênante pour la transmission de données (signaux d'ordinateur, etc) sur des lignes téléphoniques existantes. Le circuit équivalent d'une ligne pupinisée est le dual de la figure 5.1, avec des réactances en série sur la ligne (fig. 5.5).

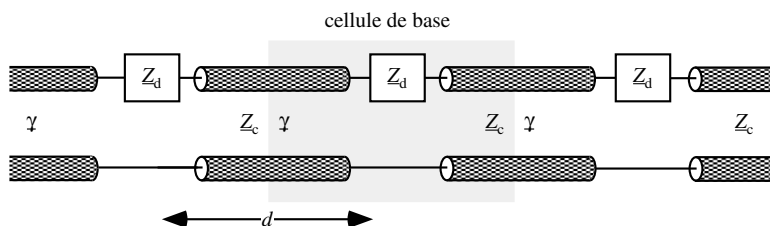


Fig. 5.5 Ligne de transmission avec des réactances connectées en série.

5.1.6 Structure à onde lente

Dans les accélérateurs de particules [46] et certains tubes générateurs d'hyperfréquences [47], on fait interagir un faisceau d'électrons ou d'ions avec une onde électromagnétique. Comme l'onde se déplace à la vitesse c_0 de la lumière, il faut la "ralentir" de façon à optimiser l'interaction, qui est maximale au synchronisme (§ XIII.4.4.8). On obtient cet effet en chargeant un guide d'ondes (§ 3.4.4) avec des iris disposés périodiquement, formant ainsi une succession de cavités résonnantes (sect. 4.5, fig. 5.6).

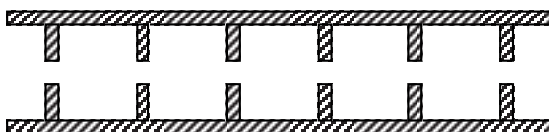


Fig. 5.6 Structure à onde lente pour un accélérateur de particules.

5.1.7 Filtres

Les deux régimes de propagation sur des structures périodiques décrits au paragraphe 5.1.2 – addition des réflexions pour certaines fréquences, puis compensation des réflexions à d'autres fréquences – donne une succession de bandes passantes et de bandes bloquées (§ 5.2.5) dont on tire profit pour réaliser divers types de filtres [48], (vol. XIX).

On peut aussi laisser passer les signaux à certaines fréquences et bloquer ceux des autres fréquences (passe-bande), ou bloquer certaines fréquences (fréquences images) en laissant passer toutes les autres (coupe-bande). Certains filtres suppriment les basses fréquences et laissent passer les hautes (passe-bas), d'autres font le contraire (passe-haut).

5.1.8 Réseaux cristallins

Les cristaux possèdent une structure périodique tridimensionnelle et le schéma équivalent de la figure 5.1 fournit un modèle simple pour l'étude de la propagation le long de l'axe d'un cristal [49]. On rencontre également dans ce cas une succession de bandes passantes et de bandes bloquantes dans le domaine des fréquences. En physique quantique, du fait de la loi de Planck, ces bandes deviennent respectivement les bandes interdites et les bandes autorisées (conduction, valence) pour les niveaux d'énergie (sect. II.2.6).

5.2 DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE

5.2.1 Matrice de chaîne (ABCD) d'une cellule

La ligne de transmission périodiquement chargée est découpée en N cellules élémentaires, chaque cellule étant formée d'une admittance \underline{Y}_d connectée de part et d'autre à deux tronçons de ligne de longueur $d/2$ (fig. 5.7). On définit ainsi une cellule de base symétrique, ce qui permet de simplifier par la suite certains calculs, tout assemblage d'éléments symétriques étant également symétrique.

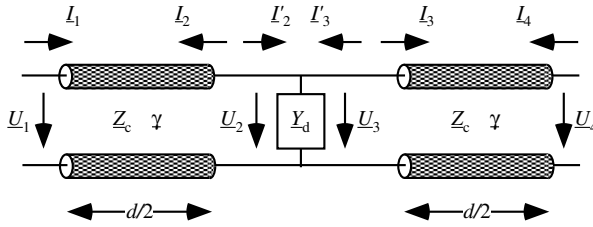


Fig. 5.7 Cellule de base symétrique d'une ligne à obstacles périodiques.

On considère ici le cas plus général d'une ligne avec pertes avec des discontinuités dissipatives, le cas particulier sans pertes pouvant facilement en être déduit par la suite (§ 5.2.4). les courants et tensions aux deux extrémités des tronçons de ligne sont liés par la matrice de chaîne (3.68)

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\underline{\gamma}d/2) & \underline{Z}_c \sinh(\underline{\gamma}d/2) \\ \underline{Y}_c \sinh(\underline{\gamma}d/2) & \cosh(\underline{\gamma}d/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Il faut noter que le courant \underline{I}_i est toujours le courant qui entre dans le biporte à son accès i . Les relations entre courants et tensions aux deux extrémités du deuxième tronçon de ligne, entre les points 3 et 4, sont données par la même matrice de chaîne.

Aux bornes de l'admittance connectée en parallèle, les tensions et courants entrants et sortants sont liés entre eux par les relations de base de théorie des circuits (lemmes de Kirchhoff, § I.2.3.11 et I.2.3.12)

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_3 \quad [\text{V}] \quad (5.2)$$

$$\underline{I}'_2 = -\underline{I}_3 + \underline{Y}_d \underline{U}_3 \quad [\text{A}] \quad (5.3)$$

La matrice de chaîne de l'admittance connectée en parallèle est donc donnée par

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \underline{Y}_d & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_3 \\ -\underline{I}_3 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Il faut aussi remarquer que les courants à l'accès 2 ne sont pas définis de la même façon dans (5.1) et dans (5.3), puisque il s'agit dans les deux cas des courants qui entrent dans les deux biportes disposés dos-à-dos. Cela signifie que l'on a $\underline{I}'_2 = -\underline{I}_2$. La matrice de chaîne tient compte de cette particularité, de sorte que la matrice résultant de la mise en cascade est simplement obtenue par la multiplication des trois matrices

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \cosh(\underline{\gamma}d/2) & \underline{Z}_c \sinh(\underline{\gamma}d/2) \\ \underline{Y}_c \sinh(\underline{\gamma}d/2) & \cosh(\underline{\gamma}d/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \underline{Y}_d & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh(\underline{\gamma}d/2) & \underline{Z}_c \sinh(\underline{\gamma}d/2) \\ \underline{Y}_c \sinh(\underline{\gamma}d/2) & \cosh(\underline{\gamma}d/2) \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} \cosh(\underline{\gamma}d) + (\underline{Z}_c \underline{Y}_d/2) \sinh(\underline{\gamma}d) & \underline{Z}_c [\sinh(\underline{\gamma}d) + (\underline{Z}_c \underline{Y}_d/2) \{\cosh(\underline{\gamma}d) - 1\}] \\ \underline{Y}_c [\sinh(\underline{\gamma}d) + (\underline{Z}_c \underline{Y}_d/2) \{\cosh(\underline{\gamma}d) + 1\}] & \cosh(\underline{\gamma}d) + (\underline{Z}_c \underline{Y}_d/2) \sinh(\underline{\gamma}d) \end{bmatrix} \quad (5.5)
\end{aligned}$$

Le déterminant de cette matrice est toujours égal à 1 et on dit que la matrice est unitaire. Ceci indique que la structure est réciproque, c'est-à-dire que les propriétés de transmission ne dépendent pas de la direction de propagation. On obtient ensuite la matrice de chaîne d'un assemblage en cascade de N cellules en multipliant N fois la matrice de chaîne d'une cellule individuelle (sect. 5.3).

5.2.2 Théorème de Floquet

Lorsqu'on analyse un assemblage formé d'un très grand nombre N de cellules il est intéressant de considérer la solution asymptotique obtenue lorsque le nombre de cellules N tend vers l'infini ($N \rightarrow \infty$). Le théorème de Floquet [50] spécifie que, dans une suite de cellules périodiques de longueur d , les tensions et les courants dans le plan $z+d$ sont directement proportionnels à ceux dans le plan z

$$\underline{U}(z+d) = \underline{U}(z) e^{-\underline{\gamma}_p d} \quad [\text{V}] \quad (5.6)$$

$$\underline{I}(z+d) = \underline{I}(z) e^{-\underline{\gamma}_p d} \quad [\text{A}] \quad (5.7)$$

Ces deux relations lient respectivement le courant et la tension entre deux cellules adjacentes. Elles ne donnent en revanche pas d'information sur les variations à l'intérieur d'une cellule, dans la région située *entre les deux points* z et $z+d$.

Toutefois, lorsque la tension et le courant sont connus à l'intérieur d'une cellule quelconque, les équations (5.6) et (5.7) permettent de déterminer la tension et le courant dans les cellules adjacentes, puis de proche en proche partout sur la ligne. La partie réelle du terme $\underline{\gamma}_p d$ donne l'affaiblissement total produit par une cellule, tandis que sa partie imaginaire exprime le déphasage produit par une cellule.

5.2.3 Détermination de $\underline{\gamma}_p d$

Si l'on compare les deux relations (5.6) et (5.7) avec la matrice de chaîne (5.5), on constate que les deux valeurs propres de la matrice d'une cellule valent respectivement $\exp(\pm \underline{\gamma}_p d)$. On trouve après quelques calculs que $\underline{\gamma}_p d$ est une solution de

$$\cosh(\underline{\gamma}_p d) = \cosh(\underline{\gamma}d) + (\underline{Z}_c \underline{Y}_d/2) \sinh(\underline{\gamma}d) \quad [-] \quad (5.8)$$

On en déduit la valeur de l'exposant de propagation $\underline{\gamma}_p$. Sur une structure qui comporte des pertes ce paramètre est toujours complexe, comportant une propagation et un affaiblissement simultanés. Une ligne sans pertes, en revanche, peut soit transmettre un signal sans l'affaiblir, soit l'affaiblir (par réflexion) sans le transmettre (§ 5.2.4).

5.2.4 Application au cas sans pertes

Sur une ligne sans pertes on a $\underline{\gamma} = j\beta$, tandis que l'impédance caractéristique Z_c et l'admittance caractéristique Y_c sont toutes deux des grandeurs réelles. Une discontinuité sans pertes est représentée par une susceptance pure $\underline{Y}_d = jB$. Introduisant ces valeurs dans (5.5), on obtient la matrice de chaîne d'une cellule sans pertes

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \cos(\beta d/2) & jZ_c \sin(\beta d/2) \\ jY_c \sin(\beta d/2) & \cos(\beta d/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ jB & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta d/2) & jZ_c \sin(\beta d/2) \\ jY_c \sin(\beta d/2) & \cos(\beta d/2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\beta d) - (BZ_c/2)\sin(\beta d) & jZ_c [\sin(\beta d) - (BZ_c/2)\{\cos(\beta d) - 1\}] \\ jY_c [\sin(\beta d) - (BZ_c/2)\{\cos(\beta d) + 1\}] & \cos(\beta d) - (BZ_c/2)\sin(\beta d) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.9)$$

et le facteur de propagation de Floquet $\underline{\gamma}_p$ (5.8) est alors donné par

$$\cosh(\underline{\gamma}_p d) = \cos(\beta d) - (BZ_c/2)\sin(\beta d) \quad [-] \quad (5.10)$$

Les trois termes de cette équation sont représentés, en fonction du produit βd – proportionnel à la fréquence multipliée par l'espaceur – dans la figure 5.8 pour le cas d'une ligne de transmission sans pertes chargée de capacités en parallèle.

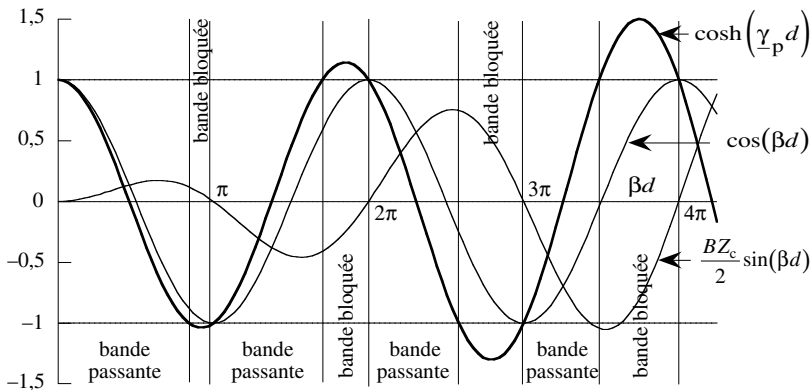


Fig. 5.8 Termes de l'équation caractéristique pour une structure périodique.

5.2.5 Bandes passantes et bloquées

Considérant la figure 5.8, on constate que, selon la fréquence, on peut se trouver dans trois situations différentes

$$\text{si } \cosh(\underline{\gamma}_p d) > 1 \quad \text{alors} \quad \underline{\gamma}_p d = \alpha_p d \pm 2jm\pi \quad [-] \quad (5.11)$$

où m est un nombre entier, ce qui donne un déphasage constant. Cette situation correspond à un affaiblissement de l'onde, dû à une réflexion importante. Il n'y a alors pas de propagation, et on se trouve dans une *bande bloquée*.

$$\text{si } \cosh(\underline{\gamma}_p d) < -1 \quad \text{alors} \quad \underline{\gamma}_p d = \alpha_p d \pm j(2m+1)\pi \quad [-] \quad (5.12)$$

Dans cette situation également, le signal est seulement amorti et ne se propage pas. On se trouve également dans une bande bloquée, et la présence d’une constante imaginaire $j\pi$ signifie que la tension et le courant changent de signe d’une cellule à la suivante

$$\text{si } -1 < \cosh(\underline{\gamma}_p d) < 1 \quad \text{alors} \quad \underline{\gamma}_p d = j(\beta_p d \pm 2m\pi) \quad [-] \quad (5.13)$$

L’exposant de propagation est ici une fonction purement imaginaire de la fréquence. Une onde se propage sans affaiblissement et on se trouve alors dans une *bande passante*.

Comme le terme $\underline{\gamma}_p d$ est défini par l’argument d’une fonction hyperbolique complexe, sa partie imaginaire est toujours définie avec une périodicité $\pm 2m\pi$, où m est un nombre entier. Les solutions forment un ensemble infini de valeurs discrètes qui correspondent aux *modes de Floquet*.

L’affaiblissement et le déphasage produits par une cellule dans le cas asymptotique sont représentés à la figure 5.9, en fonction de βd pour une ligne sans pertes chargée de capacités en parallèle (fig. 5.8).

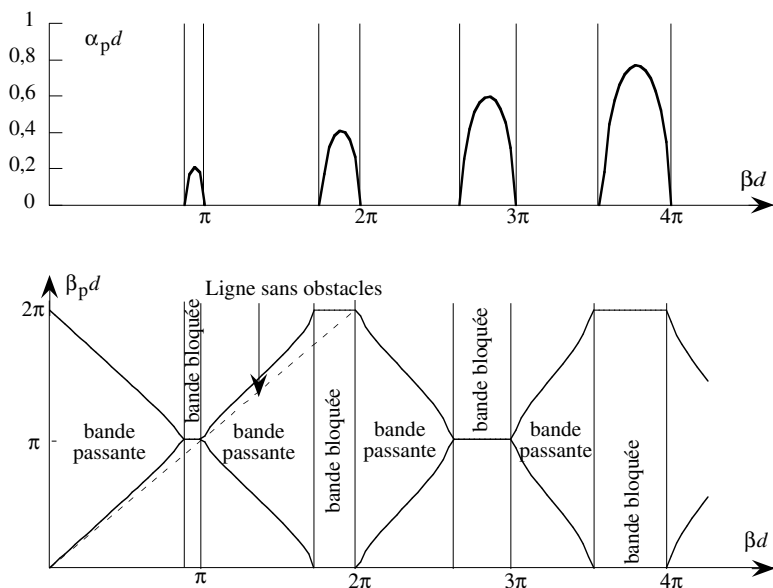


Fig. 5.9 Déphasage et affaiblissement asymptotiques sur une structure périodique.

On constate qu’il y a un affaiblissement dans les bandes bloquées, qui passe par un maximum au voisinage du centre de la bande. Cet affaiblissement varie beaucoup avec la fréquence, ce qui n’est pas souhaitable pour réaliser des filtres, où on souhaite que l’affaiblissement soit constant: on a donc recours à des structures plus élaborées [51].

Le déphasage $\beta_p d$ a une périodicité de 2π : la figure 5.9 ne représente que la “tranche” allant de 0 à 2π . On notera la présence de courbes descendantes, qui correspondent à des caractéristiques inverses (§ 2.4.5).

5.2.6 Ligne de transmission chargée de réactances en série

Le problème dual de la figure 5.5 se traite exactement de la même façon, en remplaçant simplement le terme $\underline{Z}_c \underline{Y}_d$ de l'équation (5.8) par $\underline{Y}_c \underline{Z}_d$

$$\cosh(\underline{\gamma}_p d) = \cosh(\underline{\gamma} d) + (\underline{Y}_c \underline{Z}_d / 2) \sinh(\underline{\gamma} d) \quad [-] \quad (5.14)$$

On détermine l'affaiblissement et le déphasage comme pour des susceptances en parallèle. Les courbes des figures 5.8 and 5.9 correspondent à une ligne sans pertes chargée périodiquement par des inductances en série (ligne pupinisée, § 5.1.5).

5.2.7 Obstacles d'épaisseur non nulle

On peut tenir compte des dimensions non nulles des obstacles réels en les remplaçant par une section de ligne ayant des propriétés différentes (fig. 5.10). La matrice de chaîne de la cellule est obtenue en multipliant les matrices des trois sections successives.

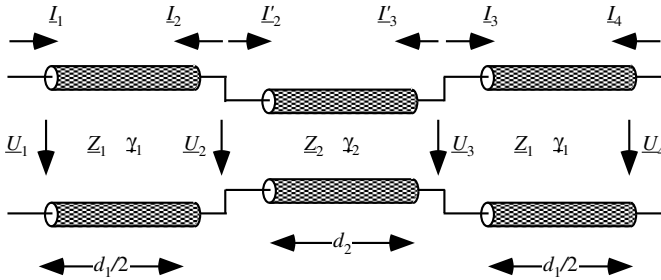


Fig. 5.10 Cellule formée de deux lignes de transmission de propriétés différentes.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \cosh(\underline{\gamma}_1 d_1 / 2) & \underline{Z}_1 \sinh(\underline{\gamma}_1 d_1 / 2) \\ \underline{Y}_1 \sinh(\underline{\gamma}_1 d_1 / 2) & \cosh(\underline{\gamma}_1 d_1 / 2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh(\underline{\gamma}_2 d_2) & \underline{Z}_2 \sinh(\underline{\gamma}_2 d_2) \\ \underline{Y}_2 \sinh(\underline{\gamma}_2 d_2) & \cosh(\underline{\gamma}_2 d_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh(\underline{\gamma}_1 d_1 / 2) & \underline{Z}_1 \sinh(\underline{\gamma}_1 d_1 / 2) \\ \underline{Y}_1 \sinh(\underline{\gamma}_1 d_1 / 2) & \cosh(\underline{\gamma}_1 d_1 / 2) \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix} \quad (5.15) \end{aligned}$$

où les quatre termes de la matrice de chaîne sont donnés par

$$\begin{aligned} \underline{A} = \underline{D} &= \cosh(\underline{\gamma}_1 d_1) \cosh(\underline{\gamma}_2 d_2) + \frac{\underline{Y}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Y}_2 \underline{Z}_1}{2} \sinh(\underline{\gamma}_1 d_1) \sinh(\underline{\gamma}_2 d_2) \\ \underline{B} &= -\underline{Z}_1 \left[\sinh(\underline{\gamma}_1 d_1) \cosh(\underline{\gamma}_2 d_2) + \left\{ \frac{\underline{Y}_1 \underline{Z}_2}{2} (1 + \cosh(\underline{\gamma}_1 d_1)) - \frac{\underline{Y}_2 \underline{Z}_1}{2} (1 - \cosh(\underline{\gamma}_1 d_1)) \right\} \sinh(\underline{\gamma}_2 d_2) \right] \\ \underline{C} &= -\underline{Y}_1 \left[\sinh(\underline{\gamma}_1 d_1) \cosh(\underline{\gamma}_2 d_2) + \left\{ \frac{\underline{Y}_2 \underline{Z}_1}{2} (1 + \cosh(\underline{\gamma}_1 d_1)) - \frac{\underline{Y}_1 \underline{Z}_2}{2} (1 - \cosh(\underline{\gamma}_1 d_1)) \right\} \sinh(\underline{\gamma}_2 d_2) \right] \quad (5.16) \end{aligned}$$

On constate que $\underline{A}\underline{D} - \underline{B}\underline{C} = 1$, ce qui signifie que la structure est réciproque. Le facteur de propagation de Floquet pour le cas asymptotique est alors donné par

$$\cosh(\underline{\gamma}_p d) = \cosh(\underline{\gamma}_1 d_1) \cosh(\underline{\gamma}_2 d_2) + \frac{\underline{Y}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Y}_2 \underline{Z}_1}{2} \sinh(\underline{\gamma}_1 d_1) \sinh(\underline{\gamma}_2 d_2) \quad (5.17)$$

5.3 LIGNE PÉRIODIQUE DE LONGUEUR FINIE

5.3.1 Description

Les développements asymptotiques (sect. 5.2) déterminent, de façon générale, les bandes de fréquence sur lesquelles les signaux se propagent et celles pour lesquelles ils sont affaiblis, mais ils ne prennent pas en considération les conditions aux limites aux deux extrémités de la ligne.

Les propriétés réelles d'une connexion de N cellules identiques en cascade, avec un nombre fini N de cellules, sont obtenues en multipliant N fois la matrice de chaîne d'une cellule de base (5.5). On peut bien entendu effectuer ce calcul sans problème à l'ordinateur, mais on peut aussi obtenir une meilleure compréhension du phénomène en effectuant les développements mathématiques détaillés.

5.3.2 Valeurs propres et vecteurs propres

En vue d'obtenir des équations explicites, on développe la matrice de chaîne d'une cellule de base en termes de ses vecteurs propres et de ses valeurs propres, qu'il s'agit d'abord de déterminer comme suit

$$\begin{bmatrix} \cosh(\underline{\gamma}d) + \frac{Z_c \underline{Y}_d}{2} \sinh(\underline{\gamma}d) & Z_c \left[\sinh(\underline{\gamma}d) + \frac{Z_c \underline{Y}_d}{2} \{ \cosh(\underline{\gamma}d) - 1 \} \right] \\ \underline{Y}_c \left[\sinh(\underline{\gamma}d) + \frac{Z_c \underline{Y}_d}{2} \{ \cosh(\underline{\gamma}d) + 1 \} \right] & \cosh(\underline{\gamma}d) + \frac{Z_c \underline{Y}_d}{2} \sinh(\underline{\gamma}d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{Y}_p \end{bmatrix} = \underline{\Lambda} \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{Y}_p \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Les valeurs propres prennent la forme

$$\underline{\Lambda}_{\pm} = e^{\pm \underline{\gamma}_p d} = \cosh(\underline{\gamma}_p d) \pm \sinh(\underline{\gamma}_p d) \quad [-] \quad (5.19)$$

On note que $\underline{\Lambda}_+ = 1/\underline{\Lambda}_-$, et l'on obtient $\underline{\gamma}_p d$ par la relation

$$\cosh(\underline{\gamma}_p d) = \cosh(\underline{\gamma}d) + (Z_c \underline{Y}_d / 2) \sinh(\underline{\gamma}d) \quad [-] \quad (5.8)$$

Les deux vecteurs propres correspondants sont, respectivement $(1, \underline{Y}_p)$ et $(1, -\underline{Y}_p)$, où l'admittance \underline{Y}_p de la ligne périodique est donnée par

$$\underline{Y}_p = \frac{1}{Z_p} = \frac{\underline{Y}_c \{ \sinh(\underline{\gamma}d) + (\underline{Y}_d Z_c / 2) [\cosh(\underline{\gamma}d) + 1] \}}{\sinh(\underline{\gamma}_p d)} \quad [S] \quad (5.20)$$

Dans les bandes passantes, l'impédance caractéristique périodique d'une ligne sans pertes est réelle, et elle devient purement imaginaire dans les bandes bloquées. Sa dépendance fréquentielle pour le cas de la ligne à obstacles périodiques considérée dans les figures 5.8 et 5.9 est représentée dans la figure 5.11.

Dans une structure périodique dissipative, en revanche, l'impédance caractéristique périodique est toujours une grandeur complexe.

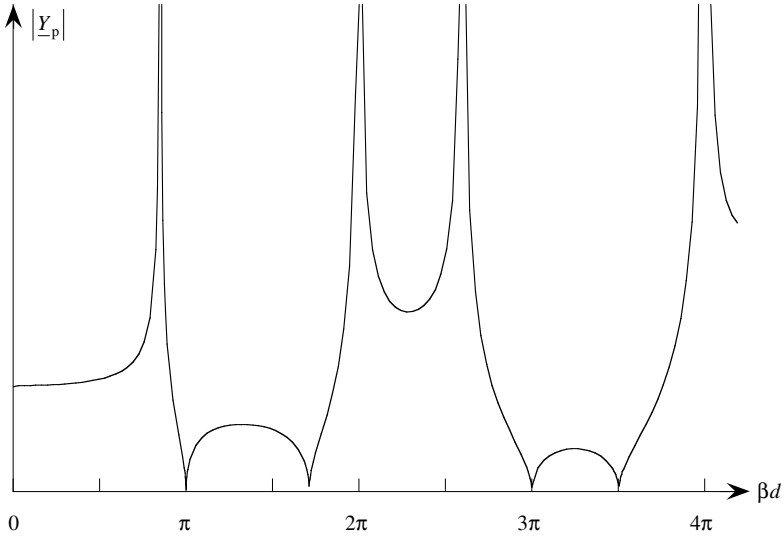


Fig. 5.11 Module de l'admittance caractéristique de la ligne périodique de la figure 5.8.

Pour la ligne à obstacles d'épaisseur non nulle (§ 5.2.7), on procède de la même façon et on obtient [13]

$$\underline{Y}_p = \frac{\underline{Y}_1 \left[\sinh(\underline{\gamma}_1 d_1) \cosh(\underline{\gamma}_2 d_2) + \left\{ \frac{\underline{Y}_2 \underline{Z}_1}{2} (1 + \cosh(\underline{\gamma}_1 d_1)) - \frac{\underline{Y}_1 \underline{Z}_2}{2} (1 - \cosh(\underline{\gamma}_1 d_1)) \right\} \sinh(\underline{\gamma}_2 d_2) \right]}{\sinh(\underline{\gamma}_p d)} \quad [\text{S}] \quad (5.21)$$

5.3.3 Matrice de chaîne de l'assemblage en cascade

La multiplication de N matrices de chaîne donne, en utilisant les valeurs propres et les vecteurs propres [13]

$$\begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix}^N = \frac{1}{2\underline{Y}_p} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \underline{Y}_p & -\underline{Y}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Lambda}_+^N & 0 \\ 0 & \underline{\Lambda}_-^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Y}_p & 1 \\ \underline{Y}_p & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\underline{\gamma}_p Nd) & \underline{Z}_p \sinh(\underline{\gamma}_p Nd) \\ \underline{Y}_p \sinh(\underline{\gamma}_p Nd) & \cosh(\underline{\gamma}_p Nd) \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

5.3.4 Remarque

Comparant ce résultat avec la matrice de chaîne d'une simple section de ligne de transmission (§ 3.1.7), on constate que la matrice de chaîne d'une ligne chargée de N obstacles, disposés périodiquement le long de la ligne, est exactement la même que celle d'une ligne de longueur Nd ayant un exposant de propagation $\underline{\gamma}_p$ et une impédance caractéristique \underline{Z}_p .

Par conséquent, les développements du chapitre 4 sont directement applicables à l'étude de la ligne à obstacles périodiques. Il faut toutefois noter que les paramètres de cette ligne dépendent de la fréquence de façon relativement complexe (fig. 5.9).

5.3.5 Facteur de transfert en tension

Le rapport de la tension aux bornes de la terminaison à la tension de source est obtenu en introduisant les conditions aux deux extrémités de la ligne (§ 3.3.1, § 3.5.2)

$$\underline{U}_t = \underline{Z}_t I_t \quad [\text{V}] \quad (5.23)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_g - \underline{Z}_g I_1 \quad [\text{V}] \quad (5.24)$$

où la terminaison a une impédance \underline{Z}_t et le générateur est défini par sa tension à vide \underline{U}_g et son impédance interne \underline{Z}_g . La tension et le courant à l'entrée de la terminaison (\underline{U}_t, I_t) sont liés à la tension et au courant à l'entrée de la ligne (\underline{U}_1, I_1) par la matrice de chaîne de (5.22). Quelques calculs donnent le rapport des tensions

$$\frac{\underline{U}_t}{\underline{U}_g} = \frac{1}{(\underline{Z}_p \underline{Y}_t + \underline{Y}_p \underline{Z}_g) \sinh(\underline{\gamma}_p Nd) + (1 + \underline{Z}_g \underline{Y}_t) \cosh(\underline{\gamma}_p Nd)} \quad [-] \quad (5.25)$$

Pour trouver le rapport entre la tension qui apparaît aux bornes de terminaison et celle qui est appliquée à l'autre extrémité de la ligne, il suffit de poser $\underline{Z}_g = 0$ dans la relation (5.25).

5.3.6 Transfert de puissance

On obtient ensuite la puissance active absorbée par la charge en calculant

$$P_t = R_t |I_t|^2 = R_t |\underline{Y}_t \underline{U}_t|^2 \quad [\text{W}] \quad (5.26)$$

Faisant ensuite usage de (5.25), on obtient

$$P_t = \frac{R_t |\underline{U}_g \underline{Y}_p|^2}{\left| (\underline{Z}_g \underline{Z}_t \underline{Y}_p^2 + 1) \sinh(\underline{\gamma}_p Nd) + (\underline{Z}_g + \underline{Z}_t) \underline{Y}_p \cosh(\underline{\gamma}_p Nd) \right|^2} \quad [-] \quad (5.27)$$

On normalise ensuite par rapport à la puissance d'échange du générateur, donnée par

$$P_e = |\underline{U}_g|^2 / (4R_g) \quad [\text{W}] \quad (3.51)$$

et on obtient

$$\frac{P_t}{P_e} = \frac{4R_g R_t |\underline{Y}_p|^2}{\left| (\underline{Z}_g \underline{Z}_t \underline{Y}_p^2 + 1) \sinh(\underline{\gamma}_p Nd) + (\underline{Z}_g + \underline{Z}_t) \underline{Y}_p \cosh(\underline{\gamma}_p Nd) \right|^2} \quad [-] \quad (5.28)$$

On note la similitude avec la relation (3.53) pour le transfert de puissance à travers un tronçon de ligne de transmission uniforme. Les calculs qu'il s'agit d'effectuer sont les mêmes, en remplaçant les termes spécifiques de la ligne uniforme par ceux de la ligne à obstacles périodique.

5.4 EXERCICES

5.4.1 Une ligne de transmission sans pertes, avec une impédance caractéristique de 50Ω et une vitesse de propagation c_0 (ligne à air), est chargée de façon périodique par des inductances de $41,7 \text{ nH}$ connectées en parallèle tous les 50 centimètres le long de la ligne. Déterminer, dans le cas asymptotique (Floquet), les bandes passantes et les bandes bloquées de la structure.

5.4.2 Que se passe-t-il lorsque la susceptance B est elle-même formée d'une inductance et d'une capacité connectées en série? Comment cela affecte-t-il la distribution des bandes passantes et bloquées par rapport à la figure 5.8 et au problème 5.4.1 ? Est-ce qu'une telle structure pourrait servir à une application pratique ?

5.4.3 Considérer la même situation que celle du problème 5.4.2, mais avec une inductance et une capacité connectées en parallèle.

5.4.4 Déterminer les vitesses de phase et de groupe dans les deux premières branches du diagramme de dispersion $\beta(\omega)$ de la figure 5.9.

5.4.5 Évaluer la réduction d'affaiblissement obtenue en insérant des bobines Pupin de $88,5 \text{ mH}$, placées avec un espacement de 1830 mètres entre bobines sur une ligne téléphonique avec $L' = 0,7 \text{ mH/km}$, $C' = 35 \text{ nF/km}$, $R' = 45 \Omega/\text{km}$ et $G' = 0,1 \text{ nS/km}$.

5.4.6 Déterminer l'admittance de ligne périodique en fonction de la fréquence pour la ligne considérée dans le problème 5.4.1.

5.4.7 Vérifier que lorsqu'on pose $N = 1$ dans (5.22), on retrouve bien la matrice de chaîne de (5.5).

LIGNES COUPLÉES

6.1 DÉFINITIONS

6.1.1 Concepts de base

Lorsqu'un courant électrique circule sur une ligne ouverte, telle qu'une ligne bifilaire (fig. 2.9) ou une ligne microruban (fig. 2.12), il crée des champs électromagnétiques autour de cette ligne (1.13). Quand la fréquence du signal est suffisamment basse, la structure ne rayonne pas – ce n'est pas une antenne – et les champs décroissent rapidement lorsqu'on s'éloigne de la ligne. Les énergies électrique et magnétique (sect. 1.7) restent concentrées dans le voisinage immédiat des conducteurs.

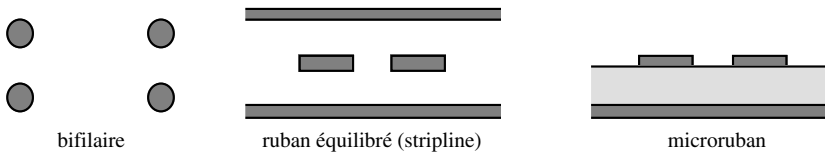


Fig. 6.1 Sections droites de lignes couplées.

Si l'on place une seconde ligne de transmission au voisinage immédiat de la première (fig. 6.1), les champs produits par le signal qui se propage sur l'une des lignes peuvent produire un signal sur la seconde. Le champ électrique fait apparaître une tension (couplage *capacitif*) tandis que le champ magnétique induit un courant (couplage *inductif*). Les deux couplages augmentent avec la proximité. Ils sont répartis le long des lignes, de sorte que leur effet devient d'autant plus important que la ligne est longue.

6.1.2 Coupleurs directs

On peut tirer profit du couplage entre deux lignes pour construire des *coupleurs directs*, qui sont des composants à quatre accès (quadriports) couramment utilisés en hyperfréquences pour prélever une partie du signal dont on veut mesurer ou contrôler la fréquence et la puissance (sect. XIII.6.5) [52].

On peut de cette manière coupler une certaine puissance d'une ligne à une autre en vue de répartir le signal. Un couplage peut aussi être obtenu entre des structures de propagation de nature très différente, par exemple entre un guide d'ondes et un faisceau de particules: on fait usage de cet effet dans des accélérateurs de particules (sect. XIII.8.8) et dans des tubes électroniques générateurs d'hyperfréquences (sect. XIII.4.4).

6.1.3 Diaphonie

Dans beaucoup d'autres situations, en revanche, le couplage de proximité entre deux lignes de transmission est un phénomène hautement indésirable. C'est en particulier le cas des lignes téléphoniques, où le signal transmis à un abonné peut atteindre d'autres utilisateurs, à qui il n'est pas destiné (fig. 6.2). Ce couplage parasite est appelé *diaphonie* (§ XVIII.2.4.11) [53].

Un faible niveau de diaphonie produit un bruit de fond qui peut n'être que déplaisant, tandis qu'un niveau important entraîne une perte de confidentialité. Dans des systèmes de transmission de données entre ordinateurs, la diaphonie peut faire apparaître des bits supplémentaires et ainsi provoquer des erreurs de transmission.

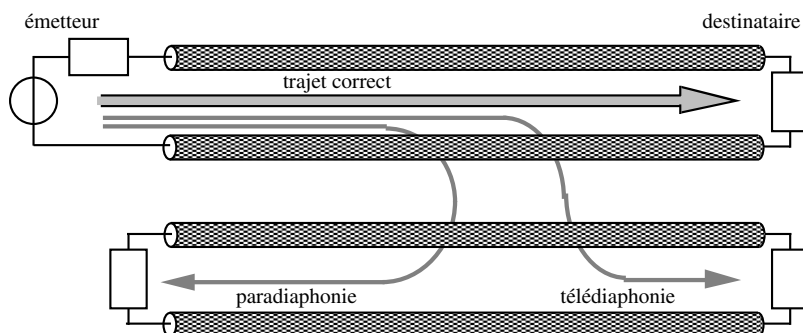


Fig. 6.2 Principe de la diaphonie entre des lignes téléphoniques.

Lorsqu'un couplage se produit entre une ligne de transfert d'énergie (ligne à haute tension) et une ligne de transfert de signal, son effet peut avoir des conséquences destructives, de sorte qu'un soin tout particulier doit être pris pour le maintenir à une valeur tolérable (sect. XXII.7.7).

6.1.4 Remarque générale

L'analyse de lignes couplées peut donner lieu à des développements très complexes, de sorte qu'on limite souvent l'étude à des cas simples: deux lignes identiques, sans pertes, faiblement couplées – ou encore on ne considère que les interactions qui ont lieu entre ondes progressives, etc. [54].

Les développements qui suivent esquissent d'abord l'étude rigoureuse d'une ligne couplée linéaire, réciproque et uniforme, ayant un nombre quelconque de conducteurs. À l'aide d'un ordinateur, on peut alors analyser la propagation sur des lignes couplées de types très divers, qui peuvent comporter des pertes et de la dispersion. L'étude est par la suite appliquée au cas particulier du couplage entre deux lignes.

Des phénomènes similaires existent dans d'autres situations, par exemple celle des résonateurs couplés en physique [55] et en électronique, tandis qu'en mécanique le cas des pendules couplés est bien connu ("berceau de Newton", minarets oscillants d'Ahmedabad en Inde, etc.). Les développements présentés ici pour des lignes de transmission peuvent être adaptés à l'étude de telles structures.

6.2 DÉVELOPPEMENT MATHÉMATIQUE GÉNÉRAL

6.2.1 Définition du modèle de la ligne couplée

On considère un ensemble de $N + 1$ conducteurs disposés le long de l'axe longitudinal z . Un des conducteurs – le conducteur 0 – sert de référence de tension – on l'appelle en général le conducteur neutre, la terre ou le plan de masse (fig. 6.3).

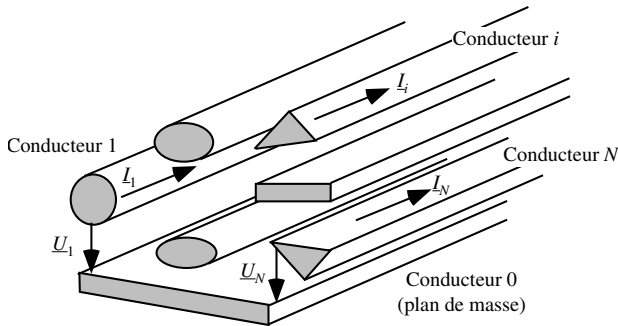


Fig. 6.3 Lignes couplées dans le cas général de $N + 1$ conducteurs.

On considère des tensions et des courants à dépendance sinusoïdale de pulsation ω au moyen de la notation complexe (phaseurs) introduite au chapitre 3. Le schéma équivalent défini dans le paragraphe 2.1.3 est étendu en ajoutant tous les effets capacitifs et inductifs (propres et mutuels) entre les $N + 1$ conducteurs, et on tient aussi compte des pertes par conduction (résistances en série) et par courant de fuite entre conducteurs [56].

6.2.2 Équations des lignes couplées

On généralise ici le concept des équations des lignes, définies par (3.13) et (3.14). Les relations qui lient les tensions et les courants sur des conducteurs multiples sont exprimées par une formulation matricielle

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} I_1(z) \\ I_2(z) \\ \dots \\ I_i(z) \\ \dots \\ I_N(z) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Y'_{11} & Y'_{12} & \dots & Y'_{1i} & \dots & Y'_{1N} \\ Y'_{21} & Y'_{22} & \dots & Y'_{2i} & \dots & Y'_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y'_{i1} & Y'_{i2} & \dots & Y'_{ii} & \dots & Y'_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y'_{N1} & Y'_{N2} & \dots & Y'_{Ni} & \dots & Y'_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(z) \\ U_2(z) \\ \dots \\ U_i(z) \\ \dots \\ U_N(z) \end{bmatrix} \quad [\text{A/m}] \quad (6.1)$$

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} U_1(z) \\ U_2(z) \\ \dots \\ U_i(z) \\ \dots \\ U_N(z) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Z'_{11} & Z'_{12} & \dots & Z'_{1i} & \dots & Z'_{1N} \\ Z'_{21} & Z'_{22} & \dots & Z'_{2i} & \dots & Z'_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z'_{i1} & Z'_{i2} & \dots & Z'_{ii} & \dots & Z'_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z'_{N1} & Z'_{N2} & \dots & Z'_{Ni} & \dots & Z'_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(z) \\ I_2(z) \\ \dots \\ I_i(z) \\ \dots \\ I_N(z) \end{bmatrix} \quad [\text{V/m}] \quad (6.2)$$

Les deux matrices carrées d'ordre N comportent des admittances en parallèle $\underline{Y}'_{ij} = G'_{ij} + j\omega C'_{ij}$ et des impédances en série $\underline{Z}'_{ij} = R'_{ij} + j\omega L'_{ij}$. Comme les effets capacitifs portent sur la différence des tensions entre deux conducteurs, les admittances \underline{Y}'_{ij} sur la diagonale de la matrice sont affectées par le couplage: ce ne sont pas simplement les admittances linéiques en parallèle des lignes non couplées. Pour simplifier la notation, on exprime le plus souvent ces deux équations sous une forme compacte

$$\frac{d}{dz}[\underline{\mathbf{I}}(z)] = -[\underline{\mathbf{Y}}'][\underline{\mathbf{U}}(z)] \quad \text{et} \quad \frac{d}{dz}[\underline{\mathbf{U}}(z)] = -[\underline{\mathbf{Z}}'][\underline{\mathbf{I}}(z)] \quad (6.3)$$

On peut ensuite combiner ces deux équations pour obtenir une seule relation matricielle de premier ordre

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{U}}(z) \\ \underline{\mathbf{I}}(z) \end{bmatrix} = \frac{d}{dz} [\underline{\Phi}(z)] = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \underline{\mathbf{Z}}' \\ \underline{\mathbf{Y}}' & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}(z) \\ \underline{I}(z) \end{bmatrix} = -[\underline{\mathbf{M}}] \begin{bmatrix} \underline{U}(z) \\ \underline{I}(z) \end{bmatrix} = -[\underline{\mathbf{M}}][\underline{\Phi}(z)] \quad (6.4)$$

Cette relation définit le vecteur colonne $[\underline{\Phi}(z)]$, formé des tensions et des courants, et la matrice $[\underline{\mathbf{M}}]$, qui contient les impédances et les admittances. Ils sont tous deux d'ordre $2N$. La moitié des termes de $[\underline{\mathbf{M}}]$ sont nuls (sous-matrices sur la diagonale).

6.2.3 Exponentielle matricielle

La relation (6.4) est une équation différentielle matricielle à coefficients constants. Comme pour le cas non matriciel, elle admet comme solutions des exponentielles – qui deviennent ici des matrices [57, 58]

$$[\underline{\Phi}(z)] = e^{[\underline{\mathbf{M}}]z} [\underline{\Phi}(0)] = [\underline{\mathbf{T}}(z)][\underline{\Phi}(0)] \quad (6.5)$$

L'exponentielle matricielle est définie de la même façon que l'exponentielle scalaire, au moyen d'un développement en série

$$e^{[\underline{\mathbf{M}}]z} = [\underline{\mathbf{T}}(z)] = [\underline{\mathbf{I}}] + [\underline{\mathbf{M}}]z + \frac{1}{2}[\underline{\mathbf{M}}]^2 z^2 + \frac{1}{3!}[\underline{\mathbf{M}}]^3 z^3 + \dots + \frac{1}{i!}[\underline{\mathbf{M}}]^i z^i + \dots \quad (6.6)$$

La relation (6.5) fournit une fonction de transfert $[\underline{\mathbf{T}}(z)]$, qui définit $[\underline{\Phi}(z)]$ en un emplacement quelconque z le long de la ligne couplée, en fonction de $[\underline{\Phi}(0)]$ au début de la ligne en $z = 0$.

En principe, on peut calculer (à l'ordinateur) l'exponentielle matricielle en effectuant la somme de la série matricielle, jusqu'à ce qu'elle converge. Malheureusement, les différents termes de la matrice $[\underline{\mathbf{T}}(z)]$ convergent de manière différente, et il est difficile de déterminer combien de termes il faut prendre pour assurer la convergence de l'ensemble. Cette manière de procéder est par conséquent peu efficace.

On peut, en revanche, déterminer de façon rigoureuse toutes les composantes de la matrice $[\underline{\mathbf{T}}(z)]$, en la développant en fonction des valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice $[\underline{\mathbf{M}}]$. On peut alors tirer profit des logiciels de calcul matriciel qui sont actuellement inclus dans la plupart des bibliothèques standard de programmes disponibles pour les calculs à l'ordinateur.

Ce n'est que pour de faibles valeurs de N (par exemple $N = 2$) qu'il peut être intéressant de développer analytiquement les expressions donnant les valeurs propres et les vecteurs propres (sect. 6.4).

6.2.4 Valeurs propres et vecteurs propres

On trouve les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $[\underline{\mathbf{M}}]$ en résolvant l'équation matricielle suivante

$$[\underline{\mathbf{M}}][\underline{\Phi}_i] = \underline{\gamma}_i [\underline{\Phi}_i] \quad (6.7)$$

Les valeurs propres $\underline{\gamma}_i$ sont les exposants de propagation des ondes qui se propagent sur des lignes couplées. En résolvant le système d'équations linéaires d'ordre $2N$, on obtient $2N$ valeurs propres $\underline{\gamma}_i$ et $2N$ vecteurs propres $[\underline{\Phi}_i]$. On trouve ainsi les N modes de propagation, chaque mode comportant une onde progressive et une onde rétrograde – qui peuvent se propager individuellement sur la ligne. La solution prend la forme

$$[\underline{\Phi}(z)] = \sum_{i=1}^N A_i [\underline{\Phi}_i^+] e^{-\underline{\gamma}_i z} + \sum_{i=1}^N B_i [\underline{\Phi}_i^-] e^{+\underline{\gamma}_i z} \quad (6.8)$$

La première somme porte sur les ondes progressives des N modes de propagation, la seconde sur les ondes rétrogrades de ces mêmes modes. On a admis que la structure est réciproque (§ 7.4.5), auquel cas les exposants de propagation sont égaux et de signe contraire. Quant aux vecteurs propres $[\underline{\Phi}_i^+]$ et $[\underline{\Phi}_i^-]$, leurs composantes de tension sont égales et les composantes de courant de signe contraire – comme on peut le voir dans le cas de $N = 2$ développé dans la section 6.4.

Tenant compte de ces constatations, on peut exprimer les tensions et les courants sur les lignes couplées en fonction des vecteurs propres sous la forme matricielle

$$\begin{bmatrix} [\underline{\mathbf{U}}(z)] \\ \hline [\underline{\mathbf{I}}(z)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\underline{\mathbf{P}}] & [\underline{\mathbf{P}}] \\ \hline [\underline{\mathbf{Q}}] & -[\underline{\mathbf{Q}}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\underline{\mathbf{G}}(z)] & [\underline{\mathbf{0}}] \\ \hline [\underline{\mathbf{0}}] & [\underline{\mathbf{G}}(-z)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\underline{\mathbf{A}}] \\ \hline [\underline{\mathbf{B}}] \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

où $[\underline{\mathbf{P}}]$ est la partie de la matrice des vecteurs propres qui concerne les tensions, $[\underline{\mathbf{Q}}]$ la partie relative aux courants, $[\underline{\mathbf{G}}(z)]$ la matrice diagonale de propagation, formée des termes $\exp(-\underline{\gamma}_i z)$, tandis que les vecteurs colonnes $[\underline{\mathbf{A}}]$ et $[\underline{\mathbf{B}}]$ contiennent les amplitudes des N ondes progressives et des N ondes rétrogrades. Ces amplitudes sont les inconnues du problème, qu'il s'agit de déterminer en appliquant les conditions aux extrémités des lignes couplées (générateurs et terminaisons, sect. 6.3).

On remarque que la dépendance longitudinale apparaît uniquement dans la sous-matrice $[\underline{\mathbf{G}}(z)]$, qui est une matrice diagonale d'ordre N .

6.2.5 Remarque

Les opérations impliquées dans les développements matriciels décrits ci-dessus – recherche des valeurs propres et des vecteurs propres – présentent une complexité qui augmente rapidement avec l'ordre N . Ce n'est que pour de très petites valeurs de N qu'elles peuvent être déterminées algébriquement. Le cas $N = 1$ correspond à la simple ligne de transmission considérée aux chapitres 3 et 4, le cas $N = 2$ est considéré plus en détail dans la section 6.4.

Dès que $N > 2$, les développements mathématiques deviennent extrêmement longs, et il devient nettement préférable de faire les calculs à l'ordinateur, en utilisant les logiciels de calcul destinés au calcul matriciel.

6.3 CONDITIONS AUX LIMITES

6.3.1 Relations entre les courants et les tensions aux terminaisons

La ligne couplée se termine en $z = d$ sur un ensemble de terminaisons, qui sont connectées entre les $N + 1$ conducteurs (fig. 6.4).

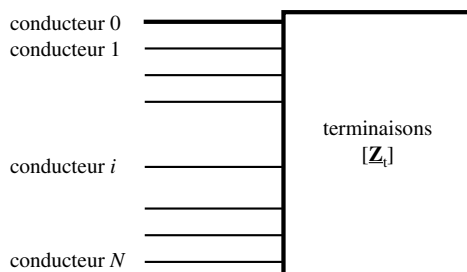


Fig. 6.4 Terminaisons à l'extrémité d'une ligne couplée.

On peut représenter les relations entre les tensions et les courants au niveau des terminaisons par une matrice d'impédance

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1(d) \\ \underline{U}_2(d) \\ \dots \\ \underline{U}_i(d) \\ \dots \\ \underline{U}_N(d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{t11} & \underline{Z}_{t12} & \dots & \underline{Z}_{t1i} & \dots & \underline{Z}_{t1N} \\ \underline{Z}_{t21} & \underline{Z}_{t22} & \dots & \underline{Z}_{t2i} & \dots & \underline{Z}_{t2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{Z}_{ti1} & \underline{Z}_{ti2} & \dots & \underline{Z}_{tii} & \dots & \underline{Z}_{tiN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{Z}_{tN1} & \underline{Z}_{tN2} & \dots & \underline{Z}_{tNi} & \dots & \underline{Z}_{tNN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(d) \\ I_2(d) \\ \dots \\ I_i(d) \\ \dots \\ I_N(d) \end{bmatrix} \quad [\text{V}] \quad (6.10)$$

ou, sous forme compacte,

$$[\underline{\mathbf{U}}(d)] = [\underline{\mathbf{Z}}_t][\underline{\mathbf{I}}(d)] \quad [\text{V}] \quad (6.11)$$

6.3.2 Facteur de réflexion généralisé

Connaissant la matrice des impédances de terminaison et la matrice des valeurs propres des modes de la ligne couplée, on peut déterminer les amplitudes des ondes réfléchies en fonction de celles des ondes incidentes. Pour ce faire, on définit un facteur de réflexion généralisé matriciel $[\underline{\mathbf{R}}]$ défini par

$$[\underline{\mathbf{B}}] = [\underline{\mathbf{R}}][\underline{\mathbf{A}}] \quad (6.12)$$

Il est possible d'expliciter $[\underline{\mathbf{R}}]$ en faisant usage des relations (6.9) et (6.11), ce qui donne après quelques développements

$$[\underline{\mathbf{R}}] = [\underline{\mathbf{G}}(2d)] \left\{ [\underline{\mathbf{P}}]^{-1} [\underline{\mathbf{Z}}_t] - [\underline{\mathbf{Q}}]^{-1} \right\} \left\{ [\underline{\mathbf{P}}]^{-1} [\underline{\mathbf{Z}}_t] + [\underline{\mathbf{Q}}]^{-1} \right\}^{-1} \quad [-] \quad (6.13)$$

6.3.3 Adaptation sans réflexion

Pour supprimer les ondes réfléchies, c'est-à-dire pour avoir $[\mathbf{B}] = 0$ pour n'importe quelle distribution d'ondes incidentes $[\mathbf{A}]$, il faut que tous les termes de la matrice $[\mathbf{R}]$ soient nuls. La relation matricielle (6.13) fournit alors un ensemble de N^2 équations pour déterminer les N^2 termes de la matrice d'impédance des terminaisons $[\mathbf{Z}_t]$.

Le système à résoudre devient fort complexe et on fera généralement usage des techniques de conception assistée par ordinateur décrites dans le paragraphe 4.4.10.

6.3.4 Conditions aux bornes du générateur

À l'autre extrémité des lignes couplées, on connecte des sources de signaux. On peut avoir jusqu'à N générateurs indépendants, représentés par des sources de tensions \underline{U}_{gi} connectées aux lignes par une matrice d'impédance $[\mathbf{Z}_g]$ (fig. 6.5).

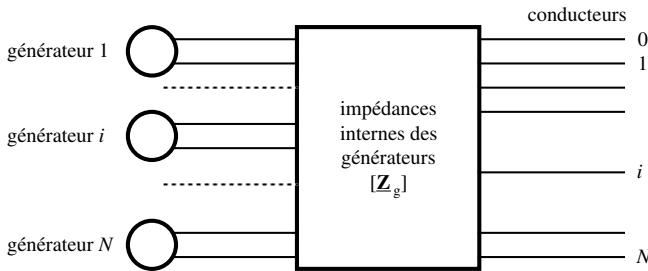


Fig. 6.5 Générateurs connectés au début d'un ensemble de lignes couplées.

Ce système est représenté par l'équation matricielle

$$[\mathbf{U}(0)] = [\mathbf{U}_g] - [\mathbf{Z}_g][\mathbf{I}(0)] \quad (6.14)$$

On peut remplacer les tensions et courants par leurs valeurs, tirées de (6.9), puis éliminer la matrice des $[\mathbf{B}]$ à l'aide de (6.12) et (6.13), ce qui donne les amplitudes des ondes incidentes $[\mathbf{A}]$. Le système est alors totalement défini et on peut calculer les tensions et les courants sur tous les conducteurs n'importe où le long de la ligne.

6.3.5 Commentaires

On a esquissé ici une méthode générale pour le calcul de la distribution des tensions et des courants sur un ensemble de $N + 1$ conducteurs rectilignes et parallèles, qui peuvent comporter des pertes et de la dispersion. Le système de lignes et les composants qui sont connectés aux deux extrémités doivent tous être linéaires.

Une structure formée de $N + 1$ conducteurs peut supporter N modes indépendants, c'est-à-dire pouvant se propager sans se mélanger [59]. On dit encore que ces modes sont orthogonaux. Chacun des modes peut comporter une onde progressive et une onde rétrograde. Les amplitudes de toutes les ondes sont déterminées par la résolution d'un système d'équations matricielles. On peut alors déterminer la distribution des signaux sur l'ensemble des lignes et en déduire les effets du couplage – et, éventuellement, les moyens d'en faire usage ou de les supprimer.

6.4 CAS PARTICULIER DE DEUX LIGNES COUPLÉES

6.4.1 Définition de la structure

On considère plus en détail le développement pour deux lignes couplées, par exemple des lignes dont les sections droites sont représentées dans la figure 6.1. Une section infinitésimale de ligne, de longueur dz , est alors représentée par le schéma équivalent de la figure 6.6, qui correspond en fait à un système à trois conducteurs [60].

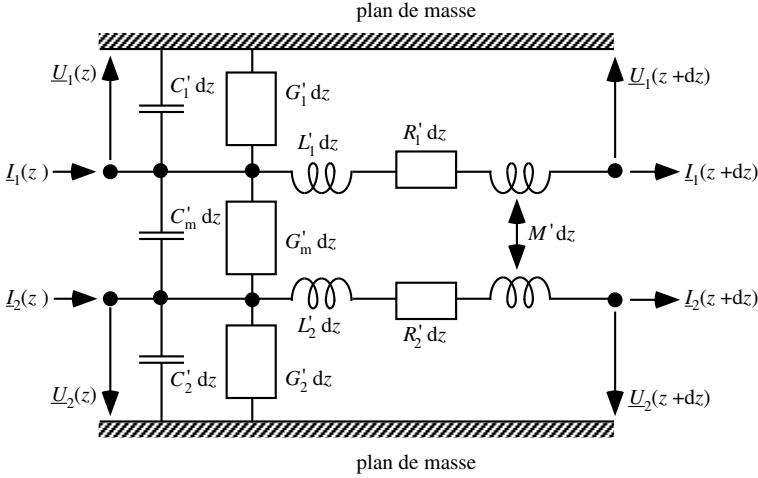


Fig. 6.6 Schéma équivalent d'une ligne couplée pour le cas $N = 2$.

On considère deux lignes $L'C'$ qui peuvent comporter des pertes (§ 3.4.2), couplées l'une à l'autre inductivement (élément M'), capacitivement (C'_m) et par conduction de fuite à travers l'isolant (G'_m). Les deux lignes ont le même plan de masse, qui est représenté schématiquement de part et d'autre des deux lignes dans la figure.

Considérant les tensions et les courants aux deux extrémités de la ligne, on détermine les termes de la matrice $[M]$, définie dans la relation (6.4)

$$\begin{aligned}
 [M] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & R'_1 + j\omega L'_1 & j\omega M' \\ 0 & 0 & j\omega M' & R'_2 + j\omega L'_2 \\ (G'_1 + G'_m) + j\omega(C'_1 + C'_m) & -G'_m - j\omega C'_m & 0 & 0 \\ -G'_m - j\omega C'_m & (G'_2 + G'_m) + j\omega(C'_2 + C'_m) & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \underline{Z}'_1 & \underline{Z}'_m \\ 0 & 0 & \underline{Z}'_m & \underline{Z}'_2 \\ \underline{Y}'_1 + \underline{Y}'_m & -\underline{Y}'_m & 0 & 0 \\ -\underline{Y}'_m & \underline{Y}'_2 + \underline{Y}'_m & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.15)
 \end{aligned}$$

6.4.2 Valeurs propres et vecteurs propres

On cherche en premier lieu les valeurs propres de la matrice $[\mathbf{M}]$, données par

$$\underline{\gamma}_{1,2} = \sqrt{\frac{\underline{D}_1 + \underline{D}_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\underline{D}_1 - \underline{D}_2}{2}\right)^2 + \underline{F}_1 \underline{F}_2}} \quad [\text{m}^{-1}] \quad (6.16)$$

où l'indice 1 se réfère au signe positif devant la seconde racine et l'indice 2 au signe négatif. Les grandeurs auxiliaires introduites dans (6.16) sont définies par

$$\underline{D}_i = \underline{Z}'_i (\underline{Y}'_i + \underline{Y}'_m) - \underline{Z}'_m \underline{Y}'_m \quad \text{et} \quad \underline{F}_i = \underline{Z}'_m (\underline{Y}'_j + \underline{Y}'_m) - \underline{Z}'_i \underline{Y}'_m \quad i, j = 1, 2 \quad j \neq i \quad (6.17)$$

On cherche ensuite les quatre vecteurs propres de la matrice $[\mathbf{M}]$, qui servent à déterminer les quatre sous-matrices définies dans (6.9)

$$[\mathbf{P}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \underline{F}_2/\underline{K} & -\underline{K}/\underline{F}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \quad [-] \quad (6.18)$$

$$[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} \frac{(\underline{Y}'_2 + \underline{Y}'_m) - \underline{Y}'_m \underline{F}_2/\underline{K}}{\underline{\gamma}_1} & \frac{(\underline{Y}'_1 + \underline{Y}'_m) + \underline{Y}'_m \underline{K}/\underline{F}_1}{\underline{\gamma}_2} \\ \frac{(\underline{Y}'_2 + \underline{Y}'_m) \underline{F}_2/\underline{K} - \underline{Y}'_m}{\underline{\gamma}_1} & -\frac{(\underline{Y}'_1 + \underline{Y}'_m) \underline{K}/\underline{F}_1 + \underline{Y}'_m}{\underline{\gamma}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \quad [\text{S}] \quad (6.19)$$

$$\text{avec} \quad \underline{K} = \frac{\underline{D}_1 - \underline{D}_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\underline{D}_1 - \underline{D}_2}{2}\right)^2 + \underline{F}_1 \underline{F}_2} \quad [\text{m}^{-2}] \quad (6.20)$$

6.4.3 Terminaisons

L'extrémité des lignes, en $z = d$, est connectée à des terminaisons linéaires entre les deux lignes et entre les lignes et la masse, représentées dans la figure 6.7.

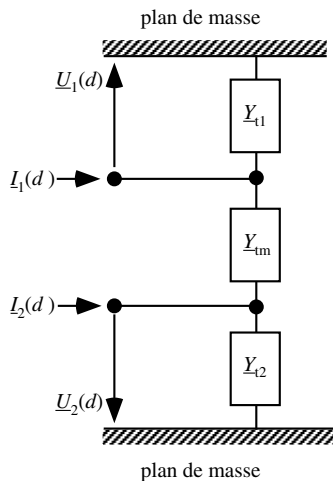


Fig. 6.7 Terminaisons à l'extrémité d'une ligne couplée pour le cas $N = 2$.

En écrivant les relations qui lient les courants dans les terminaisons aux tensions aux bornes de celle-ci, on définit la matrice des admittances des terminaisons $[\underline{\mathbf{Y}}_t]$

$$\begin{bmatrix} I_1(d) \\ I_2(d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{t1} + \underline{Y}_{tm} & -\underline{Y}_{tm} \\ -\underline{Y}_{tm} & \underline{Y}_{t2} + \underline{Y}_{tm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(d) \\ U_2(d) \end{bmatrix} = [\underline{\mathbf{Y}}_t] \begin{bmatrix} U_1(d) \\ U_2(d) \end{bmatrix} \quad [\text{S}] \quad (6.21)$$

La matrice des impédances des terminaisons est simplement l'inverse de $[\underline{\mathbf{Y}}_t]$

$$[\underline{\mathbf{Z}}_t] = [\underline{\mathbf{Y}}_t]^{-1} = \frac{1}{(\underline{Y}_{t1} + \underline{Y}_{tm})(\underline{Y}_{t2} + \underline{Y}_{tm}) - \underline{Y}_{tm}^2} \begin{bmatrix} \underline{Y}_{t2} + \underline{Y}_{tm} & \underline{Y}_{tm} \\ \underline{Y}_{tm} & \underline{Y}_{t1} + \underline{Y}_{tm} \end{bmatrix} \quad [\Omega] \quad (6.22)$$

On trouve ensuite le facteur matriciel de réflexion $[\underline{\mathbf{R}}]$ en introduisant dans la relation (6.13) les matrices obtenues dans (6.18), (6.19) et (6.22). Le développement donne toutefois des relations relativement complexes [13].

6.4.4 Adaptation sans réflexion

Pour supprimer les réflexions, il faut que tous les termes du facteur matriciel de réflexion $[\underline{\mathbf{R}}]$ soient nuls. On obtient ce résultat lorsque

$$[\underline{\mathbf{Z}}_t] = [\underline{\mathbf{P}}][\underline{\mathbf{Q}}]^{-1} \quad \text{ou que} \quad [\underline{\mathbf{Y}}_t] = [\underline{\mathbf{Q}}][\underline{\mathbf{P}}]^{-1} \quad (6.23)$$

On peut alors introduire les valeurs correspondantes de (6.18) et (6.19) et obtenir des expressions explicites pour les admittances des terminaisons [61]

$$\underline{Y}_{ti} = \frac{q_{i2}(p_{21} - 1) - q_{i1}(p_{22} - 1)}{p_{21} - p_{22}} \quad \underline{Y}_{tm} = \frac{q_{12} - q_{11}}{p_{21} - p_{22}} = \frac{p_{22}q_{21} - p_{21}q_{22}}{p_{21} - p_{22}} \quad (6.24)$$

Il est intéressant de constater qu'il ne suffit pas de connecter des éléments entre chacune des deux lignes et la masse, mais qu'il faut encore en connecter un troisième entre les deux lignes (fig. 6.7).

6.4.5 Cas particulier: excitation d'une seule ligne, sans réflexions

Comme quatre ondes peuvent se propager simultanément le long de la ligne couplée, l'allure des tensions et des courants le long de la ligne peut être très complexe. La présence d'une double onde stationnaire rend difficile la détermination des propriétés de la ligne à partir d'observations faites en présence des quatre ondes.

On obtient une image plus claire de la situation en considérant un cas simplifié d'excitation: on connecte des terminaisons adaptées à l'extrémité de la ligne, de façon à supprimer toutes les ondes rétrogrades, et on n'excite qu'une seule des deux lignes. On obtient cela en introduisant les conditions suivantes

$$[\underline{\mathbf{B}}] = [\underline{\mathbf{0}}] \quad \text{et} \quad \underline{U}_2(0) = 0 \quad (6.25)$$

Cette situation se rencontre couramment dans la pratique et son étude suffit souvent à fournir les informations recherchées. Par ailleurs, quand on a déterminé les tensions et les courants pour ce cas particulier d'excitation, on obtient la solution générale en superposant quatre solutions particulières.

Introduisant (6.25) dans la relation pour les tensions (6.9), on trouve que

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1(0) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_1 \\ \underline{A}_2 \end{bmatrix} \quad \text{et donc que} \quad \underline{A}_2 = -\underline{A}_1 \frac{p_{21}}{p_{22}} = \underline{A}_1 \frac{E_1 E_2}{\underline{K}^2} \quad (6.26)$$

Les tensions le long de la ligne sont alors données par

$$\begin{aligned} \underline{U}_1(z) &= \underline{A}_1 \left(e^{-\underline{\gamma}_1 z} + \frac{E_1 E_2}{\underline{K}^2} e^{-\underline{\gamma}_2 z} \right) = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}_m z} \left[\left(1 + \frac{E_1 E_2}{\underline{K}^2} \right) \cosh \Delta \underline{\gamma} z + \left(1 - \frac{E_1 E_2}{\underline{K}^2} \right) \sinh \Delta \underline{\gamma} z \right] \\ \underline{U}_2(z) &= p_{21} \underline{A}_1 \left(e^{-\underline{\gamma}_1 z} - e^{-\underline{\gamma}_2 z} \right) = 2 p_{21} \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}_m z} \sinh \Delta \underline{\gamma} z \quad [\text{V}] \end{aligned} \quad (6.27)$$

où l'on a posé $\underline{\gamma}_m = (\underline{\gamma}_1 + \underline{\gamma}_2)/2$ et $\Delta \underline{\gamma}_m = (\underline{\gamma}_1 - \underline{\gamma}_2)/2$. L'allure des tensions pour quelques cas particuliers est représentée dans la figure 6.8.

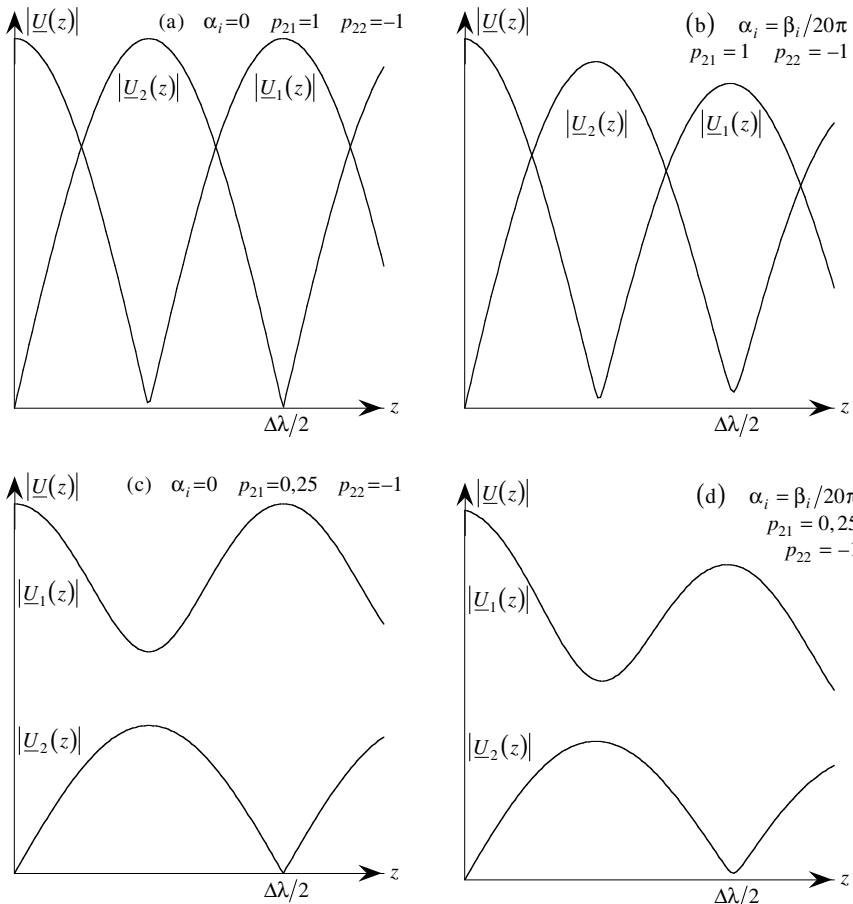


Fig. 6.8 Amplitudes des tensions sur deux lignes couplées pour quatre cas: (a) lignes sans pertes au synchronisme, (b) lignes avec pertes au synchronisme, (c) lignes sans pertes hors du synchronisme, (d) lignes avec pertes hors du synchronisme.

6.4.6 Cas particulier: deux lignes identiques

Lorsque les deux lignes sont de même nature, la vitesse de propagation est la même sur les deux lignes (synchronisme) et c'est alors que le couplage a les effets les plus forts. Il est donc important de considérer ce cas particulier, pour lequel on a $\underline{Z}'_1 = \underline{Z}'_2 = \underline{Z}'$ et $\underline{Y}'_1 = \underline{Y}'_2 = \underline{Y}'$ dans (6.15). Les relations (6.17) prennent alors la forme

$$\begin{aligned} \underline{D}_1 = \underline{D}_2 = \underline{D} &= \underline{Z}'(\underline{Y}' + \underline{Y}'_m) - \underline{Z}'_m \underline{Y}'_m \\ \underline{F}_1 = \underline{F}_2 = \underline{F} = \underline{K} &= \underline{Z}'_m (\underline{Y}' + \underline{Y}'_m) - \underline{Z}' \underline{Y}'_m \end{aligned} \quad (6.28)$$

et les exposants de propagation sont donnés par

$$\underline{\gamma}_{1,2} = \sqrt{\underline{D} \pm \underline{F}} = \sqrt{\underline{Z}'(\underline{Y}' + \underline{Y}'_m) - \underline{Z}'_m \underline{Y}'_m \pm [\underline{Z}'_m (\underline{Y}' + \underline{Y}'_m) - \underline{Z}' \underline{Y}'_m]} \quad [\text{m}^{-1}] \quad (6.29)$$

ou encore, en développant cette relation

$$\underline{\gamma}_1 = \sqrt{\underline{Y}'(\underline{Z}' + \underline{Z}'_m)} \quad \text{et} \quad \underline{\gamma}_2 = \sqrt{(\underline{Y}' + 2\underline{Y}'_m)(\underline{Z}' - \underline{Z}'_m)} \quad [\text{m}^{-1}] \quad (6.30)$$

On trouve ensuite que (6.18) et (6.19) donnent

$$[\underline{\mathbf{P}}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{p}_{11} & \underline{p}_{12} \\ \underline{p}_{21} & \underline{p}_{22} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\underline{\mathbf{Q}}] = \begin{bmatrix} \underline{Y}'/\underline{\gamma}_1 & (\underline{Y}' + 2\underline{Y}'_m)/\underline{\gamma}_2 \\ \underline{Y}'/\underline{\gamma}_1 & -(\underline{Y}' + 2\underline{Y}'_m)/\underline{\gamma}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{q}_{11} & \underline{q}_{12} \\ \underline{q}_{21} & \underline{q}_{22} \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

Les tensions et courants du mode 1 sont les mêmes sur les deux lignes, et on parle de mode pair. Ils sont de signe contraire pour le mode 2, qu'on appelle mode impair.

La condition d'adaptation est alors fournie par

$$\underline{Y}_{t1} = \underline{Y}_{t2} = \underline{q}_{12} = \underline{q}_{22} = \underline{Y}'/\underline{\gamma}_1 \quad \text{et} \quad \underline{Y}_{tm} = \frac{\underline{q}_{12} - \underline{q}_{11}}{2} = \frac{[(\underline{Y}' + 2\underline{Y}'_m)/\underline{\gamma}_2] - (\underline{Y}'/\underline{\gamma}_1)}{2} \quad (6.32)$$

Lorsque seule la première ligne est excitée et qu'il n'y a pas de réflexions, la relation (6.27) prend la forme

$$\underline{U}_1(z) = 2A_1 e^{-\underline{\gamma}_m z} \cosh \Delta \underline{\gamma} z \quad \text{et} \quad \underline{U}_2(z) = 2A_1 e^{-\underline{\gamma}_m z} \sinh \Delta \underline{\gamma} z \quad [\text{V}] \quad (6.33)$$

6.4.7 Cas particulier: lignes et couplages sans pertes

S'il n'y a pas de pertes, tous les termes R' et G' sont nuls dans la matrice $[\underline{\mathbf{M}}]$, qui ne contient par conséquent que des composantes purement imaginaires. Les termes de (6.17) prennent la forme

$$D_i = -\omega^2 [L'_i(C'_i + C'_m) - M' C'_m] \quad \text{et} \quad F_i = -\omega^2 [M'(C'_j + C'_m) - L'_i C'_m] \quad i, j = 1, 2 \quad j \neq i \quad (6.34)$$

Il s'agit de grandeurs réelles, qui sont négatives lorsque le couplage reste faible. Quand cette condition est satisfaite, les exposants de propagation des deux modes deviennent purement imaginaires ($\underline{\gamma}_i = j\beta_i$), tandis que les composantes des matrices des valeurs propres $[\underline{\mathbf{P}}]$ et $[\underline{\mathbf{Q}}]$ ont des valeurs réelles. Les fonctions hyperboliques d'argument imaginaire sont remplacées par des fonctions trigonométriques (3.86).

Lorsque seule la première ligne est excitée et qu'il n'y a pas de réflexions, la relation (6.27) prend la forme

$$\begin{aligned} \underline{U}_1(z) &= \underline{A}_1 \left(e^{-j\beta_1 z} + \frac{F_1 F_2}{K^2} e^{-j\beta_1 z} \right) = \underline{A}_1 e^{-j\beta_{1m} z} \left[\left(1 + \frac{F_1 F_2}{K^2} \right) \cos \Delta\beta z + \left(1 - \frac{F_1 F_2}{K^2} \right) j \sin \Delta\beta z \right] \\ \underline{U}_2(z) &= p_{21} \underline{A}_1 \left(e^{-j\beta z} - e^{-j\beta_2 z} \right) = 2 p_{21} \underline{A}_1 e^{-j\beta_m z} j \sin \Delta\beta z \end{aligned} \quad \text{[V]} \quad (6.35)$$

L'amplitude des tensions et des courants sur les deux lignes est alors périodique, avec une période spatiale $\Delta\lambda = 2\pi/\Delta\beta$. Dans le cas du synchronisme, tout le signal est transféré d'une ligne à l'autre après une distance de $\Delta\lambda/4$, tandis qu'on obtient une distribution égale de signal entre les deux lignes pour une longueur de $\Delta\lambda/8$, ce qui permet de réaliser un coupleur hybride ou coupleur à 3 dB (§ XIII.6.5.20).

6.5 EXERCICES

6.5.1 Peut-on avoir une situation dans laquelle le couplage capacitif compense exactement le couplage inductif ? Déterminer pour quels paramètres cela peut se produire.

6.5.2 Déterminer dans quel cas les deux modes de propagation sont dégénérés, c'est-à-dire qu'on a $\underline{\gamma}_1 = \underline{\gamma}_2$.

6.5.3 Déterminer les exposants de propagation des deux modes, en fonction de la fréquence, dans le cas d'un couplage purement capacitif entre deux lignes téléphoniques identiques lorsque $\omega L' \ll R'$. Déterminer pour quelle longueur de ligne le signal sur la ligne 2 est 30 dB en dessous du signal injecté à l'extrémité de la ligne 1.

6.5.4 On veut réaliser un coupleur de 20 dB: déterminer la longueur de ligne couplée nécessaire, en fraction de la longueur de récurrence $\Delta\lambda$.

6.5.5 Déterminer dans quels cas les exposants de propagation des modes d'une ligne couplée sans pertes peuvent avoir une partie réelle, et déterminer l'allure des tensions.

DEUXIÈME PARTIE

ONDES

CHAMPS DANS LE DOMAINE FRÉQUENTIEL

L'étude des champs à dépendance quelconque du temps est pratiquement limitée aux milieux sans pertes, car les pertes font apparaître des intégrales de convolution (§ 1.6.4). On procède comme pour les lignes avec pertes (chap. 3), en considérant un champ qui varie sinusoidalement en fonction du temps avec une pulsation $\omega = 2\pi f$ et on introduit une notation complexe. Une intégrale de convolution est alors remplacée par une multiplication dans le domaine fréquentiel de Fourier [9].

7.1 NOTATION COMPLEXE

7.1.1 Régime sinusoïdal permanent

On considère un champ électrique à variation temporelle sinusoïdale, de pulsation $\omega = 2\pi f$, spécifiée par une relation similaire à (3.1) pour la tension sur une ligne

$$E(t, \mathbf{r}) = \sqrt{2} \left\{ \mathbf{e}_x E_{0x}(\mathbf{r}) \cos[\omega t + \varphi_x(\mathbf{r})] + \mathbf{e}_y E_{0y}(\mathbf{r}) \cos[\omega t + \varphi_y(\mathbf{r})] + \mathbf{e}_z E_{0z}(\mathbf{r}) \cos[\omega t + \varphi_z(\mathbf{r})] \right\} \quad [\text{V/m}] \quad (7.1)$$

où $E_{0x}(\mathbf{r})$ est la valeur efficace de la composante selon x du champ électrique en fonction de la position et $\varphi_x(\mathbf{r})$ est sa phase, qui indique à quels instants la composante passe par zéro. Un exemple est donné dans la figure 7.1: les composantes cartésiennes du champ ont la même variation temporelle (même fréquence) mais leurs amplitudes et leurs phases sont différentes. L'amplitude globale du champ est aussi représentée sur la figure 7.1.

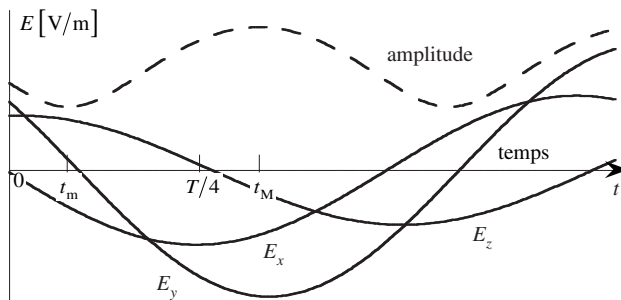


Fig. 7.1 Exemple de champ en régime sinusoïdal, montrant trois composantes dans un repère cartésien et l'amplitude globale (racine de la somme des carrés).

7.1.2 Notation complexe: vecteurs-phaseurs

La tension (7.1) est exprimée de façon compacte en notation complexe (§ 3.1.2)

$$\underline{E}(t, \mathbf{r}) = \operatorname{Re} \left[\sqrt{2} \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \right] \quad [\text{V/m}] \quad (7.2)$$

où l'on a introduit le vecteur-phaseur électrique

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_x E_{0x}(\mathbf{r}) e^{j\varphi_x(\mathbf{r})} + \mathbf{e}_y E_{0y}(\mathbf{r}) e^{j\varphi_y(\mathbf{r})} + \mathbf{e}_z E_{0z}(\mathbf{r}) e^{j\varphi_z(\mathbf{r})} \quad [\text{V/m}] \quad (7.3)$$

Le vecteur-phaseur $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ est un vecteur, qui représente une grandeur orientée dans l'espace, mais donc chaque composante est un nombre *complexe*, lié à une variation sinusoïdale dans le temps. Séparant chaque composante en partie réelle et imaginaire, on voit que le vecteur-phaseur comporte six termes et on peut donc le représenter dans un espace à six dimensions. On définit de même les vecteurs phaseurs des autres champs électromagnétiques (sect. 1.3). Comme dans (3.3), on a pris arbitrairement la partie réelle d'un nombre complexe; on pourrait tout aussi bien prendre la partie imaginaire, ce qui correspondrait à décaler l'axe du temps.

Faisant usage de la relation $\operatorname{Re}(\underline{z}) = (\underline{z} + \underline{z}^*)/2$ comme dans (3.5), on peut exprimer le champ électrique en fonction du vecteur-phaseur par la relation

$$\underline{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} + \underline{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}) e^{-j\omega t} \right] \quad [\text{V/m}] \quad (7.4)$$

7.1.3 Recommandation

Dans le présent ouvrage, on dénote la dépendance du temps par $e^{j\omega t}$. Cette notation est couramment utilisée par les ingénieurs électriciens. D'autres publications introduisent une dépendance en $e^{-i\omega t}$ ou même en $e^{-j\omega t}$, ce qui peut donner lieu à des confusions – si, par inadvertance, on mélange les notations, on risque notamment d'obtenir des ondes dont l'amplitude augmente quand elles se propagent en milieu dissipatif, alors qu'en fait, bien entendu, elle doit diminuer. Les erreurs qui résultent d'un mélange de différentes notations ne sont toutefois pas toujours évidentes.

On doit faire preuve d'une grande prudence chaque fois qu'on utilise une nouvelle publication, car trop souvent la convention utilisée n'est pas indiquée clairement.

7.1.4 Parties réelle et imaginaire du vecteur phaseur

En posant $t = 0$ dans l'équation (7.2), on trouve que

$$\underline{E}(0, \mathbf{r}) = \operatorname{Re} \left[\sqrt{2} \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \right] \quad [\text{V/m}] \quad (7.5)$$

et lorsqu'on pose $t = T/4$, où $T = 1/f$ est la période du signal, on trouve que

$$\underline{E}(T/4, \mathbf{r}) = \operatorname{Re} \left[\sqrt{2} \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{j2\pi f T/4} \right] = \operatorname{Re} \left[\sqrt{2} \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{j\pi/2} \right] = \operatorname{Re} \left[\sqrt{2} j \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \right] = -\operatorname{Im} \left[\sqrt{2} \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \right] \quad [\text{V/m}] \quad (7.6)$$

La partie réelle et la partie imaginaire du vecteur phaseur sont ainsi directement proportionnelles aux valeurs du champ en deux moments particuliers du temps. Ceci fournit une manière simple de déterminer le vecteur phaseur en fonction du champ. Le champ est entièrement défini par ces deux valeurs.

7.1.5 Dérivation par rapport au temps

La notation complexe sert à extraire la dépendance du temps. Les vecteurs-phaseurs (complexes) ne dépendent que des coordonnées spatiales, représentées par le vecteur \mathbf{r} , toute la dépendance du temps étant contenue dans le terme $e^{j\omega t}$. On dérive (7.2) par rapport au temps et on obtient

$$\frac{\partial \underline{E}(t, \mathbf{r})}{\partial t} = \operatorname{Re} \left[\sqrt{2} \underline{E}(\mathbf{r}) \frac{de^{j\omega t}}{dt} \right] = \operatorname{Re} \left[\sqrt{2} j\omega \underline{E}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \right] \quad [\text{V/ms}] \quad (7.7)$$

On obtient le même résultat en multipliant, à l'intérieur des parenthèses carrées, le phaseur $\underline{E}(\mathbf{r})$ par le facteur imaginaire $j\omega$. Pour établir les relations entre phaseurs dans le domaine fréquentiel, on remplace les $\partial/\partial t$ des relations temporelles par le facteur $j\omega$. Les relations pour les phaseurs comportent seulement des dérivations par rapport aux coordonnées spatiales.

7.1.6 Erreurs à éviter (rappel du paragraphe 3.1.5)

- Un vecteur-phaseur n'est pas une fonction du temps. Sa dérivée par rapport au temps est de ce fait toujours identiquement nulle.
- Un terme complexe n'a de sens que dans le domaine fréquentiel: il serait totalement faux de multiplier une fonction du temps par le terme imaginaire $j\omega$.
- Il est donc essentiel de clairement distinguer les domaines temporel et fréquentiel, afin d'éviter de commettre des erreurs.

7.1.7 Traitement dans le domaine fréquentiel

Comme les deux termes $\sqrt{2}$ et $e^{j\omega t}$ apparaissent dans toutes les relations, il est inutile de les répéter par la suite. Les traitements ultérieurs ne considèrent que des vecteurs phaseurs (grandeurs complexes) définis dans le *domaine fréquentiel*.

On ne retourne dans le domaine temporel (fonctions du temps) que lorsqu'on veut déterminer la signification physique des résultats obtenus au moyen des vecteurs phaseurs. On fait alors usage de la relation (7.2). Dans beaucoup de situations, toutefois, on obtient directement dans le domaine fréquentiel les informations souhaitées, sans qu'il soit nécessaire de retourner dans le domaine temporel.

7.1.8 Valeur efficace du champ

La valeur moyenne du carré du champ $\langle E^2(t, \mathbf{r}) \rangle$ est obtenue en intégrant le produit scalaire $\underline{E}(t, \mathbf{r}) \cdot \underline{E}(t, \mathbf{r})$ sur une période $T = 1/f$ et en divisant le résultat obtenu par la période T . On procède de la même manière qu'au paragraphe 3.1.6 et on trouve après quelques calculs que

$$\langle E^2(t, \mathbf{r}) \rangle = \underline{E}(\mathbf{r}) \cdot \underline{E}^*(\mathbf{r}) = |\underline{E}(\mathbf{r})|^2 \quad [\text{V}^2/\text{m}^2] \quad (7.8)$$

Prenant la racine de (7.8), on constate que le module du vecteur-phaseur est la *valeur efficace* du champ. Ceci résulte de l'introduction du facteur $\sqrt{2}$ dans la définition du vecteur phaseur dans la relation (7.2). Certains auteurs n'introduisent pas ce facteur, auquel cas le module du vecteur phaseur correspond à la valeur de crête.

7.2 POLARISATION DU CHAMP

7.2.1 Définition

La polarisation d'un champ – qu'il ne faut pas confondre avec le champ de polarisation (§ 1.6.1) – est définie par la figure géométrique que parcourt l'extrémité du vecteur champ en fonction du temps – qui passe par les valeurs prises aux temps $t = 0$ et $t = T/4$ (fig. 7.1). La relation (7.1) est développée de la manière suivante, en utilisant des identités trigonométriques

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(0, \mathbf{r}) \cos(\omega t) + \mathbf{E}(T/4, \mathbf{r}) \sin(\omega t) \quad [\text{V/m}] \quad (7.9)$$

où $T = 1/f$ est la période du signal et où l'on fait usage des relations pour le champ introduites au paragraphe 7.1.4

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(0, \mathbf{r}) &= \sqrt{2} [\mathbf{e}_x E_{0x}(\mathbf{r}) \cos \varphi_x(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_y E_{0y}(\mathbf{r}) \cos \varphi_y(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_z E_{0z}(\mathbf{r}) \cos \varphi_z(\mathbf{r})] = \sqrt{2} \operatorname{Re}[\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})] \\ \mathbf{E}(T/4, \mathbf{r}) &= -\sqrt{2} [\mathbf{e}_x E_{0x}(\mathbf{r}) \sin \varphi_x(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_y E_{0y}(\mathbf{r}) \sin \varphi_y(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_z E_{0z}(\mathbf{r}) \sin \varphi_z(\mathbf{r})] \\ &= -\sqrt{2} \operatorname{Im}[\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})] \quad [\text{V/m}] \end{aligned} \quad (7.10)$$

La relation (7.9) est l'équation paramétrique d'une ellipse dans le plan des vecteurs $\mathbf{E}(0, \mathbf{r})$ et $\mathbf{E}(T/4, \mathbf{r})$, qui sont deux demi-axes conjugués de l'ellipse (fig. 7.2(a)). Ces deux vecteurs forment un angle χ – en général, ils ne sont pas orthogonaux. L'extrémité du vecteur parcourt cette ellipse en fonction du temps, le champ ne s'annule à aucun instant.

En déterminant les maxima (en $t = t_M$) et les minima (en $t = t_m$) du champ, on obtient un demi-grand axe et un demi-petit axe de l'ellipse, qui sont orthogonaux. On peut décaler l'échelle du temps pour rapporter l'ellipse à ses deux axes principaux (fig. 7.2(b)).

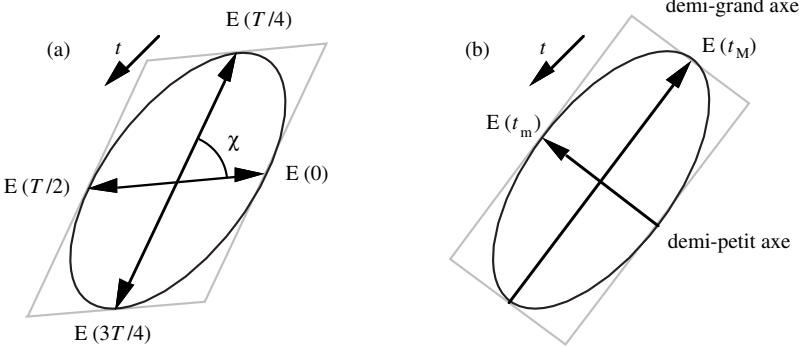


Fig. 7.2 Ellipse de polarisation parcourue par l'extrémité du champ électrique en un point (a) ramenée à deux axes conjugués, (b) ramenée à ses deux axes principaux.

On peut déterminer les deux axes principaux de l'ellipse en calculant le module carré du champ et en le dérivant par rapport au temps pour trouver t_M et t_m . On peut également faire usage de l'orthogonalité des axes principaux, qui permet de poser que

$$\left[\mathbf{E}(0, \mathbf{r}) \cos(\omega t_M) + \mathbf{E}(T/4, \mathbf{r}) \sin(\omega t_M) \right] \cdot \left[-\mathbf{E}(0, \mathbf{r}) \sin(\omega t_M) + \mathbf{E}(T/4, \mathbf{r}) \cos(\omega t_M) \right] = 0 \quad [\text{V}^2/\text{m}^2] \quad (7.11)$$

On en tire que

$$\tan(2\omega t_M) = \frac{2\mathbf{E}(0,\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(T/4,\mathbf{r})}{|\mathbf{E}(0,\mathbf{r})|^2 - |\mathbf{E}(T/4,\mathbf{r})|^2} \quad [-] \quad (7.12)$$

où les différentes grandeurs sont définies dans la figure 7.2.

7.2.2 Polarisation linéaire

Lorsque les deux vecteurs $\mathbf{E}(0,\mathbf{r})$ et $\mathbf{E}(T/4,\mathbf{r})$ sont équipollents, ces deux axes conjugués sont en fait confondus, l'ellipse se rétrécit pour devenir une ligne droite (petit axe de longueur nulle). Le champ électrique pointe toujours dans la même direction et varie sinusoidalement en fonction du temps. On obtient la même situation quand l'un des deux vecteurs est nul. La polarisation linéaire est définie par

$$\mathbf{E}(0,\mathbf{r}) \times \mathbf{E}(T/4,\mathbf{r}) = 0 \quad \text{avec} \quad \langle \mathbf{E}(t,\mathbf{r}) \rangle \neq 0 \quad (7.13)$$

Cette condition peut s'exprimer en termes du vecteur-phaseur avec (7.5) et (7.6)

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{avec} \quad \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \neq 0 \quad (7.14)$$

7.2.3 Polarisation circulaire

Lorsque les deux vecteurs $\mathbf{E}(0,\mathbf{r})$ et $\mathbf{E}(T/4,\mathbf{r})$ sont orthogonaux et ont la même longueur, l'ellipse devient un cercle. Le champ électrique, *circulairement polarisé*, a alors toujours la même amplitude. Cette situation est obtenue lorsque

$$|\mathbf{E}(0,\mathbf{r})| = |\mathbf{E}(T/4,\mathbf{r})| \neq 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{E}(0,\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(T/4,\mathbf{r}) = 0 \quad (7.15)$$

On peut aussi exprimer cette condition en termes du vecteur-phaseur

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \cdot \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{avec} \quad \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \neq 0 \quad (7.16)$$

7.2.4 Décompositions

On peut toujours décomposer une polarisation linéaire en deux polarisations circulaires de même amplitude et tournant en sens opposé. Par exemple, un champ électrique dirigé selon x peut être défini par la superposition de deux champs circulairement polarisés (termes entre parenthèses carrées $[\mathbf{e}_x \pm j\mathbf{e}_z]$)

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_x \underline{E}_x = (\underline{E}_x/2)[\mathbf{e}_x + j\mathbf{e}_z] + (\underline{E}_x/2)[\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_z] \quad [\text{V/m}] \quad (7.17)$$

Dans le premier terme, on a ajouté une composante perpendiculaire que l'on a ôtée du second terme.

Un champ elliptiquement polarisé peut être décomposé en deux champs linéairement polarisés, qu'on peut choisir selon deux directions arbitraires dans le plan de l'ellipse. On peut notamment choisir deux axes conjugués, deux axes orthogonaux, ou encore deux axes simultanément conjugués et orthogonaux (grand axe et petit axe).

Un champ elliptiquement polarisé peut également être représenté par la somme de deux champs circulairement polarisés tournant en sens opposé: le demi-grand axe est la somme des rayons des deux cercles, le demi-petit axe leur différence (fig. 7.3).

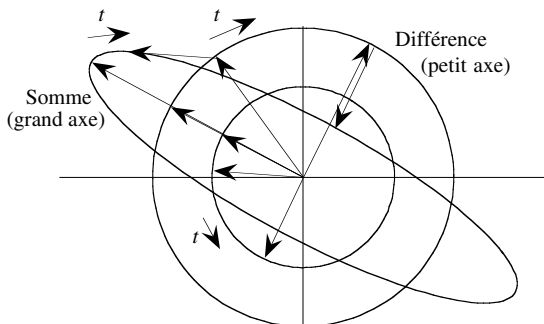


Fig. 7.3 Décomposition d'une polarisation elliptique en polarisations circulaires.

7.3 PROPRIÉTÉS DES MATÉRIAUX

7.3.1 Relations constitutives en notation complexe

La notation complexe facilite l'étude de la propagation dans les milieux linéaires dissipatifs (§ 1.6.4). Les fonctions de convolution (1.28) sont alors remplacées par des multiplications avec une permittivité et une perméabilité complexes

$$\underline{D}(\mathbf{r}) = \underline{\varepsilon} \underline{E}(\mathbf{r}) = (\varepsilon' - j\varepsilon'') \underline{E}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r \underline{E}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 (\varepsilon'_r - j\varepsilon''_r) \underline{E}(\mathbf{r}) \quad [\text{As/m}^2] \quad (7.18)$$

$$\underline{B}(\mathbf{r}) = \underline{\mu} \underline{H}(\mathbf{r}) = (\mu' - j\mu'') \underline{H}(\mathbf{r}) = \mu_0 \underline{\mu}_r \underline{H}(\mathbf{r}) = \mu_0 (\mu'_r - j\mu''_r) \underline{H}(\mathbf{r}) \quad [\text{Vs/m}^2] \quad (7.19)$$

Les parties réelles de $\underline{\varepsilon}$ et de $\underline{\mu}$ représentent les effets réactifs du milieu, leurs parties imaginaires (toujours négatives) résultent des pertes. La permittivité et la perméabilité complexes sont les transformées de Fourier des réponses indicielles des relations (1.28)

$$\underline{\varepsilon}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(t) e^{-j\omega t} dt \quad [\text{As/Vm}] \quad \underline{\mu}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t) e^{-j\omega t} dt \quad [\text{Vs/Am}] \quad (7.20)$$

7.3.2 Relations de Kramers et Kronig

Dans un milieu qui comporte des pertes diélectriques, les parties réelle et imaginaire de la permittivité varient toutes deux avec la fréquence et sont liées l'une à l'autre par les équations de *Kramers et Kronig* [62]

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Omega \varepsilon''(\Omega)}{\Omega^2 - \omega^2} d\Omega \quad \varepsilon''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varepsilon'(\Omega) - \varepsilon_\infty}{\Omega^2 - \omega^2} d\Omega \quad (7.21)$$

où Ω est la variable d'intégration, ε_∞ la valeur limite prise par la permittivité aux très hautes fréquences et la valeur principale de Cauchy de l'intégrale est définie par

$$\int_0^\infty \frac{f(\Omega)}{\Omega^2 - \omega^2} d\Omega = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{\omega - \delta} \frac{f(\Omega)}{\Omega^2 - \omega^2} d\Omega + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\omega + \delta}^\infty \frac{f(\Omega)}{\Omega^2 - \omega^2} d\Omega \quad (7.22)$$

On obtient des relations similaires entre la partie réelle et la partie imaginaire de la perméabilité dans un milieu qui possède des pertes magnétiques.

Les relations de Kramers et Kronig assurent d'une part que le milieu considéré est causal – c'est-à-dire que la cause précède toujours l'effet [63] – et d'autre part qu'il possède une réponse bornée: la réponse à une excitation de durée limitée décroît et tend vers zéro un certain temps après la fin de l'excitation.

Ces deux conditions sont remplies dans tous les milieux passifs, et le modèle mathématique qu'on utilise pour les représenter doit aussi les satisfaire, faute de quoi on risque d'obtenir des résultats aberrants (§ 7.3.3).

Des relations similaires sont dérivées en théorie des circuits, sous le nom de relations de Bode et Bayard (§ IV.7.3.34).

L'allure des deux composantes de la permittivité est représentée dans la figure 7.4, dans laquelle apparaissent une transition de relaxation (de Debye) et une transition résonnante (de Lorentz).

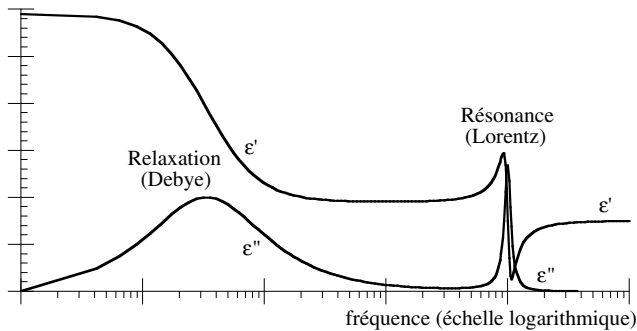


Fig. 7.4 Allure de la partie réelle et de la partie imaginaire de la permittivité en fonction de la fréquence, avec une transition de relaxation et une transition résonnante.

7.3.3 Paradoxe thermodynamique

Lorsque les propriétés d'un milieu ne satisfont pas les relations de Kramers et Kronig, on peut obtenir des résultats incohérents ou paradoxaux.

Une telle situation s'est produite lors de l'analyse de la propagation dans un guide d'ondes partiellement rempli de ferrite aimanté – matériau qui possède des propriétés anisotropes non réciproques (§ 1.6.3). En supposant que ce matériau n'a pas de pertes, on a prédit l'existence d'une propagation unidirectionnelle: un signal pourrait se propager dans une direction, mais pas dans la direction opposée [64]. Si l'on termine une section de guide unidirectionnel par un plan métallique en cep (§ 1.6.6), un signal qui entre dans le dispositif ne peut pas en ressortir après réflexion sur le court-circuit: on réaliserait ainsi un dispositif sans pertes qui absorbe de l'énergie.

Ce résultat absurde a été appelé *paradoxe thermodynamique*, et des articles lui ont été consacrés – en vue de déterminer où se trouve l'erreur... Comme un ferrite aimanté a une perméabilité tensorielle qui dépend de la fréquence, s'il n'a pas de pertes il ne peut pas satisfaire les conditions de Kramers et Kronig, et n'est donc pas un milieu causal. Un tel milieu ne peut pas exister dans la réalité, et il n'y a donc pas de paradoxe [65].

7.4 ÉQUATIONS ET THÉORÈMES EN NOTATION COMPLEXE

7.4.1 Équations de Maxwell

Dans un milieu linéaire isotrope, les équations de Maxwell (1.13) deviennent en notation complexe

$$\begin{aligned}\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= -j\omega\mu\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) & \nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= \underline{\rho}(\mathbf{r})/\underline{\epsilon} \\ \nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) &= (j\omega\underline{\epsilon} + \sigma)\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) & \nabla \cdot \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) &= 0\end{aligned}\quad (7.23)$$

Les développements effectués dans la section 1.4 peuvent être reproduits en notation complexe dans le domaine fréquentiel, les conditions aux limites de la section 1.5 restent valables, on peut exprimer les équations de Maxwell sous forme globale, et similairement définir les potentiels vectoriel (§ 1.4.6) et scalaire (§ 1.4.7) sous forme complexe

$$\underline{\mu}\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \nabla \times \underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) \quad \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + j\omega\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = -\nabla \underline{V}(\mathbf{r}) \quad (7.24)$$

7.4.2 Théorème de Poynting

Le vecteur de Poynting complexe est donné par

$$\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}) = \underline{\mathbf{P}}(\mathbf{r}) + j\underline{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}) \quad [\text{VA}/\text{m}^2] \quad (7.25)$$

Par un développement similaire à celui effectué au paragraphe 3.1.7, on trouve que la valeur moyenne de la densité de puissance est la partie réelle du vecteur-phaseur de Poynting

$$\langle \underline{\mathbf{S}}(t, \mathbf{r}) \rangle = \text{Re}[\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{r})] = \underline{\mathbf{P}}(\mathbf{r}) \quad [\text{W}/\text{m}^2] \quad (7.26)$$

La composante réelle $\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{r})$ est la densité de puissance active, la partie imaginaire $\underline{\mathbf{Q}}(\mathbf{r})$ la densité de puissance réactive, qui correspond à une accumulation locale d'énergie (§ I.8.5.9).

Procédant comme au paragraphe 1.7.4, on détermine la divergence du vecteur de Poynting, qu'on développe et dans laquelle on introduit les équations de Maxwell

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \underline{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) &= \nabla \cdot [\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})] = \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) - \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}) \\ &= -\underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}) \cdot j\omega\underline{\mu}\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) + \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \cdot j\omega\underline{\epsilon}^* \underline{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}) - \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \cdot \underline{\mathbf{J}}^*(\mathbf{r}) \\ &= j\omega[\underline{\epsilon}^* |\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})|^2 - \underline{\mu} |\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})|^2] - \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \cdot \underline{\mathbf{J}}^*(\mathbf{r}) \quad [\text{VA} / \text{m}^3]\end{aligned}\quad (7.27)$$

On retrouve les termes de la relation (1.39), avec un terme électrique changé de signe. Les modules carrés des vecteurs phaseurs ne correspondent ici pas exactement aux énergies électriques et magnétiques [11]. On intègre dans le volume V entouré d'une surface S et on fait usage du théorème de la divergence (§ 14.2.2), qui donne

$$\oint_S \underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{S}}(t, \mathbf{r}) dA = j\omega \int_V [\underline{\epsilon}' |\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})|^2 - \underline{\mu}' |\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})|^2] dV - \int_V [(\sigma + \omega\underline{\epsilon}'') |\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})|^2 + \omega\underline{\mu}'' |\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})|^2] dV \quad [\text{VA}] \quad (7.28)$$

où on a séparé les parties réelle et imaginaire dans le terme de droite. On constate qu'en présence de pertes la partie réelle est toujours positive (somme de modules carrés).

7.4.3 Théorème d'unicité

On a démontré (§ 1.7.5) qu'une solution est unique lorsque les conditions aux limites et les conditions initiales sont spécifiées. Dans le domaine fréquentiel, on considère un régime sinusoïdal permanent, qui a théoriquement débuté en $t = -\infty$, à l'origine des temps, et qui se poursuivra indéfiniment: il n'est pas possible d'introduire des conditions initiales et il faut effectuer une nouvelle démonstration.

On fait usage du même raisonnement, en considérant un volume V entièrement entouré par une surface S (fig. 1.2) et en supposant qu'il existe deux solutions $(\underline{E}_1, \underline{H}_1)$ et $(\underline{E}_2, \underline{H}_2)$. On prend leur différence $(\underline{E}_d, \underline{H}_d)$, qui doit elle aussi être une solution et on l'introduit dans le théorème de Poynting (7.28). Les conditions aux limites sur l'enveloppe requièrent que le terme de gauche de l'expression s'annule, de sorte que les parties réelle et imaginaire du terme de droite doivent toutes deux être nulles

$$\int_V \left[\varepsilon' |\underline{E}_d(\mathbf{r})|^2 - \mu' |\underline{H}_d(\mathbf{r})|^2 \right] dV = 0 \quad [\text{VAs}] \quad (7.29)$$

$$\int_V \left[(\sigma + \omega \varepsilon'') |\underline{E}_d(\mathbf{r})|^2 + \omega \mu'' |\underline{H}_d(\mathbf{r})|^2 \right] dV = 0 \quad [\text{VA}] \quad (7.30)$$

On peut alors rencontrer deux situations:

- Si le milieu est dissipatif, avec au moins un type de pertes (diélectrique, magnétique, de conduction), l'équation (7.30) requiert qu'au moins un des champs soit nul partout dans le volume, et l'équation de (7.29) requiert que l'autre soit aussi nul. On a alors $\underline{H}_d(\mathbf{r}) = 0$ et $\underline{E}_d(\mathbf{r}) = 0$: la solution est unique.
- Si le milieu est sans pertes, les trois termes de la relation (7.30) sont nuls. Du fait qu'elle contient une différence, la relation (7.29) peut être satisfaite par des valeurs non nulles de $\underline{H}_d(\mathbf{r})$ et de $\underline{E}_d(\mathbf{r})$, de sorte que l'unicité n'est pas garantie. Dans un système sans pertes, une oscillation peut se maintenir indéfiniment sans excitation – on rencontre cette situation dans des résonateurs (sect. 4.5).

Les matériaux réels ont des pertes, de sorte que dans la réalité l'unicité est préservée. Toutefois, l'hypothèse du milieu sans pertes sert à simplifier – voire même, dans certains cas, à rendre possible – la résolution de problèmes. Lorsqu'on fait cette hypothèse, on doit être conscient du fait que, dans certains cas, elle peut conduire à des résultats non univoques ou paradoxaux (§ 7.3.3).

7.4.4 Équations d'onde

Les équations d'onde (sect. 1.8) deviennent pour les vecteurs-phaseurs

$$\nabla^2 \underline{E}(\mathbf{r}) + \omega^2 \underline{\varepsilon} \underline{E}(\mathbf{r}) = \nabla \underline{\rho}(\mathbf{r}) / \underline{\varepsilon} + j\omega \underline{\mu} \underline{J}(\mathbf{r}) \quad [\text{V/m}^3] \quad (7.31)$$

$$\nabla^2 \underline{H}(\mathbf{r}) + \omega^2 \underline{\varepsilon} \underline{\mu} \underline{H}(\mathbf{r}) = -\nabla \times \underline{J}(\mathbf{r}) \quad [\text{A/m}^3] \quad (7.32)$$

$$\nabla^2 \underline{A}(\mathbf{r}) + \omega^2 \underline{\varepsilon} \underline{\mu} \underline{A}(\mathbf{r}) = -\underline{\mu} \underline{J}(\mathbf{r}) \quad [\text{Vs/m}^3] \quad (7.33)$$

$$\nabla^2 \underline{V}(\mathbf{r}) + \omega^2 \underline{\varepsilon} \underline{\mu} \underline{V}(\mathbf{r}) = -\underline{\rho}(\mathbf{r}) / \underline{\varepsilon} \quad [\text{V/m}^2] \quad (7.34)$$

avec la jauge de Lorentz donnée par

$$\nabla \cdot \underline{A}(\mathbf{r}) + j\omega \underline{\varepsilon} \underline{\mu} \underline{V}(\mathbf{r}) = 0 \quad [\text{V/m}^2] \quad (7.35)$$

7.4.5 Théorème de réciprocité

On considère un système successivement excité par deux sources différentes, la première produisant des champs $\{\underline{E}_1(\mathbf{r}), \underline{H}_1(\mathbf{r})\}$, la seconde les champs $\{\underline{E}_2(\mathbf{r}), \underline{H}_2(\mathbf{r})\}$ [66]. Les équations rotationnelles de Maxwell donnent pour ces deux cas

$$\begin{aligned}\nabla \times \underline{E}_1(\mathbf{r}) &= -j\omega\mu\underline{H}_1(\mathbf{r}) & \nabla \times \underline{H}_1(\mathbf{r}) &= (j\omega\underline{\epsilon} + \sigma)\underline{E}_1(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \underline{E}_2(\mathbf{r}) &= -j\omega\mu\underline{H}_2(\mathbf{r}) & \nabla \times \underline{H}_2(\mathbf{r}) &= (j\omega\underline{\epsilon} + \sigma)\underline{E}_2(\mathbf{r})\end{aligned}\quad (7.36)$$

On multiplie scalairement ces trois relations par $\underline{H}_2(\mathbf{r})$, $\underline{E}_2(\mathbf{r})$, $\underline{H}_1(\mathbf{r})$ et $\underline{E}_1(\mathbf{r})$ puis on groupe les termes obtenus comme suit

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2) &= \underline{H}_2 \cdot (\nabla \times \underline{E}_1) - \underline{E}_1 \cdot (\nabla \times \underline{H}_2) = -j\omega\mu\underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2 - (j\omega\underline{\epsilon} + \sigma)\underline{E}_1 \cdot \underline{E}_2 \\ \nabla \cdot (\underline{E}_2 \times \underline{H}_1) &= \underline{H}_1 \cdot (\nabla \times \underline{E}_2) - \underline{E}_2 \cdot (\nabla \times \underline{H}_1) = -j\omega\mu\underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2 - (j\omega\underline{\epsilon} + \sigma)\underline{E}_1 \cdot \underline{E}_2\end{aligned}\quad (7.37)$$

On constate que les deux membres de droite sont identiques et que, par conséquent

$$\nabla \cdot (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2) = \nabla \cdot (\underline{E}_2 \times \underline{H}_1) \quad [\text{VA/m}^3] \quad (7.38)$$

On intègre ensuite sur un volume V entouré d'une surface S (fig. 1.2) et, appliquant le théorème de la divergence (§ 14.2.2), on obtient le *théorème de réciprocité de Lorentz*

$$\oint_S (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) \cdot \mathbf{n} \, dA = 0 \quad [\text{VA}] \quad (7.39)$$

On n'a pas introduit de limitations sur les valeurs que peuvent prendre $\underline{\mu}$ et σ , qui décrivent un milieu linéaire isotrope – la relation est donc valable dans tout système formé de diélectriques isotropes, de conducteurs et de matériaux absorbants.

Poursuivant le raisonnement et appliquant la relation (7.38) à des systèmes de propagation, on démontre que la transmission dans des milieux isotropes est réciproque, c'est-à-dire que l'interversion de l'émetteur et du récepteur ne modifie pas le quotient du signal reçu par le signal émis [66]. Pour cela, on procède comme suit :

- on détermine les champs électromagnétiques produits en un point B dans l'espace par une source de signal située en un point A;
- on détermine les champs électromagnétiques produits au point A par la même source de signal, placée cette fois-ci au point B.

En comparant les résultats obtenus dans les deux cas et en faisant usage de (7.38), on constate que les champs obtenus dans les deux cas sont les mêmes.

Dans l'étude des antennes (chap. 9), ce théorème montre que les propriétés d'émission et celles de réception d'une antenne sont intimement liées. Ce théorème s'applique également aux tensions et courants dans tout circuit formé de composants linéaires passifs (sect. IV. 5.2).

En revanche, la réciprocité n'est pas garantie dans un milieu linéaire anisotrope, dont les propriétés électriques et magnétiques sont représentées par des tenseurs (§.1.6.3). Lorsque $\underline{E}_1 \cdot \underline{\bar{\epsilon}} \underline{E}_2 \neq \underline{E}_2 \cdot \underline{\bar{\epsilon}} \underline{E}_1$ ou $\underline{H}_1 \cdot \underline{\bar{\mu}} \underline{H}_2 \neq \underline{H}_2 \cdot \underline{\bar{\mu}} \underline{H}_1$, on ne peut pas permuter les termes. On rencontre cette situation dans les milieux dits gyrotropes (ferrites, semiconducteurs ou plasmas placés dans un champ magnétique). On fait usage de ces propriétés pour réaliser des dispositifs non réciproques en hyperfréquences (sect. XIII.6.7).

7.5 EXERCICES

7.5.1 Déterminer le vecteur-phaseur électrique qui correspond au champ suivant

$$\underline{E}(t) = 32\mathbf{e}_x \sin(\omega t + \pi/8) + 27\mathbf{e}_y \sin(\omega t + 3\pi/8) \quad [\text{V}]$$

Déterminer ses parties réelle et imaginaire et vérifier les relations (7.5) et (7.6).

7.5.2 Déterminer la signification, en termes du champ électrique, des quatre conditions suivantes (dans chaque cas $\underline{E} \neq 0$)

$$\underline{E} \cdot \underline{E} = 0 \quad \underline{E} \cdot \underline{E}^* = 0$$

$$\underline{E} \times \underline{E} = 0 \quad \underline{E} \times \underline{E}^* = 0$$

7.5.3 Soit le champ électrique

$$\underline{E}(t) = \sqrt{2} E_0 [\mathbf{e}_x \sin(\omega t + \pi/6) + \mathbf{e}_y \sin(\omega t)]$$

Déterminer:

- l'ellipse de polarisation et ses deux axes principaux;
- comment décomposer le champ électrique en deux composantes linéairement polarisées, pour les 3 cas indiqués dans le paragraphe 7.2.4;
- comment décomposer le champ électrique en deux composantes circulairement polarisées;
- le champ magnétique $\underline{H}(t)$ qui correspond au champ électrique dans le vide;
- la polarisation du champ magnétique;
- les vecteurs phaseurs correspondants \underline{E} et \underline{H} .

7.5.4 Déterminer le vecteur-phaseur électrique associé et le vecteur-phaseur de Poynting qui correspondent au vecteur-phaseur magnétique suivant

$$\underline{H}(z) = \mathbf{e}_x \sinh(\gamma z)$$

dans un milieu pour lequel, à la fréquence de 3,2 MHz, $\underline{\epsilon}_r = 73 - j14$, $\underline{\mu}_r = 1,3 - j0,2$ et $\sigma = 0$. Vérifier que la relation (7.27) est satisfaite par les grandeurs obtenues.

ONDES PLANES

8.1 PROPAGATION DANS UN MILIEU INFINI SANS PERTES

8.1.1 Équation d'onde en coordonnées cartésiennes

On considère des signaux sinusoïdaux de fréquence f et de pulsation $\omega = 2\pi f$, et on fait usage des équations de Maxwell (7.23) en notation complexe, introduites dans la section 7.1, avec les vecteurs-phaseurs et les grandeurs soulignées. Dans un milieu sans pertes, on a $\sigma = 0$, tandis que les termes ε et μ sont réels. On considère par ailleurs un milieu sans charges ni courants, dans lequel l'équation d'onde (7.31) prend la forme

$$\nabla \times \nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -\nabla^2 \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \omega^2 \varepsilon \mu \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \underline{\gamma}^2 \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \quad [\text{V/m}^3] \quad (8.1)$$

Lorsqu'on résout cette équation dans le système de coordonnées cartésiennes, on obtient des ondes planes. Considérons d'abord la composante selon x du champ électrique

$$\nabla^2 \underline{E}_x(x, y, z) = \frac{\partial^2 \underline{E}_x(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_x(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_x(x, y, z)}{\partial z^2} = \underline{\gamma}^2 \underline{E}_x(x, y, z) \quad (8.2)$$

8.1.2 Séparation de variables

On obtient la solution de cette équation par la méthode de séparation de variables [67], c'est-à-dire qu'on postule qu'une solution est un produit de trois fonctions, qui dépendent chacune d'une seule coordonnée

$$\underline{E}_x(x, y, z) = \underline{X}(x)\underline{Y}(y)\underline{Z}(z) \quad [\text{V/m}] \quad (8.3)$$

On introduit cette expression dans (8.2), puis on divise par $\underline{E}_x(x, y, z)$, ce qui permet de décomposer l'expression en trois termes, chacun fonction d'une seule variable

$$\frac{1}{\underline{E}_x(x, y, z)} \nabla^2 \underline{E}_x(x, y, z) = \frac{1}{\underline{X}(x)} \frac{d^2 \underline{X}(x)}{dx^2} + \frac{1}{\underline{Y}(y)} \frac{d^2 \underline{Y}(y)}{dy^2} + \frac{1}{\underline{Z}(z)} \frac{d^2 \underline{Z}(z)}{dz^2} = \underline{\gamma}_x^2 + \underline{\gamma}_y^2 + \underline{\gamma}_z^2 = \underline{\gamma}^2 \quad [\text{m}^{-2}] \quad (8.4)$$

La somme d'une fonction de x , d'une fonction de y et d'une fonction de z est égale à une constante. Pour obtenir une solution non triviale, chacune des trois fonctions doit elle-même être constante, ce qui donne trois équations différentielles linéaires

$$\frac{d^2 \underline{X}(x)}{dx^2} = \underline{\gamma}_x^2 \underline{X}(x) \quad \frac{d^2 \underline{Y}(y)}{dy^2} = \underline{\gamma}_y^2 \underline{Y}(y) \quad \frac{d^2 \underline{Z}(z)}{dz^2} = \underline{\gamma}_z^2 \underline{Z}(z) \quad (8.5)$$

Les solutions de ces équations sont des exponentielles

$$\underline{X}(x) = \underline{X}(0)e^{-\underline{\gamma}_x x} \quad \underline{Y}(y) = \underline{Y}(0)e^{-\underline{\gamma}_y y} \quad \underline{Z}(z) = \underline{Z}(0)e^{-\underline{\gamma}_z z} \quad (8.6)$$

où l'on a choisi (arbitrairement) des exposants de signe négatif. Combinant les trois fonctions des trois coordonnées, on trouve la composante selon x du champ

$$\underline{E}_x(x, y, z) = \underline{X}(0)\underline{Y}(0)\underline{Z}(0)e^{-\left(\underline{\gamma}_x x + \underline{\gamma}_y y + \underline{\gamma}_z z\right)} = \underline{E}_x(0)e^{-\underline{\eta} r} \quad [\text{V/m}] \quad (8.7)$$

On effectue les mêmes opérations pour les deux autres composantes et, combinant le tout, on obtient la dépendance spatiale du vecteur-phaseur électrique

$$\underline{E}(x, y, z) = \left[\underline{e}_x \underline{E}_x(0) + \underline{e}_y \underline{E}_y(0) + \underline{e}_z \underline{E}_z(0) \right] e^{-\left(\underline{\gamma}_x x + \underline{\gamma}_y y + \underline{\gamma}_z z\right)} = \underline{E}(0)e^{-\underline{\eta} r} \quad [\text{V/m}] \quad (8.8)$$

8.1.3 Types de polarisations

La valeur du vecteur-phaseur à l'origine du système de coordonnées $\underline{E}(0)$ a été introduite comme constante d'intégration, elle est en général complexe

$$\underline{E}(0) = \underline{E}_r(0) + j \underline{E}_i(0) \quad [\text{V/m}] \quad (8.9)$$

Quand $\underline{E}_r(0)$ et $\underline{E}_i(0)$ sont parallèles, le champ est linéairement polarisé (§ 7.2.2). Quand ces deux vecteurs sont perpendiculaires et que, de plus, ils ont la même amplitude, le champ est polarisé circulairement (§ 7.2.3). Dans tous les autres cas, la polarisation du champ est elliptique (fig. 7.2).

Des ondes des trois types de polarisation peuvent se propager dans un milieu isotrope, leur polarisation est conservée, et les caractéristiques de propagation (déphasage, atténuation) ne dépendent pas de la polarisation.

8.1.4 Vecteur-phaseur de propagation

On a introduit dans l'équation (8.7) le vecteur-phaseur de propagation $\underline{\eta}$, dont les trois composantes sont les constantes introduites dans la séparation des variables (8.4)

$$\underline{\eta} = \underline{e}_x \underline{\gamma}_x + \underline{e}_y \underline{\gamma}_y + \underline{e}_z \underline{\gamma}_z = \underline{a} + j \underline{\beta} \quad [\text{m}^{-1}] \quad (8.10)$$

La partie réelle \underline{a} de l'exposant de propagation est l'affaiblissement linéique, vecteur indiquant la direction du plus fort amortissement des champs – la définition de l'affaiblissement introduite dans l'étude des lignes de transmission au paragraphe 3.2.7 reste valable pour les ondes, cette grandeur devenant un vecteur. Comme on considère un milieu sans pertes, on pourrait supposer que le vecteur-phaseur de propagation devrait être purement imaginaire, et poser par conséquent que $\underline{a} = 0$. Cela serait toutefois incorrect, car il existe aussi dans ce cas des ondes pour lesquelles $\underline{a} \neq 0$: on doit donc procéder prudemment, afin d'être certain d'obtenir toutes les solutions possibles [68].

La partie imaginaire $\underline{\beta}$ de l'exposant de propagation est le déphasage linéique (§ 3.2.9), vecteur qui indique la direction dans laquelle le déphasage est maximum, qui correspond ici à la direction de propagation de l'onde. La longueur d'onde est donnée par $\lambda = 2\pi/|\underline{\beta}|$ (3.23), tandis qu'on détermine les vitesses de phase et de groupe au moyen des équations (3.24) et (3.27).

En introduisant les paramètres physiques du milieu (§ 7.3.1), on obtient

$$\underline{\gamma}^2 = \underline{\eta} \cdot \underline{\eta} = \underline{a} \cdot \underline{a} - \underline{\beta} \cdot \underline{\beta} + 2j \underline{a} \cdot \underline{\beta} = -\omega^2 \varepsilon \mu \quad [\text{m}^{-2}] \quad (8.11)$$

Le terme de droite est purement réel, et on doit par conséquent avoir $\underline{a} \cdot \underline{\beta} = 0$. Cette condition peut être satisfaite de deux manières différentes :

On peut avoir $\underline{a} = 0$, auquel cas $\underline{\eta} = j\underline{\beta}$. Cette condition correspond à une onde plane uniforme (§ 8.1.5).

Les deux vecteurs \underline{a} et $\underline{\beta}$ peuvent également être non nuls, mais perpendiculaires l'un à l'autre. Cette situation se rencontre dans les ondes planes non uniformes (§ 8.1.8).

Il n'est en revanche pas possible d'avoir $\underline{\beta} = 0$, car l'équation (8.11) ne peut alors pas être satisfaite, parce que dans tous les matériaux $\varepsilon > 0$ et $\mu > 0$.

Quand on applique l'opérateur nabla au vecteur phaseur (8.8), on obtient, en tenant compte de (7.23) lorsqu'il n'y a pas de charges libres

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{E}(\mathbf{r}) &= \underline{E}(0) \cdot \nabla e^{-\left(\underline{\gamma}_x x + \underline{\gamma}_y y + \underline{\gamma}_z z\right)} = \underline{E}(0) \cdot \left(\underline{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \underline{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \underline{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) e^{-\left(\underline{\gamma}_x x + \underline{\gamma}_y y + \underline{\gamma}_z z\right)} \\ &= -\left(\underline{\gamma}_x \underline{e}_x + \underline{\gamma}_y \underline{e}_y + \underline{\gamma}_z \underline{e}_z \right) \cdot \underline{E}(0) e^{-\left(\underline{\gamma}_x x + \underline{\gamma}_y y + \underline{\gamma}_z z\right)} = -\underline{\eta} \times \underline{E}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{E}(\mathbf{r}) &= \underline{E}(0) \times \nabla e^{-\left(\underline{\gamma}_x x + \underline{\gamma}_y y + \underline{\gamma}_z z\right)} = \underline{E}(0) \times \left(\underline{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \underline{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \underline{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) e^{-\left(\underline{\gamma}_x x + \underline{\gamma}_y y + \underline{\gamma}_z z\right)} \\ &= -\left(\underline{\gamma}_x \underline{e}_x + \underline{\gamma}_y \underline{e}_y + \underline{\gamma}_z \underline{e}_z \right) \times \underline{E}(0) e^{-\left(\underline{\gamma}_x x + \underline{\gamma}_y y + \underline{\gamma}_z z\right)} = -\underline{\eta} \times \underline{E}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (8.12)$$

On constate que l'opérateur différentiel ∇ est remplacé par le vecteur phaseur $-\underline{\eta}$.

8.1.5 Onde plane uniforme

Une onde plane uniforme dans un milieu sans pertes se propage sans affaiblissement, de sorte que son exposant de propagation est purement imaginaire, il est donné par

$$\underline{\gamma} = j\underline{\beta} = j\omega \sqrt{\varepsilon \mu} \quad [\text{m}^{-1}] \quad (8.13)$$

L'amplitude moyenne du champ électrique (module du vecteur-phaseur) ne dépend pas de la position, vu qu'il n'y a pas de pertes. La phase varie linéairement dans la direction de propagation $\underline{\beta}$. Elle est constante dans un plan perpendiculaire à $\underline{\beta}$ qu'on appelle plan équiphase. Le vecteur phaseur $\underline{\eta}$ pour une onde plane uniforme dans un milieu sans pertes devient $j\underline{\beta}$, de sorte que les équations de Maxwell (7.23) ont la forme

$$\begin{aligned} \underline{\beta} \times \underline{E}(\mathbf{r}) &= \omega \underline{\mu} \underline{H}(\mathbf{r}) & \underline{\beta} \cdot \underline{E}(\mathbf{r}) &= 0 \\ \underline{\beta} \times \underline{H}(\mathbf{r}) &= -\omega \underline{\varepsilon} \underline{E}(\mathbf{r}) & \underline{\beta} \cdot \underline{H}(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned} \quad (8.14)$$

Le champ électrique et le champ magnétique sont perpendiculaires à la direction $\underline{\beta}$, et l'onde est dite transverse électromagnétique ou TEM. Les deux champs sont aussi perpendiculaires l'un à l'autre. Le quotient de leurs amplitudes est l'impédance d'onde

$$\frac{|\underline{E}|}{|\underline{H}|} = Z_c = \sqrt{\frac{\underline{\mu}}{\underline{\varepsilon}}} = \sqrt{\frac{\underline{\mu}_0 \underline{\mu}_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} = Z_0 \sqrt{\frac{\underline{\mu}_r}{\varepsilon_r}} \equiv 120\pi \sqrt{\frac{\underline{\mu}_r}{\varepsilon_r}} \quad [\Omega] \quad (8.15)$$

Dans les milieux diélectriques, $\mu_r = 1$, de sorte que

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \cong \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad [\Omega] \quad (8.16)$$

Les vitesses de phase et de groupe sont obtenues à partir de (8.12), (3.24) et (3.27)

$$\begin{aligned} v_\varphi &= \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \\ v_g &= \left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = v_\varphi \end{aligned} \quad [\text{m/s}] \quad (8.17)$$

Elles sont égales et ne varient pas avec la fréquence. Pour une onde plane uniforme, le milieu est non dispersif et un signal quelconque se propage sans distorsion (pas de changement de forme).

8.1.6 Énergie et puissance

Les densités moyennes d'énergie électrique et magnétique sont données par

$$W_e = \frac{\epsilon}{2} |\underline{E}|^2 \quad W_m = \frac{\mu}{2} |\underline{H}|^2 = \frac{\mu}{2} \left| \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \underline{E} \right|^2 = \frac{\epsilon}{2} |\underline{E}|^2 \quad [\text{J/m}^3] \quad (8.18)$$

On remarque que les deux densités sont égales. La densité de puissance transmise est obtenue en prenant le module du vecteur de Poynting, ce qui donne

$$|\underline{S}| = |\underline{E} \times \underline{H}^*| = \underline{P} = Z_c |\underline{H}|^2 = |\underline{E}|^2 / Z_c \quad [\text{W/m}^2] \quad (8.19)$$

Comme l'impédance caractéristique est ici purement réelle, l'onde ne transporte qu'une puissance active.

Les énergies électrique et magnétique se déplacent avec l'onde, provoquant le transfert de puissance. Le quotient de ces deux grandeurs a les dimensions d'une vitesse, c'est la vitesse de transport de l'énergie

$$v_e = \frac{P}{W_e + W_m} = \frac{|\underline{E}|^2}{Z_c \epsilon |\underline{E}|^2} = \frac{1}{\epsilon \sqrt{\mu/\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = v_\varphi = v_g \quad [\text{m/s}] \quad (8.20)$$

Dans un milieu isotrope sans pertes, la vitesse de transport d'énergie d'une onde plane uniforme est égale à la vitesse de phase et à la vitesse de groupe. On rencontre la même situation dans une ligne sans pertes LC' (§ 2.4.1).

8.1.7 Remarque

Dans tout système de transmission qui ne comporte pas de pertes, la vitesse de groupe est égale à la vitesse de transport d'énergie, qui est également la vitesse à laquelle se propage l'information. Cette vitesse ne peut pas dépasser la vitesse de la lumière c_0 .

Cette égalité reste approximativement valable dans un système faiblement dissipatif [11]. En revanche, lorsque l'affaiblissement devient important, ces deux vitesses prennent des valeurs différentes, et la vitesse de groupe peut devenir supérieure à c_0 .

8.1.8 Onde plane non uniforme

Une onde plane non uniforme dans un milieu sans pertes se propage dans une direction $\boldsymbol{\beta}$ et s'affaiblit dans une direction perpendiculaire \mathbf{a} . Dans la direction opposée $-\mathbf{a}$, l'amplitude de l'onde augmente indéfiniment et tend vers l'infini: cette onde ne peut donc pas exister dans un milieu homogène infini, on ne la trouve que dans des régions de dimensions limitées, comme au voisinage d'interfaces diélectriques – par exemple lors d'une réflexion totale (§ 8.4.2).

L'équation (8.11) ne fournit pas suffisamment d'information pour permettre de déterminer \mathbf{a} et $\boldsymbol{\beta}$ – on ne dispose que de deux relations, mais on a trois inconnues. Il faut donc obtenir une information supplémentaire, provenant des conditions aux limites. On constate toutefois que $\beta > \omega\sqrt{\epsilon\mu}$, ce qui signifie que la vitesse de phase est inférieure à celle de l'onde plane uniforme dans le même milieu.

L'amplitude du champ (module) est constante dans un plan équiamplitude perpendiculaire à \mathbf{a} , et sa phase dans un plan équiphasse perpendiculaire à $\boldsymbol{\beta}$. L'opérateur nabla est remplacé par $-(\mathbf{a} + j\boldsymbol{\beta})$ et par conséquent les équations de Maxwell prennent la forme

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + j\boldsymbol{\beta}) \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= j\omega\mu \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) & (\mathbf{a} + j\boldsymbol{\beta}) \cdot \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= 0 \\ (\mathbf{a} + j\boldsymbol{\beta}) \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) &= -j\omega\epsilon \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) & (\mathbf{a} + j\boldsymbol{\beta}) \cdot \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned} \quad (8.21)$$

Ces relations spécifient l'orthogonalité de vecteurs-phaseurs, elles portent sur leurs parties réelle et imaginaire, par exemple la divergence du champ électrique donne

$$\mathbf{a} \cdot \underline{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\beta} \cdot \underline{\mathbf{E}}_i(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\beta} \cdot \underline{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r}) + \mathbf{a} \cdot \underline{\mathbf{E}}_i(\mathbf{r}) = 0 \quad [\text{V/m}^2] \quad (8.22)$$

Ces deux expressions ne fournissent pas des relations explicites pour les vecteurs eux-mêmes, contrairement à celles pour les ondes planes uniformes. Il n'est pas possible de définir une relation simple pour l'impédance d'onde, qui devient un tenseur (§ 8.2.4).

8.2 PROPAGATION DANS UN MILIEU INFINI AVEC PERTES

8.2.1 Équation d'onde

Dans un milieu dissipatif sans charges électriques libres et en régime sinusoïdal permanent (notation complexe), la permittivité $\underline{\epsilon}$ et la perméabilité $\underline{\mu}$ sont des grandeurs complexes, et la relation (8.1) doit être remplacée par

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = (j\omega\underline{\mu}\sigma - \omega^2 \underline{\epsilon}\underline{\mu}) \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \underline{\gamma}^2 \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \quad [\text{V/m}^3] \quad (8.23)$$

La suite de la résolution est identique à celle donnée dans les paragraphes 8.1.2, 8.1.3 et 8.1.4, jusqu'à l'équation (8.11) qui devient ici :

$$\underline{\gamma}^2 = \underline{\boldsymbol{\eta}} \cdot \underline{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} + 2j\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta} = j\omega\underline{\mu}\sigma - \omega^2 \underline{\epsilon}\underline{\mu} = j\omega\underline{\mu}\sigma - \omega^2(\epsilon' - j\epsilon'')(\mu' - j\mu'') \quad (8.24)$$

On la sépare comme suit en parties réelle et imaginaire

$$\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \beta^2 - \alpha^2 = \omega^2(\epsilon'\mu' - \epsilon''\mu'') - \omega\mu''\sigma \quad [\text{m}^{-2}] \quad (8.25)$$

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta} = \alpha\beta \cos \zeta = \left[\omega^2(\epsilon'\mu'' + \epsilon''\mu') + \omega\mu'\sigma \right] / 2 \quad [\text{m}^{-2}]$$

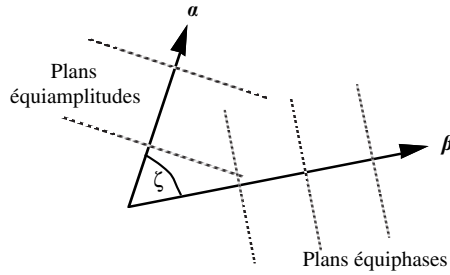


Fig. 8.1 Vecteurs d'affaiblissement et de déphasage, plans équiampplitudes et équiphases

On a admis que les deux vecteurs \mathbf{a} et $\mathbf{\beta}$ forment un angle ζ (fig. 8.1). Les ondes planes sont uniformes quand les vecteurs \mathbf{a} et $\mathbf{\beta}$ sont parallèles ($\zeta = 0$), et non uniformes quand ils ne le sont pas ($\zeta \neq 0$). Dans un milieu passif, on doit toujours avoir $0 \leq \zeta \leq \pi/2$. Procédant comme au paragraphe 2.4.2, on tire des deux relations (8.25) les valeurs de α et de β en fonction de la pulsation ω et des propriétés du milieu $\underline{\epsilon}$, $\underline{\mu}$, σ et ζ

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\left(\omega^2(\epsilon'\mu' - \epsilon''\mu'') - \omega\mu''\sigma\right)^2 + \left(\frac{\omega^2(\epsilon'\mu'' + \epsilon''\mu') + \omega\mu'\sigma}{\cos\zeta}\right)^2} + \omega^2(\epsilon'\mu' - \epsilon''\mu'') - \omega\mu''\sigma}$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\left(\omega^2(\epsilon'\mu' - \epsilon''\mu'') - \omega\mu''\sigma\right)^2 + \left(\frac{\omega^2(\epsilon'\mu'' + \epsilon''\mu') + \omega\mu'\sigma}{\cos\zeta}\right)^2} - \omega^2(\epsilon'\mu' - \epsilon''\mu'') + \omega\mu''\sigma}$$

[m⁻¹] (8.26)

Dans un milieu sans pertes magnétiques, $\mu'' = 0$ et ces expressions se simplifient, car des termes disparaissent et on peut mettre μ' en évidence

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu'}{2}} \sqrt{\sqrt{\epsilon'^2 + \left(\frac{\epsilon'' + \sigma/\omega}{\cos\zeta}\right)^2} - \epsilon'} \quad \beta = \omega \sqrt{\frac{\mu'}{2}} \sqrt{\sqrt{\epsilon'^2 + \left(\frac{\epsilon'' + \sigma/\omega}{\cos\zeta}\right)^2} + \epsilon'} \quad (8.27)$$

8.2.2 Onde plane uniforme

Une onde plane uniforme dans un milieu avec pertes se propage et décroît dans la même direction, de sorte que son vecteur-phaseur de propagation prend la forme

$$\underline{\eta} = e_\gamma(\alpha + j\beta) \quad [\text{m}^{-1}] \quad (8.28)$$

où e_γ est le vecteur unité dans la direction de propagation, et les termes α et β sont tirés de (8.26) ou (8.27) en posant $\zeta = 0$.

L'amplitude moyenne du champ électrique (module) et sa phase sont constants dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation e_γ : les plans équiphases et les plans équiampplitudes sont confondus. Les équations de Maxwell prennent ici la forme

$$\begin{aligned} (\alpha + j\beta)e_\gamma \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= j\omega\underline{\mu}\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) & e_\gamma \cdot \underline{\mathbf{E}}_t(\mathbf{r}) &= 0 \\ (\alpha + j\beta)e_\gamma \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) &= -(j\omega\underline{\epsilon} + \sigma)\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) & e_\gamma \cdot \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned} \quad (8.29)$$

Le champ électrique et le champ magnétique sont perpendiculaires à la direction de propagation \underline{e}_γ , l'onde est donc transverse électromagnétique ou TEM. Les champs sont perpendiculaires l'un à l'autre. On peut aussi définir l'impédance d'onde à l'aide de (8.29)

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{e}_\gamma \times \underline{E}(\mathbf{r})}{\underline{H}(\mathbf{r})} = \frac{j\omega\mu}{\alpha + j\beta} \quad [\Omega] \quad (8.30)$$

Les vitesses de phase et de groupe sont déterminées avec β . Comme $\underline{\epsilon}$ et $\underline{\mu}$ dépendent de la fréquence dans un milieu dissipatif (§ 7.3.2), les deux vitesses ne sont pas égales, et toutes deux varient avec la fréquence. On dit que le milieu est dispersif: un signal change de forme en se propageant (distorsions d'amplitude et de phase) [69].

8.2.3 Onde plane non uniforme

Une onde plane non uniforme se déphase dans une direction $\underline{\beta}$ et s'affaiblit dans une autre direction \underline{a} (fig. 8.1). Dans la direction opposée $-\underline{a}$, l'amplitude augmente indéfiniment: une onde plane non uniforme ne peut pas exister dans un milieu homogène infini. On la rencontre dans des régions de dimensions limitées au voisinage d'interfaces.

L'amplitude du champ électrique (module) est constante dans un plan équiamplitude perpendiculaire à \underline{a} et sa phase dans un plan équiphase perpendiculaire à $\underline{\beta}$. Les équations de Maxwell sont alors données par leur forme générale

$$\begin{aligned} (\underline{a} + j\underline{\beta}) \times \underline{E}(\mathbf{r}) &= j\omega\underline{\mu}\underline{H}(\mathbf{r}) & (\underline{a} + j\underline{\beta}) \cdot \underline{E}_r(\mathbf{r}) &= 0 \\ (\underline{a} + j\underline{\beta}) \times \underline{H}(\mathbf{r}) &= -(j\omega\underline{\epsilon} + \sigma)\underline{E}(\mathbf{r}) & (\underline{a} + j\underline{\beta}) \cdot \underline{H}(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned} \quad (8.31)$$

Ces relations, qui portent sur les parties réelle et imaginaire de vecteurs-phaseurs, spécifient l'orthogonalité des vecteurs-phaseurs, et en particulier la relation (8.22) reste valable. On ne peut toutefois pas en tirer des relations simples pour la perpendicularité des vecteurs qui composent les vecteurs-phaseurs.

Pour l'onde plane non uniforme dans un milieu dissipatif, l'impédance d'onde prend un caractère tensoriel – qu'on peut aussi représenter avec un produit vectoriel (§ 8.2.4).

8.2.4 Impédance et admittance de l'onde

Les deux phaseurs $\underline{E}(\mathbf{r})$ et $\underline{H}(\mathbf{r})$ d'une onde plane ont la même dépendance spatiale, ils sont liés par les relations (8.31) et on peut exprimer de façon tout à fait générale l'un des deux en fonction de l'autre

$$\begin{aligned} \underline{H}(\mathbf{r}) &= \frac{\underline{\eta}}{j\omega\underline{\mu}} \times \underline{E}(\mathbf{r}) = \underline{Y}_c \times \underline{E}(\mathbf{r}) = [\underline{Y}_c] \underline{E}(\mathbf{r}) & [\text{A/m}] \\ \underline{E}(\mathbf{r}) &= \frac{-\underline{\eta}}{\sigma + j\omega\underline{\epsilon}} \times \underline{H}(\mathbf{r}) = -\underline{Z}_c \times \underline{H}(\mathbf{r}) = [\underline{Z}_c] \underline{H}(\mathbf{r}) & [\text{V/m}] \end{aligned} \quad (8.32)$$

où l'on a défini deux vecteurs-phaseurs, l'admittance \underline{Y}_c et l'impédance d'onde \underline{Z}_c , dont le produit scalaire vaut l'unité (8.1)

$$\underline{Y}_c \cdot \underline{Z}_c = \frac{\underline{\eta} \cdot \underline{\eta}}{j\omega\underline{\mu}(\sigma + j\omega\underline{\epsilon})} = 1 \quad [-] \quad (8.33)$$

En coordonnées cartésiennes, on peut également représenter un produit vectoriel au moyen d'un tenseur ou dyadique, ce qui donne le dernier terme à droite dans les équations (8.32). Les deux *matrices d'admittance* $[\underline{\mathbf{Y}}_c]$ et *d'impédance de l'onde* $[\underline{\mathbf{Z}}_c]$ sont alors données par

$$[\underline{\mathbf{Y}}_c] = \frac{1}{j\omega\mu} \begin{bmatrix} 0 & -\underline{\gamma}_z & \underline{\gamma}_y \\ \underline{\gamma}_z & 0 & -\underline{\gamma}_x \\ -\underline{\gamma}_y & \underline{\gamma}_x & 0 \end{bmatrix} \quad [\underline{\mathbf{Z}}_c] = \frac{1}{(\sigma + j\omega\varepsilon)} \begin{bmatrix} 0 & \underline{\gamma}_z & -\underline{\gamma}_y \\ -\underline{\gamma}_z & 0 & \underline{\gamma}_x \\ \underline{\gamma}_y & -\underline{\gamma}_x & 0 \end{bmatrix} \quad (8.34)$$

Contrairement à ce que l'on pourrait prévoir, le produit $[\underline{\mathbf{Y}}_c][\underline{\mathbf{Z}}_c]$ n'est pas identiquement égal à la matrice unité $[\mathbf{I}]$. Ce n'est que lorsque les matrices s'appliquent à des vecteurs-phaseurs de champs, et qu'on dispose par conséquent des relations supplémentaires $\underline{\boldsymbol{\eta}} \cdot \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = 0$ et $\underline{\boldsymbol{\eta}} \cdot \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = 0$, qu'on obtient les égalités suivantes

$$[\underline{\mathbf{Z}}_c][\underline{\mathbf{Y}}_c]\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}} \quad [\text{V/m}] \quad \text{et} \quad [\underline{\mathbf{Y}}_c][\underline{\mathbf{Z}}_c]\underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{H}} \quad [\text{A/m}] \quad (8.35)$$

Pour une onde plane uniforme (§ 8.2.2), les deux vecteurs $\underline{\mathbf{Y}}_c$ et $\underline{\mathbf{Z}}_c$ sont pointés dans la direction de propagation et leurs valeurs (complexes) sont données par

$$\underline{\mathbf{Z}}_c = \frac{1}{\underline{\mathbf{Y}}_c} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} \quad [\Omega] \quad (8.36)$$

8.2.5 Vecteur-phaseur de Poynting

La densité de puissance par une onde plane est obtenue en formant le vecteur-phaseur de Poynting

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) &= \underline{\mathbf{P}}(\mathbf{r}) + j\underline{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}) = \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}) \\ &= \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times [\underline{\mathbf{Y}}_c^* \times \underline{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r})] = \underline{\mathbf{Y}}_c^* |\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})|^2 - \underline{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}) [\underline{\mathbf{Y}}_c^* \cdot \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})] \quad [\text{W/m}^2] \quad (8.37) \\ &= -[\underline{\mathbf{Z}}_c \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})] \times \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}) = \underline{\mathbf{Z}}_c |\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})|^2 - \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) [\underline{\mathbf{Z}}_c \cdot \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})] \end{aligned}$$

Il faut noter que le fait que $\underline{\mathbf{Z}}_c \cdot \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = 0$ n'entraîne pas que $\underline{\mathbf{Z}}_c \cdot \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})$ soit nul, et il en va de même pour $\underline{\mathbf{Y}}_c^* \cdot \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$.

8.2.6 Onde plane uniforme dans un métal

Dans un bon conducteur métallique, pour des fréquences allant jusqu'à l'infrarouge, le courant de déplacement est beaucoup plus petit que le courant de conduction et on a, par conséquent

$$|\omega\varepsilon| \ll \sigma \quad (8.38)$$

Par ailleurs, dans la plupart des bons conducteurs, les pertes magnétiques sont négligeables, et donc $\underline{\mu} = \underline{\mu}'$. Considérant de plus le cas d'une onde plane uniforme, on obtient une relation simplifiée pour α et β

$$\alpha \cong \beta \cong \sqrt{\frac{\omega\mu'\sigma}{2}} \quad [\text{m}^{-1}] \quad (8.39)$$

8.2.7 Profondeur de pénétration dans un métal

La profondeur de pénétration δ et la longueur d'onde λ dans le métal sont proportionnelles, elles sont données par les relations

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \cong \sqrt{\frac{2}{\omega\mu'\sigma}} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} \cong 2\pi\sqrt{\frac{2}{\omega\mu'\sigma}} \cong 2\pi\delta \quad [\text{m}] \quad (8.40)$$

La dépendance fréquentielle de la profondeur de pénétration est représentée dans la figure 8.2 pour quelques métaux, en fonction de la fréquence. Comme cette grandeur est inversement proportionnelle à la racine carrée de la fréquence, lorsqu'on multiplie la fréquence par 100, on divise la profondeur de pénétration par 10. Il est ainsi possible d'extrapoler les valeurs indiquées dans la figure.

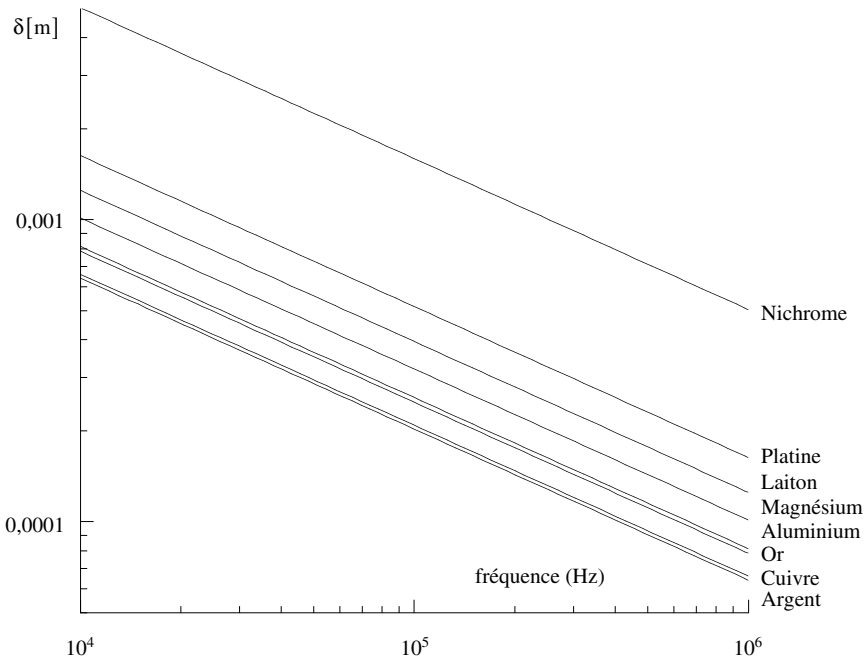


Fig. 8.2 Profondeur de pénétration en dans plusieurs métaux, en fonction de la fréquence, dans la bande de 10 kHz à 1 MHz. Quand on multiplie la fréquence par 100, on divise la profondeur de pénétration par 10.

On constate que la profondeur de pénétration d'une onde électromagnétique dans un métal est très petite, et qu'elle diminue lorsque la fréquence du signal augmente. Une feuille métallique mince suffit à réduire considérablement l'amplitude du rayonnement électromagnétique. Le tableau 3.5 indique qu'une lame métallique épaisse de $2,3 \delta$ réduit de 10 fois l'amplitude des champs et de 100 fois la puissance transmise (tab. 3.5). On peut par conséquent utiliser du métal pour blinder des appareils sensibles.

Il faut également tenir compte, en plus de l'affaiblissement, du fait qu'un signal incident sur une paroi métallique est fortement réfléchi par la surface qui sépare le métal du milieu environnant (§ 8.5.2). Ceci réduit encore l'amplitude du signal et augmente donc l'efficacité du blindage.

8.2.8 Impédance d'onde dans un métal

L'expression pour l'impédance d'onde à l'intérieur du métal devient également plus simple que dans le cas général, et prend la forme suivante

$$\underline{Z}_m \cong \sqrt{\frac{j\omega\mu'}{\sigma}} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu'}{2\sigma}} = \frac{(1+j)}{\sigma\delta} = (1+j)R_m \quad [\Omega] \quad (8.41)$$

La figure 8.3 montre la partie réelle de l'impédance caractéristique pour plusieurs métaux, en fonction de la fréquence. Comme la dépendance est proportionnelle à la racine carrée, quand on multiplie la fréquence par 100, l'impédance augmente d'un facteur 10. L'impédance d'un métal est beaucoup plus petite que l'impédance du vide (120π), de sorte qu'on admet souvent qu'elle est nulle (modèle théorique du cep, § 6.4.6).

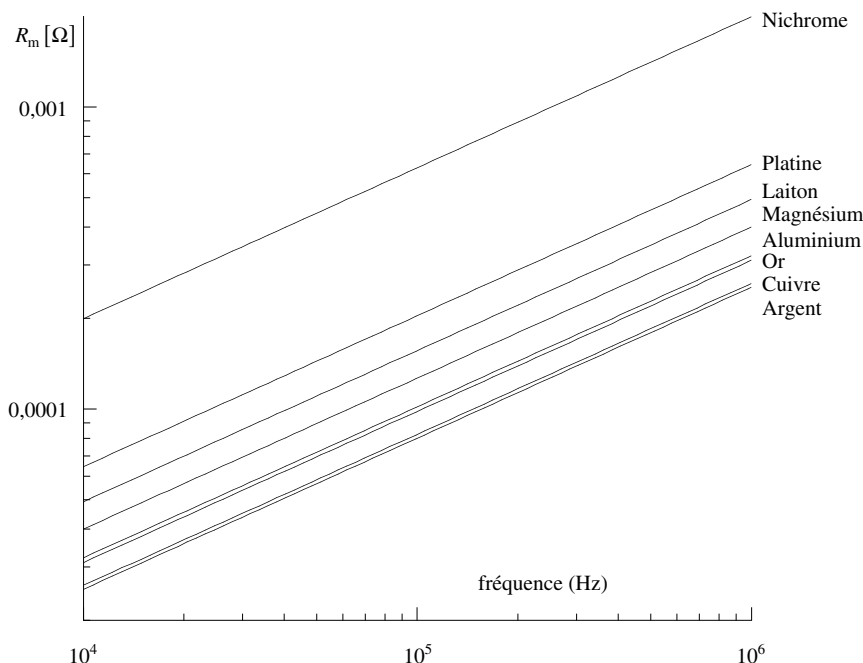


Fig. 8.3 Partie réelle de l'impédance d'onde pour plusieurs métaux, dans la bande de 10 kHz à 1 MHz.

8.2.9 Courants induits, effet Joule

Les champs électromagnétiques induisent des courants dans le conducteur (courants induits, *courants de Foucault*). Comme l'impédance du métal n'est pas tout à fait nulle, une partie du signal est absorbée et transformée en chaleur par *effet Joule* (sect. IX.1.4).

Cet effet s'utilise pour traiter des métaux et pour cuire des aliments (chauffage par induction). En revanche, dans beaucoup de situations, les pertes par échauffement sont hautement indésirables et des précautions doivent être prises pour que la température du métal reste dans des limites tolérables.

Lorsque la température augmente, la conductivité du métal diminue, ce qui augmente les pertes, et on observe un emballement thermique – utilisé pour réaliser des fusibles.

8.3 DISCONTINUITÉ PLANE ENTRE DEUX MILIEUX

8.3.1 Surface de séparation

Une onde plane uniforme provient du milieu homogène 1 et tombe sur une surface plane qui sépare le milieu 1 du milieu 2, qui est lui aussi homogène. Une partie du signal est réfléchiée, et le reste transmis dans le second milieu. Les deux milieux sont isotropes, avec ou sans pertes, définis par des propriétés $\underline{\epsilon}$, $\underline{\mu}$, σ .

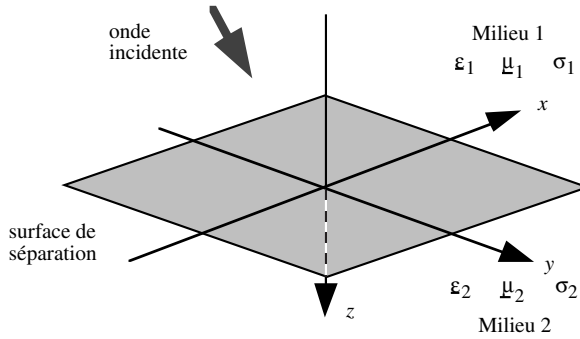


Fig. 8.4 Définition de la surface de séparation entre deux milieux.

On pose, tout à fait arbitrairement, que la surface de séparation est le plan xOy , défini par $z=0$. L'axe des z est perpendiculaire au plan de séparation (direction normale), tandis que les axes x et y sont dans le plan de séparation (coordonnées transverses).

8.3.2 Définition : ondes progressive et rétrograde

On dit d'une onde qu'elle est *progressive* lorsqu'elle se dirige vers les z croissants, la direction *rétrograde* pointant en revanche vers les valeurs négatives de z . Dans la géométrie considérée, les ondes incidente et transmise sont toutes deux progressives, tandis que l'onde réfléchiée est rétrograde.

8.3.3 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sur le plan de séparation en $z=0$ spécifient que certaines composantes des champs sont continues (sect. 1.5). Pour qu'on puisse satisfaire ces conditions, il faut que les dépendances transverses des champs soient identiques de part et d'autre du plan de séparation. Pour une onde plane, dont les champs varient exponentiellement selon (8.8), la dépendance en $z=0$ est donnée par

$$e^{-\left(\underline{\gamma}_{1x}x + \underline{\gamma}_{1y}y\right)} \text{ dans le milieu 1} \quad e^{-\left(\underline{\gamma}_{2x}x + \underline{\gamma}_{2y}y\right)} \text{ dans le milieu 2} \quad (8.42)$$

Pour qu'il y ait continuité, on doit avoir

$$\underline{\gamma}_{x1} = \underline{\gamma}_{x2} = \underline{\gamma}_x \quad \text{et} \quad \underline{\gamma}_{y1} = \underline{\gamma}_{y2} = \underline{\gamma}_y \quad [m^{-1}] \quad (8.43)$$

Cette relation est valable pour tous les milieux et ondes considérés. Les paramètres de l'onde incidente sont en général connus (données du problème) et spécifient $\underline{\gamma}_x$ et $\underline{\gamma}_y$ dans le milieu 2. Il reste à déterminer la composante normale du vecteur phaseur $\underline{\gamma}_z$ de l'onde transmise dans le milieu 2 et celle de l'onde réfléchie dans le milieu 1.

Lorsque plusieurs plans de séparation parallèles se suivent, les relations de continuité doivent être satisfaites sur chacun d'eux, de sorte que, de proche en proche, $\underline{\gamma}_x$ et $\underline{\gamma}_y$ soient les mêmes dans tous les milieux de part et d'autre de ces plans.

8.3.4 Onde incidente

Le vecteur-phaseur de propagation de l'onde incidente – qui est plane et uniforme – a une direction unique, qui est la direction de propagation (8.28) $\underline{\eta} = e_\gamma(\alpha + j\beta)$.

On définit un *plan d'incidence*, qui contient la direction de propagation e_γ et la normale à la surface de séparation e_z . Ce plan ne doit pas être confondu avec la surface de séparation elle-même, à laquelle il est toujours perpendiculaire. Lorsque l'incidence est normale ($\theta_{in} = 0$), les deux vecteurs qui définissent le plan d'incidence sont confondus: on ne peut pas le définir de façon univoque, tous les plans qui contiennent la normale devenant dans ce cas des plans d'incidence.

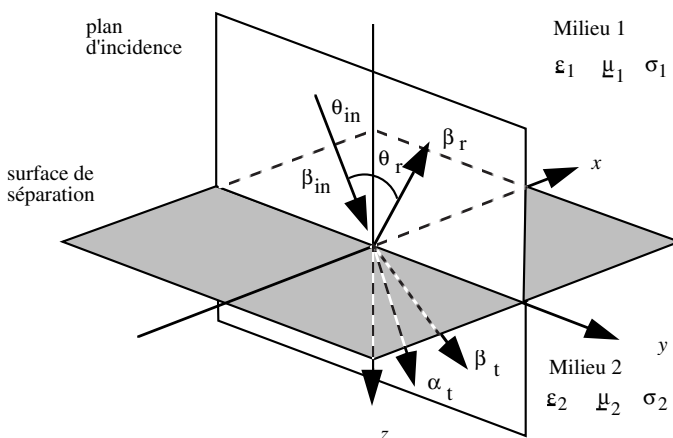


Fig. 8.5 Définition du plan d'incidence.

L'onde incidente forme avec la normale un angle d'incidence θ_{in} . Une onde est réfléchie dans le premier milieu, avec un angle de réflexion θ_r , et une partie du signal est transmise dans le second milieu. L'onde dans le second milieu n'est pas forcément plane uniforme, son vecteur-phaseur de propagation $\underline{\eta}$ peut comporter une partie réelle α et une partie imaginaire β .

Le plan d'incidence a été ici défini comme étant le plan yOz ($x=0$). Deux types de polarisations linéaires présentent des propriétés particulières, lorsque leur champ électrique est respectivement *perpendiculaire* (§. 8.3.7) ou *parallèle* au plan d'incidence (§. 8.3.8).

Lorsque l'onde incidente est elliptiquement ou circulairement polarisée, on peut la décomposer en deux ondes à polarisation linéaire – perpendiculaire et parallèle. On détermine la réflexion des deux composantes et on superpose les deux ondes réfléchies.

8.3.5 Dépendances des champs

Les champs électrique et magnétique des ondes incidente, réfléchie et transmise sont exprimés par les relations suivantes

$$\begin{aligned}
 \text{onde incidente} \quad \underline{E}_i(y, z) &= \underline{E}_i(0) e^{-\left(\gamma_y y + \gamma_{z1} z\right)} & \underline{H}_i(y, z) &= \underline{H}_i(0) e^{-\left(\gamma_y y + \gamma_{z1} z\right)} \\
 \text{onde réfléchie} \quad \underline{E}_r(y, z) &= \underline{E}_r(0) e^{-\left(\gamma_y y - \gamma_{z1} z\right)} & \underline{H}_r(y, z) &= \underline{H}_r(0) e^{-\left(\gamma_y y - \gamma_{z1} z\right)} \\
 \text{onde transmise} \quad \underline{E}_t(y, z) &= \underline{E}_t(0) e^{-\left(\gamma_y y + \gamma_{z2} z\right)} & \underline{H}_t(y, z) &= \underline{H}_t(0) e^{-\left(\gamma_y y + \gamma_{z2} z\right)}
 \end{aligned} \tag{8.44}$$

Les relations entre champs électrique et magnétique des trois ondes se déduisent des équations de Maxwell, données par (8.29) pour les ondes planes uniformes, par (8.31) pour les ondes planes non uniformes (pour certains cas dans le milieu 2). La continuité des composantes tangentielles à la surface de séparation en $z = 0$ fournit les relations suivantes

$$\begin{aligned}
 \underline{E}_{ix}(y, 0) + \underline{E}_{rx}(y, 0) &= \underline{E}_{tx}(y, 0) & \underline{H}_{ix}(y, 0) + \underline{H}_{rx}(y, 0) &= \underline{H}_{tx}(y, 0) \\
 \underline{E}_{iy}(y, 0) + \underline{E}_{ry}(y, 0) &= \underline{E}_{ty}(y, 0) & \underline{H}_{iy}(y, 0) + \underline{H}_{ry}(y, 0) &= \underline{H}_{ty}(y, 0)
 \end{aligned} \tag{8.45}$$

8.3.6 Vecteurs-phaseurs de propagation, direction des ondes

Lorsqu'on connaît les propriétés des matériaux de part et d'autre de la surface de séparation et l'angle d'incidence, les composantes des vecteurs-phaseurs de propagation dans les deux milieux sont complètement déterminées, comme suit

$$\begin{aligned}
 \gamma_{zi} &= \gamma_1 \cos \theta_{in} = \sqrt{j\omega \underline{\mu}_1 \sigma_1 - \omega^2 \underline{\epsilon}_1 \underline{\mu}_1} \cos \theta_{in} & [\text{m}^{-1}] \\
 \gamma_y &= \gamma_1 \sin \theta_{in} = \sqrt{j\omega \underline{\mu}_1 \sigma_1 - \omega^2 \underline{\epsilon}_1 \underline{\mu}_1} \sin \theta_{in} & [\text{m}^{-1}] \\
 \gamma_{zt} &= \sqrt{\gamma_2^2 - \gamma_y^2} = \sqrt{\gamma_2^2 - \gamma_1^2 \sin^2 \theta_{in}} = \gamma_1 \sqrt{\underline{n}^2 - \sin^2 \theta_{in}} \\
 &= \sqrt{\left(j\omega \underline{\mu}_2 \sigma_2 - \omega^2 \underline{\epsilon}_2 \underline{\mu}_2\right)^2 - \left(j\omega \underline{\mu}_1 \sigma_1 - \omega^2 \underline{\epsilon}_1 \underline{\mu}_1\right)^2 \sin^2 \theta_{in}} & [\text{m}^{-1}]
 \end{aligned} \tag{8.46}$$

où l'on a introduit l'indice de réfraction complexe \underline{n} défini par

$$\underline{n}^2 = \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2} = \frac{\underline{\epsilon}_2 \underline{\mu}_2 - j \underline{\mu}_2 \sigma_2 / \omega}{\underline{\epsilon}_1 \underline{\mu}_1 - j \underline{\mu}_1 \sigma_1 / \omega} \quad [-] \tag{8.47}$$

Pour deux milieux non magnétiques, on a de plus $\underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2 = \underline{\mu}_0$. Lorsque les deux milieux sont sans pertes, l'indice de réfraction est réel.

On a ici $\gamma_{zr} = -\gamma_{z1}$, ce qui entraîne que $\theta_r = \theta_i$ (loi de Snell). Le vecteur-phaseur de propagation $\underline{\eta}$ dans le milieu 2 se trouve aussi dans le plan d'incidence, et on peut définir des angles de transmission θ_α et θ_β , formés respectivement par les vecteurs $\underline{\alpha}_t$ et $\underline{\beta}_t$ avec le vecteur normal

$$\tan \theta_\alpha = \frac{\alpha_y}{\alpha_{zt}} = \frac{\text{Re}(\gamma_y)}{\text{Re}(\gamma_{zt})} \quad \tan \theta_\beta = \frac{\beta_y}{\beta_{zt}} = \frac{\text{Im}(\gamma_y)}{\text{Im}(\gamma_{zt})} \quad [-] \tag{8.48}$$

8.3.7 Polarisation perpendiculaire

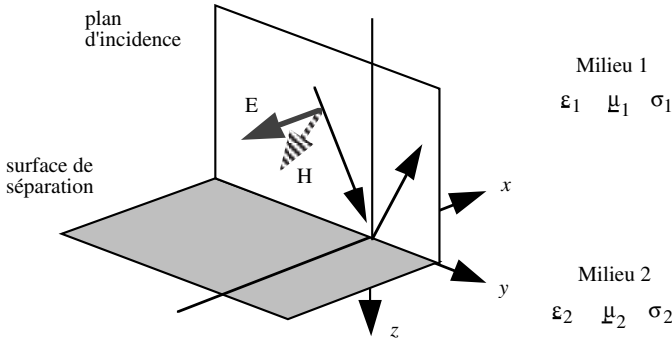


Fig. 8.6 Onde linéairement polarisée à polarisation perpendiculaire.

La polarisation d'une onde est définie en termes du champ électrique et du plan d'incidence: si le champ électrique est perpendiculaire au plan d'incidence (plan yOz), l'onde est perpendiculairement polarisée. Il n'a de ce fait qu'une composante selon x et la relation de continuité est

$$\underline{E}_{ix}(y,0) + \underline{E}_{rx}(y,0) = \underline{E}_{tx}(y,0) \quad [\text{V/m}] \quad (8.49)$$

On définit respectivement un facteur de réflexion $\underline{\rho}_{\perp}$ et un facteur de transmission $\underline{\tau}_{\perp}$

$$\underline{\rho}_{\perp} = \frac{\underline{E}_{rx}(y,0)}{\underline{E}_{ix}(y,0)} \quad \underline{\tau}_{\perp} = \frac{\underline{E}_{tx}(y,0)}{\underline{E}_{ix}(y,0)} \quad [-] \quad (8.50)$$

La continuité du champ électrique tangentiel donne alors

$$1 + \underline{\rho}_{\perp} = \underline{\tau}_{\perp} \quad [-] \quad (8.51)$$

Le champ magnétique est perpendiculaire au champ électrique et à la direction de propagation, il contient donc des composantes selon y et z . La condition de continuité porte sur la composante qui est tangentielle à la surface $\underline{H}_y(y,0)$, qui est donnée pour les trois ondes par

$$\begin{aligned} \underline{H}_{iy}(y,0) &= \frac{\gamma_{zi}}{j\omega\mu_1} \underline{E}_{ix}(y,0) & \underline{H}_{ry}(y,0) &= \frac{\gamma_{zr}}{j\omega\mu_1} \underline{E}_{rx}(y,0) = -\frac{\gamma_{zi}}{j\omega\mu_1} \underline{\rho}_{\perp} \underline{E}_{ix}(y,0) \\ \underline{H}_{ty}(y,0) &= \frac{\gamma_{zt}}{j\omega\mu_2} \underline{E}_{tx}(y,0) = \frac{\gamma_{zt}}{j\omega\mu_2} \underline{\tau}_{\perp} \underline{E}_{ix}(y,0) \end{aligned} \quad (8.52)$$

En l'absence de courant de surface, la continuité des composantes tangentielles du champ magnétique donne

$$1 - \underline{\rho}_{\perp} = \underline{\tau}_{\perp} \frac{\gamma_{zt}\mu_1}{\gamma_{zi}\mu_2} \quad [-] \quad (8.53)$$

On tire ensuite les deux facteurs $\underline{\rho}_{\perp}$ et $\underline{\tau}_{\perp}$ des deux relations (8.51) et (8.53)

$$\underline{\rho}_{\perp} = \frac{\underline{\gamma}_{zi}\underline{\mu}_2 - \underline{\gamma}_{zt}\underline{\mu}_1}{\underline{\gamma}_{zi}\underline{\mu}_2 + \underline{\gamma}_{zt}\underline{\mu}_1} \quad \underline{\tau}_{\perp} = \frac{2\underline{\gamma}_{zi}\underline{\mu}_2}{\underline{\gamma}_{zi}\underline{\mu}_2 + \underline{\gamma}_{zt}\underline{\mu}_1} \quad [-] \quad (8.54)$$

introduisant les valeurs des vecteurs-phaseurs de propagation (8.46), on obtient

$$\underline{\rho}_{\perp} = \frac{\underline{\mu}_2 \cos\theta_{in} - \underline{\mu}_1 \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_{in}}}{\underline{\mu}_2 \cos\theta_{in} + \underline{\mu}_1 \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_{in}}} \quad \underline{\tau}_{\perp} = \frac{2\underline{\mu}_2 \cos\theta_{in}}{\underline{\mu}_2 \cos\theta_{in} + \underline{\mu}_1 \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_{in}}} \quad (8.55)$$

8.3.8 Polarisation parallèle

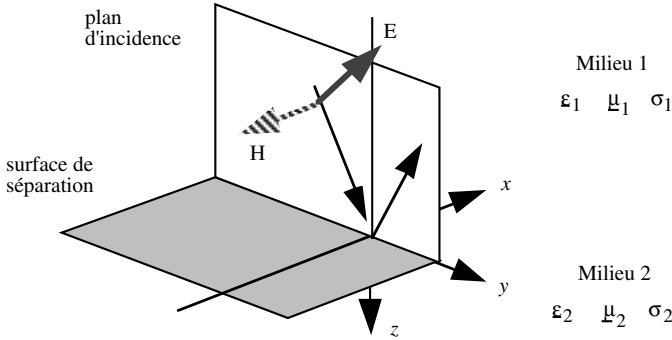


Fig. 8.7 Onde linéairement polarisée à polarisation parallèle.

Une onde est polarisée parallèlement quand son champ électrique est dans le plan d'incidence (plan yOz). Il a de ce fait deux composantes, selon y et z ,

$$\begin{aligned} \underline{E}_i(y,0) &= \underline{e}_y \underline{E}_{iy}(y,0) + \underline{e}_z \underline{E}_{iz}(y,0) \\ \underline{E}_r(y,0) &= \underline{e}_y \underline{E}_{ry}(y,0) + \underline{e}_z \underline{E}_{rz}(y,0) \\ \underline{E}_t(y,0) &= \underline{e}_y \underline{E}_{ty}(y,0) + \underline{e}_z \underline{E}_{tz}(y,0) \end{aligned} \quad [V/m] \quad (8.56)$$

Les facteurs de réflexion et de transmission sont définis en termes des composantes tangentielles du champ électrique

$$\underline{\rho}_{//} = \frac{\underline{E}_{ry}(y,0)}{\underline{E}_{iy}(y,0)} \quad \underline{\tau}_{//} = \frac{\underline{E}_{ty}(y,0)}{\underline{E}_{iy}(y,0)} \quad [-] \quad (8.57)$$

La continuité du champ électrique tangentiel donne alors

$$1 + \underline{\rho}_{//} = \underline{\tau}_{//} \quad [-] \quad (8.58)$$

On n'a considéré jusqu'ici que les composantes tangentielles du champ électrique. On peut également déterminer les composantes normales, qui sont données par

$$\underline{E}_{iz}(y,z) = -\frac{\underline{\gamma}_{z1}}{\underline{\gamma}_y} \underline{E}_{iy}(y,z) \quad \underline{E}_{rz}(y,z) = \frac{\underline{\gamma}_{z1}}{\underline{\gamma}_y} \underline{E}_{ry}(y,z) \quad \underline{E}_{tz}(y,z) = -\frac{\underline{\gamma}_{z2}}{\underline{\gamma}_y} \underline{E}_{ty}(y,z) \quad (8.59)$$

Le champ magnétique est perpendiculaire au champ électrique et à la direction de propagation, et n'a qu'une composante selon x

$$\begin{aligned} \underline{H}_{ix}(y,0) &= -\frac{j\omega\varepsilon_1 + \sigma_1}{\underline{\gamma}_{zi}} \underline{E}_{iy}(y,0) & [A/m] \\ \underline{H}_{rx}(y,0) &= -\frac{j\omega\varepsilon_1 + \sigma_1}{\underline{\gamma}_{zr}} \underline{E}_{ry}(y,0) = \frac{j\omega\varepsilon_1 + \sigma_1}{\underline{\gamma}_{zi}} \rho_{//} \underline{E}_{iy}(y,0) & [A/m] \\ \underline{H}_{tx}(y,0) &= -\frac{j\omega\varepsilon_2 + \sigma_1}{\underline{\gamma}_{zt}} \underline{E}_{ty}(y,0) = -\frac{j\omega\varepsilon_2 + \sigma_2}{\underline{\gamma}_{zt}} \tau_{//} \underline{E}_{iy}(y,0) & [A/m] \end{aligned} \quad (8.60)$$

La continuité du champ magnétique tangentiel donne la relation

$$1 - \rho_{//} = \tau_{//} \frac{\underline{\gamma}_{zi}(j\omega\varepsilon_2 + \sigma_2)}{\underline{\gamma}_{zt}(j\omega\varepsilon_1 + \sigma_1)} \quad [-] \quad (8.61)$$

En combinant (8.57) et (8.60), on trouve les facteurs de transmission et de réflexion

$$\rho_{//} = \frac{\underline{\gamma}_{zt}(j\omega\varepsilon_1 + \sigma_1) - \underline{\gamma}_{zi}(j\omega\varepsilon_2 + \sigma_2)}{\underline{\gamma}_{zt}(j\omega\varepsilon_1 + \sigma_1) + \underline{\gamma}_{zi}(j\omega\varepsilon_2 + \sigma_2)} \quad \tau_{//} = \frac{2\underline{\gamma}_{zt}(j\omega\varepsilon_1 + \sigma_1)}{\underline{\gamma}_{zt}(j\omega\varepsilon_1 + \sigma_1) + \underline{\gamma}_{zi}(j\omega\varepsilon_2 + \sigma_2)} \quad (8.62)$$

On développe ces relations avec (8.46) et on obtient finalement

$$\rho_{//} = \frac{\mu_2 \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_{in}} - \mu_1 n^2 \cos\theta_{in}}{\mu_2 \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_{in}} + \mu_1 n^2 \cos\theta_{in}} \quad \tau_{//} = \frac{2\mu_2 \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_{in}}}{\mu_2 \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_{in}} + \mu_1 n^2 \cos\theta_{in}} \quad (8.63)$$

La condition portant sur les composantes normales du champ de déplacement sert à déterminer la densité de charges de surface à l'interface entre les deux milieux

$$\rho_s(y,0) = -\varepsilon_1 [\underline{E}_{iz}(y,0) + \underline{E}_{tz}(y,0)] + \varepsilon_2 \underline{E}_{tz}(y,0) = \left[\varepsilon_1 \frac{\underline{\gamma}_{z1}}{\underline{\gamma}_y} (1 - \rho_{//}) - \varepsilon_2 \frac{\underline{\gamma}_{z2}}{\underline{\gamma}_y} \tau_{//} \right] \underline{E}_{iy}(y,0) \quad (8.64)$$

8.3.9 Superposition des deux polarisations

Quand l'onde incidente comporte une polarisation perpendiculaire et une polarisation parallèle, on trouve les ondes réfléchi et transmise par superposition

$$\begin{bmatrix} \underline{E}_{0rx} \\ \underline{E}_{0ry} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{\perp} & 0 \\ 0 & \rho_{//} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{E}_{0ix} \\ \underline{E}_{0iy} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \underline{E}_{0tx} \\ \underline{E}_{0ty} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{\perp} & 0 \\ 0 & \tau_{//} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{E}_{0ix} \\ \underline{E}_{0iy} \end{bmatrix} \quad [V/m] \quad (8.65)$$

On peut traiter les ondes incidentes à polarisation elliptique ou circulaire, formées par la superposition d'une composante perpendiculaire et d'une composante parallèle. Hors de l'incidence normale, on a $\rho_{\perp} \neq \rho_{//}$ et $\tau_{\perp} \neq \tau_{//}$, de sorte que le rapport des axes de l'ellipse se modifie – une polarisation circulaire peut aussi donner une réflexion elliptique, une polarisation linéaire oblique peut devenir circulaire ou elliptique, etc.

8.3.10 Lignes équivalentes

L'étude des champs sur l'interface entre deux milieux est identique à celle des tensions et courants entre deux lignes de transmission de caractéristiques différentes, qui est considérée dans la section 3.7. La propagation dans chacun des deux milieux est représentée par une ligne de transmission équivalente, et la jonction de deux milieux différents est représentée par la figure 8.8.

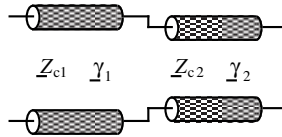


Fig. 8.8 Connexion de deux lignes équivalentes différentes.

On identifie la composante tangentielle du champ électrique avec la tension, celle du champ magnétique avec le courant, et on obtient les impédances caractéristiques équivalentes pour les deux polarisations

$$Z_{c1\perp} = \frac{\mu_1}{\gamma_{zi}} \quad Z_{c2\perp} = \frac{\mu_2}{\gamma_{zt}} Z_{c1\perp} \quad [\Omega] \quad (8.66)$$

$$Z_{c1//} = \frac{\gamma_{zi}}{j\omega\epsilon_1 + \sigma_1} \quad Z_{c2//} = \frac{\gamma_{zt}}{j\omega\epsilon_2 + \sigma_2} \quad [\Omega] \quad (8.67)$$

Les facteurs de réflexion et de transmission sont alors donnés par (3.92)

$$\rho_1 = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}} \quad \text{et} \quad \tau_{21} = \frac{2Z_{c2}}{Z_{c2} + Z_{c1}} \quad [-] \quad (8.68)$$

La matrice de réflexion qui correspond à la jonction de deux milieux est donnée par (3.93)

$$\frac{1}{Z_{c2} + Z_{c1}} \begin{bmatrix} Z_{c2} - Z_{c1} & 2Z_{c1} \\ 2Z_{c2} & Z_{c1} - Z_{c2} \end{bmatrix} \quad [V] \quad (8.69)$$

et la matrice de répartition correspondante par (3.94)

$$\frac{1}{Z_{c2} + Z_{c1}} \begin{bmatrix} Z_{c2} - Z_{c1} & 2\sqrt{Z_{c1}Z_{c2}} \\ 2\sqrt{Z_{c1}Z_{c2}} & Z_{c1} - Z_{c2} \end{bmatrix} \quad [W^{1/2}] \quad (8.70)$$

On peut également faire usage des graphes de fluence introduits dans le paragraphe 3.5.10 pour représenter les différentes ondes (fig. 8.9).

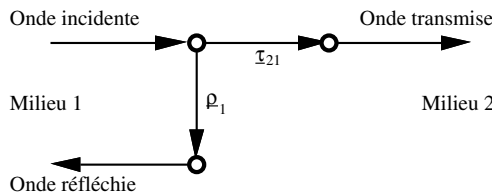


Fig. 8.9 Transmission et réflexion dans un graphe de fluence.

8.4 CAS PARTICULIER : DEUX MILIEUX SANS PERTES

8.4.1 Vecteurs-phaseurs de propagation

Quand les deux milieux sont sans pertes, leurs permittivités et leurs perméabilités sont purement réelles et la conductivité est nulle. L'indice de réfraction est alors réel

$$n^2 = \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \quad [-] \quad (8.71)$$

Les composantes des vecteurs-phaseurs de propagation sont données par

$$\begin{aligned} \beta_{zi} &= \beta_1 \cos \theta_{in} = \omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \theta_{in} & [m^{-1}] \\ \beta_y &= \beta_1 \sin \theta_{in} = \omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \sin \theta_{in} & [m^{-1}] \\ \underline{\gamma}_{z2} &= j\sqrt{\beta_2^2 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_{in}} = j\sqrt{\omega^2 \varepsilon_2 \mu_2 - \omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 \sin^2 \theta_{in}} = j\beta_1 \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_{in}} \end{aligned} \quad (8.72)$$

On constate que deux situations différentes peuvent apparaître, selon le signe du terme sous la racine $n^2 - \sin^2 \theta_{in}$

$$\begin{aligned} \text{si } n^2 - \sin^2 \theta_{in} > 0 \quad \alpha_{z2} &= 0 & \beta_{z2} &= \beta_1 \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_{in}} \\ \text{si } n^2 - \sin^2 \theta_{in} < 0 \quad \alpha_{z2} &= \beta_1 \sqrt{\sin^2 \theta_{in} - n^2} & \beta_{z2} &= 0 \end{aligned} \quad (8.73)$$

Dans le premier cas, on a une onde plane uniforme qui se propage sans affaiblissement dans la direction θ_β (§ 8.1.5). Le second cas correspond à une onde plane non uniforme, qui se propage tangentiellement à la surface de séparation et dont l'amplitude décroît dans la direction normale (§ 8.1.8).

8.4.2 Réflexion totale

Lorsque $n^2 - \sin^2 \theta_{in} < 0$, c'est-à-dire pour une onde arrivant du milieu de permittivité élevée avec un grand angle d'incidence, le vecteur-phaseur de propagation dans le milieu 2 a une composante normale réelle α_{z2} et une composante transverse imaginaire β_y . Il s'agit d'une onde plane non uniforme (§ 8.1.8), qui décroît lorsqu'on s'éloigne de la surface de séparation.

Les facteurs de réflexion \underline{p}_\perp et \underline{p}_\parallel , donnés par (8.54) et (8.61), prennent tous deux la forme $(a - jb)/(a + jb)$, de sorte que leurs modules valent 1. Les facteurs de transmission ne sont toutefois pas nuls, et des champs existent dans le second milieu, concentrés près de la surface de séparation. La réflexion totale joue un rôle primordial dans l'optique guidée, permettant de contenir les champs dans une région restreinte de l'espace [70].

8.4.3 Réflexion et transmission

Lorsque $n^2 - \sin^2 \theta_{in} > 0$, le vecteur-phaseur de propagation dans le second milieu est purement imaginaire, de sorte que l'onde transmise est plane uniforme. L'angle de transmission est alors donné par la relation

$$\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \sin \theta_{in} = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \sin \theta_\beta \quad [s/m] \quad (8.74)$$

Les facteurs de réflexion ρ_{\perp} et ρ_{\parallel} , donnés par les relations (8.55) et (8.62), sont alors tous deux réels. La figure 8.10 représente les deux facteurs de réflexion en fonction de l'angle d'incidence pour les cas $n = 2, 3$ et 5 , avec $\underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$. On remarque le passage par zéro et le changement de signe dans le cas de la polarisation parallèle, tandis que pour la polarisation perpendiculaire le facteur de réflexion garde le même signe.

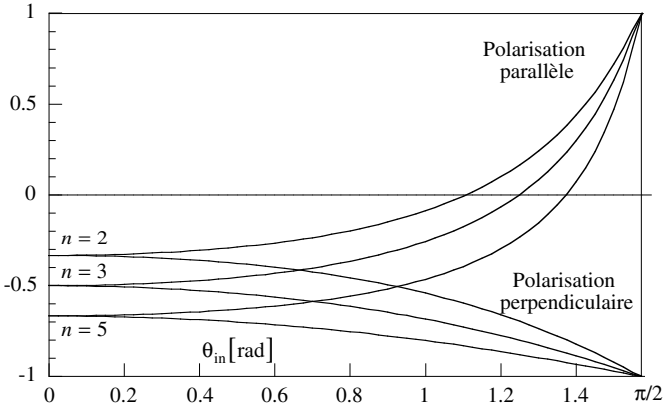


Fig. 8.10 Facteurs de réflexion pour les deux polarisations en fonction de l'angle d'incidence pour trois cas $n = 2, 3$ et 5 , avec $\mu_1 = \mu_2$.

8.4.4 Transmission totale

Lorsque les milieux de part et d'autre de la surface de séparation sont non magnétiques (matériaux diélectriques), on a $\underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2 = \mu_0$, et une onde peut être entièrement transmise dans le second milieu lorsque

- la polarisation de l'onde est parallèle;
- l'angle d'incidence vaut

$$\theta_{\text{in}} = \arctan n = \arctan \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1} \quad [\text{rad}] \quad (8.75)$$

Le facteur de réflexion est alors nul (fig. 8.10). L'angle d'incidence qui correspond à la transmission totale est appelé *angle de Brewster*.

8.4.5 Remarques

Une onde à polarisation perpendiculaire ne peut pas être totalement transmise d'un milieu à l'autre, car le numérateur de ρ_{\perp} dans (8.54) ne s'annule pas. On constate également dans la figure 8.10 que les courbes relatives à la polarisation perpendiculaire ne croisent pas l'axe $\rho = 0$.

Lorsque l'un ou l'autre des milieux présente des pertes, il n'est plus possible d'annuler simultanément les parties réelle et imaginaire du facteur de réflexion, de sorte qu'il n'existe alors aucune situation pour laquelle le signal pourrait être totalement transmis du milieu 1 vers le milieu 2 – ou vice-versa.

8.5 RÉFLEXION SUR UNE SURFACE MÉTALLIQUE

8.5.1 Vecteurs-phaseurs de propagation

Quand le second milieu est un métal, les impédances des deux milieux sont très différentes, de sorte que la réflexion est presque totale. Si le premier milieu est sans pertes, les composantes des vecteurs-phaseurs de propagation dans les deux milieux sont

$$\begin{aligned}\beta_{z1} &= \beta_1 \cos \theta_{in} = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \cos \theta_{in} & [m^{-1}] \\ \beta_y &= \beta_1 \sin \theta_{in} = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sin \theta_{in} & [m^{-1}]\end{aligned}\quad (8.76)$$

$$\underline{\gamma}_{z2} = \sqrt{\underline{\gamma}_2^2 + \beta_1^2 \sin^2 \theta_{in}} \cong \sqrt{j\omega\sigma_2\mu_2 + \omega^2\epsilon_1\mu_1 \sin^2 \theta_{in}} = j\beta_1 \sqrt{\underline{n}^2 - \sin^2 \theta_{in}}$$

où l'indice de réfraction complexe \underline{n} est donné par (8.46)

$$\underline{n} = \frac{\underline{\gamma}_2}{\underline{\gamma}_1} \cong \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \sqrt{\frac{-j\sigma_2}{\omega\epsilon_1}} = (1-j) \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \sqrt{\frac{\sigma_2}{2\omega\epsilon_1}} \quad [-] \quad (8.77)$$

Les champs s'affaiblissent dans la direction normale à la surface, tandis que la propagation est oblique lorsque l'incidence est oblique. En général, toutefois, $\beta_{z2} \gg \beta_y$, de sorte que la direction de propagation dans le métal est proche de la normale et l'onde est presque plane uniforme.

8.5.2 Facteurs de réflexion et de transmission

On obtient les facteurs de réflexion et de transmission pour la polarisation perpendiculaire au moyen de la relation (8.55) qui devient, lorsque la conductivité σ du métal est très élevée

$$\begin{aligned}\rho_{\perp} &= \frac{\mu_2 \cos \theta_{in} - \mu_1 \sqrt{\underline{n}^2 - \sin^2 \theta_{in}}}{\mu_2 \cos \theta_{in} + \mu_1 \sqrt{\underline{n}^2 - \sin^2 \theta_{in}}} \cong \frac{\mu_2 \cos \theta_{in} - \mu_1 \underline{n}}{\mu_2 \cos \theta_{in} + \mu_1 \underline{n}} \cong -1 + \frac{2\mu_2 \cos \theta_{in}}{\mu_1 \underline{n}} & [-] \\ \tau_{\perp} &= 1 + \rho_{\perp} \cong \frac{2\mu_2 \cos \theta_{in}}{\mu_1 \underline{n}} & [-]\end{aligned}\quad (8.78)$$

Similairement, les facteurs de réflexion et de transmission pour le cas de la polarisation parallèle sont tirés de la relation (8.61) – lorsque le terme $\underline{n} \cos \theta_{in}$ est très grand, on peut faire usage d'un développement limité, qui fournit une valeur approchée pour les facteurs de réflexion et de transmission

$$\begin{aligned}\rho_{//} &= \frac{\mu_2 \sqrt{\underline{n}^2 - \sin^2 \theta_{in}} - \mu_1 \underline{n}^2 \cos \theta_{in}}{\mu_2 \sqrt{\underline{n}^2 - \sin^2 \theta_{in}} + \mu_1 \underline{n}^2 \cos \theta_{in}} \cong \frac{\mu_2 - \mu_1 \underline{n} \cos \theta_{in}}{\mu_2 + \mu_1 \underline{n} \cos \theta_{in}} \cong -1 + \frac{2\mu_2}{\mu_1 \underline{n} \cos \theta_{in}} & [-] \\ \tau_{//} &= 1 + \rho_{//} \cong \frac{2\mu_2}{\mu_1 \underline{n} \cos \theta_{in}} & [-]\end{aligned}\quad (8.79)$$

Dans le cas limite du conducteur électrique parfait (cep), $\sigma \rightarrow \infty$ et on obtient alors $\rho_{\perp} = \rho_{//} = -1$, réflexion totale avec un changement de signe, qui est la situation rencontrée lors d'un court-circuit (§ 3.3.4).

8.5.3 Blindage métallique

Une feuille métallique produit une réduction importante du signal, résultant d'une part de l'affaiblissement produit par le métal (§ 8.2.6), d'autre part des réflexions des ondes sur les deux faces (§ 8.5.2). Ces deux effets sont représentés schématiquement à la figure 8.11.

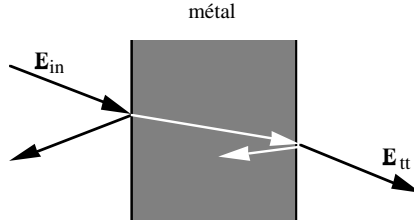


Fig. 8.11 Transmission et réflexion sur une feuille métallique.

Lorsque la feuille métallique est plus épaisse que $2,5 \lambda$ environ, les réflexions multiples sont négligeables, et on a approximativement pour une épaisseur a

$$\begin{aligned}
 |\underline{E}_{tt}| &\cong |\underline{E}_{in}| \left| \frac{2\mu_2 \cos\theta_{in}}{\mu_1 n} \right|^2 e^{-a/\delta} && \text{polarisation perpendiculaire} \\
 |\underline{E}_{tt}| &\cong |\underline{E}_{in}| \left| \frac{2\mu_2}{\mu_1 n \cos\theta_{in}} \right|^2 e^{-a/\delta} && \text{polarisation parallèle (avec } \cos\theta_{in} \gg 0)
 \end{aligned}
 \tag{8.80}$$

8.5.4 Guide d'ondes rectangulaire

Une onde électromagnétique de polarisation perpendiculaire arrive sur un plan conducteur électrique parfait en $z=0$ avec un angle d'incidence θ_{in} . Le milieu 1 est de l'air. Le facteur de réflexion vaut alors -1 , de sorte que le champ électrique total dans l'air est donné par

$$\begin{aligned}
 \underline{E}(y, z) &= \underline{E}_i(y, z) + \underline{E}_r(y, z) = \underline{E}_i(0) \left[e^{-\gamma_{z1}z} - e^{+\gamma_{z1}z} \right] e^{-\gamma_y y} \\
 &= e_x \underline{E}_{xi}(0) \left[e^{-j\beta_1 z \cos\theta_{in}} - e^{+j\beta_1 z \cos\theta_{in}} \right] e^{-j\beta_1 y \sin\theta_{in}} && [\text{V/m}] \\
 &= -2j e_x \underline{E}_{xi}(0) \sin(\beta_1 z \cos\theta_{in}) e^{-j\beta_1 y \sin\theta_{in}}
 \end{aligned}
 \tag{8.81}$$

On trouve de même le champ magnétique dans le milieu 1 (air)

$$\begin{aligned}
 \underline{H}(y, z) &= \underline{H}_i(y, z) + \underline{H}_r(y, z) \\
 &= 2 \underline{E}_{xi}(0) \frac{\beta}{\omega \mu_0} \left[-j e_z \sin\theta_{in} \sin(\beta_1 z \cos\theta_{in}) + e_y \cos\theta_{in} \cos(\beta_1 z \cos\theta_{in}) \right] e^{-j\beta_1 y \sin\theta_{in}}
 \end{aligned}
 \tag{8.82}$$

On constate que les conditions aux limites au bord du conducteur électrique parfait dans le plan $z=0$ sont effectivement satisfaites (champ électrique tangentiel nul, composante normale nulle du champ d'induction $\mu_0 \underline{H}$).

On constate par ailleurs que, comme les champs ont une dépendance périodique en z , ces conditions sont également satisfaites sur tous les plans parallèles situés à une distance z_m du premier

$$z_m = \frac{m\pi}{\beta_1 \cos \theta_{\text{in}}} \quad [\text{m}] \quad (8.83)$$

On peut donc placer une seconde surface métallique (conducteur électrique parfait) dans l'un de ces plans sans perturber les champs. La distance a entre ces deux plans étant fixée, on déduit l'angle d'incidence de (8.83)

$$\theta_{\text{in}} = \arccos \left(\frac{m\pi}{\beta_1 a} \right) \quad [\text{rad}] \quad (8.84)$$

Pour que cet angle soit défini, il faut que le terme entre parenthèses soit inférieur à 1, et on doit donc avoir

$$a \geq \frac{m\pi}{\beta_1} = \frac{m\pi}{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{m\lambda_0}{2} \quad [\text{m}] \quad (8.85)$$

La distance entre les deux surfaces métalliques doit donc être supérieure à une demi-longueur d'onde pour que les conditions soient satisfaites.

Comme le champ électrique est dirigé selon x , on peut placer un plan métallique (cep) perpendiculaire à cette direction sans perturber les champs électromagnétiques, dans un plan $x = \text{cste}$. En plaçant deux plans en $x = 0$ et en $x = b$, en plus des deux plans déjà placés en $z = 0$ et en $z = a$, on forme un tube métallique rectangulaire que l'on appelle un *guide d'ondes* (fig. 8.12).

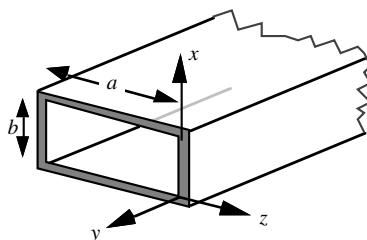


Fig. 8.12 Guide d'ondes rectangulaire de largeur a et de hauteur b .

8.5.5 Modes de propagation

L'adjonction de trois plans métalliques ne modifie pas la structure des champs à l'intérieur du guide d'ondes, qui sont donnés par (8.78) et (8.79), l'angle d'incidence devant satisfaire la condition (8.81).

Plusieurs solutions sont possibles, qui correspondent aux différentes valeurs prises par le nombre entier m . On les appelle les *modes de propagation* du guide d'ondes. L'allure des lignes de champ magnétique du premier mode de la série, pour lequel $m = 1$, est représentée à la figure 8.13 – elle résulte de la superposition vectorielle des champs de l'onde incidente et de l'onde réfléchie, qui produit un ensemble de courbes fermées.

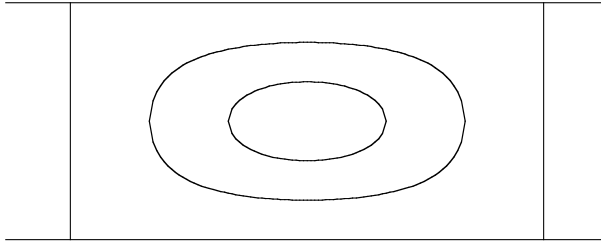


Fig. 8.13 Lignes de champ magnétique du mode dominant TE₁₀ dans un guide d'ondes rectangulaire.

La propagation dans le guide est dans la direction $-y$ et on constate que si le champ électrique est perpendiculaire à cette direction, le champ magnétique a en revanche une composante longitudinale: on dit alors que le mode est *transverse électrique*, ou TE. L'exposant de propagation le long du guide est défini par la dépendance en y des champs

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g} = \beta_1 \sin \theta_{in} = \beta_1 \sqrt{1 - \cos^2 \theta_{in}} = \beta_1 \sqrt{1 - \left(\frac{m\pi}{\beta_1 a}\right)^2} \quad [\text{m}^{-1}] \quad (8.86)$$

où λ_g est la longueur d'onde de guide.

8.5.6 Fréquences de coupure

Pour qu'une onde puisse se propager, il faut que la condition (8.85) soit remplie, ce qui entraîne une restriction sur les fréquences du signal

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\beta_1}{2\pi\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{\beta_1 c_0}{2\pi} \geq \frac{m c_0}{2a} = f_{m0} \quad (8.87)$$

où c_0 est la vitesse de la lumière dans le vide. On appelle f_{m0} la fréquence de coupure du mode TE _{m 0}, les deux indices spécifiant la variation des champs dans le guide d'ondes: m demi-périodes dans la largeur, pas de variation dans le sens de la hauteur.

Par exemple, si la largeur du guide d'ondes est de 1 cm, les fréquences de coupure sont données par

$$f_{m0} = m \frac{c_0}{2a} = m \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^{-2}} \frac{[\text{m/s}]}{[\text{m}]} = m \cdot 1,5 \cdot 10^{10} [\text{Hz}] = m \cdot 15 \quad [\text{GHz}] \quad (8.88)$$

Une étude complète de la propagation dans un guide d'ondes (chap. XIII.2) doit également considérer les ondes à incidence oblique, qui se réfléchissent successivement sur les quatre parois métalliques du guide. On obtient alors la relation générale pour les fréquences de coupure

$$f_{mn} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad [\text{Hz}] \quad (8.89)$$

où m indique la variation selon la largeur du guide, n selon sa hauteur. Les composantes des champs ont alors des dépendances sinusoïdales dans les deux directions transverses du guide d'ondes.

8.5.7 Propagation des modes

Le mode qui a la fréquence de coupure la plus basse est le premier à pouvoir se propager le long du guide, et on l'appelle *mode dominant*. Lorsque $a > b$, il s'agit du mode pour lequel $m = 1$ et $n = 0$, appelé mode TE_{10} (fig. 8.14).

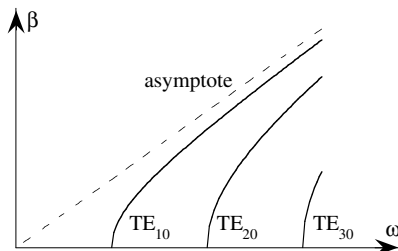


Fig. 8.14 Déphasage linéique pour trois modes de propagation.

Pour des fréquences légèrement supérieures à f_{10} , le mode dominant se propage seul, en régime monomode. Lorsque $a > 2b$, le second mode qui apparaît quand la fréquence augmente est le mode TE_{20} (fig. 8.14), dont la fréquence de coupure f_{20} est exactement deux fois celle du mode dominant. Au-dessus de cette fréquence, plusieurs modes peuvent se propager, avec des vitesses de propagation différentes.

Dans cette situation, appelée régime multimode, un signal se propage simultanément selon plusieurs modes du guide, et comme ces modes ont des vitesses différentes, il en résulte une distorsion du signal. Dans la mesure du possible, on n'utilise un guide d'ondes que dans la bande de fréquence monomode, entre les fréquences de coupure f_{10} et f_{20} .

Le guidage des ondes n'est pas spécifiquement lié à la section rectangulaire, on fait également usage de guides d'ondes circulaires, elliptiques ou ayant encore des formes plus élaborées, en vue notamment d'élargir la bande de fréquences sur laquelle seul un mode peut se propager (chap. XIII.2).

8.5.8 Fibres optiques

Dans les guides d'ondes métalliques, les ondes sont guidées au moyen de réflexions successives sur les parois métalliques. On utilise aussi la réflexion totale sur une interface entre deux diélectriques (§ 8.4.2) pour réaliser des guides diélectriques, utilisés en général pour des ondes lumineuses – entre 200 et 400 THz – sous le nom de *fibres optiques* [70].

De symétrie généralement circulaire, une fibre optique comporte un cylindre central, le *cœur*, entouré d'un tube, la *gaine*, tous deux en verre – qui est dopé de façon à obtenir une permittivité légèrement plus élevée dans le cœur que dans la gaine. Le diamètre extérieur d'une fibre est de l'ordre de 0,1 mm environ.

On étudie la propagation en résolvant les équations de Maxwell dans les deux régions – en coordonnées cylindriques – puis en appliquant les conditions aux limites. On obtient des modes de propagation, comme pour les guides d'ondes métalliques.

L'affaiblissement d'une fibre optique peut être extrêmement réduit, avec des valeurs jusqu'à 0,1 à 0,2 dB/km. Les premiers systèmes fonctionnaient en régime multimode, produisant une dispersion importante du signal. Actuellement, on utilise des fibres monomodes, beaucoup moins dispersives, qui assurent un très grand débit d'information.

8.6 GUIDES D'ONDES MÉTALLIQUES

par Jean-Jacques Laurin

page 385

8.7 GUIDES D'ONDES DIÉLECTRIQUES, FIBRES OPTIQUES

par Jean-Jacques Laurin

page 406

8.8 EXERCICES

8.8.1 Déterminer les parties réelle et imaginaire de l'exposant de propagation d'une onde plane uniforme dans un diélectrique ayant une permittivité relative de 3,25, la fréquence de l'onde étant de 11,4 THz. Déterminer également l'impédance d'onde.

8.8.2 Déterminer les parties réelle et imaginaire de l'exposant de propagation d'une onde plane non uniforme dans les mêmes conditions que dans le problème précédent, sachant de plus que $\alpha = 0,4 \beta$.

8.8.3 Déterminer les parties réelle et imaginaire de l'exposant de propagation d'une onde plane non uniforme dans un milieu dissipatif défini par sa permittivité relative $\underline{\epsilon}_r = 4 - j0,2$ et sa perméabilité relative $\underline{\mu}_r = 2 - j0,2$, lorsque les deux vecteurs qui composent le vecteur-phaseur de propagation forment entre eux un angle $\zeta = 42^\circ$.

8.8.4 Déterminer sous quelles conditions une onde plane uniforme arrivant sur une surface séparant des milieux de permittivités 1,5 et 1 est entièrement réfléchi. Déterminer l'affaiblissement dans le second milieu en fonction de l'angle d'incidence.

8.8.5 Une onde spécifiée par $\underline{E}(\mathbf{r}) = E_0 \mathbf{e}_x e^{-j\beta(y+z)}$ tombe sur le plan $z = 0$ qui sépare deux milieux diélectriques non magnétiques sans pertes ayant des permittivités $\epsilon_1 = 2,5 \epsilon_0$ (pour $z < 0$) et $\epsilon_2 = 1,5 \epsilon_0$ (pour $z > 0$). Déterminer la polarisation de l'onde, les angles d'incidence, de réflexion et de transmission, et les facteurs de réflexion et de transmission.

8.8.6 Une onde incidente de polarisation quelconque arrive sur une surface de séparation air-sol avec une incidence de 22° . L'onde réfléchi est linéairement polarisée. Quelle est la permittivité du sol ?

8.8.7 Peut-on avoir une transmission totale entre l'air et un milieu diélectrique de permittivité relative complexe $2 - j0,1$? Si non, quel est l'angle d'incidence qui donne la transmission maximale, et que vaut le facteur de transmission dans ce cas ?

8.8.8 Une onde électromagnétique, spécifiée par son champ électrique qui vaut $\underline{E}(\mathbf{r}) = E_0 \mathbf{e}_x e^{-j\beta z}$, tombe sur le plan $z = 0$ entre l'air ($z < 0$) et une plaque d'aluminium ($z > 0$) avec $\sigma = 38\,160\,000$ [S/m] ($\sigma \gg \omega\epsilon$ mais $\neq \infty$). Trouver l'indice de réfraction complexe \underline{n} , les facteurs de réflexion et de transmission, les champs électrique et magnétique, le vecteur de Poynting et la densité de courant, à une fréquence de 25 MHz.

8.8.9 Déterminer les fréquences de coupure d'un guide d'ondes ayant une section rectangulaire de $3,5 \text{ cm} \times 6,5 \text{ cm}$, qui est rempli d'un diélectrique de permittivité $\epsilon = 3\epsilon_0$.

RAYONNEMENT ET ANTENNES

9.1 RAYONNEMENT PRODUIT PAR DES CONDUCTEURS

On détermine les champs électromagnétiques créés par des courants ou des charges plongés dans un espace homogène – c’est-à-dire qui ne comporte qu’un seul milieu de propagation – en considérant d’abord une source élémentaire infinitésimale, puis en sommant les effets produits par l’ensemble des sources. La première phase de l’analyse comporte la résolution d’une équation d’onde en coordonnées sphériques, tandis que la seconde fait usage d’une intégration. Le concept de fonction de Green est introduit pour simplifier la notation.

9.1.1 Potentiel vecteur en coordonnées sphériques

Dans la réalité, les ondes sont toujours rayonnées par des sources de dimensions limitées et sont de ce fait des solutions des équations d’onde (§ 6.8.4) en coordonnées sphériques. L’expression sphérique du laplacien ∇^2 devient alors très complexe, mais on obtient une relation plus simple en considérant seulement une dépendance radiale et en représentant les vecteurs par leurs composantes cartésiennes – considérées chacune comme une grandeur scalaire [67]. En l’absence de source de courant (membre de droite nul dans la relation 6.78), l’équation d’onde que l’on obtient pour la composante selon x du potentiel-vecteur \underline{A} en appliquant la jauge de Lorentz (6.80) prend la forme suivante

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\underline{A}_x(r)}{dr} \right) + \omega^2 \underline{\epsilon} \underline{\mu} \underline{A}_x(r) = 0 \quad [\text{Vs/m}^3] \quad (9.1)$$

On définit une fonction auxiliaire $\underline{F}(r) = r \underline{A}_x(r)$, et on en prend la dérivée par rapport à la coordonnée radiale

$$\frac{d\underline{F}(r)}{dr} = \underline{A}_x(r) + r \frac{d\underline{A}_x(r)}{dr} \quad [\text{Vs/m}] \quad (9.2)$$

d’où l’on tire, après avoir multiplié par r ,

$$r^2 \frac{d\underline{A}_x(r)}{dr} = r \frac{d\underline{F}(r)}{dr} - r \underline{A}_x(r) = r \frac{d\underline{F}(r)}{dr} - \underline{F}(r) \quad [\text{Vs}] \quad (9.3)$$

La dérivée par rapport à r de cette expression donne

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\underline{A}_x(r)}{dr} \right) = r \frac{d^2 \underline{F}(r)}{dr^2} \quad [\text{Vs/m}] \quad (9.4)$$

Combinant (9.4) avec (9.1), on obtient une équation différentielle qui porte seulement sur $\underline{F}(r)$

$$\frac{d^2 \underline{F}(r)}{dr^2} + \omega^2 \underline{\epsilon} \underline{\mu} \underline{F}(r) = 0 \quad [\text{Vs/m}^2] \quad (9.5)$$

Cette relation a la même forme que les trois équations obtenues pour les ondes planes (8.5). La solution est une exponentielle (8.6), qui donne

$$\underline{A}_x(r) = \frac{\underline{F}(r)}{r} = \frac{\underline{F}(0) e^{-j\omega \sqrt{\underline{\epsilon} \underline{\mu}} r}}{r} \quad [\text{Vs/m}] \quad (9.6)$$

On procède de la même façon pour les composantes selon y et selon z du potentiel vecteur et on somme les trois termes, ce qui donne le vecteur-phaseur

$$\underline{A}(r) = \underline{A}_0 \frac{e^{-j\omega \sqrt{\underline{\epsilon} \underline{\mu}} r}}{r} \quad [\text{Vs/m}] \quad (9.7)$$

où \underline{A}_0 est une constante d'intégration qu'il s'agit de déterminer.

9.1.2 Potentiel vecteur produit par un courant élémentaire

Pour que les champs ne soient pas nuls partout, il faut que la constante \underline{A}_0 ne soit pas nulle, de sorte que le potentiel vecteur devient singulier en $r=0$, où il possède un pôle de premier ordre (en r^{-1}). Ceci implique qu'il existe à cet endroit une source de potentiel magnétique, qui a la forme d'un courant élémentaire \underline{J}_δ que l'on appelle dipôle de Hertz [68]. Une étude plus complète du potentiel vecteur au voisinage de l'origine permet de déterminer \underline{A}_0 et donne

$$\underline{A}(r) = \frac{\mu}{4\pi} \underline{J}_\delta \frac{e^{-j\omega \sqrt{\underline{\epsilon} \underline{\mu}} r}}{r} \quad [\text{Vs/m}] \quad (9.8)$$

Le potentiel vecteur $\underline{A}(r)$ décroît selon l'inverse de la distance de la source. Il est parallèle en tout point au dipôle de Hertz situé à l'origine du système de coordonnées (fig. 9.1). Il faut noter que ce résultat est spécifiquement lié à l'utilisation de la jauge de Lorentz (6.80). Il serait également possible d'obtenir un potentiel dirigé différemment en définissant une autre formulation de jauge.

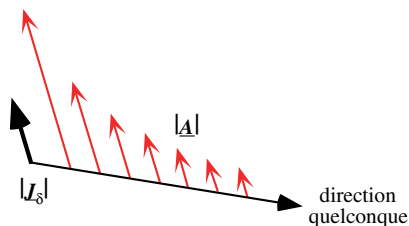


Fig. 9.1 Potentiel vecteur créé par un dipôle de Hertz.

9.1.3 Potentiel scalaire produit par une charge élémentaire

Procédant de façon identique en partant de l'équation d'onde (6.79), on obtient le potentiel scalaire $\underline{V}(r)$ produit par une charge élémentaire q placée à l'origine du système de coordonnées

$$\underline{V}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{e^{-j\omega\sqrt{\epsilon\mu} r}}{r} \quad [\text{V}] \quad (9.9)$$

9.1.4 Remarque

La résolution d'une équation d'ondes en coordonnées sphériques donne les potentiels, vecteur et scalaire, produits par des sources situées à l'origine du système de coordonnées dans un milieu homogène infini, de permittivité ϵ et de perméabilité μ . Le plus souvent, le milieu considéré est de l'air ou du vide, et on a alors ϵ_0 et μ_0 .

9.1.5 Sources placées en un point quelconque

Lorsque les sources sont situées en un point quelconque r' , les potentiels sont fournis par une translation appliquée aux résultats obtenus précédemment. Cela signifie que la coordonnée radiale r est remplacée par l'expression $|r - r'|$, où r indique la position de l'observateur et r' celle de la source

$$\underline{A}(r) = \frac{\mu}{4\pi} \underline{J}_\delta \frac{e^{-j\omega\sqrt{\epsilon\mu}|r-r'|}}{|r-r'|} \quad \text{et} \quad \underline{V}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{e^{-j\omega\sqrt{\epsilon\mu}|r-r'|}}{|r-r'|} \quad (9.10)$$

Les potentiels deviennent singuliers lorsque la position de la source coïncide avec celle de l'observateur.

9.1.6 Superposition de plusieurs sources

On considère ici des systèmes linéaires, dans lesquels on peut appliquer le principe de superposition. Par conséquent, les potentiels produits par des ensembles de courants et de charges sont obtenus en additionnant les potentiels produits par toutes les sources élémentaires. On obtient ainsi, dans le cas le plus général, des intégrales de superposition.

Le potentiel vecteur magnétique au point r produit par une densité de courant $\underline{J}(r')$ est alors donné par la relation intégrale suivante

$$\underline{A}(r) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\underline{J}(r') e^{-j\omega\sqrt{\epsilon\mu}|r-r'|}}{|r-r'|} dV' = \int_{V'} \underline{J}(r') \underline{G}_{AJ}(r-r') dV' = \underline{J} \otimes \underline{G}_{AJ} \quad [\text{Vs/m}^2] \quad (9.11)$$

De façon tout à fait similaire, le potentiel scalaire au point r produit par une densité de charges $\underline{\rho}(r')$ est donné par la relation intégrale suivante

$$\underline{V}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\underline{\rho}(r') e^{-j\omega\sqrt{\epsilon\mu}|r-r'|}}{|r-r'|} dV' = \int_{V'} \underline{\rho}(r') \underline{G}_{Vq}(r-r') dV' = \underline{\rho} \otimes \underline{G}_{Vq} \quad [\text{V}] \quad (9.12)$$

Lorsqu'on connaît les distributions de courant et de charge dans tout l'espace, ces deux relations servent à déterminer les potentiels – pour autant que l'on puisse intégrer les relations obtenues.

9.1.7 Fonctions de Green pour les potentiels

Dans les intégrales de superposition des équations (9.11) et (9.12), on a introduit les deux fonctions de Green $\underline{G}_{AJ}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ et $\underline{G}_{V\rho}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ que l'on peut considérer comme des “réponses impulsionnelles” dans le domaine spatial

$$\frac{4\pi}{\underline{\mu}} \underline{G}_{AJ}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = 4\pi \underline{\varepsilon} \underline{G}_{V\rho}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{e^{-j\omega\sqrt{\underline{\varepsilon}\underline{\mu}}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad [\text{m}^{-1}] \quad (9.13)$$

Le premier indice indique le type de potentiel (ou de champ) considéré, le second se réfère au type de source. Ces deux fonctions dépendent de la distance entre la source placée en \mathbf{r}' et le point d'observation \mathbf{r} , qui apparaît

- dans l'exposant du numérateur, qui tient compte du retard qui est produit par la propagation;
- dans le dénominateur, qui exprime la décroissance graduelle de l'onde lorsqu'elle s'étale sur une sphère dont le diamètre augmente lorsque l'onde se propage.

Les intégrales de superposition peuvent aussi s'exprimer avec une formulation plus compacte par $\underline{\mathbf{J}} \otimes \underline{G}_{AJ}$ et $\underline{\rho} \otimes \underline{G}_{Vq}$ en utilisant des produits de convolution [69].

9.1.8 Détermination des champs

Lorsque les potentiels ont été déterminés, on dérive les champs – électrique et magnétique – au moyen des deux relations suivantes, tirées de (6.19) et (6.21)

$$\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\underline{\mu}} \nabla \times \underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \underline{\mathbf{J}} \otimes \overline{\underline{G}}_{HJ} \quad [\text{A/m}] \quad (9.14)$$

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -\nabla \underline{V}(\mathbf{r}) - j\omega \underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{j\omega \underline{\varepsilon}} \nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \underline{\mathbf{J}} \otimes \overline{\underline{G}}_{EJ} \quad [\text{V/m}] \quad (9.15)$$

On constate qu'on peut obtenir le champ $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ avec l'équation de Maxwell, sans déterminer préalablement $\underline{V}(\mathbf{r})$. Cela résulte de la relation de continuité (1.16), qui lie la densité de courant à la densité de charge – et il y a une dépendance similaire entre les densités de charge et de courant de surface. Il en résulte que les potentiels $\underline{V}(\mathbf{r})$ et $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$ ne sont pas indépendants l'un de l'autre. On peut alors définir les deux fonctions de Green $\overline{\underline{G}}_{HJ}$ et $\overline{\underline{G}}_{EJ}$ qui lient directement le champ magnétique et le champ électrique à la densité de courant. Dans ce cas les vecteurs ne sont pas équipollents, de sorte que les fonctions de Green sont des tenseurs, aussi appelés dyadiques.

Les champs électrique et magnétique sont aussi singuliers aux emplacements des sources mais, comme ils sont obtenus en dérivant les potentiels, ils ont des pôles du deuxième ou du troisième ordre, le potentiel $\underline{V}(\mathbf{r})$ étant proportionnel à la divergence de $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$ par la jauge de Lorentz (6.48). La présence de pôles d'ordre supérieur peut donner lieu à certaines difficultés mathématiques lors de leur calcul, plus particulièrement lorsque des intégrales doivent être évaluées avec des méthodes numériques [71].

9.2 DIPÔLE ÉLÉMENTAIRE OU DOUBLET

9.2.1 Définition

On considère un conducteur filiforme de longueur d , disposé symétriquement par rapport à l'origine le long de l'axe des z (fig. 9.2). On suppose que la longueur de ce conducteur est très petite par rapport à la longueur d'onde ($d \ll \lambda$) et on admet aussi que le courant \underline{I} qui circule sur le conducteur est uniforme (son amplitude et sa phase sont toutes deux indépendantes de z). On suppose par ailleurs que le fil est d'épaisseur nulle, et qu'il est entouré d'air, ayant les propriétés ϵ_0 et μ_0 .

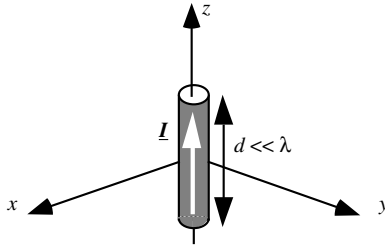


Fig. 9.2 Antenne dipôle formée d'une courte section de conducteur rectiligne.

On suppose encore que l'observateur est placé à une grande distance du conducteur, et donc que $r \gg d$. Les effets que peuvent produire d'autres conducteurs, dont la présence est nécessaire pour alimenter l'antenne, sont considérés comme négligeables.

Dans cette situation particulièrement simple, l'intégration dans (9.11) ne porte que sur la longueur et on remplace directement \underline{J}_δ par $\underline{I}d\mathbf{e}_z$, ce qui donne

$$\underline{A}(r, \theta) \cong \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 \underline{I}d}{4\pi r} e^{-j\beta_0 r} = (\mathbf{e}_r \cos\theta - \mathbf{e}_\theta \sin\theta) \frac{\mu_0 \underline{I}d}{4\pi r} e^{-j\beta_0 r} \quad [\text{Vs/m}] \quad (9.16)$$

où $\beta_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ est l'exposant de propagation dans l'air. On a exprimé le vecteur unité selon z en fonction des coordonnées sphériques, que l'on utilise ensuite pour déterminer les composantes des champs magnétique et électrique à l'aide de (9.14) et (9.15):

$$\underline{H}(r, \theta) \cong -\mathbf{e}_\phi \frac{\underline{I}d\beta_0^2}{4\pi} \left[\frac{1}{j\beta_0 r} + \frac{1}{(j\beta_0 r)^2} \right] \sin\theta e^{-j\beta_0 r} \quad [\text{A/m}] \quad (9.17)$$

$$\underline{E}(r, \theta) \cong -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{\underline{I}d\beta_0^2}{4\pi} \left\{ \mathbf{e}_r \cos\theta \left[\frac{2}{(j\beta_0 r)^2} + \frac{2}{(j\beta_0 r)^3} \right] + \mathbf{e}_\theta \sin\theta \left[\frac{1}{j\beta_0 r} + \frac{1}{(j\beta_0 r)^2} + \frac{1}{(j\beta_0 r)^3} \right] \right\} e^{-j\beta_0 r} \quad [\text{V/m}] \quad (9.18)$$

On constate que, par suite de la symétrie de la structure, les champs ne dépendent pas de la coordonnée azimutale ϕ , et il en résulte que le champ magnétique n'a qu'une unique composante, dirigée selon la direction azimutale \mathbf{e}_ϕ , tandis que le champ électrique a deux composantes, dirigées selon \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ .

9.2.2 Décroissance des champs

Les relations (9.17) et (9.18) comportent des termes de trois types différents, qui ont les dépendances radiales suivantes

- les termes en $1/r$ décroissent lentement avec la distance et peuvent servir à transmettre des signaux à grande distance: ce sont les termes de rayonnement;
- les termes en $1/r^2$ décroissent plus rapidement avec la distance, ils sont liés aux phénomènes quasistatiques d'induction (sect. 10.6);
- les termes en $1/r^3$ sont prépondérants à courte distance de l'élément rayonnant, mais décroissent encore plus rapidement avec la distance; ils correspondent au champ du dipôle électrostatique (§ 12.2.2).

La dépendance radiale des amplitudes est présentée à la figure 9.3 pour les trois composantes des champs. Les valeurs indiquées sont les modules des termes entre parenthèses carrées [\underline{E}] dans les deux expressions (9.17) et (9.18).

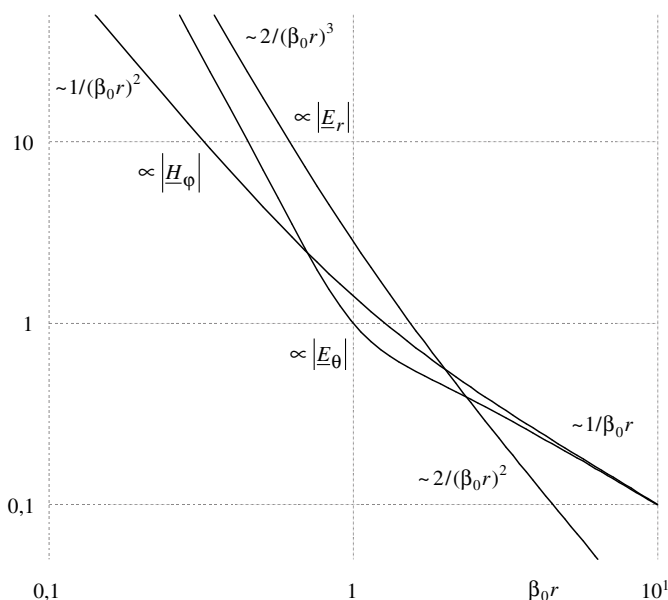


Fig. 9.3 Dépendances radiales des champs d'un dipôle élémentaire ou doublet.

À proximité d'une antenne se situe la région des *champs proches* [72], où les termes en $1/r^3$ prédominent – il faut toutefois se rappeler qu'on a précédemment supposé que $r \gg d$, et donc une analyse rigoureuse des champs proches devrait effectuer l'étude sans faire cette approximation. La structure des champs dans cette région peut devenir très complexe, avec des composantes inductives et électrostatiques qui correspondent à des accumulations locales d'énergie électrique et magnétique (puissance réactive).

Bien au contraire, lorsque $r > \approx 10/\beta_0 \approx 1,6\lambda$, la contribution des termes en $1/r^2$ et en $1/r^3$ s'estompe, et seuls les termes en $1/r$ restent significatifs: c'est la région du *champ lointain*, ou *région de Fraunhofer*.

9.2.3 Champ lointain d'un dipôle élémentaire

Dans la région du champ lointain, seules subsistent les deux composantes des champs qui assurent le rayonnement

$$\underline{H}(r, \theta) \cong e_{\varphi} \frac{j\beta_0 Id}{4\pi r} \sin\theta e^{-j\beta_0 r} \quad [\text{A/m}] \quad r > 1,6 \lambda \quad (9.19)$$

$$\underline{E}(r, \theta) \cong e_{\theta} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{j\beta_0 Id}{4\pi r} \sin\theta e^{-j\beta_0 r} = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} e_r \times \underline{H}(r, \theta) \quad [\text{V/m}] \quad r > 1,6 \lambda \quad (9.20)$$

Le vecteur-phaseur de Poynting (7.25) est alors purement réel et radial

$$\underline{S}(r, \theta) = \underline{E}(r, \theta) \times \underline{H}^*(r, \theta) \cong e_r \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} |I|^2 \left(\frac{\beta_0 d}{4\pi r} \right)^2 \sin^2 \theta \quad [\text{W/m}^2] \quad r > 1,6 \lambda \quad (9.21)$$

On obtient ensuite la puissance rayonnée totale P_T en effectuant l'intégration de la densité de puissance sur une sphère de rayon r

$$P_T = \int_S \underline{S}_r(r, \theta) dS \cong \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} |I|^2 \left(\frac{\beta_0 d}{4\pi r} \right)^2 \sin^2 \theta r^2 \sin\theta d\theta = 2\pi \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{|I|^2}{3} \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 \quad [\text{W}] \quad r > 1,6 \lambda \quad (9.22)$$

Le rayonnement se répartit sur une sphère dont la surface augmente comme r^2 , et la puissance totale rayonnée ne dépend pas de la distance. On remarque la présence du facteur $(d/\lambda)^2$, qui implique que la puissance rayonnée par une antenne très courte est très faible, et qu'il faut faire circuler un courant considérable sur le conducteur pour obtenir un rayonnement observable.

9.2.4 Impédance de rayonnement d'un dipôle élémentaire

L'impédance de rayonnement est le quotient de la composante transverse du champ électrique par la composante transverse du champ magnétique, que l'on obtient avec les relations (9.17) et (9.16)

$$Z_r = \frac{E_{\theta}}{H_{\varphi}} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0 r} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega\mu_0 r} + \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}} \quad [\Omega] \quad (9.23)$$

À proximité de l'antenne, le premier terme est nettement prédominant, et l'impédance est pratiquement imaginaire (réactance capacitive). À grande distance de l'antenne, en revanche, les effets réactifs s'estompent

La partie réelle de l'impédance de rayonnement est d'abord nulle, puis elle augmente et tend vers la valeur de $120 \pi \Omega$ dans la région du champ lointain. Le quotient des champs à grande distance tend vers une valeur réelle constante, qui est l'impédance caractéristique du vide (1.31).

Les parties réelle et imaginaire de l'impédance de rayonnement, ainsi que son module, sont représentées dans la figure 9.4 en fonction de la distance électrique βr .

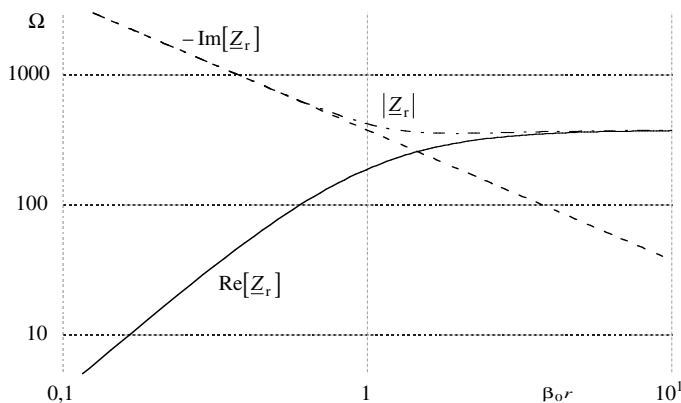


Fig. 9.4 Impédance d'onde pour un dipôle élémentaire.

9.3 BOUCLE ÉLÉMENTAIRE OU DIPÔLE MAGNÉTIQUE

9.3.1 Définition

On considère un conducteur filiforme disposé sous forme de boucle autour de l'axe z (fig. 9.5). Le rayon a de la boucle est très petit par rapport à la longueur d'onde ($a \ll \lambda$) et on admet donc que le courant \underline{I} qui circule sur le conducteur est uniforme (son amplitude et sa phase sont indépendantes de φ). On suppose par ailleurs que le fil est d'épaisseur nulle et qu'il est entouré d'air, de propriétés ϵ_0 et μ_0 .

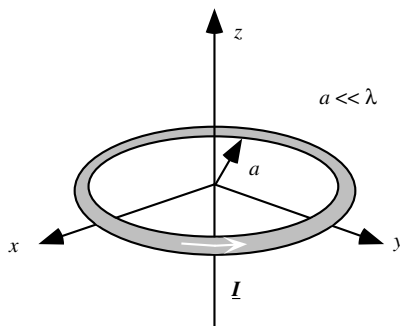


Fig. 9.5 Boucle élémentaire ou dipôle magnétique.

On suppose qu'un observateur est placé à une grande distance du conducteur, de sorte que $r \gg a$. Les effets que produisent d'autres conducteurs, nécessaires pour alimenter l'antenne, ne sont pas pris en considération. Pour cette géométrie simple, l'intégration dans (9.11) ne porte que sur la coordonnée azimutale φ et la relation donne [73]

$$\underline{A}(r, \theta) \cong \underline{e}_\varphi \frac{j\mu_0 \underline{I} a}{2r} J_1(\beta_0 a \sin \theta) e^{-j\beta_0 r} \cong -\underline{e}_\varphi \frac{\mu_0 \underline{I} (\beta_0 a)^2}{4j\beta_0 r} \sin \theta e^{-j\beta_0 r} \quad [\text{Vs/m}] \quad (9.24)$$

où $J_1(x)$ est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 1, où on a fait usage d'une approximation $J_1(x) \cong x/2$ valable pour de petits arguments, tandis que $\beta_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ est l'exposant de propagation dans l'air. On détermine ensuite les composantes des champs magnétique et électrique à l'aide de (9.14) et (9.15):

$$\underline{\mathbf{H}}(r, \theta) = -e_r \frac{jI\beta_0^3 a^2}{2(j\beta_0 r)^2} \cos\theta e^{-j\beta_0 r} - e_\theta \frac{jI\beta_0^3 a^2}{4(j\beta_0 r)} \sin\theta e^{-j\beta_0 r} \quad [\text{A/m}] \quad (9.25)$$

$$\underline{\mathbf{E}}(r, \theta) = e_\phi \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{jI\beta_0^3 a^2}{4} \left[\frac{1}{j\beta_0 r} - \frac{2}{(j\beta_0 r)^3} \right] \sin\theta e^{-j\beta_0 r} \quad [\text{V/m}] \quad (9.26)$$

On constate que, par suite de la symétrie de la structure, les champs ne dépendent pas de la coordonnée ϕ , mais c'est ici le champ magnétique qui a deux composantes, dirigées selon e_r et e_θ , tandis que le champ électrique a seulement une composante, dans la direction azimutale e_ϕ .

Les relations (9.25) et (9.26) comportent des termes de trois types différents, avec des dépendances radiales en $1/r$, en $1/r^2$ et en $1/r^3$ comme dans le cas du dipôle élémentaire ou doublet (sect. 9.2). Comparant les expressions des champs produits par une boucle avec ceux produits par un dipôle élémentaire, on constate une dualité dans la région du champ lointain ($r \gg 10/\beta_0 \approx 1,6\lambda$). La boucle de courant est donc souvent appelée *dipôle magnétique* élémentaire [74].

9.3.2 Champ lointain d'une boucle

Dans la région du champ lointain, seules subsistent les deux composantes des champs qui assurent le rayonnement

$$\underline{\mathbf{H}}(r, \theta) = -e_\theta \frac{I\beta_0^2 a^2}{4r} \sin\theta e^{-j\beta_0 r} \quad [\text{A/m}] \quad r > 1,6\lambda \quad (9.27)$$

$$\underline{\mathbf{E}}(r, \theta) = e_\phi \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{I\beta_0^2 a^2}{4r} \sin\theta e^{-j\beta_0 r} = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} e_r \times \underline{\mathbf{H}}(r, \theta) \quad [\text{V/m}] \quad r > 1,6\lambda \quad (9.28)$$

Le vecteur-phaseur de Poynting (7.25) est alors purement réel et radial

$$\underline{\mathbf{S}}(r, \theta) = \underline{\mathbf{E}}(r, \theta) \times \underline{\mathbf{H}}^*(r, \theta) \cong e_r \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} |I|^2 \left(\frac{\beta_0^2 a^2}{4\pi r} \right)^2 \sin^2\theta \quad [\text{W/m}^2] \quad r > 1,6\lambda \quad (9.29)$$

On obtient la puissance rayonnée totale P_T en intégrant sur une sphère de rayon r

$$P_T = \int_S \underline{\mathbf{S}}_r(r, \theta) dS \cong \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} |I|^2 \left(\frac{\beta_0^2 a^2}{4\pi r} \right)^2 \sin^2\theta r^2 \sin\theta d\theta = 4\pi^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{|I|^2}{3} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^4 \quad [\text{W}] \quad r > 1,6\lambda \quad (9.30)$$

On remarque la présence du facteur $(a/\lambda)^4$, qui implique que la puissance rayonnée par une boucle de petit rayon est très faible, et qu'il faut faire circuler un courant considérable dans la boucle pour obtenir un rayonnement significatif.

9.4 GÉNÉRALITÉS SUR LES ANTENNES

Les antennes sont des composants qui assurent la transition entre une onde guidée – qui se propage le long d’une ligne de transmission ou d’un guide d’ondes – et une onde libre, rayonnée dans l’espace infini. Leur structure géométrique, spécialement mise au point dans ce but, permet le détachement progressif des champs électromagnétiques de leur support métallique – ainsi que la transition inverse. On peut réaliser ces structures de beaucoup de manières différentes, et par conséquent, il existe de très nombreux types d’antennes de complexité très variable – allant du dipôle élémentaire de la section 9.2 aux réseaux complexes comportant des milliers d’éléments rayonnants (sect. 9.6).

9.4.1 Deux types d’applications

Tout en assurant le passage d’une structure guidée à l’espace vide, les antennes dirigent de façon plus ou moins importante les ondes émises dans une ou plusieurs directions privilégiées. On distingue à cet effet deux types d’applications qui ont des besoins diamétralement opposés:

- Les applications de radio et télédiffusion, ainsi que les communications mobiles [75], nécessitent une couverture dense de toute une région, afin d’atteindre de nombreux récepteurs. Une antenne doit rayonner de façon large, pour “arroser” la région qui l’entoure (en général, elle ne rayonne pas vers le haut ni vers le bas).
- Les faisceaux hertziens [76] et les communications par satellite requièrent au contraire un faisceau étroit, afin de concentrer l’énergie dans la direction d’un récepteur unique. On ne souhaite pas inonder inutilement les environs, au risque de fournir un signal à des récepteurs auxquels il n’est pas destiné – il s’agit de garantir la confidentialité de la communication. De plus, un signal parasite augmente le niveau de bruit et peut perturber un récepteur. En concentrant le signal dans un faisceau étroit, pointé vers le récepteur, on réduit la puissance requise pour la liaison. Il en va de même pour l’antenne de réception, qui ne reçoit que les signaux provenant de la petite région de l’espace dans laquelle l’émetteur est situé. Similairement, les radars ont besoin de faisceaux étroits pour pouvoir déterminer de façon précise la direction d’obstacles ou de cibles.

9.4.2 Angle d’ouverture

La largeur du faisceau dans le champ lointain d’une antenne, entre les deux directions pour lesquelles la densité de puissance vaut la moitié de la valeur maximale (fig. 9.6), est appelée angle d’ouverture de l’antenne.

En dehors de rares exceptions, l’angle d’ouverture est supérieur ou égal au quotient de la longueur d’onde λ par la plus grande dimension d de l’antenne

$$\psi > \frac{\lambda}{d} \quad [\text{rad}] \quad (9.31)$$

La largeur d’un faisceau dépend donc directement de la géométrie et des dimensions de l’antenne, ainsi que de la fréquence du signal.

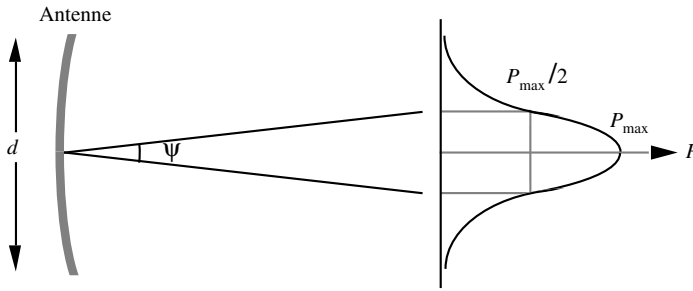


Fig. 9.6 Définition de l'angle d'ouverture ψ d'une antenne.

Pour obtenir un faisceau étroit, et donc une antenne ayant une directivité élevée, il faut utiliser soit une petite longueur d'onde (fréquence très haute), soit une antenne de très grande dimension, mais

- les dimensions de l'antenne sont limitées par l'espace à disposition et par le coût de leur construction, on ne peut donc pas les augmenter démesurément;
- les ondes de très hautes fréquences (> 10 GHz) subissent une absorption produite par les gaz de l'atmosphère (§ 9.4.11): on ne doit donc pas trop réduire la longueur d'onde.

Par conséquent, le choix d'une antenne résulte d'un compromis. Il faut noter que beaucoup d'éléments rayonnants fonctionnent près d'une résonance qui correspond à $d \cong \lambda / 2$ (§ 4.7.1). Selon (9.31), l'angle d'ouverture vaut alors environ 2 radians ($\cong 115^\circ$) et l'élément est peu directif. Deux moyens sont à disposition pour augmenter la directivité:

- on peut focaliser le faisceau – comme en optique pour une lunette ou un télescope – au moyen d'une lentille ou d'un réflecteur parabolique (§ 9.5.4);
- on peut combiner les signaux rayonnés par plusieurs éléments de façon à ce qu'ils s'ajoutent en phase dans la direction souhaitée et qu'ils se suppriment dans les autres directions. On obtient ainsi un réseau d'antennes (sect. 9.6).

9.4.3 Gain en puissance

On fournit à une antenne une puissance P_f [W] qui se répartit dans tout l'espace qui entoure l'antenne. Dans la région du champ lointain, la puissance rayonnée dans un élément d'angle solide $d\Omega$ dépend des deux coordonnées angulaires du système sphérique au centre duquel est située l'antenne

$$P_{\Omega}(\theta, \varphi) d\Omega \quad [\text{W}] \quad (9.32)$$

On définit le gain en puissance G en comparant la puissance par angle solide $P_{\Omega}(\theta, \varphi)$ rayonnée par l'antenne à celle rayonnée par un *radiateur isotrope* auquel on fournit la même puissance – un radiateur isotrope est une antenne hypothétique sans pertes qui répartit la puissance qu'on lui fournit de façon uniforme dans toutes les directions.

$$G(\theta, \varphi) = \frac{P_{\Omega}(\theta, \varphi)}{P_f / 4\pi} \quad [-] \quad (9.33)$$

Le concept de gain exprime le fait que l'antenne émet de façon non uniforme dans l'espace, concentrant la puissance émise dans certaines directions privilégiées. Le gain maximal de l'antenne est le maximum de (9.33). Les antennes courantes sont des éléments passifs, et l'existence d'un gain ne signifie pas qu'il y ait amplification – ce terme n'a pas le même sens pour une antenne ou pour un amplificateur.

9.4.4 Rendement en puissance

La puissance totale rayonnée par l'antenne est obtenue en intégrant la puissance par angle solide sur tout l'angle solide 4π qui entoure l'antenne

$$P_t = \int_{4\pi} P_{\Omega}(\theta, \varphi) d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P_{\Omega}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \quad [\text{W}] \quad (9.34)$$

Suite à l'existence de pertes dans l'antenne, qui résultent notamment de la conductivité σ finie des éléments métalliques, la puissance transmise P_t est toujours inférieure à la puissance fournie P_f . Le rendement η de l'antenne est défini par le quotient de ces deux puissances

$$\eta = \frac{P_t}{P_f} < 1 \quad [-] \quad (9.35)$$

9.4.5 Directivité

La directivité est définie de façon semblable au gain en puissance, en considérant cette fois-ci un radiateur isotrope qui rayonne de façon uniforme la puissance transmise P_t (et non la puissance fournie P_f)

$$D(\theta, \varphi) = \frac{P_{\Omega}(\theta, \varphi)}{P_t/4\pi} = \frac{G(\theta, \varphi)}{\eta} \quad [-] \quad (9.36)$$

9.4.6 Densité de puissance

Dans la région du champ lointain de l'antenne, le vecteur de Poynting (6.70) est purement réel et dirigé radialement. Il représente la densité de puissance rayonnée, qui est liée à la puissance par angle solide $P_{\Omega}(\theta, \varphi)$ (§ 9.4.3) par

$$P(\theta, \varphi) = \frac{P_{\Omega}(\theta, \varphi)}{r^2} = \frac{P_f}{4\pi r^2} G(\theta, \varphi) = \frac{P_t}{4\pi r^2} D(\theta, \varphi) \quad [\text{W/m}^2] \quad (9.37)$$

9.4.7 Diagramme de rayonnement

Le rayonnement d'une antenne est généralement représenté par le gain, normalisé par rapport à sa valeur maximale et reporté dans un diagramme polaire

$$R(\theta, \varphi) = G(\theta, \varphi) / \max[G(\theta, \varphi)] \quad [-] \quad (9.38)$$

L'amplitude est souvent reportée sur une échelle logarithmique en décibels (3.20) comme dans la figure 9.7.

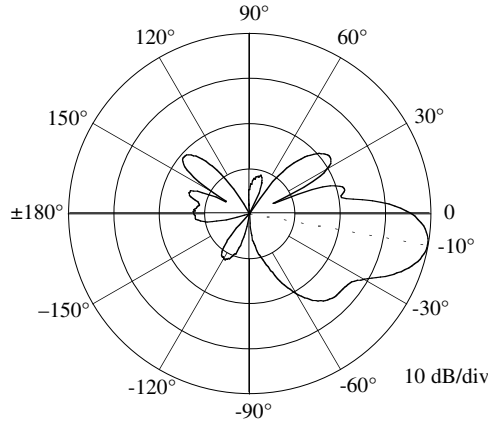


Fig. 9.7 Diagramme de rayonnement d'une antenne, montrant le lobe principal et les lobes secondaires. L'échelle radiale est logarithmique: 10 dB par division.

Le rayonnement d'une antenne se concentre surtout dans un *lobe principal*. Celui-ci est entouré de *lobes secondaires*, qui résultent d'une suppression incomplète du rayonnement dans d'autres directions [77]. Ces derniers sont indésirables, et on cherche autant que possible à les supprimer ou à réduire leur amplitude. Toutefois, à dimension d'antenne constante, toute réduction des lobes secondaires produit un élargissement du lobe principal et on doit donc établir un compromis entre ces deux paramètres.

9.4.8 Surface de captation

À l'autre extrémité de la liaison, l'antenne de réception, située dans un faisceau de densité d'énergie P , capte une puissance P_r qui est fournie au récepteur. Le quotient de ces deux grandeurs définit la *surface de captation* ou *surface effective* de l'antenne

$$A_e(\theta, \varphi) = \frac{P_r(\theta, \varphi)}{P} \quad [\text{m}^2] \quad (9.39)$$

Les angles représentent la direction du faisceau par rapport aux coordonnées de l'antenne de réception. On a admis ici que les éléments sont adaptés les uns aux autres (sect. 4.4) et qu'il n'y a donc pas de pertes résultant de réflexions. On a également supposé que les deux antennes fonctionnent avec la même polarisation.

9.4.9 Relation entre surface de captation et gain en puissance

Un système de transmission comporte au moins deux antennes, l'antenne émettrice qui transmet un signal et l'antenne réceptrice qui le capte – pour le fournir ensuite à un récepteur. Le quotient de la puissance captée par l'antenne réceptrice par celle fournie à l'antenne d'émission est donné par

$$\frac{P_r}{P_f} = \frac{1}{4\pi L^2} G_1(\theta_1, \varphi_1) A_{e2}(\theta_2, \varphi_2) = \frac{1}{4\pi L^2} G_2(\theta_2, \varphi_2) A_{e1}(\theta_1, \varphi_1) \quad [-] \quad (9.40)$$

où L est la distance entre les deux antennes, G_1 et G_2 leurs gains, A_{e1} et A_{e2} leurs surfaces de captation. Le théorème de réciprocité (§ 7.4.5) indique que l'on peut intervertir émetteur et récepteur sans modifier ce quotient, et on doit par conséquent avoir

$$\frac{G_1(\theta_1, \varphi_1)}{A_{e1}(\theta_1, \varphi_1)} = \frac{G_2(\theta_2, \varphi_2)}{A_{e2}(\theta_2, \varphi_2)} \quad [m^{-2}] \quad (9.41)$$

Ce rapport est indépendant du type d'antenne considéré, et l'étude d'un système formé de deux antennes montre qu'il vaut $4\pi/\lambda^2$.

9.4.10 Formule de Friis

Remplaçant le gain ou la surface de captation d'une des deux antennes dans la relation (9.31), on obtient la formule de Friis [78], qui sert à déterminer le facteur de transfert en puissance entre deux antennes.

$$P_r = P_f G_1(\theta_1, \varphi_1) G_2(\theta_2, \varphi_2) \left(\frac{\lambda}{4\pi L}\right)^2 = P_f A_{e1}(\theta_1, \varphi_1) A_{e2}(\theta_2, \varphi_2) \left(\frac{1}{\lambda L}\right)^2 \quad (9.42)$$

9.4.11 Affaiblissement de propagation

Comme la puissance rayonnée est distribuée sur une sphère, au centre de laquelle se trouve l'antenne, la puissance reçue décroît comme le carré de la distance (9.42). Lorsque la fréquence du signal est très élevée, supérieure à environ 10 GHz, un affaiblissement supplémentaire est produit par les composants de l'atmosphère, dépendant des conditions météorologiques: on doit alors tenir compte d'une décroissance exponentielle additionnelle dans les dépendances des champs [79]. Cet effet est produit par les gaz de l'atmosphère, les gouttes d'eau en suspension, les particules de neige et de glace, etc., et il est négligeable aux fréquences inférieures à 10 GHz environ.

9.4.12 Détectabilité d'un signal

Pour détecter un signal, il faut que sa puissance soit au-dessus du seuil de sensibilité du récepteur. Celui-ci dépend du bruit électromagnétique, produit par différents mécanismes physiques – d'abord à l'extérieur, puis à l'intérieur du récepteur lui-même [80]. Il ne suffit pas d'amplifier un signal faible pour pouvoir le détecter, car l'amplification ajoute aussi du bruit. On ne peut donc pas augmenter indéfiniment la sensibilité d'un récepteur.

L'effet du bruit peut être réduit en utilisant une bande passante étroite, mais alors le débit d'information du signal est ralenti. Des techniques sophistiquées de codage permettent de détecter des signaux en dessous du niveau de bruit (vol. VI et XVIII). Par exemple, on peut répéter périodiquement, un grand nombre de fois, l'information qu'on veut transmettre. En sommant les signaux, l'amplitude de l'information augmente, tandis que, suite à son caractère stochastique, l'effet du bruit reste plus ou moins constant.

C'est surtout dans le domaine des communications spatiales que l'on doit détecter des signaux de très faible amplitude, notamment ceux qui proviennent de sondes spatiales aux confins du système solaire (§ 9.7.4). On a également reçu des échos radar de plusieurs planètes et satellites (§ XIII 8.9.2), et dans ce cas également les signaux reçus, après un trajet aller et retour, ont des amplitudes extrêmement faibles.

9.4.13 Mesures d'antennes

Pour mesurer une antenne, il faut disposer d'au moins deux antennes – ou, à la rigueur, d'une antenne et d'un réflecteur de propriétés connues. Les deux antennes doivent être séparées d'une distance suffisante pour que chacune soit dans le champ lointain de l'autre: seuls les termes de rayonnement des champs sont alors significatifs et on peut extrapoler les résultats obtenus à de plus grandes distances. L'étude du champ proche [81] montre que cette condition est satisfaite pour une distance L satisfaisant l'inéquation

$$L \geq 2 \frac{d^2}{\lambda} \quad [\text{m}] \quad (9.43)$$

où d est la plus grande dimension de l'antenne. On mesure le quotient de la puissance reçue par la puissance fournie, en fonction de l'orientation respective des deux antennes (mesure d'affaiblissement, sect. XIII.7.4). On obtient alors le produit des gains des deux antennes $G_1 G_2$ à l'aide de (9.33). Pour trouver le gain d'une des deux antennes, on peut rencontrer trois situations différentes

- on connaît le gain d'une antenne, qui a été préalablement calibrée;
- on dispose de deux antennes identiques, et donc $G_1 = G_2$;
- on fait des mesures avec trois antennes, ce qui permet d'obtenir les trois gains:

$$G_1 = \sqrt{\frac{G_1 G_2 G_1 G_3}{G_2 G_3}} \quad G_2 = \sqrt{\frac{G_1 G_2 G_2 G_3}{G_1 G_3}} \quad G_3 = \sqrt{\frac{G_1 G_3 G_2 G_3}{G_1 G_2}} \quad [-] \quad (9.44)$$

Des précautions doivent être prises pour éviter l'effet de réflexions, produites notamment par le sol et les parois: dans la mesure du possible, on mesure les antennes dans une *chambre anéchoïque* – dont les parois sont formées de pyramides de matériau absorbant.

Pour déterminer expérimentalement le rendement η et la directivité D d'une antenne, il faut connaître la puissance P_l transmise par l'antenne. Cette grandeur n'est pas directement mesurable; il faudrait en principe intégrer la densité de puissance rayonnée dans toutes les directions pour déterminer sa valeur. En général, on préfère comparer plusieurs antennes avec une méthode de substitution [82].

Pour des antennes de très grandes dimensions, on ne dispose pas de stands de mesure de longueur suffisante pour satisfaire la condition (9.43). Dans le cas d'antennes destinées à la réception de signaux de satellites ou de sondes spatiales, la distance entre antennes devrait être de plusieurs dizaines de kilomètres. Par la force des choses, on doit alors faire des mesures dans le champ proche de l'antenne. On dispose pour cela de sondes de mesure (petites antennes) qui sont couplées aux différentes composantes des champs. Lorsque la distribution des champs au voisinage de l'antenne a été mesurée, en amplitude et en phase, il est possible de déterminer le champ lointain de l'antenne avec des logiciels de calcul basés sur des transformées de Fourier ou de Hankel [81].

La détermination des composantes des champs à proximité d'une structure rayonnante sert également au diagnostic; elle permet par exemple de déterminer les zones qui contribuent au rayonnement et celles qui sont peu actives.

Les mesures permettent de déterminer le gain d'une antenne, tandis que les études théoriques – qui considèrent en général une antenne faite de matériaux idéaux sans pertes – fournissent la directivité (sect. 9.4). La comparaison entre la théorie et les mesures n'est par conséquent pas immédiate, en particulier lorsque des antennes sont construites avec des matériaux de qualité médiocre.

9.5 QUELQUES ANTENNES

Il existe un très grand nombre de types différents d'antennes, destinées à des applications diverses (radiodiffusion, faisceaux hertziens, téléphonie mobile, satellites, radars, goniométrie, etc.) sur des bandes de fréquences allant de quelques kHz à plusieurs dizaines de GHz. Les sections qui suivent donnent un bref aperçu de cette diversité, présentant les principaux types d'antennes.

9.5.1 Dipôle élémentaire ou doublet

L'antenne la plus simple est formée d'une section de conducteur rectiligne parcourue par un courant alternatif I . Quand le conducteur est court par rapport à une longueur d'onde, on peut admettre que le courant est uniforme, et on obtient la structure étudiée dans la section 9.2 [71]. Comme la structure est symétrique, les champs n'ont pas de dépendance azimutale, et la directivité est obtenue à l'aide de la densité de puissance (9.20) et de la puissance totale transmise (9.21)

$$D(\theta) = 1,5 \sin^2 \theta \quad [-] \quad (9.45)$$

Le rayonnement maximal de l'antenne est situé dans le plan perpendiculaire à la direction du fil ($\theta = \pi/2$), où la directivité maximale vaut 1,5 (soit 1,76 dB). Il n'y a en revanche aucun rayonnement selon l'axe du conducteur (axe des z). Le diagramme de rayonnement est présenté à la figure 9.8.

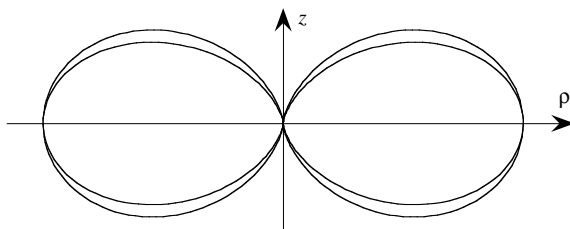


Fig. 9.8 Diagramme de rayonnement d'un dipôle électrique (trait noir) et d'un dipôle demi-onde (trait gris).

Le fait que le conducteur soit beaucoup plus court que la longueur d'onde ne signifie pas qu'il soit physiquement court. Par exemple, une antenne de 50 mètres de hauteur recevant des ondes longues à une fréquence de 200 kHz est petite par rapport à la longueur d'onde, qui vaut dans ce cas 1500 mètres.

9.5.2 Dipôle demi-onde

Le rayonnement d'un conducteur rectiligne est optimal à la résonance, quand sa longueur vaut $\lambda/2$ (§ 4.5.1). On ne peut plus dans ce cas négliger la variation du courant le long du fil, qui a la forme d'une demi-sinusoïde. La phase reste en revanche constante, dans un régime d'ondes stationnaires (§ 3.6.2). On détermine le potentiel vecteur $\underline{A}(\mathbf{r})$, puis les champs et le vecteur de Poynting, à l'aide duquel on obtient la directivité

$$D(\theta) = 1,64 \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right]^2 \quad [-] \quad (9.46)$$

Le diagramme est également reporté dans la figure 9.8, il est légèrement plus aplati que celui du dipôle court. Le dipôle étant symétrique, la directivité dépend seulement de l'élévation θ , atteignant sa valeur maximale de 1,64 (soit 2,15 dB) dans le plan perpendiculaire au conducteur ($\theta = \pi/2$).

9.5.3 Antennes cornets

Un signal transmis par un guide d'ondes (tuyau métallique, § 8.5.4) peut rayonner directement à l'extrémité ouverte du guide, mais le transfert peut être nettement amélioré en élargissant progressivement la section du guide. La transition vers l'espace libre est couramment effectuée au moyen d'un cornet (fig. 9.9). Le même type de transition s'utilise en acoustique pour les instruments à vent (vol. XXI).

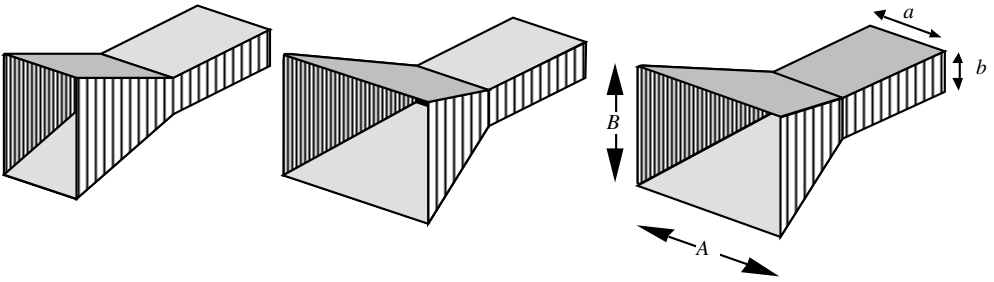


Fig. 9.9 Antennes cornets.

L'étude mathématique considère une source distribuée dans le plan de l'ouverture, qui rayonne d'un côté dans l'espace (perpendiculairement à la surface), et qui est alimentée de l'autre côté par un guide d'ondes à section variable, à son tour connecté à un guide d'ondes de section fixe.

On dispose également de certaines relations approchées simples pour déterminer les angles du faisceau émis, dans les deux directions. Celles-ci permettent souvent d'obtenir l'information souhaitée avec une précision suffisante, sans qu'il soit nécessaire d'effectuer de longues dérivations [83]

- dans le plan électrique, on a, lorsque $B < 2,5 \lambda$

$$\psi_E \cong 56 \lambda / B \quad [^\circ] \quad (9.47)$$

- dans le plan magnétique, on a, lorsque $A < 3 \lambda$

$$\psi_H \cong 67 \lambda / A \quad [^\circ] \quad (9.48)$$

Typiquement, on fait usage de cornets pour obtenir des gains en puissance de l'ordre de 20 à 100 (13 à 20 dB). On utilise aussi des cornets comme sources primaires de rayonnement pour illuminer des réflecteurs paraboliques (§ 9.5.4) ou des lentilles – ces dispositifs permettant d'augmenter la directivité.

9.5.4 Antenne parabolique

Pour réaliser une antenne très directive, on fait usage d'un réflecteur parabolique, dont la surface transforme une onde sphérique en onde plane (fig. 9.11). Cette propriété est utilisée dans les télescopes optiques à miroir [84]. Bien entendu, on ne peut pas obtenir une transformation totale, car il faudrait pour cela que le réflecteur ait un diamètre infini.

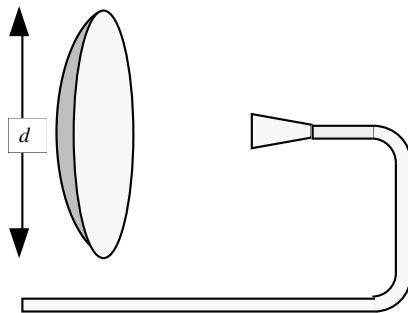


Fig. 9.11 Antenne à réflecteur parabolique (assiette) alimentée par un cornet.

La directivité maximale est donnée par une relation approchée

$$D_{\max} = g(\pi d/\lambda)^2 \quad [-] \quad (9.49)$$

où g est un facteur qui tient compte des caractéristiques du système d'excitation (cornet, dipôle, réflecteur secondaire, etc), atteignant au maximum 0,82. Par exemple, pour une antenne de 10 m de diamètre fonctionnant à 10 GHz ($\lambda = 3$ cm), on obtient une directivité maximale de $0,86 \cdot 10^6$ (59,3 dB).

9.5.5 Antennes imprimées

La technique des circuits imprimés, mise au point pour l'électronique en basse fréquence, s'est ensuite appliquée aux plus hautes fréquences pour réaliser des connexions entre éléments (§ 1.4.6). Plus récemment, elle est également utilisée pour réaliser des antennes plates (fig. 9.12).

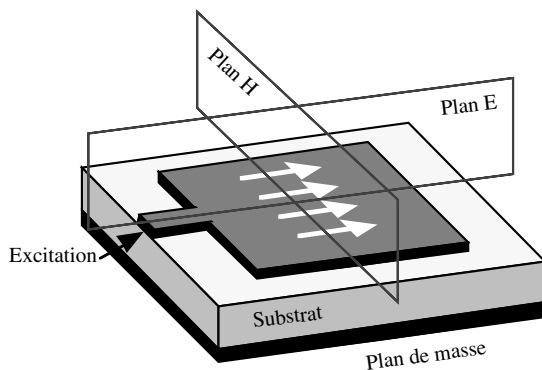


Fig. 9.12 Antenne imprimée sur un substrat diélectrique.

Une plaque métallique rayonnante est déposée sur un substrat diélectrique, lui-même placé sur un plan de masse. L'antenne est alimentée par une ligne de transmission, soit directement, soit à travers une fente ou une ouverture. On obtient une résonance lorsque la longueur de la plaque imprimée est de l'ordre de la demi-longueur d'onde – en tenant compte du substrat – de sorte que ces antennes ont des propriétés similaires à celle de dipôles demi-ondes (§ 9.5.2) placés au dessus d'un plan réfléchissant.

La structure imprimée est plane et légère, et par conséquent elle est particulièrement bien adaptée aux applications aérospatiales. Par ailleurs, la technique photolithographique permet de fabriquer en série de très nombreux éléments à partir d'un même masque, et le matériel de base est relativement peu coûteux: cette technique est donc susceptible de fournir des composants à des prix modérés [85].

Toutefois, pendant longtemps les antennes ont été fabriquées sur des substrats destinés aux circuits imprimés, généralement trop minces et de permittivité trop élevée pour assurer un rayonnement efficace. Suite à l'emploi de matériaux inadéquats, les antennes imprimées ont eu une bande passante étroite, ce qui a limité leur emploi et les a rendues sensibles aux variations de dimensions et des propriétés des matériaux (effet de la température). Plus récemment, l'emploi de substrats plus épais et de très faible permittivité (mousses) ont permis d'étendre considérablement les domaines d'application [86].

9.6 ANTENNES À RÉSEAUX

En assemblant plusieurs éléments rayonnants de faible directivité, on peut réaliser une antenne de grande directivité, en tirant profit des interférences entre les rayonnements de chaque radiateur [87]. On dispose le plus souvent les composants d'un réseau le long d'une ligne droite, aux nœuds d'un réseau maillé (carré ou rectangulaire) ou régulièrement sur une circonférence.

9.6.1 Réseau de dipôles disposés régulièrement

On considère ici le réseau de la figure 9.13, formé de N dipôles identiques disposés régulièrement le long d'un axe avec un espacement d . Le dipôle i est alimenté par un courant I_i .

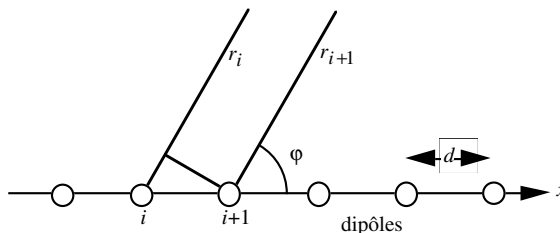


Fig. 9.13 Réseau de dipôles disposés régulièrement sur une base rectiligne.

Dans le champ lointain d'un élément rayonnant, le champ électrique (selon e_θ) est proportionnel à

$$\underline{E}_{\theta i} \approx \frac{I_i e^{-j\beta_0 r_i}}{r_i} \sin \theta \quad [\text{V/m}] \quad (9.50)$$

On constate par ailleurs que, à grande distance du réseau, la différence des distances à deux éléments adjacents est approximativement donnée par

$$|r_{i+1} - r_i| \cong d \cos \varphi \sin \theta \quad [\text{m}] \quad (9.51)$$

Le champ produit par l'ensemble des dipôles est alors donné par

$$\underline{E}_\theta \approx \frac{e^{-j\beta_0 r}}{r} \sin \theta \sum_{i=1}^N I_i e^{-j\beta_0 |r-r_i|} \cong \frac{e^{-j\beta_0 r}}{r} \sin \theta \sum_{i=1}^N I_i e^{-j\beta_0 (i-1) d \cos \varphi \sin \theta} \quad (9.52)$$

Le champ rayonné par l'ensemble des éléments rayonnants s'obtient en multipliant le champ d'un élément produit par un élément par un *facteur de réseau*, qui est donné par une somme dans (9.52). On a supposé ici que le rayonnement d'un élément n'est pas affectée par la présence d'autres éléments rayonnants à proximité – c'est-à-dire qu'on néglige le couplage entre éléments. Ceci est en fait une approximation, qui s'avère souvent suffisante pour dimensionner un réseau.

9.6.2 Alimentation uniforme avec déphasage linéaire

Les courants fournis par le dispositif d'alimentation à chacun des éléments ont tous la même amplitude, mais ils sont déphasés les uns par rapport aux autres par un angle ζ , c'est-à-dire que

$$\underline{I}_{i+1} = \underline{I}_i e^{j\zeta} \quad [\text{A}] \quad (9.53)$$

On introduit cette dépendance dans la somme de (9.52) et on obtient, en utilisant quelques développements mathématiques simples

$$\begin{aligned} \underline{E}_\theta &\approx \frac{e^{-j\beta_0 r}}{r} I_1 \sin \theta \sum_{i=1}^N e^{j(i-1)(\zeta - \beta_0 d \cos \varphi \sin \theta)} \\ &= \frac{e^{-j\beta_0 r}}{r} I_1 \sin \theta \frac{\sin \left[N(\zeta - \beta_0 d \cos \varphi \sin \theta) / 2 \right]}{\sin \left[(\zeta - \beta_0 d \cos \varphi \sin \theta) / 2 \right]} e^{j(N-1)(\zeta - \beta_0 d \cos \varphi \sin \theta) / 2} \end{aligned} \quad (9.54)$$

On calcule ensuite le vecteur de Poynting, qui sert à obtenir le diagramme de rayonnement – il faut encore trouver la direction de rayonnement maximal pour pouvoir normaliser la relation

$$R(\theta, \varphi) \sim \frac{\sin^2 \theta}{N^2} \left(\frac{\sin \left[N(\zeta - \beta_0 d \cos \varphi \sin \theta) / 2 \right]}{\sin \left[(\zeta - \beta_0 d \cos \varphi \sin \theta) / 2 \right]} \right)^2 \quad (9.55)$$

Le rayonnement est maximal lorsque $\theta = \pi/2$ et $\varphi = \arcsin(\zeta/\beta_0 d)$, et en faisant varier ζ , on peut modifier le pointage de l'antenne (fig. 9.14). Comme les antennes sont alignées, le rayonnement s'effectue symétriquement de part et d'autre du réseau.

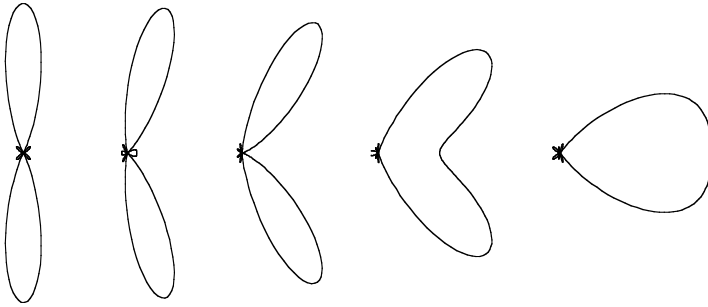


Fig. 9.14 Diagramme de rayonnement d'un réseau de 5 dipôles pour le cas $\beta_0 d = 0,8\pi$, en fonction du déphasage $\zeta = 0; 0,2\pi; 0,4\pi; 0,6\pi; 0,8\pi$.

Lorsque l'espace d entre deux antennes adjacentes augmente, plusieurs lobes de même amplitude apparaissent de part et d'autre du réseau (fig. 9.15).

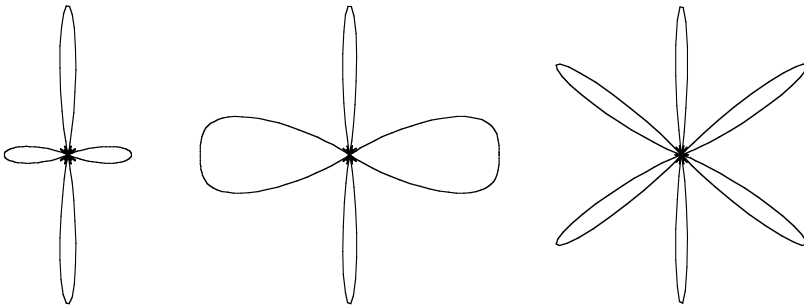


Fig. 9.15 Diagramme de rayonnement d'un réseau de 5 dipôles avec $\zeta = 0$ avec $\beta_0 d = 1,8\pi; 2\pi; 2,5\pi$.

9.6.3 Alimentation non uniforme avec déphasage linéaire

On peut encore améliorer le rapport entre le lobe principal et les lobes secondaires en maintenant ces derniers au même niveau. Pour cela, on ajuste les amplitudes des courants fournis à chacun des éléments de façon à obtenir une distribution de Tchébycheff.

9.6.4 Alimentation non uniforme avec déphasage non linéaire

Des diagrammes de rayonnement de formes plus particulières, tels que le diagramme de la figure 9.7, où l'on veut un lobe incliné et une décroissance régulière, sont obtenus en ajustant simultanément les amplitudes et les phases des courants fournis à chacun des éléments. On fixe dans ce cas un gabarit et on détermine, au moyen d'un programme d'optimisation (§ 4.4.10), les valeurs des $2(N-1)$ paramètres ajustables qui permettent de réaliser le diagramme qui se rapproche le plus de celui souhaité.

9.6.5 Antenne Yagi-Uda

Les éléments d'un réseau sont plus ou moins couplés les uns aux autres, le couplage étant inversement proportionnel à la distance. On peut tirer profit de cet effet pour alimenter certains des éléments de façon indirecte, par couplage électromagnétique. L'antenne Yagi-Uda, bien connue pour la réception de télévision, comporte un ensemble de dipôles, dont un seul est alimenté par une source de signal (fig. 9.16). Les courants qui parcourent le conducteur produisent un champ électromagnétique dans son voisinage, qui induit des courants secondaires dans les autres conducteurs non alimentés.

Le conducteur connecté à la source est ajusté à sa résonance, avec une longueur égale à $\lambda/2$. Un élément plus long est au-dessus de sa résonance et agit comme un *réflecteur*. Des éléments plus courts sont en dessous de leur résonance et fonctionnent comme des *directeurs*. L'analyse et la synthèse d'une antenne Yagi-Uda est complexe, du fait que chaque élément interagit avec tous les autres. Pour tenir compte de tous les effets, il faut faire usage d'un ordinateur [88].

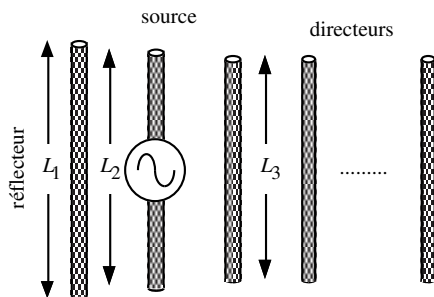


Fig. 9.16 Antenne Yagi-Uda.

Le principe de calcul fait usage d'une approximation des courants sur les conducteurs, basée sur une méthode des moments (sect. 13.4). En fait, la relation (9.11) permet de déterminer le potentiel vecteur $\underline{A}(\mathbf{r})$ produit par n'importe quelle distribution de courant et, par dérivation, les champs électrique et magnétique. Toutefois, on ne connaît pas la distribution des courants sur l'antenne – en dehors de sa valeur au point d'excitation – et on doit donc avoir recours à une approximation. On peut remplacer la distribution de courant par une sommation de fonctions connues, ou encore découper l'antenne en petits segments parcourus chacun par un courant constant. En faisant un tel remplacement, on introduit des coefficients inconnus, qu'on choisit de façon à annuler le champ électrique tangentiel en un certain nombre de points à la surface des conducteurs. La séquence détaillée des opérations est décrite dans la section 13.4.

Le processus de calcul est implémenté sur un ordinateur, permettant de “simuler” le fonctionnement d'une antenne en fonction des paramètres: nombre d'éléments directeurs, longueur et espacement de chacun des éléments. On peut ajuster successivement chacun de ces paramètres jusqu'à ce qu'on obtienne le fonctionnement qui se rapproche le plus de celui souhaité (conception assistée par ordinateur, § 4.4.10).

On peut “affiner” la méthode en tenant compte des pertes dans les conducteurs: dans ce cas, la composante tangentielle du champ électrique ne s'annule pas sur les conducteurs, mais elle est approximativement égale au courant de surface multiplié par l'impédance d'onde du métal (§ 8.2.6).

9.6.6 Réseau de dipôles log-périodique

Toutes les antennes qui font usage d'une résonance pour assurer un rayonnement efficace ne fonctionnent bien que dans une bande étroite – au voisinage de la fréquence de résonance. Or, dans beaucoup d'applications on souhaite couvrir des bandes plus larges sans devoir changer d'antenne chaque fois qu'on change de fréquence. En combinant des dipôles de longueurs différentes avec des espacements adéquats, on réalise une antenne à large bande de fréquences, que l'on appelle log-périodique (fig. 9.17) [89].

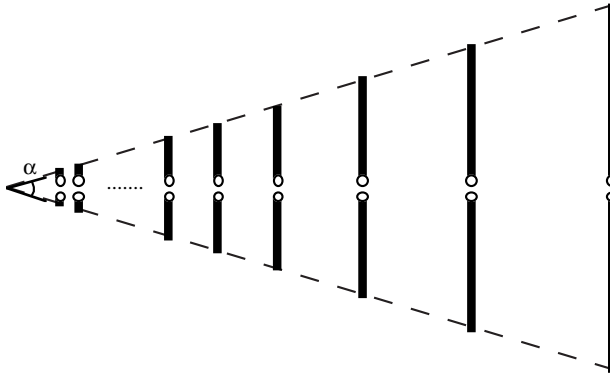


Fig. 9.17 Réseau de dipôles log-périodique.

Tous les éléments du réseau sont connectés à la source du signal. Le dipôle dont la résonance est la plus proche de la fréquence du signal rayonne de façon préférentielle; les dipôles plus longs font office de réflecteurs et les dipôles plus courts d'éléments directeurs.

On spécifie généralement un réseau log-périodique par son gain – que l'on souhaite maintenir constant sur toute la bande de fréquences – et les bornes supérieure et inférieure de cette bande. Les paramètres que l'on peut ajuster sont:

- le nombre de dipôles;
- les longueurs des dipôles;
- les espacements entre les dipôles;
- les rayons des conducteurs.

9.6.7 Calculs d'antennes

Le calcul des propriétés d'une antenne est le plus souvent un processus complexe, pour lequel de nombreuses techniques ont été mises au point, faisant usage de méthodes intégrales (chap. 12) ou approchées (chap. 13).

Pour les antennes les plus courantes, des formules approchées ont été établies, qui permettent souvent d'obtenir l'information souhaitée avec une précision suffisante. Ces relations fournissent, avec un minimum de calculs, les principales caractéristiques d'une antenne: le gain, la bande passante, le diagramme de rayonnement, etc. Des logiciels de calcul simples à utiliser ont été mis au point pour les principaux types d'antennes [90]. Les résultats obtenus permettent de comparer les mérites respectifs des différentes structures disponibles, et cela peut suffire pour effectuer un choix.

Pour obtenir des valeurs plus précises, on doit en général recourir à des logiciels de calcul plus sophistiqués, mis au point spécifiquement pour un type particulier d'antennes. Pour toutes les antennes formées de fils métalliques, tels que les dipôles élémentaires ou demi-onde (§ 9.5.1 et § 9.5.2), ainsi que les assemblages de fils dans différents types de réseaux (§ 9.6.5 et § 9.6.6), on a recours aux logiciels NEC et MININEC [91], qui calculent les paramètres des antennes lorsque l'on spécifie les dimensions et les emplacements des différents segments de fil. Il est également possible d'utiliser ces programmes pour des structures comportant des surfaces métalliques solides, qu'on remplace par des grillages métalliques plus ou moins équivalents.

Pour analyser des antennes imprimées (§ 9.5.5), le programme Ensemble [92] fait usage d'une méthode intégrale pour les potentiels (MPIE) qui est basée sur l'emploi des fonctions de Green des structures stratifiées combiné avec une méthode des moments (sect. 13.4). Il permet d'analyser des structures qui comportent plusieurs plaques métalliques situées à différents niveaux dans des structures stratifiées, et avec différents types d'alimentations et de connexions entre les plaques [86].

9.7 EXERCICES

9.7.1 Déterminer la puissance totale rayonnée par une antenne dipôle de 10 mètres de long parcourue par un courant de 5 A à une fréquence de 6 MHz, ainsi que les densités maximales du champ électrique et du champ magnétique à 100 m du centre de l'antenne.

9.7.2 Déterminer la densité de puissance maximale à 10 km d'une antenne, quand on lui fournit une puissance de 10 kW. La directivité de l'antenne est de 34 dB et son rendement vaut 0,85. Sachant de plus que la fréquence du signal est de 3 GHz, déterminer la surface de captation de l'antenne.

9.7.3 Le 25 août 1989, la sonde spatiale Voyager 2 a "frôlé" la planète Neptune, à une distance d'environ 4 500 000 000 kilomètres de la Terre.

On suppose que (ordres de grandeur) :

- la puissance fournie par le générateur de la sonde est de 50 watts;
- le gain en puissance de l'antenne d'émission est de 1000;
- le gain de l'antenne de réception est de 60 dB;
- la fréquence du signal est de 4 GHz.

Déterminer quelle est la puissance reçue par le récepteur à la surface de la terre. Est-elle détectable? (Note : attention aux ordres de grandeur!)

9.7.4 Une antenne parabolique de 1 mètre de diamètre est utilisée pour transmettre des signaux de 35 GHz. Déterminer l'angle minimal d'ouverture, la directivité maximale de l'antenne et la distance minimale à laquelle on peut mesurer l'antenne dans le champ lointain.

9.7.5 Pour déterminer le gain de trois antennes, appelées antenne A, antenne B et antenne C, on effectue trois mesures. Dans chaque mesure, on prend deux antennes et on les place à 3 mètres l'une de l'autre. On alimente une antenne avec un signal de 10 W à 1,5 GHz et on détecte la puissance maximale reçue par l'autre antenne, qui vaut:

- 851 mW avec les antennes A et B;
- 263 mW avec les antennes A et C;
- 263 mW avec les antennes B et C.

Déterminer les gains et les surfaces de captation des trois antennes.

9.7.6 Déterminer le diagramme de rayonnement de deux dipôles simples alignés selon l'axe z et séparés par une distance a . Les deux courants sont de même amplitude et sont déphasés d'un angle ψ .

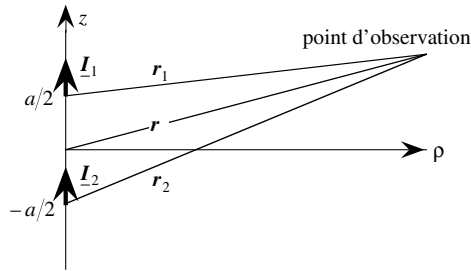


Fig. 9.18 Deux dipôles superposés.

9.7.7 Déterminer approximativement les angles qui caractérisent le lobe principal d'une antenne cornet fonctionnant à 9 GHz, pour lequel $A = B = 6$ cm.

9.7.8 On dispose d'un réseau de 25 dipôles disposés régulièrement le long de l'axe x (fig. 8.10) et on veut que le rayonnement maximal soit dirigé selon l'angle $\varphi = 33^\circ$. Sachant que la distance entre deux dipôles est de $0,35 \lambda$, déterminer le déphasage des courants entre deux dipôles adjacents.

TROISIÈME PARTIE

CHAMPS

STATIQUE ET QUASISTATIQUE

Dans un système dont les grandeurs ne varient pas en fonction du temps, que l'on appelle par conséquent *statique*, toutes les dérivées par rapport au temps s'annulent. En considérant les équations de Maxwell dans ce système, on constate que les phénomènes électriques et magnétiques sont découplés, et peuvent donc être étudiés de façon indépendante: on a deux domaines, la magnéto-statique et l'électro-statique. Lorsque les champs varient lentement, un couplage partiel apparaît et on parle de *quasistatique*.

10.1 ÉLECTROSTATIQUE SANS CHARGES D'ESPACE

10.1.1 Définition du potentiel scalaire $V(\mathbf{r})$

Quand les dérivées par rapport au temps s'annulent, la première des équations de Maxwell dans (1.13) devient

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad [\text{V/m}^2] \quad (10.1)$$

Sachant que le rotationnel d'un gradient est identiquement nul (14.17), on peut toujours trouver une fonction scalaire $V(\mathbf{r})$ telle que

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad [\text{V/m}] \quad (10.2)$$

Le *potentiel scalaire* $V(\mathbf{r})$ n'est pas univoque, car si on lui ajoute une constante arbitraire, on obtient une autre fonction qui satisfait également (10.2): on dit du potentiel qu'il est défini "à une constante près". En électrostatique, l'utilisation du potentiel permet de remplacer un problème vectoriel (champs avec 3 composantes) par un problème scalaire (potentiel avec une seule composante), ce qui réduit sensiblement sa complexité. On peut également tirer le potentiel $V(\mathbf{r})$ de (1.21) en annulant la dérivée par rapport au temps.

10.1.2 Différence de potentiel

Quand on intègre le potentiel entre deux points A et B dans l'espace, on trouve

$$\int_A^B \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = - \int_A^B \nabla V(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = V_A - V_B \quad [\text{V}] \quad (10.3)$$

Le terme $V_A - V_B$ est la différence de potentiel entre les points A et B, ou encore la *tension* entre ces deux points. Le résultat obtenu est indépendant du chemin parcouru entre les deux points (fig. 10.1) car l'intégrale d'un gradient sur un contour fermé est nulle.

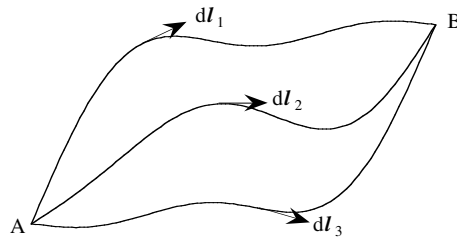


Fig. 10.1 Chemins d'intégration entre deux points.

La somme des tensions sur un contour fermé est nulle (§ IV.1.2.8). Il faut toutefois bien noter que ce résultat n'est valable que lorsque les tensions ne dépendent pas du temps.

Le lieu des points de l'espace sur lequel le potentiel reste constant est une surface appelée équipotentielle, définie par $V = \text{cste}$ (§ 1.4.8). Les lignes de champ (§ 1.3.8) sont perpendiculaires aux équipotentielles.

10.1.3 Équation de Laplace

En l'absence de charges d'espace, on a $\rho(\mathbf{r}) = 0$ et une des équations de Maxwell en divergence (1.13) donne

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad [\text{As/m}^2] \quad (10.4)$$

Si par ailleurs le milieu est homogène, la permittivité ne varie pas avec la position, de sorte qu'on peut écrire

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \nabla V(\mathbf{r}) = -\nabla^2 V(\mathbf{r}) = 0 \quad [\text{V/m}^2] \quad (10.5)$$

L'opérateur ∇^2 est le laplacien, et la partie de droite de la relation (10.5) est appelée *équation de Laplace*.

10.1.4 Propriété de l'équation de Laplace

En intégrant le potentiel sur une sphère, on démontre que, lorsque le potentiel satisfait l'équation de Laplace en tous points à l'intérieur de la sphère, la valeur moyenne du potentiel sur la surface de la sphère est égale au potentiel au centre de la sphère [93].

Il en résulte que, comme le potentiel en un point est la moyenne de celui des points qui l'entourent, le potentiel ne peut avoir ni minimum, ni maximum, dans la région où l'équation de Laplace est satisfaite. S'il est constant sur la surface qui englobe un volume ne contenant pas de charges d'espace, il est alors constant dans tout le volume.

10.1.5 Conditions aux limites

La continuité des composantes tangentielles du champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ sur la surface entre deux milieux (1.22) est satisfaite lorsque le potentiel $V(\mathbf{r})$ est continu

$$V_1(\mathbf{r}) - V_2(\mathbf{r})|_{\text{interface}} = 0 \quad [\text{V}] \quad (10.6)$$

où $V_1(\mathbf{r})$ et $V_2(\mathbf{r})$ sont les potentiels dans le milieu 1 et dans le milieu 2, de part et d'autre de la surface de séparation (fig. 1.4).

La condition sur la composante normale du champ de déplacement (1.23) devient ici

$$\mathbf{n} \cdot [\varepsilon_1 \nabla V_1(\mathbf{r}) - \varepsilon_2 \nabla V_2(\mathbf{r})] = \varepsilon_1 \frac{\partial V_1(\mathbf{r})}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial V_2(\mathbf{r})}{\partial n} = -\rho_s(\mathbf{r}) \quad [\text{As/m}^2] \quad (10.7)$$

où $\partial/\partial n$ est la dérivée normale à la surface, allant du milieu 2 vers le milieu 1 (fig. 1.4).

À l'intérieur d'un conducteur électrique parfait (cep, § 1.6.6), le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ est nul, ce qui entraîne par (10.2) que le potentiel $V(\mathbf{r})$ doit y être constant. La condition de continuité du potentiel (10.6) requiert donc que

$$V(\mathbf{r}) = \text{cste} \quad \text{sur la surface d'un cep} \quad [\text{V}] \quad (10.8)$$

Par conséquent, la surface d'un conducteur électrique parfait est une équipotentielle.

10.1.6 Unicité

Le théorème d'unicité – démontré au paragraphe 1.7.5 dans le cas général de champs variant dans le temps – est valable en électrostatique. On démontre de la même façon que, lorsque le potentiel $V(\mathbf{r})$ est spécifié sur la surface qui entoure un volume dans lequel l'équation de Laplace est satisfaite, la solution pour le potentiel dans le volume est unique. La solution ne dépend donc pas de la méthode utilisée pour l'obtenir.

10.1.7 Méthodes de résolution de l'équation de Laplace

Le choix de la méthode à utiliser dépend de la géométrie du problème, à savoir des contours sur lesquels s'appliquent les conditions aux limites. Lorsque ceux-ci suivent des lignes de coordonnées, les solutions ne dépendent parfois que d'une variable (sect. 11.1). Dans d'autres cas, elles peuvent être exprimées par un produit de plusieurs fonctions, qui ne dépendent chacune que d'une seule variable (séparation de variables, sect. 11.2). On peut encore utiliser des transformations conformes pour résoudre des problèmes à deux dimensions lorsque les limites ont une forme plus compliquée (sect. 11.3 et 11.4). Pour les autres cas, il faut recourir à des méthodes approchées (chap. 13).

10.2 MAGNÉTOSTATIQUE SANS COURANTS

10.2.1 Définition du potentiel scalaire Θ

Quand les dérivées par rapport au temps s'annulent et en l'absence de courants, la deuxième équation rotationnelle de Maxwell dans (1.13) devient

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad [\text{A/m}^2] \quad (10.9)$$

Comme le rotationnel d'un gradient est identiquement nul (14.17), on peut toujours définir une fonction scalaire $\Theta(\mathbf{r})$ telle que

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla \Theta(\mathbf{r}) \quad [\text{A/m}] \quad (10.10)$$

De même que le potentiel scalaire électrique (§ 10.1.1), le *potentiel scalaire magnétique* $\Theta(\mathbf{r})$ est défini “à une constante près”. Son introduction permet de ramener l’étude d’un problème magnétostatique vectoriel (champs avec trois composantes) à celle d’un problème scalaire (potentiel avec une seule composante). Comme dans le cas électrostatique (§ 10.1.2), en l’absence de courants l’intégrale du champ $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ entre deux points ne dépend pas du chemin d’intégration (fig. 10.1).

10.2.2 Équation de Laplace

Une des équations de Maxwell en divergence (1.13) donne

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad [\text{Vs/m}^2] \quad (10.11)$$

Quand le milieu est homogène, la perméabilité ne varie pas avec la position, de sorte qu’on peut écrire

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \nabla \Theta(\mathbf{r}) = -\nabla^2 \Theta(\mathbf{r}) = 0 \quad [\text{A/m}^2] \quad (10.12)$$

L’opérateur ∇^2 est le laplacien, et la partie de droite de la relation (10.12) est une *équation de Laplace*. Toutes les constatations relatives à l’équation de Laplace présentées pour le cas électrostatique dans la section 10.1 restent valables en magnétostatique sans courants: valeur moyenne au centre d’une sphère, unicité, détermination des principales méthodes de résolution.

10.2.3 Conditions aux limites

En l’absence de courant de surface, la continuité des composantes tangentielles du champ magnétique $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ sur la surface entre deux milieux (1.22) est automatiquement satisfaite lorsque le potentiel $\Theta(\mathbf{r})$ y est aussi continu

$$\Theta_1(\mathbf{r}) - \Theta_2(\mathbf{r})|_{\text{interface}} = 0 \quad [\text{A}] \quad (10.13)$$

où $\Theta_1(\mathbf{r})$ et $\Theta_2(\mathbf{r})$ sont respectivement les potentiels dans le milieu 1 et dans le milieu 2, de part et d’autre de la surface de séparation (fig. 1.4).

La condition sur la composante normale du champ d’induction (1.23) devient ici

$$\mathbf{n} \cdot [\mu_1 \nabla \Theta_1(\mathbf{r}) - \mu_2 \nabla \Theta_2(\mathbf{r})] = \mu_1 \frac{\partial \Theta_1(\mathbf{r})}{\partial n} - \mu_2 \frac{\partial \Theta_2(\mathbf{r})}{\partial n} = 0 \quad [\text{Vs/m}^2] \quad (10.14)$$

À l’intérieur d’un conducteur magnétique parfait (cmp, § 1.6.7), le champ magnétique $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ est nul, ce qui entraîne, par (10.9), que le potentiel $\Theta(\mathbf{r})$ y soit constant. La condition de continuité du potentiel (10.13) requiert donc que

$$\Theta(\mathbf{r}) = \text{cste} \quad \text{sur la surface d’un cmp} \quad [\text{V}] \quad (10.15)$$

On rencontre approximativement cette situation sur les surfaces de matériaux ferromagnétiques (fer, nickel, cobalt, alliages et oxydes de ces métaux et diverses terres rares) dont on fait usage dans les machines électriques et les transformateurs. Dans la pratique, toutefois, l’approximation de conducteur magnétique parfait est moins bien satisfaite que celle de conducteur électrique parfait par des métaux, et on doit en général apporter des retouches à cette approximation.

10.3 ÉLÉMENTS DE CIRCUITS

10.3.1 Capacité entre deux conducteurs

On considère un assemblage de deux conducteurs supposés parfaits (cep, § 1.6.6), immergés dans un milieu homogène de permittivité ϵ et soumis à une différence de potentiel (fig. 10.2), que l'on appelle les deux *électrodes* d'un *condensateur*.

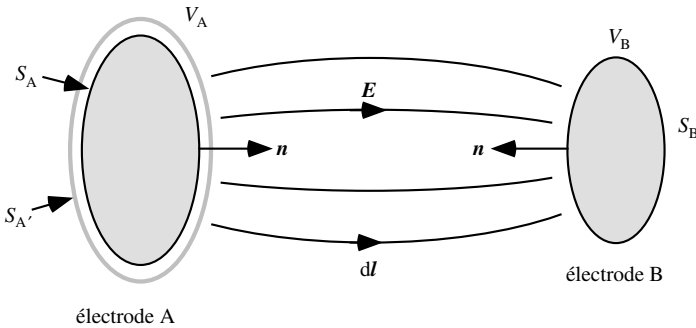


Fig. 10.2 Condensateur formé de deux électrodes dans un milieu homogène.

On résout l'équation de Laplace (10.5) dans le milieu autour des conducteurs et on applique les conditions aux limites (10.6), ce qui donne le potentiel scalaire $V(\mathbf{r})$, dont on tire le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. La différence de potentiel s'obtient en intégrant $V(\mathbf{r})$ entre le conducteur A et le conducteur B (10.3). La composante normale du champ de déplacement $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ est discontinue sur la surface des deux conducteurs – puisque le champ est nul à l'intérieur. Cette discontinuité est liée aux charges de surface données par (10.7)

$$-\mathbf{n} \cdot \epsilon \nabla V_1(\mathbf{r}) = \mathbf{n} \cdot \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho_s(\mathbf{r}) \quad [\text{As/m}^2] \quad (10.16)$$

Comme les normales aux deux surfaces ont des directions opposées, les densités de charges sur les deux électrodes sont de signe contraire. La charge totale sur l'électrode A s'obtient en intégrant $\rho_s(\mathbf{r})$ sur la surface S_A ou, par (10.16), en intégrant la composante normale du champ électrique sur une surface infiniment proche $S_{A'}$ autour du conducteur

$$Q_A = \int_{S_A} \rho_s(\mathbf{r}) dA = \epsilon \int_{S_{A'}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dA \quad [\text{As}] \quad (10.17)$$

On procède de même avec la seconde électrode et on trouve $Q_B = -Q_A$. On appelle *capacité* le quotient de la charge par la différence de potentiel entre les électrodes [94]

$$C = \frac{Q_A}{V_A - V_B} = \frac{Q_B}{V_B - V_A} = \epsilon \frac{\int_{S_{A'}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dA}{\int_A^B \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}} \quad [\text{As/V}] \quad (10.18)$$

Par définition, la capacité est une grandeur positive. On peut étendre le concept de capacité à un ensemble de plus de deux conducteurs (fig. 6.3), auquel cas on obtient une matrice de capacités partielles (sect. XII.2.7).

10.3.2 Conductance et résistance entre deux conducteurs

Dans la structure de la figure 10.2, on remplace le milieu diélectrique autour des deux électrodes par un milieu conducteur homogène de conductivité σ non infinie. La distribution du champ électrique est encore solution de l'équation de Laplace, identique à celle obtenue au paragraphe 10.3.1.

Dans ce système, le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ donne naissance à un courant de densité $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r})$, le courant total I étant obtenu en intégrant la densité de courant sur la surface qui entoure une électrode

$$I = \int_{S_A} \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) dA = \sigma \int_{S_A} \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dA \quad [\text{A}] \quad (10.19)$$

L'existence du courant I a pour effet de réduire les charges Q_A et Q_B sur les deux électrodes – qui tendent vers zéro plus ou moins rapidement – et le problème n'est alors pas indépendant du temps. On retrouve un problème électrostatique en injectant des courants I et $-I$ sur les deux électrodes, de façon à maintenir les amplitudes des charges constantes (fig. 10.3). La surface d'intégration $S_{A'}$ autour des électrodes ne contient pas les conducteurs auxiliaires utilisés pour l'injection de courants.

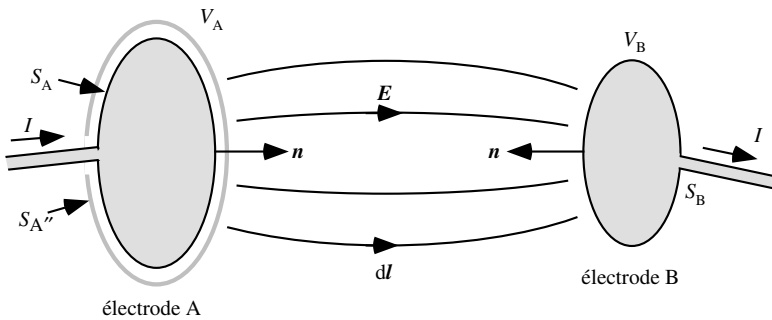


Fig. 10.3 Résistance formée de deux électrodes dans un conducteur homogène.

La *conductance* G est alors définie par le quotient du courant I par la différence de potentiel. La *résistance* R est l'inverse de la conductance

$$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{V_A - V_B} = \sigma \frac{\int_{S_{A'}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dA}{\int_A^B \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}} \quad [\text{As/V}] \quad (10.20)$$

La conductance et la résistance sont également deux grandeurs positives.

Comparant les relations (10.20) avec (10.18), on constate que les deux expressions sont formellement identiques, en dehors d'une légère différence dans la définition des surfaces d'intégration. Les méthodes utilisées pour déterminer la capacité donnent donc également la valeur de la conductance – pour des électrodes de même géométrie. On peut donc remplacer un problème d'électrostatique dans un milieu diélectrique par l'étude de la distribution du courant dans un milieu conducteur.

10.3.3 Perméance et réluctance

Un *tube d'induction* délimité par des lignes d'induction $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ (1.1.8) est situé entre deux sections S_A et S_B disposées perpendiculairement aux lignes de champ (fig. 10.4).

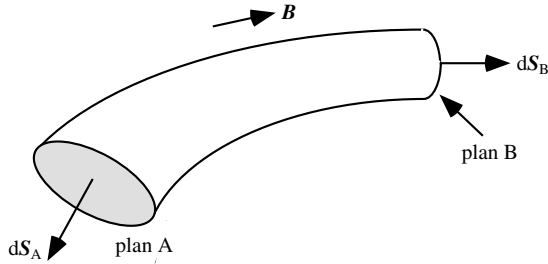


Fig. 10.4 Tube délimité par des lignes du champ d'induction.

On intègre (10.10) sur la surface du tube: la contribution des surfaces latérales est nulle – l'induction leur est tangente – et seules restent les contributions des extrémités

$$\int_{S_A} \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) dA + \int_{S_B} \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) dA = 0 \quad [\text{Vs}] \quad (10.21)$$

Il en résulte que, dans un tube d'induction, le flux magnétique Φ reste constant

$$\Phi = \int_{S_A} \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) dA = - \int_{S_B} \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) dA \quad [\text{Vs}] \quad (10.22)$$

La différence de potentiel magnétique est l'intégrale du champ entre les deux extrémités

$$\int_A^B \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = - \int_A^B \nabla \Theta(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \Theta_A - \Theta_B \quad [\text{A}] \quad (10.23)$$

On définit alors la *perméance* Λ d'un tube d'induction comme le quotient du flux par la différence de potentiel magnétique [95]. La *réluctance* R_m est son inverse (§ IX 1.3.3)

$$\Lambda = \frac{1}{R_m} = \mu \frac{\int_{S_A} \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) dA}{\int_A^B \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}} \quad [\text{Vs/A}] \quad (10.24)$$

Pour un tube *élémentaire* d'induction (grandeurs infinitésimales), l'induction reste constante sur la section droite du tube et on a

$$\Phi \equiv BS = \mu HS \quad [\text{Vs}] \quad (10.25)$$

Remplaçant la valeur du champ magnétique dans (10.24), on obtient la réluctance

$$R_m = \frac{1}{\Phi} \int_A^B \frac{\Phi}{\mu S} dl = \int_A^B \frac{dl}{\mu S} \quad [\text{A/Vs}] \quad (10.26)$$

L'expression de la capacité (10.18) ou de la conductance (10.20) est similaire à celle de la perméance (10.24), mais la surface d'intégration est différente dans ce dernier cas.

10.4 ÉLECTROSTATIQUE AVEC CHARGES D'ESPACE

10.4.1 Équation de Poisson

La définition du potentiel scalaire électrostatique $V(\mathbf{r})$ de (10.2) reste valable quand il y a une densité de charges $\rho(\mathbf{r})$. Dans ce cas, la différence de potentiel entre deux points ne dépend pas du chemin d'intégration (fig. 10.1). Les lignes de champ sont aussi perpendiculaires aux équipotentielles (§ 1.4.9) et les conditions aux limites du paragraphe 10.1.5 pour le potentiel restent valables.

En présence d'une densité de charge $\rho(\mathbf{r})$, la divergence du champ électrique ne s'annule pas: en lieu et place de l'équation de Laplace (§ 10.1.3), on obtient l'équation de Poisson

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r})}{\epsilon} = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon} \quad [\text{V/m}^2] \quad (10.27)$$

L'équation est similaire à l'équation de Laplace, mais avec un second membre non nul – on peut également l'obtenir à partir de l'équation d'onde pour le potentiel scalaire (7.34) en posant $\omega = 0$. Faisant usage du principe de superposition, valable dans tous les systèmes linéaires, on obtient la solution générale en ajoutant à la solution de l'équation de Laplace (sans second membre) une solution particulière de l'équation de Poisson (10.27).

10.4.2 Unicité

Le théorème d'unicité – démontré au paragraphe 1.7.5 dans le cas général de champs variant dans le temps et au paragraphe 10.1.6 pour l'équation de Laplace – reste valable pour les solutions de l'équation de Poisson. On démontre de la même façon que, lorsque le potentiel $V(\mathbf{r})$ est spécifié sur la surface entourant un volume dans lequel l'équation de Poisson est satisfaite, la solution pour le potentiel dans le volume est unique.

10.4.3 Méthodes de résolution de l'équation de Poisson

On peut intégrer directement l'équation de Poisson dans les problèmes qui ne dépendent que d'une variable (sect. 11.1), mais les méthodes de séparation de variables, (sect. 11.2) et des transformations conformes (sect. 11.3 et 11.4) ne sont plus utilisables. Les méthodes approchées sont encore valables, en ajoutant des termes proportionnels aux charges (chap. 13). On utilise par ailleurs beaucoup les méthodes intégrales (chap. 12), en superposant les effets produits par des charges ponctuelles: on obtient la relation donnant le potentiel produit par une densité de charges en adaptant (9.12) au cas électrostatique

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad [\text{V}] \quad (10.28)$$

où \mathbf{r}' indique l'emplacement des charges (sources du potentiel) et \mathbf{r} celle de l'observateur. Si l'on connaît la densité de charges, la valeur du potentiel peut toujours être déterminée par (10.28), et le champ électrique s'obtient alors par dérivation. Dans quelques situations simples, l'intégrale peut être évaluée analytiquement. Quand ce n'est pas possible, on fait appel à des méthodes d'intégration numérique [96].

10.5 MAGNÉTOSTATIQUE AVEC COURANTS

10.5.1 Définitions

Quand les dérivées par rapport au temps s'annulent et que des courants circulent, la deuxième équation rotationnelle de Maxwell dans (6.13) devient

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad [\text{A/m}^2] \quad (10.29)$$

Comme le rotationnel ne s'annule pas, on ne peut pas définir de potentiel vecteur. L'intégrale du champ magnétique entre deux points dépend du chemin d'intégration. Dans certains cas simples, par exemple lorsque le courant ne dépend que d'une coordonnée, il est possible de résoudre directement l'équation différentielle (sect. 11.1).

10.5.2 Équation vectorielle de Poisson

On introduit le potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, dont dérive le champ d'induction (1.19) et la relation (10.9) prend la forme

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu} [\nabla \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) - \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r})] = \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad [\text{A/m}^2] \quad (10.30)$$

Comme au paragraphe 1.8.3, on introduit la jauge de Lorentz (1.50) qui, dans le cas statique, prend la forme $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$ et on tire de (10.10) la relation suivante

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad [\text{Vs/m}^3] \quad (10.31)$$

Cette relation a la même forme que (10.27), à ceci près qu'elle s'applique à un vecteur – au lieu d'un scalaire. On l'appelle *équation vectorielle de Poisson*. Les méthodes utilisées pour sa résolution sont similaires à celles indiquées au paragraphe 10.4.3 pour l'équation scalaire de Poisson. On utilise beaucoup les méthodes intégrales (chap. 12), en superposant les effets produits par des éléments de courant: on obtient la relation donnant le potentiel produit par une densité de courants en adaptant (9.11) au cas magnétostatique

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad [\text{Vs/m}] \quad (10.32)$$

où \mathbf{r}' indique l'emplacement des courants (sources) et \mathbf{r} celle de l'observateur.

Ici aussi, quand on connaît la densité de courant (dans tout l'espace), on détermine le potentiel vecteur et, en prenant son rotationnel, on obtient le champ magnétique. Comme dans la section précédente, on ne peut pas toujours déterminer analytiquement la valeur de l'intégrale et on doit souvent avoir recours à des méthodes d'intégration numérique [96].

On peut également déterminer directement le champ magnétique en fonction de la densité de courant en prenant le rotationnel à l'intérieur de (10.32)

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (10.33)$$

L'intégrale ainsi obtenue est en général plus difficile à évaluer que celle de (10.32) par suite de la présence d'un terme d'ordre plus élevé au dénominateur.

10.6 QUASISTATIQUE

Une variation du champ d'induction produit l'apparition d'un champ électrique, et donc de tensions entre les bornes d'un circuit. Lorsque la variation est lente, on néglige la seconde interaction (du champ électrique vers le champ magnétique) et par conséquent on utilise, en première approximation, des expressions magnétostatiques.

10.6.1 Tension induite

À toute variation temporelle du champ d'induction correspond une variation spatiale du champ électrique, résultant de l'équation de Maxwell (1.13)

$$-\frac{\partial \mathbf{B}(t, \mathbf{r})}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \quad [\text{V/m}^2] \quad (10.34)$$

Il en résulte que toute variation de courant dans un conducteur produit une variation de champ magnétique qui, à son tour, induit une tension dans le conducteur lui-même, ainsi que dans tout conducteur placé à proximité (§ IX 1.3.11). On considère un courant circulant sur une spire et l'effet qu'il produit sur une seconde spire (fig. 10.5).

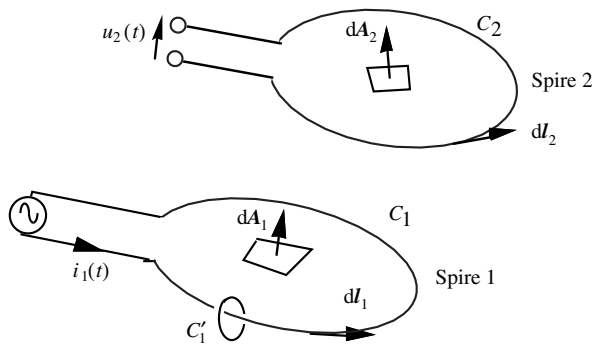


Fig. 10.5 Deux spires magnétiquement couplées.

La spire 1 est parcourue par un courant $i_1(t)$, qui est la source d'un champ magnétique $\mathbf{H}_1(t, \mathbf{r})$ et d'un champ d'induction $\mathbf{B}_1(t, \mathbf{r})$ qui s'étendent dans tout l'espace autour de la spire 1. Le champ d'induction produit par la spire 1 traverse notamment la spire 2 et, s'il varie dans le temps, fait apparaître une tension induite. Pour la trouver, on applique la relation intégrale de Maxwell (1.17) à la surface S_2 située à l'intérieur de la spire 2

$$\int_{S_2} \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_1(t, \mathbf{r})}{\partial t} dA_2 = - \oint_{C_2} \mathbf{E}_1(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}_2 = u_2(t) \quad [\text{V}] \quad (10.35)$$

Comme la spire 2 est ouverte, de sorte qu'aucun courant ne peut circuler. Par conséquent, la tension induite par le champ magnétique $u_2(t)$ apparaît intégralement entre les deux bornes de la spire.

10.6.2 Inductance mutuelle

Le rapport de la tension induite $u_2(t)$ liée à la variation du courant $i_1(t)$ sert à définir l'inductance mutuelle M (§ IV.1.4.8)

$$u_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} \quad [V] \quad (10.36)$$

En identifiant avec (10.35) on trouve que

$$\int_{S_2} \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_1(t, \mathbf{r})}{\partial t} dA_2 = M \frac{di_1(t)}{dt} \quad [V] \quad (10.37)$$

On intègre de part et d'autre et, annulant la constante d'intégration, on obtient une relation pour l'inductance mutuelle M

$$M = \frac{1}{i_1(t)} \int_{S_2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_1(t, \mathbf{r}) dA_2 \quad [Vs/A] \quad (10.38)$$

Il est encore possible d'exprimer le courant $i_1(t)$ en fonction du champ magnétique, en intégrant (1.17) sur un contour C'_1 autour du conducteur de la spire 1 (fig. 10.5) et en négligeant le terme $\partial \mathbf{D}(t, \mathbf{r}) / \partial t$ (approximation quasistatique, § 10.6.5)

$$i_1(t) \equiv \oint_{C'_1} \mathbf{H}_1(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} \quad [A] \quad (10.39)$$

Introduisant cette expression dans (10.38), on obtient une autre formulation pour M

$$M \equiv \mu \frac{\int_{S_2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_1(t, \mathbf{r}) dA}{\oint_{C'_1} \mathbf{H}_1(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}} \quad [Vs/A] \quad (10.40)$$

Cette relation a la même forme que celle obtenue pour la perméance Λ en (10.24), mais les contours d'intégration ne sont pas du tout les mêmes.

10.6.3 Formule de Neumann

Pour résoudre certains problèmes, on développe (10.38), qui donne l'inductance mutuelle, en introduisant le potentiel vecteur, et on utilise le théorème de Stokes (§ 14.2.6)

$$M = \frac{1}{i_1(t)} \int_{S_2} \mathbf{n} \cdot [\nabla \times \mathbf{A}_1(t, \mathbf{r})] dA_2 = \frac{1}{i_1(t)} \oint_{C_2} \mathbf{A}_1(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}_2 \quad [Vs/A] \quad (10.41)$$

La relation (10.32) exprime le potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ produit par un courant constant I dans le cas magnétostatique. Admettant que cette relation reste approximativement valable pour des variations lentes en fonction du temps (approximation quasistatique, § 10.6.5), on obtient la formule de Neumann en combinant (10.32) avec (10.40)

$$M \equiv \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad [Vs/A] \quad (10.42)$$

Cette relation ne dépend que des paramètres géométriques de la structure et de la perméabilité du milieu. On constate aussi que l'effet de l'induction est réciproque, c'est-à-dire qu'on peut intervertir les spires sans modifier l'inductance mutuelle.

10.6.4 Inductance propre

Pour déterminer l'effet d'un courant sur lui-même, qui donne naissance à une inductance propre L , on fait tendre les deux spires l'une vers l'autre, jusqu'à ce qu'elles soient confondues. Des précautions sont toutefois nécessaires, car lorsque le contour C_1 coïncide exactement avec le contour C_2 , les intégrales de (10.41) divergent [97]. Cela signifie qu'on ne peut pas supposer que le conducteur est infiniment mince, mais on doit tenir compte de son épaisseur. On peut admettre que le courant circule au centre du conducteur, que l'on choisit comme contour C_1 , et déterminer l'effet du champ magnétique sur la surface extérieure du conducteur (contour C_2).

Dans ce cas, les intégrales sont définies, mais la relation ne tient pas compte du champ à l'intérieur du conducteur: elle ne donne que l'inductance propre produite par le champ externe au conducteur, à laquelle il faut ajouter l'inductance produite par le champ interne au conducteur, qui s'agit encore de déterminer (§ 12.7.1).

10.6.5 Approximation quasistatique

Dans les développements des expressions pour M , on a fait des approximations – on a négligé le courant de déplacement $\partial\mathbf{D}(t,\mathbf{r})/\partial t$ en établissant l'expression (10.40), et on a ensuite introduit une expression magnétostatique lors de la dérivation de l'équation de Neumann (10.42).

Ces approximations sont admissibles lorsque les champs varient *lentement* dans le temps, c'est-à-dire que le temps de parcours – d'une spire à l'autre – est beaucoup plus bref que la période du signal (où que la durée de l'impulsion). Le signal électromagnétique se propage à la vitesse de la lumière dans le milieu considéré.

Cette condition s'exprime également en termes des dimensions de la structure, qui doivent être beaucoup plus petites que la longueur d'onde pour qu'on puisse faire usage de l'approximation quasistatique [98].

On rencontre une situation similaire dans l'étude des lignes de transmission, au paragraphe 2.2.6. Ce n'est que lorsque le temps de propagation est très bref qu'on peut le négliger, ce qui revient à admettre que la vitesse de propagation est infinie.

En revanche, lorsque le temps de propagation devient "significatif", l'approximation quasistatique ne peut pas être utilisée, et on doit alors faire usage du traitement complet, en termes d'équations des lignes lorsque l'on étudie les lignes de transmission (chap. 2 à 4), des équations de Maxwell (1.13) quand on considère des ondes (chap. 8 et 9) ou des champs.

La fréquence limite entre les deux régions est floue, car elle ne peut être définie qu'arbitrairement – en tenant compte des dimensions de la structure que l'on étudie, de la fréquence du signal (ou de la durée des impulsions) et finalement du degré de précision que l'on souhaite obtenir.

10.7 ÉQUATION DE LAPLACE EN DEUX DIMENSIONS

On rencontre également l'équation de Laplace en dehors du régime électrostatique, lors de l'étude des dépendances transverses des champs dans une ligne de transmission bifilaire homogène (sect. 2.4). On considère ici des signaux qui varient dans le temps, trop rapidement pour satisfaire les conditions de l'approximation quasistatique.

10.7.1 Ligne de transmission bifilaire

Dans une ligne de transmission bifilaire homogène uniforme, le champ électrique et le champ magnétique sont tous deux purement transverses, dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation z (fig. 10.6).

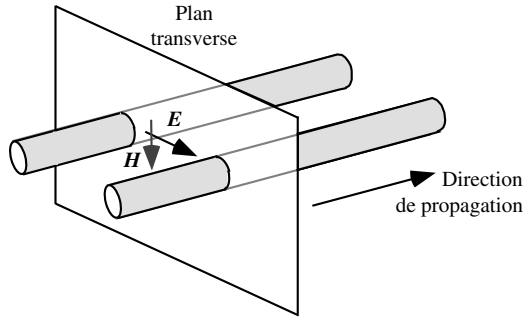


Fig. 10.6 Ligne de transmission avec direction de propagation et plan transverse.

Du fait de l'uniformité longitudinale de la structure, les dépendances transverse et longitudinale sont indépendantes l'une de l'autre. On peut alors décomposer l'opérateur différentiel ∇ en une partie transverse (indice t) et une partie longitudinale selon z

$$\nabla = \nabla_t + e_z \frac{\partial}{\partial z} \quad [m^{-1}] \quad (10.43)$$

On développe les équations rotationnelles de Maxwell en fonction du temps (1.13), tenant compte du fait que les champs sont transverses (indice t)

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) &= \left(\nabla_t + e_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \mathbf{E}_t(t, \mathbf{r}) = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}_t(t, \mathbf{r})}{\partial t} \quad [V/m^2] \\ \nabla \times \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) &= \left(\nabla_t + e_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \mathbf{H}_t(t, \mathbf{r}) = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_t(t, \mathbf{r})}{\partial t} \quad [A/m^2] \end{aligned} \quad (10.44)$$

10.7.2 Dépendance longitudinale

Les parties transverses de ces deux expressions donnent

$$e_z \frac{\partial}{\partial z} \times \mathbf{E}_t(t, \mathbf{r}) = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}_t(t, \mathbf{r})}{\partial t} \quad \text{et} \quad e_z \frac{\partial}{\partial z} \times \mathbf{H}_t(t, \mathbf{r}) = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_t(t, \mathbf{r})}{\partial t} \quad (10.45)$$

En intégrant le champ électrique dans un plan transverse entre les deux conducteurs, et le champ magnétique autour d'un conducteur, on obtient les deux équations des lignes de transmission (1.8) et (1.10) [13]. En regroupant ensuite les deux expressions de (10.45) on obtient une équation d'onde, par exemple portant sur le champ $\mathbf{E}_t(t, \mathbf{r})$

$$\mathbf{e}_z \times \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \times \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{E}_t(t, \mathbf{r}) = -\frac{\partial^2 \mathbf{E}_t(t, \mathbf{r})}{\partial z^2} = -\mu \mathbf{e}_z \times \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{H}_t(t, \mathbf{r})}{\partial t} = -\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}_t(t, \mathbf{r})}{\partial t^2} \quad (10.46)$$

Il s'agit de l'équation d'une onde plane uniforme (8.1.5) qui se propage dans la direction z dans un milieu sans pertes de permittivité ε et de perméabilité μ .

10.7.3 Dépendance transverse

Les parties longitudinales de (10.44) donnent

$$\nabla_t \times \mathbf{E}_t(t, \mathbf{r}) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla_t \times \mathbf{H}_t(t, \mathbf{r}) = 0 \quad (10.47)$$

On trouve ici des rotationnels transverses nuls, de sorte que les champs dérivent de potentiels transverses (bien qu'on ne soit pas en régime électrostatique)

$$\mathbf{E}_t(t, \mathbf{r}) = -\nabla_t V_t(t, \mathbf{r}) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_t(t, \mathbf{r}) = -\nabla_t \Theta_t(t, \mathbf{r}) \quad (10.48)$$

Les équations de Maxwell (1.13) en divergence donnent alors

$$\nabla_t \cdot \mathbf{E}_t(t, \mathbf{r}) = -\nabla_t^2 V_t(t, \mathbf{r}) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla_t \times \mathbf{H}_t(t, \mathbf{r}) = \nabla_t^2 \Theta_t(t, \mathbf{r}) = 0 \quad (10.49)$$

Les potentiels transverses sont par conséquent les solutions d'une équation de Laplace en deux dimensions, qui doivent également satisfaire les conditions aux limites sur les surfaces des conducteurs.

10.7.4 Grandeurs à déterminer

La résolution de l'équation de Laplace dans le plan transverse d'une ligne de transmission (chap. 11) permet de déterminer la distribution transverse des champs électrique et magnétique, dont on déduit

- la capacité par unité de longueur C' de la ligne de transmission (§ 2.1.1);
- l'inductance par unité de longueur L' de la ligne de transmission (§ 2.1.2);

Ces deux paramètres déterminent les propriétés de propagation du signal le long de la ligne de transmission, à savoir la vitesse de propagation (§ 2.2.3) et l'impédance caractéristique (§ 2.3.2).

- dans la section droite de la ligne, l'emplacement où le champ électrique est le plus important; connaissant le champ maximal admissible (tab. 14.18), on peut alors déterminer quelle puissance la ligne peut transporter;
- le courant électrique à la surface des conducteurs, en termes duquel on peut déterminer l'échauffement de ceux-ci et l'affaiblissement qui résulte des pertes par effet Joule (§ 2.7.1).

10.8 EXERCICES

10.8.1 Soit le champ électrostatique suivant

$$\mathbf{E}(x, y) = \frac{V_0}{a^2} [y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y] \quad [\text{V/m}]$$

Déterminer si ce champ dérive d'un potentiel:

- en cherchant de quelle fonction il peut bien être le gradient;
- en intégrant entre les points $(0, 0)$ et (a, a) le long des côtés d'un carré de côté a , une première fois le long des côtés de gauche et du haut, une seconde fois le long des côtés du bas et de droite.

10.8.2 Vérifier que la propriété de l'équation de Laplace énoncée dans le paragraphe 10.1.4 est bien satisfaite par le potentiel électrostatique suivant

$$V(r, \theta, \varphi) = V_0 + V_1 r \sin \theta \cos \varphi \quad [\text{V}]$$

Pour déterminer si c'est bien le cas, on demande d'intégrer cette relation sur une sphère de rayon a centrée sur l'origine du système de coordonnées.

10.8.3 Déterminer la capacité entre une sphère métallique de rayon R_A à l'intérieur d'une sphère concentrique creuse de rayon interne R_B , le milieu entre les deux sphères étant de l'air et le champ électrique ayant la dépendance suivante

$$\mathbf{E}(r, \theta, \varphi) = \mathbf{e}_r \frac{K}{r^2} \quad [\text{V/m}]$$

Que devient cette capacité si le rayon extérieur R_B tend vers l'infini ?

10.8.4 Déterminer la perméance et la réluctance magnétiques d'un tube d'induction cylindrique ayant un rayon de 1 centimètre et une longueur de 1 mètre. Le tube est rempli d'un matériau non aimantable.

10.8.5 Déterminer la densité de courant $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ qui produit le potentiel vecteur suivant

$$\mathbf{A}(\rho, \varphi, z) = \mathbf{e}_z A_0 \left(\frac{\rho}{a}\right)^3 \quad [\text{Vs/m}]$$

10.8.6 Déterminer la tension qui apparaît aux bornes d'une spire circulaire ouverte (fig. 10.6) de 10 centimètres de rayon placée dans un champ magnétique $H_0 \sin(2\pi f t)$ perpendiculaire au plan de la spire, avec $H_0 = 1 \text{ A/m}$ et $f = 50 \text{ Hz}$.

MÉTHODES DIFFÉRENTIELLES

11.1 PROBLÈMES UNIDIMENSIONNELS CARTÉSIENS

Lorsque les champs ne dépendent que d'une seule coordonnée, les dérivées partielles sont remplacées par une différentielle totale et la résolution des problèmes se simplifie considérablement. Cette section traite de la résolution de l'équation de Laplace en électrostatique et en magnétostatique, puis de l'équation de Poisson, sous ses formes scalaire et vectorielle, et enfin de l'équation d'onde dans un métal. On rencontre la même dépendance unidimensionnelle dans l'étude des ondes planes (chap. 8).

11.1.1 Le condensateur plan

On considère deux plaques métalliques planes parallèles, supposées de dimensions infinies dans les directions transverses, séparées par un milieu homogène de permittivité ϵ (fig. 11.1). Cette structure est théorique – des plaques de dimensions infinies ne sont pas réalisables dans la réalité – mais son étude détermine les champs à grande distance des bords d'un condensateur plan et permet d'aborder l'étude de structures plus complexes.

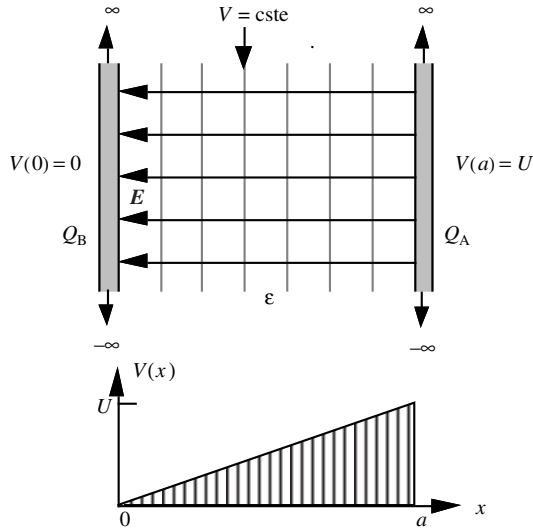


Fig. 11.1 Condensateur plan formé deux plaques de dimensions transverses infinies séparées par un diélectrique homogène. Potentiel électrique V dans la structure.

On dispose l'axe des x perpendiculairement aux faces des plaques, situées dans les plans $x = 0$ et $x = a$. Les plaques sont respectivement portées aux potentiels $V = 0$ et $V = U$. Dans ce problème unidimensionnel, le potentiel scalaire n'est fonction que de x et l'équation de Laplace (9.5) prend la forme

$$\nabla^2 V(x) = \frac{d^2 V(x)}{dx^2} = 0 \quad [\text{V/m}^2] \quad (11.1)$$

dont la solution générale est donnée par

$$V(x) = Ax + B \quad [\text{V}] \quad (11.2)$$

où A et B sont des constantes d'intégration, que l'on détermine avec les conditions aux limites obtenues en posant $x = 0$ et $x = a$ dans (11.2)

$$0 = 0 + B \quad \text{et} \quad U = Aa + B \quad [\text{V}] \quad (11.3)$$

On en déduit que $B = 0$ et que $A = U/a$ de sorte que (11.2) devient

$$V(x) = Ux/a \quad [\text{V}] \quad (11.4)$$

On vérifie sans peine que cette relation satisfait en même temps les conditions aux limites et l'équation de Laplace. Les équipotentielles sont les plans $x = \text{cste}$ (parallèles aux plaques). Le champ électrique transverse est obtenu en prenant le gradient qui, dans le cas présent, ne comporte qu'une dérivation par rapport à x

$$\mathbf{E}(x) = -\nabla V(x) = -\mathbf{e}_x \frac{dV(x)}{dx} = -\mathbf{e}_x \frac{U}{a} \quad [\text{V/m}] \quad (11.5)$$

Le champ électrique transverse est constant, dirigé perpendiculairement aux plaques. Les lignes de champ, dirigées selon x , sont perpendiculaires aux équipotentielles.

La capacité est donnée par (10.18). Comme le champ ne dépend pas de la position, l'intégrale sur la surface devient une simple multiplication. On ne considère ici qu'une partie de la surface du condensateur, dénotée par S

$$C = \varepsilon \frac{\int_S \mathbf{E}_x(x) dA}{\int_0^a \mathbf{E}_x(x) dx} = \varepsilon \frac{(U/a)S}{U} = \varepsilon \frac{S}{a} \quad [\text{As/V}] \quad (11.6)$$

La capacité est proportionnelle à la surface S et à la permittivité, et inversement proportionnelle à la distance entre les plaques.

Pour un condensateur plan réel, dont les dimensions sont restreintes dans le plan transverse, le champ ne reste pas constant jusqu'au bord des électrodes, mais il s'étend légèrement au-delà (§ 11.7.5). La relation (11.6) donne alors une première approximation de la capacité, qui est utilisée quand les dimensions transverses sont beaucoup plus grandes que l'espacement entre les plaques.

Aux bords du condensateur, le champ n'est plus constant, et il n'est plus dirigé selon la seule direction x . Son étude devient de ce fait plus complexe, du fait du caractère multidimensionnel du problème. L'allure du champ au voisinage du bord d'un condensateur plan est déterminée dans le paragraphe 11.7.5 au moyen d'une transformation de Schwartz-Christoffel.

11.1.2 Le condensateur inhomogène plan

On considère la même structure que dans la figure 11.1, mais en introduisant un matériau diélectrique inhomogène entre les deux plaques, avec une permittivité qui varie linéairement avec x selon $\varepsilon(x) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 x$. En l'absence de charges, la divergence de $\mathbf{D}(x)$ est nulle, et donc

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(x) = \frac{d\mathbf{D}(x)}{dx} = 0 \quad \text{d'où l'on tire} \quad \mathbf{D}(x) = e_x D_x = \text{cste} \quad [\text{As/m}^2] \quad (11.7)$$

Le champ électrique est ensuite donné par le quotient du champ de déplacement $\mathbf{D}(x)$ par la permittivité $\varepsilon(x)$

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\mathbf{D}(x)}{\varepsilon(x)} = e_x \frac{D_x}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x} \quad [\text{V/m}^2] \quad (11.8)$$

Le potentiel $V(x)$ s'obtient alors en intégrant le champ électrique

$$V(x) = - \int E_x dx + B = - \int \frac{D_x}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x} dx + B = - \frac{D_x}{\varepsilon_2} \ln(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x) + B \quad (11.9)$$

Les deux constantes qui sont apparues durant l'intégration, D_x et B , sont définies par les conditions aux limites que l'on applique en posant $x = 0$ et $x = a$ dans (11.9)

$$0 = - \frac{D_x}{\varepsilon_2} \ln(\varepsilon_1) + B \quad \text{et} \quad U = - \frac{D_x}{\varepsilon_2} \ln(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 a) + B \quad [\text{V}] \quad (11.10)$$

On en extrait les constantes, que l'on introduit dans (11.9), et on obtient, après avoir mis l'expression du potentiel sous une forme compacte

$$V = U \frac{\ln[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x)/\varepsilon_1]}{\ln[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 a)/\varepsilon_1]} \quad [\text{V}] \quad (11.11)$$

À ce stade, on vérifie que cette relation satisfait simultanément les conditions aux limites et les équations de Maxwell. Dans le cas présent, en revanche, l'équation de Laplace n'est pas satisfaite. Comme le potentiel ne dépend que de la coordonnée x , les équipotentielles sont les plans $x = \text{cste}$. Le champ électrique transverse est obtenu en remplaçant D_x dans (11.8) par sa valeur tirée de (11.10)

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\mathbf{D}(x)}{\varepsilon(x)} = e_x \frac{D_x}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x} = -e_x \frac{U}{\ln[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 a)/\varepsilon_1]} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x} \quad [\text{V/m}] \quad (11.12)$$

La capacité d'une partie S de la surface du condensateur, donnée par (10.18), prend la forme

$$C = \frac{\varepsilon_2 S}{\ln[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 a)/\varepsilon_1]} \quad [\text{As/V}] \quad (11.13)$$

Dans cette structure inhomogène, la capacité reste proportionnelle à la surface S . La variation particulière de permittivité considérée ici donne une relation pour le champ $\mathbf{E}(x)$ (11.8) que l'on peut intégrer analytiquement. Lorsque ce n'est pas possible, on peut faire usage d'une intégration numérique [96], ou encore avoir recours à une méthode de résolution approchée (chap. 13).

11.1.3 Champ magnétique entre deux pièces polaires parallèles

L'étude du problème magnétostatique unidimensionnel s'effectue exactement de la même manière que le problème électrostatique équivalent. On considère deux pièces polaires – les pôles d'un aimant ou d'un électroaimant (vol. IX) – formées de conducteur magnétique parfait (cmp, § 1.4.7), séparées par un entrefer a et soumises respectivement à des potentiels scalaires magnétiques $\Theta = 0$ et $\Theta = \Theta_0$ (fig. 11.2).

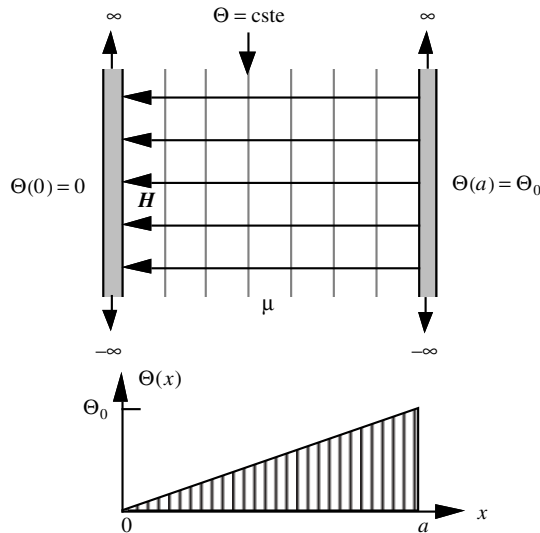


Fig. 11.2 Champ magnétique entre deux pièces polaires parallèles et potentiel magnétique.

L'équation de Laplace et les conditions aux limites donnent alors le potentiel

$$\Theta(x) = \Theta_0 x/a \quad [\text{A}] \quad (11.14)$$

Le champ magnétique transverse est obtenu en dérivant par rapport à x

$$\mathbf{H} = -\nabla\Theta(x) = -\mathbf{e}_x \frac{d\Theta(x)}{dx} = -\mathbf{e}_x \frac{\Theta_0}{a} \quad [\text{A/m}] \quad (11.15)$$

Le champ magnétique est constant et perpendiculaire aux surfaces. La perméance et la réluctance sont données par (10.24). Comme le champ dans l'entrefer est constant, l'intégrale de surface devient une simple multiplication. On considère une surface partielle S des pièces polaires

$$\Lambda = \frac{1}{R_m} = \mu \frac{\int_S H_x(x) dA}{\int_0^a H_x(x) dx} = \mu \frac{(\Theta_0/a)S}{\Theta_0} = \mu \frac{S}{a} \quad [\text{Vs/A}] \quad (11.16)$$

La perméance est proportionnelle à la surface S et à la perméabilité, et inversement proportionnelle à l'entrefer a [95]. Pour une structure bornée dans le plan transverse, la relation (11.16) donne une valeur approchée de la perméance, qui est valable lorsque les dimensions transverses sont beaucoup plus grandes que l'entrefer.

11.1.4 Potentiel et champ électrique dans une jonction pn

L'effet d'une densité de charges unidimensionnelle $\rho(x)$ peut similairement être déterminé en résolvant l'équation différentielle de Poisson. On procède en deux étapes, déterminant le champ électrique $E(x)$, et ensuite le potentiel $V(x)$ dont il dérive

$$\nabla \cdot E(x) = \frac{dE_x}{dx} = \frac{\rho(x)}{\epsilon} \quad [\text{V/m}^2] \quad (11.17)$$

On considère une densité $\rho(x)$ variant linéairement entre $x = -a$ et $x = a$, et qui est nulle partout ailleurs (fig. 9.3). On rencontre une telle distribution de charge dans une jonction pn graduelle dans un semiconducteur (diode, transistor, § VII.2.1.4) [99].

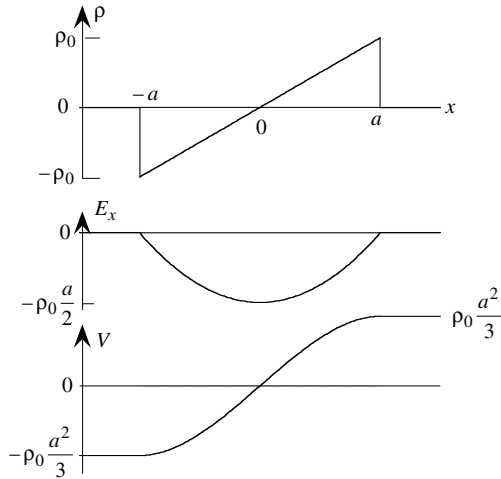


Fig. 11.3 Charge, champ électrique et potentiel dans une jonction pn graduelle.

On introduit la fonction $\rho(x) = \rho_0(x/a)$ dans (11.17), et on intègre par rapport à x . On suppose que le champ électrique est nul en dehors de l'espace qui contient les charges, ce qui permet de déterminer la constante d'intégration en posant que $E_x(-a) = 0$, sachant que le champ est continu en $x = -a$ et en $x = a$ car il n'y a pas de charges de surface

$$E_x(x) = \int \rho(x) dx + \text{cste} = \int \rho_0 \frac{x}{a} dx + \text{cste} = \rho_0 \frac{x^2}{2a} + \text{cste} = \rho_0 \frac{x^2 - a^2}{2a} \quad -a \leq x \leq a$$

$$E_x(x) = 0 \quad \text{ailleurs} \quad [\text{V/m}] \quad (11.18)$$

On constate que l'on a également $E_x(a) = 0$ parce que la charge totale est nulle. Le potentiel est ensuite déterminé en intégrant de nouveau et, vu la symétrie du problème, on suppose qu'il est nul en $x = 0$. En dehors de la zone des charges, le potentiel est constant, il doit aussi être continu en $x = -a$ et en $x = a$ et on trouve ainsi les valeurs des constantes

$$V(x) = - \int \rho_0 \frac{x^2 - a^2}{2a} dx + \text{cste} = -\rho_0 \frac{x^3}{6a} + \rho_0 \frac{a^2 x}{2a} \quad [\text{V}] \quad \text{pour } -a \leq x \leq a$$

$$V(x < -a) = -\rho_0 \frac{a^2}{3} \quad \text{et} \quad V(x > a) = \rho_0 \frac{a^2}{3} \quad [\text{V}] \quad (11.19)$$

11.1.5 Champ magnétique produit par un courant dans une plaque de conducteur

Une plaque métallique d'épaisseur $2a$ est parcourue par un courant de densité constante J_0 (fig. 11.4). On place l'axe des x le long du courant, et l'axe z perpendiculairement à la plaque, qui s'étend à l'infini dans la direction transverse y .

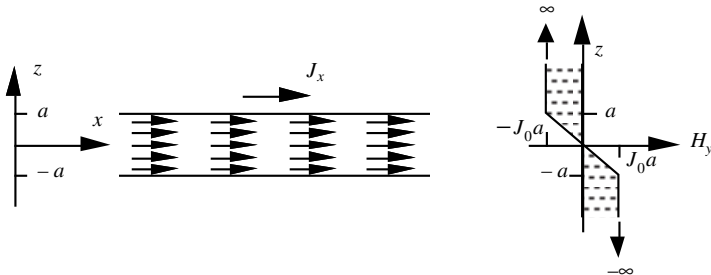


Fig. 11.4 Plaque métallique avec un courant et champ magnétique résultant.

L'équation de Maxwell (6.13) donne, tenant compte du fait que le courant n'a qu'une composante selon l'axe x ,

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r})|_x = \frac{\partial H_z(\mathbf{r})}{\partial y} - \frac{\partial H_y(\mathbf{r})}{\partial z} = J_0 \quad -a \leq z \leq a \quad [\text{A/m}^2] \quad (11.20)$$

Toutefois, comme la structure et le courant sont uniformes dans la direction y , il est normal que le champ $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ ne dépende pas de y . Il en résulte que le champ produit par le courant n'a qu'une composante selon y et (11.20) devient

$$-\frac{dH_y(z)}{dz} = J_0 \quad -a \leq z \leq a \quad [\text{A/m}^2] \quad (11.21)$$

On intègre par rapport à z et on annule la constante d'intégration, pour tenir compte de la symétrie du problème. Le champ électrique dans la plaque métallique vaut par conséquent

$$H_y(z) = -J_0 z \quad -a \leq z \leq a \quad [\text{A/m}] \quad (11.22)$$

Il n'y a pas de courants en dehors de la plaque métallique, et le champ y est donc solution de l'équation de Laplace. Comme il doit être continu en $z = -a$ et en $z = a$, il doit être constant de part et d'autre de la plaque et vaut donc

$$H_y(z \leq -a) = J_0 a \quad \text{et} \quad H_y(z \geq a) = -J_0 a \quad [\text{A/m}] \quad (11.23)$$

On constate que le champ ne tend pas vers zéro à l'infini, ce qui résulte du fait que le courant total dans la plaque n'est pas borné. Dans la réalité, si un courant circule dans une direction en régime stationnaire, il doit toujours revenir à son point de départ par un autre chemin – dans le cas présent le chemin de retour est situé à l'infini.

On peut considérer deux plaques parallèles avec des courants de directions opposées, auquel cas le champ est la superposition de deux solutions de la forme (11.22), mais avec des signes contraires. Le champ magnétique produit par les deux plaques s'additionne alors dans la région entre les deux plaques, où son amplitude vaut $2J_0 a$. À l'extérieur des plaques, les contributions se compensent exactement et le champ est nul.

11.1.6 Distribution de courant dans une plaque métallique

Lorsque la fréquence du signal augmente, le courant qui circule dans un conducteur métallique se concentre près des surfaces: il s'agit de l'effet de peau ou effet pelliculaire [67]. On étudie cet effet dans le domaine fréquentiel, avec la notation des vecteurs phaseurs (§ 6.7.1), et l'équation d'onde (6.76) devient dans un bon conducteur ($\sigma \gg \omega\epsilon$)

$$\nabla^2 \underline{E}(\mathbf{r}) - j\omega\mu\sigma \underline{E}(\mathbf{r}) \equiv 0 \quad [\text{V/m}^3] \quad (11.24)$$

La densité de courant est directement proportionnelle au champ, de sorte qu'on a

$$\nabla^2 \underline{J}(\mathbf{r}) - j\omega\mu\sigma \underline{J}(\mathbf{r}) \equiv 0 \quad [\text{A/m}^4] \quad (11.25)$$

On considère ici la plaque métallique de la figure 11.4 et on suppose que le courant est le même sur ses deux bords $\underline{J}_z(\pm a) = \underline{J}_0$. On considère le problème unidimensionnel, fonction de la seule coordonnée z

$$\frac{d^2 \underline{J}(z)}{dz^2} - j\omega\mu\sigma \underline{J}(z) \equiv 0 \quad [\text{A/m}^4] \quad (11.26)$$

Les solutions sont des exponentielles

$$\underline{J}_z(z) = \underline{J}_+ e^{-\sqrt{j\omega\mu\sigma} z} + \underline{J}_- e^{+\sqrt{j\omega\mu\sigma} z} \quad [\text{A/m}^2] \quad (11.27)$$

Tenant compte des conditions aux limites pour déterminer les constantes, on obtient

$$\underline{J}_z(z) = \underline{J}_0 \frac{\cosh \sqrt{j\omega\mu\sigma} z}{\cosh \sqrt{j\omega\mu\sigma} a} = \underline{J}_0 \frac{\cosh(1+j)z/\delta}{\cosh(1+j)a/\delta} \quad [\text{A/m}^2] \quad (11.28)$$

où $\delta = \sqrt{2/\omega\mu\sigma}$ est la profondeur de pénétration dans le métal (8.39). L'amplitude de la densité de courant est représentée à la figure 11.5 pour plusieurs valeurs du quotient a/δ .

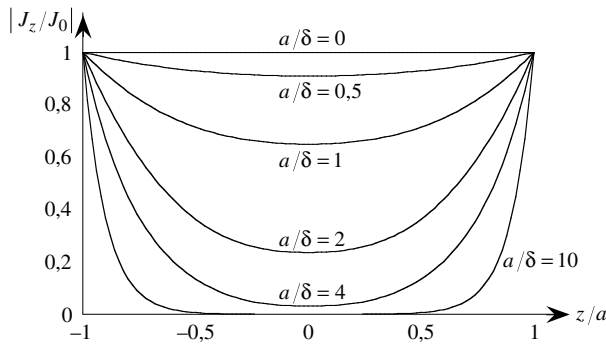


Fig. 11.5 Distribution du courant dans une plaque conductrice.

On constate que le courant est distribué uniformément à fréquence nulle ($a/\delta = 0$) et qu'il se concentre progressivement à la surface du conducteur à mesure que la fréquence augmente. Aux plus hautes fréquences ($a/\delta \geq 6$), le courant ne circule pratiquement que dans des couches d'épaisseur δ sur les deux bords de la plaque. Lorsque la fréquence ou la conductivité augmentent, δ devient de plus en plus petit, et à la limite le courant dans le conducteur devient un courant de surface sur un conducteur électrique parfait.

11.2 PROBLÈMES UNIDIMENSIONNELS CIRCULAIRES

On considère ici des champs qui ne dépendent que de la coordonnée radiale ρ . Cette section aborde la résolution des équations de Laplace et de Poisson, puis de l'équation d'onde dans un fil métallique.

11.2.1 Champ électrique dans une ligne coaxiale

Une ligne coaxiale (§ 1.4.2) est formée d'un conducteur métallique cylindrique circulaire placé dans l'axe d'un conducteur tubulaire cylindrique (fig. 11.6). Les rayons des deux conducteurs sont respectivement R_A et R_B . Le conducteur interne est placé au potentiel $V = U$ en $\rho = R_A$, le conducteur externe au potentiel $V = 0$ en $\rho = R_B$.

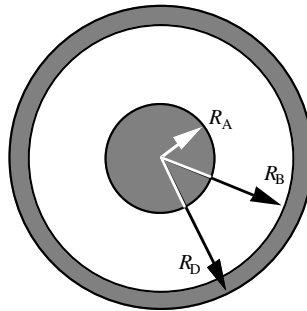


Fig. 11.6 Section droite d'une ligne coaxiale.

Vu la symétrie de la structure, l'équation de Laplace – en coordonnées cylindriques circulaires – ne dépend que de la coordonnée radiale ρ

$$\nabla^2 V(\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dV(\rho)}{d\rho} \right) = 0 \quad [\text{V/m}^2] \quad (11.29)$$

On multiplie par ρ de part et d'autre et on intègre

$$\rho \frac{dV(\rho)}{d\rho} = A \quad [\text{V}] \quad (11.30)$$

On divise ensuite les deux membres par ρ et on intègre une seconde fois, ce qui donne la forme générale de distribution du potentiel

$$V(\rho) = A \ln \rho + B \quad [\text{V}] \quad (11.31)$$

où A et B sont des constantes qu'on détermine avec les conditions aux limites

$$V(R_A) = A \ln R_A + B = U \quad \text{et} \quad V(R_B) = A \ln R_B + B = 0 \quad [\text{V}] \quad (11.32)$$

On en tire A et B et on remplace dans (11.31)

$$V(\rho) = U \frac{\ln(\rho/R_B)}{\ln(R_A/R_B)} \quad [\text{V}] \quad (11.33)$$

On vérifie que cette relation satisfait les conditions aux limites et l'équation de Laplace. On obtient ensuite le champ électrique en prenant le gradient

$$E(\rho) = -\nabla V(\rho) = -e_\rho \frac{dV(\rho)}{d\rho} = -\frac{U}{\rho} \frac{1}{\ln(R_A/R_B)} \quad [\text{V/m}] \quad (11.34)$$

On constate que le champ électrique est purement radial, et donc toujours dirigé perpendiculairement aux deux électrodes (équipotentiellles). Les allures du potentiel transverse et du champ sont représentées dans la figure 11.7. On remarque que la valeur maximale du champ électrique apparaît au bord du conducteur interne: lorsque la tension appliquée à la structure augmente, c'est là qu'un arc commencera à s'amorcer lorsque l'amplitude du champ devient supérieure à une valeur limite, que l'on appelle champ disruptif (§ II.4.7.1).

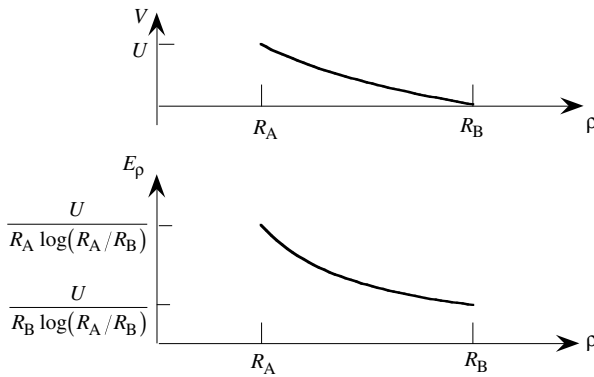


Fig. 11.7 Potentiel et champ électrique dans une ligne coaxiale.

On obtient la capacité par unité de longueur au moyen de la relation (9.18), en intégrant sur la section droite de la ligne coaxiale (2.31)

$$C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(R_B/R_A)} \quad [\text{As/Vm}] \quad (11.35)$$

Cette valeur dépend du quotient des rayons R_A et R_B , mais non de la valeur individuelle prise par chacun d'eux. On obtient donc la même capacité par unité de longueur pour une ligne ayant un rayon interne de 1 mm et un rayon externe de 3 mm que pour une ligne dont les rayons valent respectivement 1 m et 3 m.

Une dépendance similaire est obtenue dans un condensateur plan rempli d'un milieu linéairement inhomogène (§ 11.1.2): il est donc possible de remplacer une structure cylindrique homogène par une structure linéaire inhomogène.

11.2.2 Champ magnétique produit par un courant dans un conducteur circulaire

On considère un fil métallique de rayon R_A parcouru par un courant I , réparti uniformément sur toute la section droite du conducteur (fig. 11.8). Le conducteur est dirigé selon l'axe z . Par suite de la symétrie axiale et de l'uniformité longitudinale de la géométrie, le champ magnétique ne peut dépendre que de la coordonnée radiale ρ .

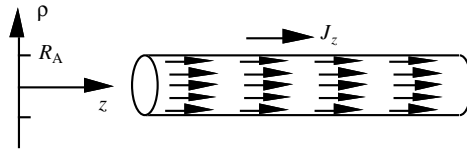


Fig. 11.8 Fil métallique parcouru par un courant.

L'équation de Maxwell (6.13) donne, tenant compte du fait que le courant n'a qu'une composante selon l'axe z ,

$$\nabla \times \mathbf{H}(\rho) \Big|_z = \frac{1}{\rho} \frac{d[\rho H_\phi(\rho)]}{d\rho} = J_z(\rho) \quad [\text{A/m}^2] \quad (11.36)$$

La densité de courant est constante dans le conducteur, où elle vaut $I/\pi R_A^2$, et elle est nulle en dehors du conducteur. On multiplie de part et d'autre par ρ , on intègre, puis on divise par ρ , ce qui donne la relation

$$H_\phi(\rho) = \frac{\rho}{2} J_z + \frac{\text{cste}}{\rho} \quad [\text{A/m}] \quad (11.37)$$

On doit considérer séparément les deux régions: l'intérieur et l'extérieur du fil conducteur. Au centre du fil, le champ ne peut pas devenir infini, de sorte que la constante dans (11.38) pour la région interne est nulle. En dehors du fil, aucun courant ne circule, et dans ce cas le premier terme de (11.38) pour la région externe est nul. En l'absence de courants de surface aux bords du conducteur, le champ magnétique tangential est constant et on obtient donc les valeurs de champs suivantes

$$H_\phi(\rho \leq R_A) = \frac{I\rho}{2\pi R_A^2} \quad \text{et} \quad H_\phi(\rho \geq R_A) = \frac{I}{2\pi\rho} \quad [\text{A/m}] \quad (11.38)$$

L'allure du champ magnétique est représentée dans la figure 11.9.

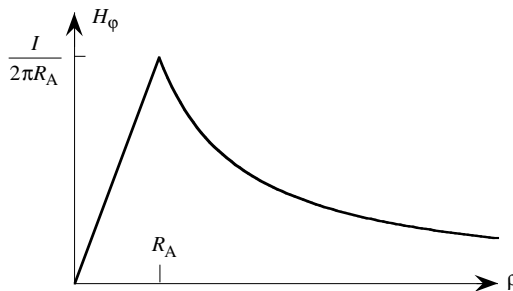


Fig. 11.9 Champ magnétique dans et autour d'un fil métallique cylindrique.

Le champ magnétique tend vers zéro à l'infini, car le courant total est borné. La distribution du champ en dehors du conducteur est indépendante du rayon R_A : le même champ serait produit si tout le courant I était concentré dans l'axe central du conducteur. On obtient le même champ à l'extérieur lorsqu'une densité de courant de surface $J_s = e_z I/2\pi R_A$ circule sur le pourtour du conducteur.

11.2.3 Champ magnétique dans une ligne coaxiale

On considère la ligne coaxiale de la figure 11.6, dans laquelle le courant I circule dans le conducteur central, de rayon R_A , tandis que le courant $-I$ circule dans le tube extérieur, entre les rayons R_B et R_D . Dans le conducteur extérieur et dans la région entre les deux conducteurs, le champ magnétique est donné par les relations (11.39). Dans le tube et à l'extérieur de la ligne, on a aussi des solutions de la forme (11.38), dans lesquelles il faut introduire les valeurs adéquates de la densité de courant et imposer la continuité du champ sur les surfaces de séparation.

Dans le conducteur tubulaire extérieur, le courant $-I$ se répartit uniformément sur la section droite, ce qui donne la densité de courant

$$\mathbf{J} = e_z \frac{-I}{\pi(R_D^2 - R_B^2)} \quad [\text{A/m}^2] \quad (11.39)$$

On introduit cette valeur dans (11.37) et on tient compte de la continuité du champ magnétique pour déterminer la constante, ce qui donne

$$H_\phi(R_B \leq \rho \leq R_D) = \frac{-I\rho}{2\pi(R_D^2 - R_B^2)} + \frac{\text{cste}}{\rho} = \frac{I}{2\pi\rho} \frac{R_D^2 - \rho^2}{R_D^2 - R_B^2} \quad [\text{A/m}] \quad (11.40)$$

En $\rho = R_D$ le champ magnétique est nul, ce qui entraîne que

$$H_\phi(\rho \geq R_D) = 0 \quad [\text{A/m}] \quad (11.41)$$

Ce résultat est dû au fait que le courant total qui circule à l'intérieur du cercle de rayon R_D est nul. L'allure du champ dans les quatre régions de la ligne coaxiale est présentée dans la figure 11.10.

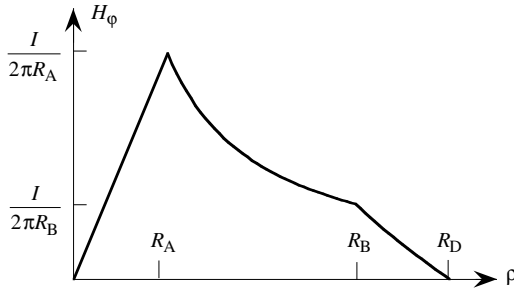


Fig. 11.10 Champ magnétique dans une ligne coaxiale.

Il est important de bien noter ici que la ligne coaxiale a dû être décomposée en quatre régions distinctes, et que dans chacune d'elles le champ magnétique a une dépendance radiale différente. La solution générale du problème est obtenue en (11.38), mais ensuite les distributions de courant dans chaque région sont différentes, et des constantes d'intégration différentes doivent être choisies pour satisfaire les conditions de continuité aux interfaces entre les régions.

Dans tous les problèmes de ce type, qui comportent plusieurs régions ayant des propriétés différentes, on ne peut pas obtenir une relation unique qui permette de définir le champ dans toute la structure.

11.2.4 Distribution de courant dans un cylindre métallique circulaire

Lorsque la fréquence du signal augmente, le courant qui circule dans un conducteur métallique se concentre près des surfaces, par effet de peau [67] (§ 11.1.6). Dans le domaine fréquentiel, avec la notation des vecteurs phaseurs (§ 6.7.1), on obtient l'équation (11.26) pour la densité de courant dans le conducteur, lorsque $\sigma \gg \omega \epsilon$.

On considère ici le fil métallique circulaire de la figure 11.4 et on suppose que le courant est uniforme à la surface extérieure du conducteur $\underline{J}_z(R_A) = \underline{J}_A$. Le problème est unidimensionnel en coordonnées polaires, fonction de la seule coordonnée ρ

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\underline{J}_z(\rho)}{d\rho} \right) - j\omega\mu\sigma \underline{J}_z(\rho) \equiv 0 \quad [\text{A/m}^4] \quad (11.42)$$

Il s'agit d'une équation différentielle de Bessel, dont les solutions sont les équations de Bessel d'ordre zéro de première espèce J_0 et de seconde espèce N_0 . Mais comme cette dernière fonction est singulière à l'origine, elle ne peut pas être une solution du problème. Tenant compte de la valeur du courant à la surface, on trouve le courant dans le fil

$$\underline{J}_z(\rho) = \underline{J}_A \frac{J_0(\sqrt{-j\omega\mu\sigma}\rho)}{J_0(\sqrt{-j\omega\mu\sigma}R_A)} = \underline{J}_A \frac{J_0(\sqrt{-j2}\rho/\delta)}{J_0(\sqrt{-j2}R_A/\delta)} \quad [\text{A/m}^2] \quad (11.43)$$

où $\delta = \sqrt{2/\omega\mu\sigma}$ est la profondeur de pénétration dans le métal (7.39). On peut ici introduire les fonctions ber et bei, définies par

$$J_0(\sqrt{-j}u) = \text{ber}(u) + j\text{bei}(u) \quad [-] \quad (11.44)$$

En termes de ces fonctions, la relation (11.43) prend la forme

$$\underline{J}_z(\rho) = \underline{J}_A \frac{\text{ber}(\sqrt{2}\rho/\delta) + j\text{bei}(\sqrt{2}\rho/\delta)}{\text{ber}(\sqrt{2}R_A/\delta) + j\text{bei}(\sqrt{2}R_A/\delta)} \quad [\text{A/m}^2] \quad (11.45)$$

L'amplitude de la densité de courant dans un conducteur métallique est représentée à la figure 11.11 pour plusieurs valeurs du quotient R_A/δ .

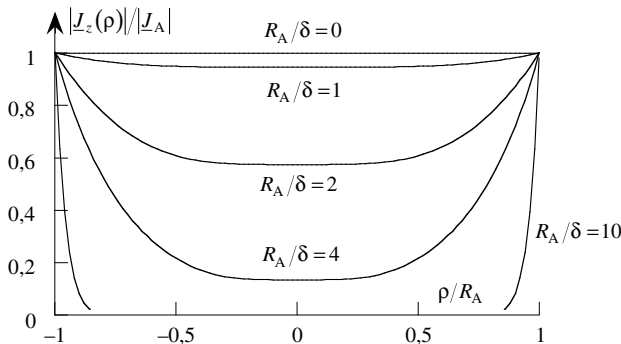


Fig. 11.11 Distribution du courant dans un fil conducteur en fonction de R_A/δ .

Le courant est uniformément distribué à fréquence nulle ($R_A/\delta = 0$) et se concentre progressivement à la surface du conducteur quand la fréquence augmente. Aux plus hautes fréquences, le courant ne circule pratiquement que dans une couronne d'épaisseur δ .

11.3 SÉPARATION DE VARIABLES EN COORDONNÉES CARTÉSIENNES

11.3.1 Principe de la méthode

Lorsque les conditions aux limites sont spécifiées sur des plans parallèles ou orthogonaux, le système de coordonnées cartésiennes est le plus adéquat pour exprimer ces conditions et obtenir une solution du problème. L'équation de Laplace prend la forme

$$\nabla^2 V(x, y, z) = \frac{\partial^2 V(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V(x, y, z)}{\partial z^2} = 0 \quad [\text{V/m}^2] \quad (11.46)$$

On suppose que le potentiel est le produit de trois fonctions [100]

$$V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad [\text{V/m}] \quad (11.47)$$

Introduisant ce développement dans (11.46) et divisant par le potentiel $V(x, y, z)$, on trouve

$$\frac{\nabla^2 V(x, y, z)}{V(x, y, z)} = \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0 \quad [\text{m}^{-2}] \quad (11.48)$$

On a ici une somme de trois termes, le premier fonction de la coordonnée x seulement, le deuxième de y et le troisième de z . Cette relation ne peut être satisfaite de façon non triviale que si chacun des trois termes est constant [100]

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = k_x^2 \quad \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = k_y^2 \quad \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = k_z^2 \quad [\text{m}^{-2}] \quad (11.49)$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0 \quad [\text{m}^{-2}] \quad (11.50)$$

On a ainsi remplacé une équation aux dérivées partielles par trois équations différentielles linéaires à coefficients constants. Trois solutions sont possibles, dépendant de la constante de séparation – on considère dans ce qui suit la relation en x , étant bien entendu que les solutions ont la même forme pour les deux autres équations

- si $k_x^2 > 0$ $X(x) = A_1 e^{k_x x} + A_2 e^{-k_x x} = A_3 \sinh(k_x x) + A_4 \cosh(k_x x)$
- si $k_x^2 = 0$ $X(x) = A_1 x + A_2$ (11.51)
- si $k_x^2 < 0$ $X(x) = A_1 e^{\underline{k}_x x} + A_2 e^{-\underline{k}_x x} = A_3 \sin(|\underline{k}_x| x) + A_4 \cos(|\underline{k}_x| x)$

On a introduit les constantes d'intégration A_i dans les solutions pour $X(x)$. On résout similairement les équations différentielles pour $Y(y)$ et $Z(z)$ et on obtient des solutions de la même forme (11.51), dans lesquelles on introduit des constantes B_i pour les fonctions de y et C_i pour les fonctions de z .

Les valeurs respectives de k_x , k_y et k_z dépendent des conditions que le produit des trois fonctions $X(x)$, $Y(y)$ et $Z(z)$ doit satisfaire aux bords du domaine considéré.

La méthode de la séparation de variables, introduite pour remplacer un problème à plusieurs dimensions par des problèmes unidimensionnels, est utilisable pour l'équation de Laplace et l'équation d'onde (chap. 8) dans des systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques circulaires et sphériques – et quelques autres systèmes d'usage moins courant.

11.3.2 Distribution du potentiel dans un rectangle – premier exemple

On considère ici le rectangle de la figure 11.12, sur deux côtés duquel le potentiel est nul, tandis que sur les deux autres côtés il est proportionnel à une coordonnée. On considère un problème à deux dimensions, le potentiel ne dépendant pas de la variable z .

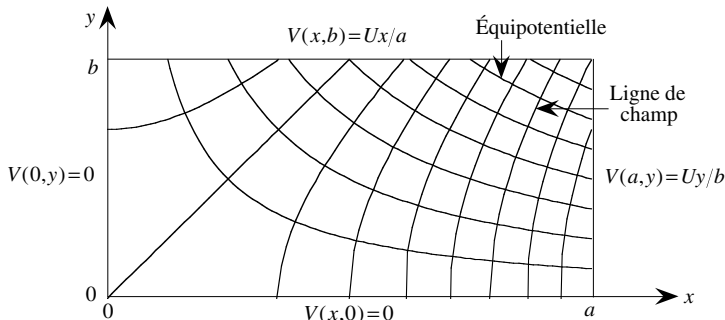


Fig. 11.12 Rectangle avec dépendance linéaire du potentiel sur deux côtés.

Du fait de la dépendance linéaire, on choisit parmi les solutions (11.51) celle qui convient le mieux, à savoir

$$V(x,y) = (A_1x + A_2)(B_1y + B_2)C_2 = A_1B_1C_2xy + A_1B_2C_2x + A_2B_1C_2y + A_2B_2C_2 \quad [V] \quad (11.52)$$

En $x = 0$, le potentiel s'annule et on doit donc avoir

$$V(0,y) = A_2B_1C_2y + A_2B_2C_2 = 0 \quad \text{et donc} \quad A_2B_1C_2 = 0 \quad \text{et} \quad A_2B_2C_2 = 0$$

Il faut noter que les conditions portent sur des produits de constantes et qu'on ne peut en général pas déterminer séparément les valeurs de chaque constante. On obtient de même sur le côté $y = 0$

$$V(x,0) = A_1B_2C_2x + A_2B_2C_2 = 0 \quad \text{et donc} \quad A_1B_2C_2 = 0 \quad \text{et} \quad A_2B_2C_2 = 0$$

Il ne reste donc que le premier terme de (11.52) qui soit non nul et, appliquant les conditions aux limites sur les deux côtés $x = a$ et $y = b$, on trouve

$$V(x,y) = A_1B_1C_2xy = Uxy/ab \quad [V] \quad (11.53)$$

Les équipotentielles sont les surfaces $xy = \text{cste}$, dont les traces dans le plan xy sont des hyperboles équilatères (fig. 11.12). Le champ électrique est obtenu en prenant le gradient du potentiel

$$\mathbf{E}(x,y) = -\nabla V(x,y) = -\mathbf{e}_x Uy/ab - \mathbf{e}_y Ux/ab \quad [V/m] \quad (11.54)$$

La composante selon x du champ électrique est proportionnelle à l'ordonnée y , tandis que la composante selon y est proportionnelle à l'abscisse x . Les lignes de champ sont aussi des hyperboles équilatères, tournées de 45° par rapport aux équipotentielles.

En magnétostatique, en vue de focaliser des faisceaux de particules [101], on souhaite que le champ magnétique $\mathbf{H}(x,y)$ possède précisément cette dépendance : on obtient ce résultat en façonnant les faces des pièces polaires magnétiques en forme d'hyperboles équilatères (§ 6.1.9).

11.3.3 Distribution du potentiel dans un rectangle – deuxième exemple

On considère ici le rectangle de la figure 11.13, sur trois côtés duquel le potentiel est nul, avec une dépendance sinusoïdale de la coordonnée sur le quatrième côté. On considère, ici aussi, un problème à deux dimensions.

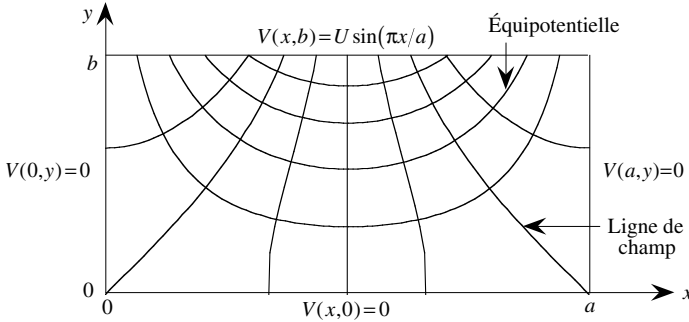


Fig. 11.13 Équipotentiellles dans un rectangle avec variation sinusoïdale du potentiel sur la face supérieure.

On constate que, dans cette géométrie, le potentiel s'annule sur les deux côtés verticaux, et par conséquent la dépendance selon x doit être sinusoïdale – il n'est en effet pas possible d'obtenir une fonction hyperbolique ou linéaire qui passe deux fois par zéro. On doit choisir $\underline{k}_x^2 < 0$ et, comme la somme des trois carrés est nulle et qu'il n'y a pas de dépendance en z , on doit avoir $k_y^2 = -\underline{k}_x^2 > 0$. Le potentiel prend donc la forme

$$V(x, y) = [A_3 \sin(k_y x) + A_4 \cos(k_y x)] [B_3 \sinh(k_y y) + B_4 \cosh(k_y y)] C_2 \quad (11.55)$$

Pour que le potentiel s'annule sur les côtés en $x = 0$ et en $y = 0$, il faut que $A_4 = 0$ et $B_4 = 0$, de sorte qu'il ne reste qu'un seul terme non nul

$$V(x, y) = A_3 B_3 C_2 \sin(k_y x) \sinh(k_y y) \quad [V] \quad (11.56)$$

Ici également, il n'est pas possible de déterminer les valeurs individuelles des trois constantes, mais seulement leur produit. Pour satisfaire la condition limite en $x = a$, il faut

$$\sin(k_y a) = 0 \quad \text{et donc} \quad k_y a = m\pi \quad [-] \quad (11.57)$$

où m est un nombre entier différent de zéro, et le potentiel prend donc la forme

$$V(x, y) = K_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \quad [V] \quad (11.58)$$

où on a regroupé les constantes. La condition sur le quatrième côté a la même dépendance et, en identifiant, on obtient la relation pour le potentiel

$$V(x, y) = U \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{\pi y}{a}\right) / \sinh\left(\frac{\pi b}{a}\right) \quad [V] \quad (11.59)$$

Le champ électrique est alors obtenu en prenant le gradient

$$\mathbf{E}(x, y) = \frac{-\pi U/a}{\sinh(\pi b/a)} \left[\mathbf{e}_x \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \mathbf{e}_y \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cosh\left(\frac{\pi y}{a}\right) \right] \quad [V/m] \quad (11.60)$$

11.3.4 Distribution du potentiel dans un rectangle – troisième exemple

Dans le rectangle de la figure 11.14 le potentiel est également nul sur trois côtés, mais il est constant sur le quatrième.

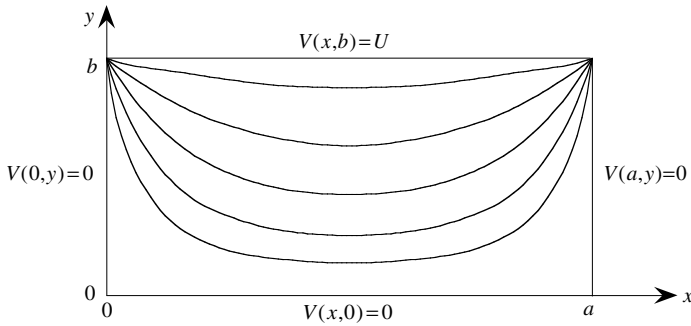


Fig. 11.14 Équipotentiellles dans un rectangle avec des potentiels constants sur les quatre côtés.

Faisant les mêmes constatations que dans la section précédente, on effectue les mêmes développements, jusqu'à la relation (11.58) incluse. Toutefois, lorsque l'on introduit cette relation dans la condition sur le côté $y = b$, on se heurte à une impossibilité,

$$V(x, b) = K_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{m\pi b}{a}\right) \neq U \quad [V] \tag{11.61}$$

Il n'est en effet pas possible d'identifier une fonction d'une coordonnée avec une constante – à moins que toutes deux soient nulles. Dans le cas présent, le nombre entier m peut prendre beaucoup de valeurs différentes et, s'il n'est pas possible de satisfaire la condition avec une seule d'entre elles, rien n'empêche de chercher à le faire avec une superposition de solutions. On pose donc

$$V(x, b) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{m\pi b}{a}\right) = U \quad [V] \tag{11.62}$$

On identifie les constantes en utilisant l'orthogonalité des fonctions sinusoïdales [20]

$$\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \begin{cases} a/2 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases} \quad [m] \tag{11.63}$$

On multiplie (11.62) de part et d'autre par $\sin(n\pi x/a)$, puis on intègre entre 0 et a

$$K_m \left(\frac{a}{2}\right) \sinh\left(\frac{m\pi b}{a}\right) = U \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx = -\frac{Ua}{m\pi} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \Big|_0^a = \begin{cases} 2Ua/m\pi & \text{si } m \text{ impair} \\ 0 & \text{si } m \text{ pair} \end{cases} \quad [Vm] \tag{11.64}$$

Explicitant K_m et introduisant la valeur obtenue dans (11.62), on obtient le potentiel

$$V(x, y) = \frac{4U}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{\sinh(m\pi y/a)}{\sinh(m\pi b/a)} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad [V] \tag{11.65}$$

La relation obtenue comporte le développement en série de Fourier de la fonction en créneau, et on doit avoir recours à une série infinie parce que le potentiel est discontinu sur le contour du rectangle.

Le champ électrique est donné par le gradient de (11.65)

$$E(x, y) = \frac{4U}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \left[e_x \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \frac{\sinh(m\pi y/a)}{\sinh(m\pi b/a)} - e_y \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \frac{\cosh(m\pi y/a)}{\sinh(m\pi b/a)} \right] \quad [\text{V/m}] \quad (11.66)$$

En pratique, on ne peut pas déterminer exactement la somme d'une série infinie. On en détermine une valeur approchée, en tronquant la série lorsque le dernier terme calculé est inférieur à une borne préalablement fixée. La série qui donne le potentiel (11.65) converge rapidement, mais celle pour le champ électrique (11.66) a une convergence moins rapide, du fait de la disparition du facteur $1/m$. Elle diverge même aux deux points $(0, b)$ et (a, b) , où le potentiel est discontinu. Cela signifie que le modèle mathématique utilisé ne représente qu'imparfaitement la réalité, parce qu'il faut prévoir un espace entre les conducteurs pour pouvoir les isoler.

Lorsque le potentiel spécifié sur les frontières du rectangle n'a pas une dépendance linéaire, trigonométrique ou hyperbolique, on peut le décomposer en une somme de fonctions pour chacune desquelles la solution est connue, et superposer les solutions. Il faut toutefois prendre des précautions, afin de ne pas remplacer un problème simple par plusieurs problèmes compliqués.

11.3.5 Mode TM dans un guide d'ondes rectangulaire

En hyperfréquences, on utilise des tuyaux rectangulaires appelés guides d'ondes pour transmettre des signaux, et l'étude des champs montre que pour les modes transverses magnétiques (TM, sect. XIII.2.3), le potentiel transverse $\Phi(x, y)$ est la solution d'une équation d'onde en deux dimensions

$$\nabla_{\perp}^2 \Phi(x, y) + p^2 \Phi(x, y) = \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} + p^2 \Phi(x, y) = 0 \quad [\text{m}^{-2}] \quad (11.67)$$

Cette équation est similaire à l'équation de Laplace (11.46), avec le dernier terme en plus. On utilise également la séparation de variables et la relation (11.50) est remplacée par

$$k_x^2 + k_y^2 + p^2 = 0 \quad [\text{m}^{-2}] \quad (11.68)$$

Les deux premiers termes peuvent tous deux être négatifs, de sorte qu'on peut avoir une double dépendance sinusoïdale en x et en y (11.51).

La condition sur les parois du guide d'ondes, en métal supposé parfaitement conducteur, impose que le potentiel transverse soit nul. Or seules des solutions trigonométriques peuvent s'annuler pour plusieurs valeurs de leur argument (§ 11.3.3) et on doit avoir

$$\Phi(x, y) = [A_3 \sin(k_x |x) + A_4 \cos(k_x |x)] [B_3 \sin(k_y |y) + B_4 \cos(k_y |y)] C_2 \quad (11.69)$$

Cette fonction doit être nulle en $x = 0$ et en $y = 0$, et les cosinus doivent disparaître

$$\Phi(x, y) = A_3 B_3 C_2 \sin(k_x |x) \sin(k_y |y) \quad [-] \quad (11.70)$$

Quant aux conditions sur les côtés en $x = a$ et en $y = b$, elles spécifient les valeurs des paramètres k_x et k_y et on obtient donc

$$\underline{\Phi}_{mn}(x, y) = \underline{K}_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad [-] \quad (11.71)$$

Les deux nombres entiers m et n doivent être tous deux non nuls. On obtient une double infinité de solutions, que l'on appelle les modes TM_{mn} du guide d'ondes. Les équipotentielles et les lignes de plus forte pente pour le mode TM_{11} sont représentées à la figure 11.15 [102].

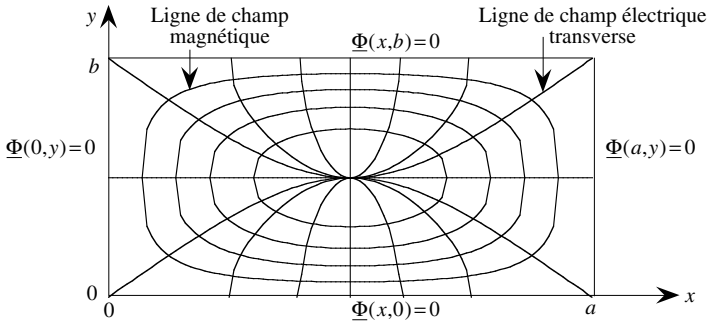


Fig. 11.15 Potentiel transverse du mode TM_{11} dans un guide rectangulaire.

Une analyse plus détaillée (sect. XIII.2.3) montre que les équipotentielles sont en fait les lignes de champ magnétique, tandis que les courbes de plus forte pente sont les lignes de champ électrique transverse. Le potentiel transverse $\underline{\Phi}(x, y)$ est lui-même proportionnel au champ électrique longitudinal.

On obtient le nombre d'ondes transverse p_{mn} avec la relation (11.68)

$$p_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad [\text{m}^{-1}] \quad (11.72)$$

La fréquence de coupure du mode TM_{mn} est donnée par (3.50)

$$f_{mn} = \frac{p_{mn}c}{2\pi} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad [\text{Hz}] \quad (11.73)$$

où c est la vitesse de propagation d'une onde électromagnétique dans le milieu qui remplit le guide (le plus souvent de l'air).

11.3.6 Constatation

Les quatre exemples présentés dans les paragraphes qui précèdent considèrent tous une géométrie rectangulaire, dans trois d'entre eux avec une solution de l'équation de Laplace, dans la quatrième une solution d'une équation d'onde. Comparant les figures des potentiels et des champs, on note l'importance jouée par les conditions aux limites, qui définissent l'allure de la solution à l'intérieur – ce sont en quelque sorte les sources du potentiel et des champs.

11.4 SÉPARATION DE VARIABLES EN COORDONNÉES CYLINDRIQUES

11.4.1 Principe de la méthode

Lorsque les conditions aux limites sont spécifiées sur des cylindres circulaires ou sur des plans faisant un angle entre eux, c'est dans le système de coordonnées cylindriques circulaires (fig. 11.16) qu'on peut exprimer ces conditions en vue d'obtenir une solution.

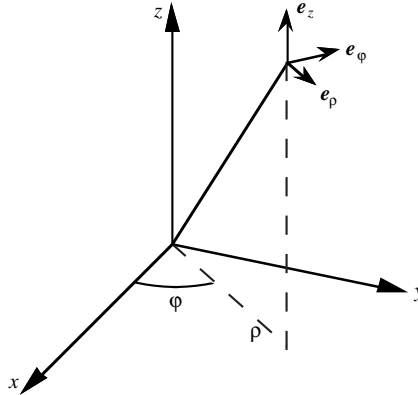


Fig. 11.16 Système de coordonnées cylindriques circulaires.

L'équation de Laplace prend la forme (14.25)

$$\nabla^2 V(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V(\rho, \varphi, z)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V(\rho, \varphi, z)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V(\rho, \varphi, z)}{\partial z^2} = 0$$

[V/m²] (11.74)

On admet, comme dans la section 11.3, que le potentiel est le produit de trois fonctions

$$V(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z) \quad [\text{V/m}] \quad (11.75)$$

Introduisant ce développement dans (11.74) et divisant par $V(\rho, \varphi, z)$, on obtient

$$\frac{\nabla^2 V(\rho, \varphi, z)}{V(\rho, \varphi, z)} = \frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0$$

[V/m²] (11.76)

Le dernier terme ne dépend que de z , tandis que les deux précédents termes sont fonctions de ρ et de φ . Pour que le problème ait une solution non triviale, il faut que le dernier terme et la somme des deux précédents soient tous deux égaux à des constantes, qu'on appelle respectivement T^2 et $-T^2$ [100]. L'équation différentielle pour $Z(z)$ prend alors la forme

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = T^2 Z(z) \quad [\text{V/m}^2] \quad (11.77)$$

C'est une équation différentielle de second ordre à coefficients constants.

Trois solutions sont possibles, dépendant de la valeur de T^2

- si $T^2 > 0$ $Z(z) = C_1 e^{Tz} + C_2 e^{-Tz} = C_3 \sinh(Tz) + C_4 \cosh(Tz)$
- si $T^2 = 0$ $Z(z) = C_1 z + C_2$ (11.78)
- si $T^2 < 0$ $Z(z) = C_1 e^{\underline{T}z} + C_2 e^{-\underline{T}z} = C_3 \sin(|\underline{T}|z) + C_4 \cos(|\underline{T}|z)$

On multiplie par ρ^2 les termes en ρ et en φ de l'équation (11.76)

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + T^2 \rho^2 + \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = 0 \quad (11.79)$$

Les deux premiers termes ne dépendent que de ρ , le troisième que de φ : ils doivent donc être constants, et on les pose égaux à $\pm n^2$. La dépendance azimutale est donnée par

$$\frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -n^2 \Phi(\varphi) \quad (11.80)$$

Ici également, on rencontre trois possibilités

- si $n^2 > 0$ $\Phi(\varphi) = B_1 \sin(n\varphi) + B_2 \cos(n\varphi)$
- si $n^2 = 0$ $\Phi(\varphi) = B_1 \varphi + B_2$ (11.81)
- si $n^2 < 0$ $\Phi(\varphi) = B_1 \sinh(|\underline{n}|\varphi) + B_2 \cosh(|\underline{n}|\varphi)$

L'équation différentielle en ρ prend la forme

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \left(T^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) R(\rho) = \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \left(T^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0 \quad (11.82)$$

On a ici 4 possibilités, qui dépendant des valeurs prises par les deux coefficients de séparation T et de n

- si $T = 0$ et $n^2 = 0$ $R(\rho) = A_1 \ln(\rho) + A_2 \rho$
- si $T = 0$ et $n^2 \neq 0$ $R(\rho) = A_1 \rho^n + A_2 \rho^{-n}$
- si $T^2 > 0$ $R(\rho) = A_1 J_n(T\rho) + A_2 N_n(T\rho)$
- si $T^2 < 0$ $R(\rho) = A_1 I_n(|\underline{T}|\rho) + A_2 K_n(|\underline{T}|\rho)$ (11.83)

où $J_n(T\rho)$ et $N_n(T\rho)$ sont respectivement les fonctions de Bessel (sect. 14.3) de première et de seconde espèce, tandis que $I_n(|\underline{T}|\rho)$ et $K_n(|\underline{T}|\rho)$ représentent les fonctions de Bessel modifiées (ou fonctions de Bessel d'argument imaginaire) [103]. Les valeurs de T et de n sont déterminées par la géométrie du problème.

La solution comporte également six constantes d'intégration A_i , B_i , et C_i , qu'il s'agira de déterminer en fonction des valeurs imposées pour le potentiel sur le bord du domaine considéré (données du problème).

11.4.2 Potentiel dans un tube métallique

On considère un tube métallique, en conducteur électrique parfait (cep), de rayon a et de longueur b , dont une extrémité, en $z=0$, est fermée par une plaque métallique (cep) tandis qu'on applique un potentiel ayant une dépendance purement radiale à l'autre extrémité (fig. 11.17). Les conditions à satisfaire sur les surfaces du cylindre valent donc $V(\rho, \varphi, z=0) = 0$, $V(\rho = a, \varphi, z) = 0$ et $V(\rho, \varphi, z = b) = f(\rho)$.

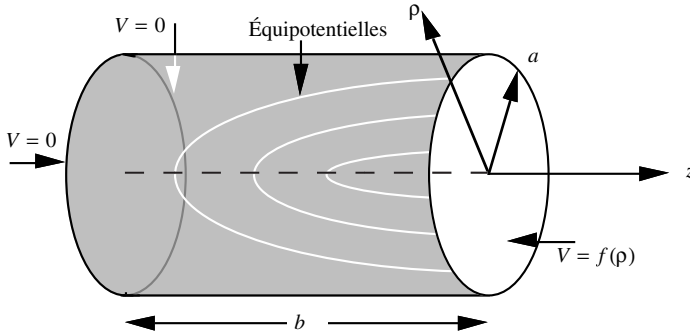


Fig. 11.17 Tube métallique de longueur finie court-circuité à une extrémité.

La structure et les conditions aux limites sont axialement symétriques, de sorte que $n=0$ et $B_1=0$. Le potentiel ne peut pas être singulier dans l'axe et la condition en $\rho = a$ n'est satisfaite que si $T^2 > 0$. La dépendance radiale comporte des fonctions de Bessel de première espèce (celles de seconde espèce sont infinies en $\rho = 0$), et on a par conséquent

$$V(\rho, z) = B_2 \sum_k A_k C_k J_0(T_k \rho) \sinh(T_k z) \quad [V] \quad (11.84)$$

avec $J_0(T_k a) = 0$, ce qui donne $T_1 = 2,405/a$, $T_2 = 5,521/a$, $T_3 = 8,654/a$, etc. La condition limite dans l'ouverture en $z = b$ requiert que

$$V(\rho, b) = B_2 \sum_k A_k C_k J_0(T_k \rho) \sinh(T_k b) = f(\rho) \quad [V] \quad (11.85)$$

On détermine les valeurs des coefficients $B_2 A_k C_k$ en faisant usage des propriétés d'orthogonalité des fonctions de Bessel [103], de la même manière qu'au paragraphe 11.3.4 pour les fonctions trigonométriques dans le problème rectangulaire

$$B_2 A_k C_k = \frac{1}{\sinh(T_k b)} \frac{\int_0^a f(\rho) J_0(T_k \rho) \rho d\rho}{\int_0^a J_0^2(T_k \rho) \rho d\rho} \quad [V] \quad (11.86)$$

Les termes supérieurs de la série ($k \gg 1$) décroissent rapidement quand on s'écarte de l'ouverture en $z = b$, et près de l'autre extrémité seul le premier terme de la série est significatif – pour autant qu'il soit non nul. Cette information peut s'avérer suffisante lorsque l'on fait usage d'un tuyau métallique pour blinder un circuit, c'est-à-dire pour le soustraire à l'effet de perturbations provenant de l'extérieur [104].

11.4.3 Potentiel et champ autour d'un cylindre diélectrique

On désire connaître l'effet produit par l'introduction d'un cylindre diélectrique dans un champ électrique uniforme et dirigé perpendiculairement à son axe (fig. 11.18). Avant l'introduction du diélectrique, le champ homogène a la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_x E_0 = -\nabla V(x) \quad [\text{V/m}] \quad (11.87)$$

Le potentiel $V(x)$ est obtenu par intégration

$$V(x) = -E_0 x + \text{cste} \quad [\text{V}] \quad (11.88)$$

Pour ne pas compliquer inutilement les développements, on pose que $\text{cste} = 0$.

On introduit alors le cylindre de diélectrique, disposant son axe le long de l'axe z . Il a un rayon a et sa permittivité relative est $\epsilon_r > 1$. On admet par ailleurs que le milieu environnant est de l'air, avec une permittivité relative de 1.

On doit considérer séparément les deux régions, à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre, puis appliquer les conditions aux limites à la surface du cylindre, en $\rho = a$. Pour ce faire, on doit traiter le problème en coordonnées cylindriques circulaires. En l'absence de charges de surface, les conditions à satisfaire en $\rho = a$ sont données par

$$V_a(a) = V_d(a) \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial V_a}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} = \epsilon_r \left. \frac{\partial V_d}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} \quad (11.89)$$

où les indices a et d indiquent la région: air ou diélectrique. À très grande distance du cylindre, la perturbation produite par son introduction s'estompe, de sorte qu'à l'infini le potentiel dans l'air conserve sa valeur originale, à savoir

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} V_a(\rho, \varphi) = -E_0 x = -E_0 \rho \cos \varphi \quad [\text{V}] \quad (11.90)$$

Par ailleurs, le potentiel doit rester borné au centre du cylindre, car il n'y a pas de charges dans le diélectrique. Le problème ne dépend pas de la variable z , et par conséquent $T = 0$, et la solution est périodique en φ , c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$V(\rho, \varphi + 2k\pi) = V(\rho, \varphi) \quad [\text{V}] \quad (11.91)$$

ce qui implique que n est un nombre entier. Les solutions ont donc la forme

$$V(\rho, \varphi) = [A_1 \rho^n + A_2 \rho^{-n}] [B_1 \sin(n\varphi) + B_2 \cos(n\varphi)] C_2 \quad [\text{V}] \quad (11.92)$$

La condition (11.90) impose une dépendance en cosinus ($B_1 = 0$) avec $n = 1$

$$V(\rho, \varphi) = [A_1 \rho + A_2 \rho^{-1}] B_2 C_2 \cos \varphi \quad [\text{V}] \quad (11.93)$$

Dans le diélectrique on doit encore poser $A_2 = 0$ pour que le potentiel ne soit pas singulier dans l'axe, tandis que dans l'air la condition (11.90) requiert que $A_1 = -E_0$. Les constantes qui restent sont obtenues à l'aide de (11.89) donnant, après quelques calculs,

$$V(\rho, \varphi) = -\frac{2E_0}{\epsilon_r + 1} \rho \cos \varphi = -\frac{2E_0}{\epsilon_r + 1} x \quad [\text{V}] \quad \rho \leq a \quad (11.94)$$

$$V(\rho, \varphi) = \left[\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \frac{a^2}{\rho} - \rho \right] E_0 \cos \varphi \quad [\text{V}] \quad \rho \geq a$$

On obtient le champ électrique en prenant le gradient

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(x) &= -\nabla V(x) = \mathbf{e}_x \frac{2E_0}{\varepsilon_r + 1} & [\text{V/m}] \quad \rho \leq a \\
 \mathbf{E}(\rho, \varphi) &= -\nabla V(\rho, \varphi) = \mathbf{e}_\rho \left[\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} \left(\frac{a}{\rho} \right)^2 + 1 \right] E_0 \cos \varphi + \mathbf{e}_\varphi \left[\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} \left(\frac{a}{\rho} \right)^2 - 1 \right] E_0 \sin \varphi \\
 & & [\text{V/m}] \quad \rho \geq a
 \end{aligned} \tag{11.95}$$

On constate que le champ électrique est homogène à l'intérieur du cylindre, et que son amplitude est plus faible que celle du champ original. Le champ électrique est maximal dans l'air en $\rho = a$, $\varphi = 0, \pi$, où il vaut $2E_0 \varepsilon_r / (\varepsilon_r + 1)$.

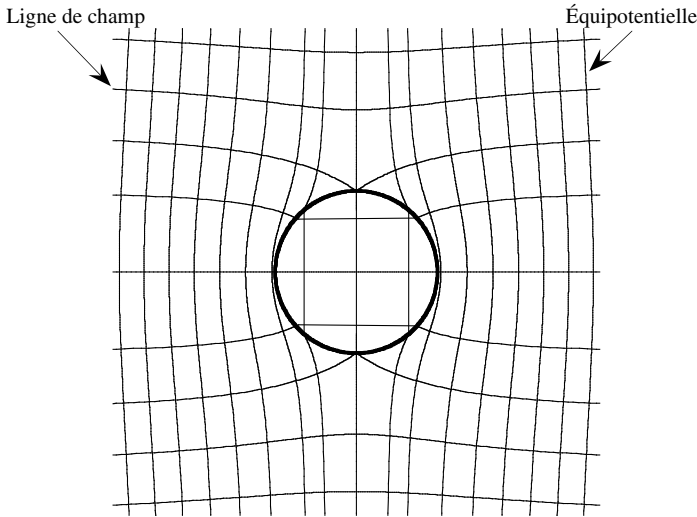


Fig. 11.18 Équipotentiels et lignes de champ autour d'un cylindre diélectrique placé dans un champ uniforme, pour le cas $\varepsilon_r = 3$.

11.4.4 Potentiel et champ autour d'un cylindre métallique

Quand on remplace le cylindre diélectrique par un cylindre parfaitement conducteur (cep), on pose $\varepsilon_r = \infty$ dans les relations de la section précédente. On trouve alors que le champ est nul dans le conducteur, et que le potentiel et le champ dans le milieu environnant prennent la forme

$$V(\rho, \varphi) = \left[\frac{a^2}{\rho} - \rho \right] E_0 \cos \varphi \quad [\text{V}] \tag{11.96}$$

$$\mathbf{E}(\rho, \varphi) = -\nabla V(\rho, \varphi) = \mathbf{e}_\rho \left[\left(\frac{a}{\rho} \right)^2 + 1 \right] E_0 \cos \varphi + \mathbf{e}_\varphi \left[\left(\frac{a}{\rho} \right)^2 - 1 \right] E_0 \sin \varphi \quad [\text{V/m}] \quad \rho \geq a \tag{11.97}$$

Le champ électrique est maximal en $\rho = a$, $\varphi = 0, \pi$, où il vaut $2E_0$.

11.4.5 Potentiel et champ dans une cavité résonnante

En hyperfréquences on utilise des boîtes métalliques fermées appelés cavités résonnantes pour spécifier ou mesurer la fréquence d'un signal (chap. XIII.2.3). On détermine les champs à l'intérieur en résolvant l'équation d'onde sans sources pour les vecteurs-phaseurs (6.76) en présence des conditions aux limites sur les parois de la cavité.

On considère une cavité cylindrique circulaire, ayant un rayon a et une longueur b (fig. 11.19) remplie d'un milieu homogène de permittivité ϵ .

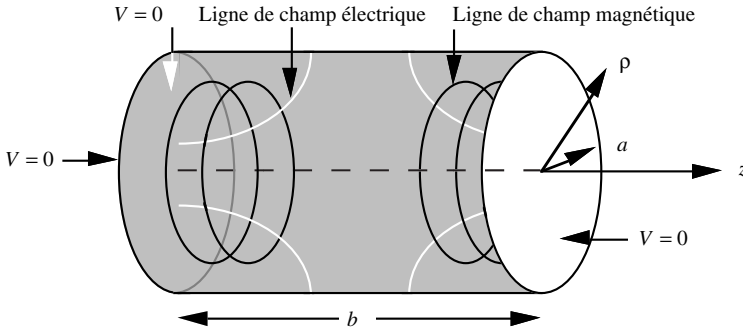


Fig. 11.19 Lignes de champ pour le mode TM_{011} dans une cavité cylindrique.

L'équation d'onde pour la composante longitudinale du champ électrique E_z prend la forme suivante, avec $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$,

$$\nabla^2 \underline{E}_z(\rho, \varphi, z) + k^2 \underline{E}_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \underline{E}_z(\rho, \varphi, z)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \underline{E}_z(\rho, \varphi, z)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_z(\rho, \varphi, z)}{\partial z^2} + k^2 \underline{E}_z = 0 \quad [\text{V/m}^3] \quad (11.98)$$

Cette relation est très similaire à l'équation de Laplace (11.74), avec un terme supplémentaire. On la résout en séparant les variables, et il faut seulement remplacer T^2 par $T^2 - k^2$ dans la relation pour $Z(z)$. Les conditions qu'il faut remplir aux bords sont ici

$$\left. \frac{\partial \underline{E}_z(\rho, \varphi, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \underline{E}_z(\rho = a, \varphi, z) = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial \underline{E}_z(\rho, \varphi, z)}{\partial z} \right|_{z=b} = 0.$$

Considérant un mode de résonance n'ayant pas de dépendance en φ , on trouve le champ longitudinal après quelques calculs

$$\underline{E}_z(\rho, z) = C_m J_0(T_m \rho) \cos\left(\sqrt{k^2 - T_m^2} z\right) = C_m J_0(T_m \rho) \cos\left(\frac{l\pi z}{b}\right) \quad [\text{V/m}] \quad (11.99)$$

avec $J_0(T_m a) = 0$, ce qui donne $T_1 = 2,405/a$, $T_2 = 5,521/a$, $T_3 = 8,654/a$, etc. Les termes m et l sont des nombres entiers positifs. On constate qu'on doit avoir

$$\sqrt{k^2 - T_m^2} = \frac{l\pi}{b} \quad [\text{m}^{-1}] \quad (11.100)$$

d'où l'on tire la fréquence de résonance du mode TM_{0ml} de la cavité [102]

$$f_{0ml}^{\text{TM}} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{T_m}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{l}{b}\right)^2} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{T_m}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{l}{b}\right)^2} \quad [\text{Hz}] \quad (11.101)$$

Les fréquences de résonance de quelques-uns des modes TM_{0ml} sont représentées à la figure 11.20, sous forme normalisée af en fonction du quotient du rayon a par la longueur b . En modifiant la longueur de la cavité, par exemple au moyen d'un piston mobile, on peut changer la fréquence de résonance des modes pour lesquels $l \neq 0$.

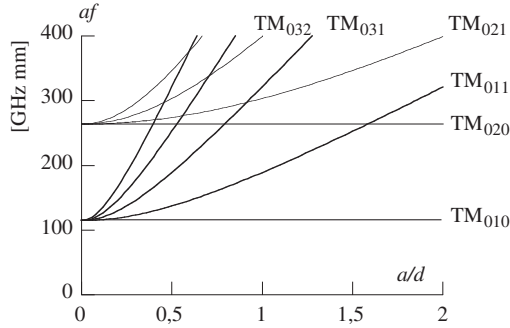


Fig. 11.20 Fréquences de résonance des modes TM_{0ml} dans une cavité cylindrique.

On détermine les autres composantes du champ électrique au moyen d'une équation de Maxwell en divergence (1.13)

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z} \left[C_m J_0(T_m \rho) \cos\left(\frac{l\pi z}{b}\right) \right] = 0 \quad [\text{V/m}^2] \quad (11.102)$$

On a choisi un mode dont les champs sont indépendants de la coordonnée azimutale, de sorte que la composante E_φ – si elle existe – serait totalement découplée des deux autres. On peut donc admettre qu'elle soit nulle, et après quelques calculs on obtient la composante radiale $E_\rho(\rho, z)$

$$E_\rho(\rho, z) = C_m T_m J_1(T_m \rho) \sin\left(\frac{l\pi z}{b}\right) \quad [\text{V/m}] \quad (11.103)$$

Le champ magnétique est alors donné par une équation de Maxwell en rotationnel (1.13), dont on ne conserve ici que les termes non nuls

$$\mathbf{H}(\rho, z) = \mathbf{e}_\rho[0] + \mathbf{e}_\varphi \left[\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right] + \mathbf{e}_z[0] \quad [\text{A/m}] \quad (11.104)$$

Le champ magnétique n'a qu'une composante azimutale $H_\varphi(\rho, z)$ que l'on obtient après quelques calculs

$$H_\varphi(\rho, z) = \frac{\omega \varepsilon b}{l\pi} C_m T_m J_1(T_m \rho) \cos\left(\frac{l\pi z}{b}\right) \quad [\text{A/m}] \quad (11.105)$$

On peut encore vérifier, en prenant le rotationnel du champ magnétique $\mathbf{H}(\rho, z)$, que la composante azimutale du champ électrique est effectivement nulle – conformément à ce qui a été supposé un peu plus haut.

11.5 SÉPARATION DE VARIABLES EN COORDONNÉES SPHÉRIQUES

11.5.1 Développement de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques

Lorsque les conditions aux limites sont spécifiées sur des surfaces sphériques ou des cônes, c'est le système de coordonnées sphériques (fig. 11.21) qui est le plus adéquat pour exprimer ces conditions en vue d'obtenir une solution.

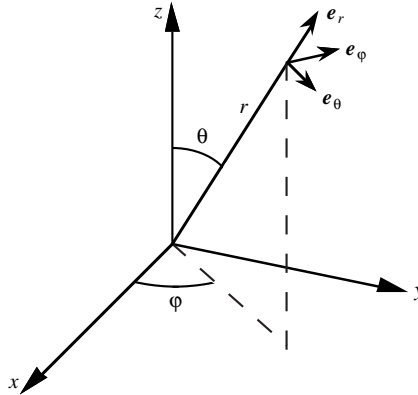


Fig. 11.21 Système de coordonnées sphériques.

En coordonnées sphériques, l'équation de Laplace prend une forme qui est particulièrement complexe (14.30)

$$\nabla^2 V(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V(r, \theta, \varphi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} = 0$$

[V/m²] (11.106)

On suppose qu'ici aussi le potentiel est le produit de trois fonctions

$$V(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \quad [\text{V/m}] \quad (11.107)$$

On introduit ce développement dans (11.106) et on multiplie par $r^2 \sin^2 \theta / V(r, \theta, \varphi)$

$$\frac{\nabla^2 V(r, \theta, \varphi)}{V(r, \theta, \varphi)} r^2 \sin^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = 0$$

[-] (11.108)

Les deux premiers termes dépendent de r et de θ , tandis que le troisième n'est fonction que de φ . Pour qu'on ait une solution non triviale, on peut séparer (11.108) en deux termes, qui doivent tous deux être constants, et qu'on pose égaux à $\pm n^2$ [100]. La dépendance azimutale est ainsi donnée par

$$\frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -n^2 \Phi(\varphi) \quad (11.109)$$

C'est en fait la même expression qu'en coordonnées cylindriques circulaires (11.81), et on a également trois possibilités

- si $n^2 > 0$ $\Phi(\varphi) = B_1 \sin(n\varphi) + B_2 \cos(n\varphi)$
- si $n^2 = 0$ $\Phi(\varphi) = B_1\varphi + B_2$ (11.110)
- si $n^2 < 0$ $\Phi(\varphi) = B_1 \sinh(|n|\varphi) + B_2 \cosh(|n|\varphi)$

Pour séparer les fonctions de r et de θ , on divise par $\sin^2 \theta$ les deux premiers termes de (11.108), ce qui donne

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta(\theta) \sin^2 \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin^2 \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) - \frac{n^2}{\sin^2 \theta} = 0 \quad [-] \quad (11.111)$$

Le premier terme n'est fonction que de r , les deux termes suivants ne sont fonction que de θ . On doit donc les poser tous deux égaux à des constantes.

L'équation différentielle en θ est satisfaite par les polynômes de Legendre [105] de première espèce $P_m^n(\cos \theta)$, pour autant que la constante de séparation ait la forme $-m(m+1)$. Les polynômes de seconde espèce satisfont également l'équation, mais comme ils deviennent singuliers lorsque $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, ils ne sont pas admissibles comme solutions. Les polynômes de Legendre de première espèce sont définis par la relation

$$P_m^n(u) = \frac{(1-u^2)^{n/2}}{2^m m!} \frac{d^{n+m}(u^2-1)}{du^{n+m}} \quad \text{avec} \quad u = \cos \theta \quad (11.112)$$

Les premiers polynômes de la série sont présentés dans le tableau 11.22 et leur allure est représentée graphiquement dans la figure 11.23.

Tableau 11.22 Polynômes de Legendre.

$P_0^0(\cos \theta) = 1$	$P_1^1(\cos \theta) = \sin \theta$
$P_1^0(\cos \theta) = \frac{1}{2} \frac{d(u^2-1)}{du} = u = \cos \theta$	$P_2^1(\cos \theta) = \frac{3}{2} \sin 2\theta$
$P_2^0(\cos \theta) = \frac{3}{4} \cos 2\theta + \frac{1}{4}$	
$P_3^0(\cos \theta) = \frac{5}{8} \cos 3\theta + \frac{3}{8} \cos \theta$	$P_m^n(\cos \theta) = 0$ si $m < n$

Il reste encore à résoudre l'équation différentielle en r

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) = m(m+1)R(r) \quad [-] \quad (11.113)$$

dont les solutions ont des dépendances radiales simples, comportant seulement des puissances de la coordonnée radiale r

$$R(r) = A_1 r^m + A_2 r^{-(m+1)} \quad (11.114)$$

Les valeurs de m et de n , ainsi que les constantes d'intégration, sont déterminées par les conditions qu'il faut satisfaire sur les bords du problème à résoudre.

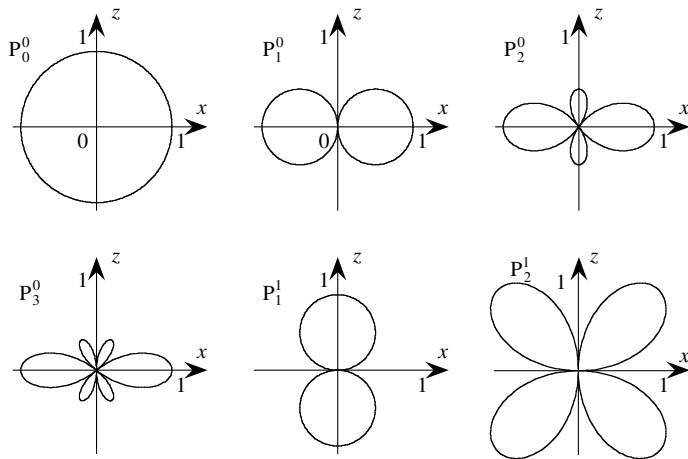


Fig. 11.23 Polynômes de Legendre.

11.5.2 Potentiel et champ dans une sphère

On veut connaître le potentiel et le champ à l’intérieur et à l’extérieur d’une sphère vide de rayon $r = a$, à la surface de laquelle le potentiel vaut $V(a) = U \sin \theta \cos \varphi$. La dépendance en θ correspond à un polynôme de Legendre, pour lequel $m = 1$ et $n = 1$. La dépendance en φ correspond également au cas $n = 1$. La solution générale a donc la forme

$$V(r, \theta, \varphi) = (A_1 r + A_2 r^{-2}) \sin \theta \cos \varphi \quad [V] \tag{11.115}$$

Le potentiel à l’intérieur ne peut pas devenir singulier, tandis qu’à l’extérieur il reste fini à grande distance. Le potentiel dans les deux régions s’obtient après quelques calculs

$$V(r \leq a, \theta, \varphi) = U \frac{r}{a} \sin \theta \cos \varphi = U \frac{x}{a} \quad \text{et} \quad V(r \geq a, \theta, \varphi) = U \frac{a^2}{r^2} \sin \theta \cos \varphi \quad [V] \tag{11.116}$$

Le champ électrique est obtenu en prenant le gradient du potentiel

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r < a, \theta, \varphi) &= -\frac{U}{a} [\mathbf{e}_r \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{e}_\theta \cos \theta \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin \varphi] = -\frac{U}{a} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{E}(r > a, \theta, \varphi) &= \frac{U a^2}{r^3} [\mathbf{e}_r 2 \sin \theta \cos \varphi - \mathbf{e}_\theta \cos \theta \cos \varphi + \mathbf{e}_\varphi \sin \varphi] \quad [V/m] \end{aligned} \tag{11.117}$$

On détermine alors la densité de charges sur la surface de la sphère

$$\begin{aligned} \rho_s(\theta, \varphi) &= \mathbf{n} \cdot [\mathbf{D}_1(r, \theta, \varphi) - \mathbf{D}_2(r, \theta, \varphi)] \Big|_{r=a} = [\varepsilon_1 E_{r1}(r, \theta, \varphi) - \varepsilon_2 E_{r2}(r, \theta, \varphi)] \Big|_{r=a} \\ &= \frac{U}{a} (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \sin \theta \cos \varphi \quad [As/m^2] \end{aligned} \tag{11.118}$$

où ε_1 est la permittivité à l’extérieur de la sphère et ε_2 la permittivité à l’intérieur.

11.5.3 Sphère diélectrique introduite dans un champ uniforme

On désire connaître l'effet produit par l'introduction d'une sphère diélectrique dans un champ électrique uniforme. Avant l'introduction du diélectrique, le champ a la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_z E_0 = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad [\text{V/m}] \quad (11.119)$$

Le potentiel $V(z)$ est obtenu par intégration

$$V(z) = -E_0 z + \text{cste} \quad [\text{V}] \quad (11.120)$$

Pour ne pas compliquer inutilement les développements, on pose que $\text{cste} = 0$.

On introduit une sphère de diélectrique, de rayon a et de permittivité relative $\epsilon_r > 1$. On admet par ailleurs que le milieu environnant est l'air, avec une permittivité relative $\epsilon_r = 1$. On procède de la même façon que pour un cylindre diélectrique (§ 11.4.3), considérant séparément les régions l'intérieure (d) et extérieure (a), puis appliquant les conditions aux limites (11.89) en $r = a$, en coordonnées sphériques. Le potentiel à grande distance de la sphère est donné par

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_a(r, \theta) = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta = -E_0 r P_1^0(\cos \theta) \quad [\text{V}] \quad (11.121)$$

Cette condition contient un polynôme de Legendre, qui spécifie la dépendance en θ du potentiel, avec $m = 1$ et $n = 0$. La solution pour le potentiel prend donc la forme

$$V(r, \theta) = \left[A_1 r + A_2 / r^2 \right] \cos \theta \quad [\text{V}] \quad (11.122)$$

À l'intérieur du diélectrique, on doit encore poser $A_{d2} = 0$ pour que le potentiel ne devienne pas singulier à l'origine tandis que dans l'air, (11.122) requiert que $A_{a1} = -E_0$. Les autres constantes sont obtenues à l'aide de (11.89), ce qui donne après quelques calculs

$$V(r \leq a, \theta) = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} r \cos \theta = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} z \quad \text{et} \quad V(r \geq a, \theta) = \left[\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \frac{a^3}{r^2} - r \right] E_0 \cos \theta \quad [\text{V}] \quad (11.123)$$

On obtient ensuite le champ électrique en prenant le gradient du potentiel, séparément dans les deux régions

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z) = -\nabla V(z) &= \mathbf{e}_z \frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} \quad [\text{V/m}] \quad r \leq a \\ \mathbf{E}(r, \theta) = -\nabla V(r, \theta) &= \mathbf{e}_r \left[2 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 + 1 \right] E_0 \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \left[\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 - 1 \right] E_0 \sin \theta \\ & \quad [\text{V/m}] \quad r \geq a \end{aligned} \quad (11.124)$$

On constate que le champ électrique est homogène à l'intérieur de la sphère, et que son amplitude est plus petite que celle du champ original. C'est dans l'air, sur le bord de la sphère, que le champ électrique prend sa plus grande amplitude, aux deux points spécifiés par $r = a$ et $\theta = 0, \pi$ où il vaut $3E_0 \epsilon_r / (\epsilon_r + 2)$.

Comme dans d'autres problèmes inhomogènes par parties, comportant plusieurs régions de propriétés différentes, on obtient des expressions différentes pour le potentiel et le champ dans chacune des régions. Il n'est pas possible de trouver une expression globale qui soit simultanément valable dans les deux régions.

11.5.4 Sphère métallique introduite dans un champ uniforme

Si l'on remplace la sphère diélectrique par une sphère parfaitement conductrice (cep), on pose $\epsilon_r = \infty$ dans la section précédente. Le champ est alors nul dans le conducteur, et le potentiel et le champ dans le milieu environnant prennent la forme

$$V(r, \theta) = \left[\frac{a^3}{r^2} - r \right] E_0 \cos \theta$$

$$\mathbf{E}(r, \theta) = -\nabla V(r, \theta) = e_\rho \left[2 \left(\frac{a}{r} \right)^3 + 1 \right] E_0 \cos \theta + e_\theta \left[\left(\frac{a}{r} \right)^3 - 1 \right] E_0 \sin \theta$$

[V/m] (11.125)

L'amplitude du champ électrique est maximal en $r = a$ et $\theta = 0, \pi$ où il vaut $3E_0$.

11.5.5 Champ magnétique d'une sphère métallique parcourue par un courant

On souhaite produire un champ magnétique constant à l'intérieur d'une sphère métallique creuse et on cherche la densité de courant qu'il faut faire circuler sur la paroi.

Ce problème est l'analogue magnétostatique de celui traité au paragraphe 11.5.2. Aucun courant ne circule dans les régions intérieure et extérieure de la sphère, et donc le potentiel magnétique scalaire $\Theta(\mathbf{r})$ (§ 10.2.1) est solution de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques. Supposant que le champ magnétique $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ est dirigé selon l'axe z , le potentiel dans la sphère est donné par (10.10)

$$\Theta(r < a, \theta, \varphi) = -H_0 z = -H_0 r \cos \theta \quad [\text{A}] \quad (11.126)$$

À l'extérieur, le potentiel doit rester borné à grande distance et doit donc avoir la forme

$$\Theta(r > a, \theta, \varphi) = \frac{A_2}{r^2} \cos \theta \quad [\text{A}] \quad (11.127)$$

Les composantes normales (radiales) du champ magnétique sont continues en $r = a$ (1.23)

$$H_r^{\text{int}}(r = a, \theta, \varphi) = -H_0 \cos \theta = H_r^{\text{ext}}(r = a, \theta, \varphi) = -2 \frac{A_2}{a^3} \cos \theta \quad [\text{A/m}] \quad (11.128)$$

Il en résulte que le potentiel à l'extérieur vaut

$$\Theta(r > a, \theta, \varphi) = \frac{H_0 a^3}{2r^2} \cos \theta \quad [\text{A}] \quad (11.129)$$

On note que le potentiel magnétique scalaire n'est pas continu en $r = a$. Le courant qui circule sur la paroi de la sphère est donné par la relation (1.22)

$$\mathbf{J}_s(\theta, \varphi) = \mathbf{n} \times \left[\mathbf{H}^{\text{ext}}(r, \theta, \varphi) - \mathbf{H}^{\text{int}}(r, \theta, \varphi) \right]_{r=a} = e_\varphi \left(H_\theta^{\text{ext}} - H_\theta^{\text{int}} \right)_{r=a} = -e_\varphi \frac{3}{2} H_0 \sin \theta$$

[A/m] (11.130)

où on a tenu compte du fait que le champ magnétique, par suite de la symétrie axiale du problème, n'a pas de composante azimutale. Le courant qui circule sur la paroi de la sphère est perpendiculaire à la composante tangentielle du champ, il est donc azimutal.

11.6 TRANSFORMATIONS CONFORMES

Dans bien des structures, les limites des conducteurs ne sont pas situées sur des lignes ou des surfaces à coordonnées constantes dans les repères cartésien, circulaire ou sphérique – ni en coordonnées elliptiques ou hyperboliques, d'un usage moins courant en pratique. D'autres systèmes de coordonnées peuvent être construits avec des transformations conformes, utilisant des nombres complexes [106], et on peut obtenir des solutions exactes dans le système transformé. Un nombre complexe comporte deux composantes, de sorte que cette méthode n'est utilisable que pour des problèmes à deux dimensions.

11.6.1 Principe de base de la méthode

On associe un nombre complexe \underline{z} à chaque point dans le plan, qui peut être défini par ses coordonnées cartésiennes (x, y) ou polaires, spécifiées ici par (r, θ)

$$\underline{z} = x + jy = re^{j\theta} \quad [m] \quad (11.131)$$

Le nombre complexe \underline{z} , souligné, ne doit pas être confondu avec la coordonnée z . On suppose qu'il existe dans un autre plan un autre nombre complexe \underline{w} donné par

$$\underline{w} = u + jv = \rho e^{j\psi} \quad (11.132)$$

qui peut être associé à \underline{z} par une fonction complexe qui définit la transformation

$$\underline{w} = f(\underline{z}) \quad (11.133)$$

La dimension de \underline{w} dépend de la transformation particulière considérée.

En projetant le plan complexe \underline{z} sur le plan complexe \underline{w} on cherche à faire coïncider les bords d'un conducteur avec des lignes droites, par exemple des lignes sur lesquelles $u = \text{cste}$ (fig. 11.24). La projection sert ainsi à remplacer une géométrie complexe par une structure dont l'étude est plus facile. Plus particulièrement, on cherche à obtenir une tranche de condensateur plan, pour lequel la solution est bien connue et particulièrement simple (§ 11.1.1).

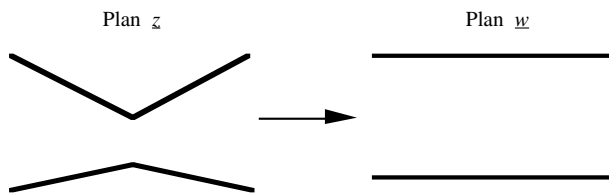


Fig. 11.24 Principe de la transformation conforme.

Il s'agit donc de déterminer quelle fonction fournit la transformation souhaitée, et ce choix n'est pas toujours évident. Fort heureusement, des mathématiciens ont étudié de façon approfondie le domaine des transformations conformes et ils en ont catalogué un grand nombre, parmi lesquelles certaines fonctions tout particulièrement intéressantes pour résoudre des problèmes en électrostatique à deux dimensions [93], [107].

11.6.2 Conditions de Cauchy-Riemann

Quand le point \underline{z} se déplace sur un contour régulier dans le plan complexe \underline{z} , le point associé \underline{w} doit aussi se déplacer de façon régulière dans le plan complexe \underline{w} . Il ne peut pas “sauter” brusquement d’un endroit à un autre. Cela signifie que la fonction de projection $f(\underline{z})$ doit être analytique, ce qui implique que sa dérivée soit continue et univoque, sa différentielle étant toujours définie

$$\frac{d\underline{w}}{d\underline{z}} = \lim_{\Delta\underline{z} \rightarrow 0} \frac{\Delta\underline{w}}{\Delta\underline{z}} = \lim_{\Delta\underline{z} \rightarrow 0} \frac{f(\underline{z} + \Delta\underline{z}) - f(\underline{z})}{\Delta\underline{z}} \quad (11.134)$$

La valeur de cette différentielle ne doit pas dépendre pas de la direction de l’incrément $\Delta\underline{z}$ dans le plan complexe \underline{z} . On considère donc deux directions orthogonales dans ce plan, x et y . On pose d’abord $\Delta\underline{z} = \Delta x$ et on obtient

$$\frac{d\underline{w}}{d\underline{z}} = \frac{\partial\underline{w}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} \quad (11.135)$$

Similairement, on trouve lorsque $\Delta\underline{z} = j\Delta y$

$$\frac{d\underline{w}}{d\underline{z}} = \frac{\partial\underline{w}}{j\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y} \quad (11.136)$$

Pour que les deux valeurs de la différentielle coïncident il faut que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (11.137)$$

Ce sont les conditions de Cauchy-Riemann, que toute fonction analytique d’une variable complexe doit satisfaire [108]. Elles expriment la conservation des angles en passant du plan \underline{z} au plan \underline{w} . Il s’agit d’une condition nécessaire pour que les familles de courbes orthogonales dans un des plans (équipotentiels et lignes de champ) se projettent sur des familles de courbes également orthogonales dans l’autre plan.

Les fonctions qui peuvent être développées en série de Taylor sont analytiques, par exemple $\exp(\underline{z})$, $\cos(\underline{z})$, $\sin(\underline{z})$, $\cosh(\underline{z})$, $\sinh(\underline{z})$, $\ln(\underline{z}+1)$, etc. Certaines fonctions ont des singularités, où la différentielle n’est pas définie, ce qui n’est acceptable que si les points singuliers sont hors de la région de définition du problème. Par exemple la fonction $1/\underline{z}$ peut être utilisée si le point $\underline{z} = 0$ est situé à l’intérieur d’un conducteur.

11.6.3 Équation de Laplace

Si l’on dérive la première équation de (11.137) par rapport à x , la seconde par rapport à y – ou vice versa – et que l’on regroupe les expressions ainsi obtenues, on trouve que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (11.138)$$

Les fonctions u et v sont des solutions de l’équation de Laplace, auxquelles on peut associer un potentiel électrique V . L’emploi des transformations conformes est donc spécifiquement lié à l’équation de Laplace en deux dimensions, il ne peut pas être étendu à la résolution de l’équation d’onde ou de l’équation de Poisson – en dehors du cas particulier où l’on peut associer des charges localisées aux singularités de la fonction.

11.6.4 Exemple de fonction analytique

Considérons un exemple simple

$$\underline{w} = \underline{z}^3 = (x + jy)^3 = x^3 + 3jx^2y - 3xy^2 - jy^3 = u + jv \quad [\text{m}^3] \quad (11.139)$$

On identifie les parties réelle et imaginaire

$$u = x^3 - 3xy^2 \quad \text{et} \quad v = 3x^2y - y^3 \quad [\text{m}^3] \quad (11.140)$$

Les conditions de Cauchy-Riemann requièrent

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad [\text{m}^2] \quad (11.141)$$

Les deux conditions sont effectivement satisfaites et la fonction est analytique.

11.6.5 Champs dans un angle de conducteur

Les fonctions $\underline{w} = \underline{z}^p$ servent à déterminer les potentiels et les champs au voisinage d'un angle d'un conducteur (arête ou renfocement). Cette transformation donne, en coordonnées polaires,

$$\underline{w} = u + jv = \underline{z}^p = r^p e^{jp\theta} = r^p (\cos p\theta + j \sin p\theta) \quad (11.142)$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire, on obtient les relations

$$u = r^p \cos p\theta \quad \text{et} \quad v = r^p \sin p\theta \quad (11.143)$$

On suppose que le champ dans le plan transformé \underline{w} est uniforme, et que les courbes $v = \text{cste}$ sont les équipotentielles. Leurs transformées dans le plan \underline{z} sont alors les équipotentielles dans le problème original, et les lignes de champ sont les transformées des lignes $u = \text{cste}$. Les applications aux cas $p = 4/7$ et 4 sont présentées graphiquement à la figure 11.25.

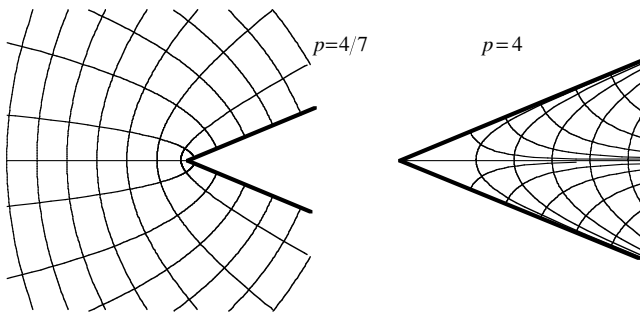


Fig. 11.25 Équipotentielles et lignes de champ près de l'angle d'un conducteur.

L'angle du conducteur vaut π/p , de sorte qu $p < 1$ correspond à une arête, près de laquelle les champs se concentrent, tandis que $p > 1$ détermine à un renfocement, dans lequel l'amplitude du champ décroît. Lorsque $p > 1$, les lignes de champ sont des équipotentielles tournées d'un angle $\pi/2p$.

11.6.6 Transformation de coordonnées cartésiennes à coordonnées polaires

Considérons la fonction suivante

$$\underline{w} = \ln(\underline{z}/1\text{m}) = \ln(\underline{z}) \quad [-] \quad (11.144)$$

En principe, l'argument d'un logarithme doit être une grandeur sans dimensions, et on admet donc que \underline{z} soit normalisé par rapport à son unité de longueur, par exemple à un mètre. Il faut aussi noter que la fonction possède une singularité à l'origine en $\underline{z} = 0$. Pour que l'on puisse utiliser cette transformation, il faut que le point singulier soit situé en dehors de la région sur laquelle s'étend le champ.

On développe (11.144) comme suit

$$\underline{w} = u + jv = \ln(\underline{z}) = \ln(re^{j\theta}) = \ln(r) + j(\theta \pm 2n\pi) \quad [-] \quad (11.145)$$

On identifie les parties réelle et imaginaire

$$u = \ln(r) \quad \text{et} \quad v = \theta \pm 2n\pi \quad [-] \quad (11.146)$$

Les lignes $u = \text{cste}$ du plan \underline{w} deviennent dans le plan \underline{z} , les lignes $r = \text{cste}$ c'est-à-dire les cercles centrés à l'origine du plan \underline{z} . Les lignes $v = \text{cste}$ du plan \underline{w} correspondent en revanche aux lignes $\theta = \text{cste}$ dans le plan \underline{z} , c'est-à-dire aux droites passant par l'origine (fig. 11.26).

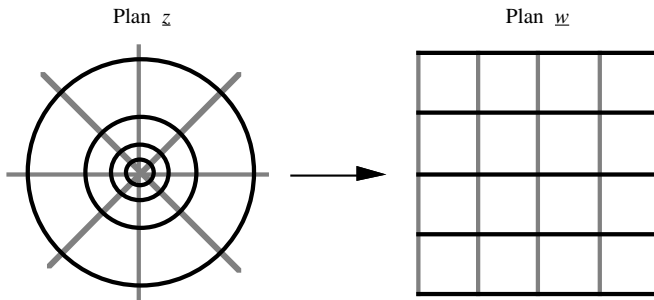


Fig. 11.26 Transformation du repère de coordonnées polaires.

Cette fonction projette le repère polaire sur le repère cartésien et peut servir à l'étude de la ligne coaxiale (§ 11.2.1). Posant $u_A = \ln(R_A)$ et $u_B = \ln(R_B)$, la distance entre les deux limites est $\Delta u = u_B - u_A = \ln(R_B/R_A)$. Un tour complet correspond à une période, de sorte que la largeur des plaques vaut $\Delta v = 2\pi$ le long de l'axe v . La capacité par unité de longueur est obtenue avec (11.6) pour le condensateur plan

$$C' = \epsilon \frac{\Delta v}{\Delta u} = \epsilon \frac{2\pi}{\ln(R_B/R_A)} \quad [\text{F/m}] \quad (11.147)$$

qui est bien la valeur trouvée dans (11.28).

On constate que la transformation conforme conserve la capacité, et il s'agit en fait d'une propriété générale. Il en résulte qu'on n'a pas besoin de déterminer complètement les champs, mais simplement de trouver la largeur Δv et l'espacement Δu du condensateur à plaques parallèles équivalent dans le plan \underline{w} .

11.6.7 Transformation conforme à deux pôles

La précédente transformation comportait un pôle unique, situé au point $z = 0$. Pour étudier la ligne bifilaire, il faut trouver une transformation avec deux pôles de polarités opposées. On combine deux fonctions logarithmiques avec des pôles en $z = a$ et $z = -a$

$$w = \ln \frac{z+a}{z-a} \quad [-] \quad (11.148)$$

Les parties réelle et imaginaire de la transformation sont

$$u = \frac{1}{2} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \quad \text{et} \quad v = \arctan \frac{y}{x+a} + \arctan \frac{y}{x-a} = \arctan \frac{2ay}{a^2 - x^2 - y^2} \quad [-] \quad (11.149)$$

On obtient les lignes $u = \text{cste}$ en posant que l'argument du logarithme de (11.149) est égal à une constante réelle positive K^2

$$\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} = K^2 \quad [-] \quad (11.150)$$

Après quelques calculs la relation (11.150) donne

$$\left(x - a \frac{K^2 + 1}{K^2 - 1} \right) + y^2 = \frac{4a^2 K^2}{(K^2 - 1)^2} \quad [m] \quad (11.151)$$

C'est l'équation d'un cercle centré en

$$x_0 = a \frac{K^2 + 1}{K^2 - 1} \quad \text{et} \quad y_0 = 0 \quad [m] \quad (11.152)$$

et ayant un rayon

$$r_0 = \left| \frac{2aK}{K^2 - 1} \right| \quad [m] \quad (11.153)$$

En prenant différentes valeurs pour K , on obtient une famille de cercles $u = \text{cste}$ (fig. 11.27). On note que les centres des cercles ne coïncident pas avec les pôles en $\pm a$ et que $K = 1$ correspond à l'axe y .

Deux cercles K et $1/K$ sont disposés symétriquement par rapport à l'axe des y et peuvent donc correspondre aux limites des conducteurs d'une ligne bifilaire, lorsque les lignes $u = \text{cste}$ sont des équipotentielles.

Les lignes $v = \text{cste}$ forment une seconde famille de cercles, qui sont perpendiculaires aux cercles de la famille $u = \text{cste}$. On les obtient en posant que l'argument de l'arctangente de l'expression de droite de (11.149) est constant

$$\frac{2ay}{a^2 - x^2 - y^2} = \frac{1}{M} \quad [-] \quad (11.154)$$

En développant cette expression on obtient aussi l'équation d'un cercle

$$x^2 + (y - aM)^2 = a^2(1 + M^2) \quad [m^2] \quad (11.155)$$

Son centre est situé en $(0, aM)$ et il a un rayon $a\sqrt{1 + M^2}$.

Le cercle $M = 0$ est centré à l'origine et a un rayon a , tandis que $M = \infty$ donne l'axe horizontal. Tous les cercles passent par les pôles en $x = \pm a$ et $y = 0$.

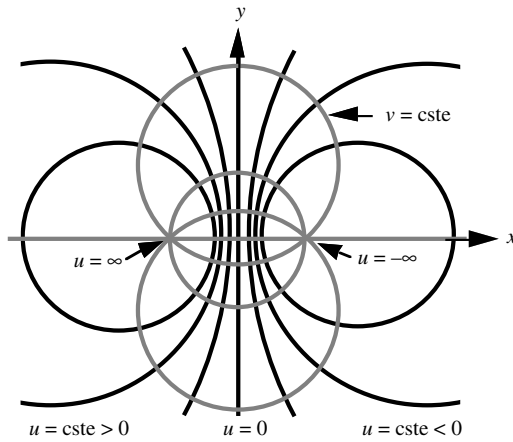


Fig. 11.27 Lignes orthogonales de la transformation conforme à deux pôles.

11.6.8 Ligne bifilaire

Une ligne bifilaire (fig. 2.9) est formée de deux conducteurs cylindriques identiques que l'on suppose parfaitement conducteurs (cep § 1.4.6). Les conducteurs ont le même rayon R et l'espace entre leurs centres vaut $2d$ (fig. 11.28).

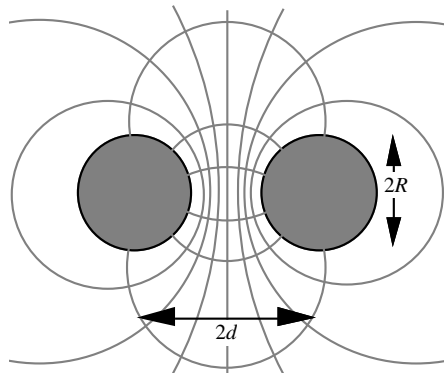


Fig. 11.28 Ligne bifilaire.

On fait correspondre les surfaces des deux conducteurs avec deux cercles $u = cste$, qui correspondent respectivement à $K_0 > 1$ (à droite) et à $1/K_0 < 1$ (à gauche). Identifiant les espaces et les rayons on obtient deux équations liant a et K_0 .

$$a \frac{K_0^2 + 1}{K_0^2 - 1} = d \quad \text{et} \quad \frac{2aK_0}{K_0^2 - 1} = R \quad [m] \quad (11.156)$$

Quelques calculs permettent de trouver a et K_0 :

$$a = \sqrt{d^2 - R^2} \quad \text{et} \quad K_0 = (d/R) + \sqrt{(d/R)^2 - 1} \quad (11.157)$$

Dans le plan \underline{w} les transformées des deux cercles sont les droites

$$\pm u_0 = \pm \ln(K_0) = \pm \ln\left((d/R) + \sqrt{(d/R)^2 - 1}\right) = \pm \operatorname{arcosh}(d/R) \quad (11.158)$$

La transformation à deux pôles projette le plan transverse infini entourant les deux conducteurs sur un rectangle dans le plan \underline{w} , de largeur $\Delta u = 2u_0$ (distance entre les deux plaques) et de hauteur $\Delta v = 2\pi$ (tour complet d'un des conducteurs). La capacité par unité de longueur est donc donnée par (11.6)

$$C' = \varepsilon \frac{\Delta v}{\Delta u} = \frac{\pi \varepsilon}{\operatorname{arcosh}(d/R)} \quad [\text{As/Vm}] \quad (11.159)$$

11.6.9 Relation asymptotique

Dans de nombreuses situations pratiques, par exemple pour des lignes à haute tension (sect. XII 2.4), la distance entre conducteurs est très grande par rapport à leur rayon ($d \gg R$). On peut alors se contenter d'une approximation de la fonction arcosh

$$\operatorname{arcosh}\left(\frac{d}{R}\right) = \ln\left[\left(\frac{d}{R}\right) + \sqrt{\left(\frac{d}{R}\right)^2 - 1}\right] \cong \ln\left(\frac{2d}{R}\right) \quad \text{si } d \gg R \quad [-] \quad (11.160)$$

et l'expression de la capacité linéique devient

$$C' \cong \frac{\pi \varepsilon}{\ln(2d/R)} \quad \text{si } d \gg R \quad [\text{F/m}] \quad (11.161)$$

11.6.10 Conducteur cylindrique au dessus d'une plaque métallique

Une ligne formée d'un conducteur circulaire de rayon R , dont le centre est à une distance d au dessus d'un plan de masse conducteur infini, a une capacité double de celle obtenue pour les deux conducteurs symétriques

$$C' = \frac{2\pi \varepsilon}{\operatorname{arcosh}(d/R)} \quad [\text{F/m}] \quad (11.162)$$

Cette relation donne une valeur approchée pour un conducteur circulaire au-dessus du sol (qui n'est pas un conducteur électrique parfait).

11.6.11 Ligne tubulaire desaxée

Considérons maintenant une ligne coaxiale (§ 11.1.1) dont le conducteur central a été décalé par rapport au centre (§ 1.4.4). Le rayon du conducteur interne est R_A tandis que le rayon du tube est R_B . Les deux centres sont décalés de Δd (fig. 1.10) [109].

La transformation à deux pôles du paragraphe 11.6.7 peut encore être utilisée, mais on ne peut pas tirer profit d'une quelconque symétrie, et on ne sait pas où se trouve l'axe y . Les distances d_A et d_B sont inconnues, mais on connaît leur différence $\Delta d = d_A - d_B$. On applique (11.157) aux deux conducteurs

$$d_A^2 - R_A^2 = a^2 \quad \text{et} \quad d_B^2 - R_B^2 = a^2 \quad [\text{m}^2] \quad (11.163)$$

On extrait ensuite les valeurs de d_A et d_B

$$d_A = \frac{R_B^2 - R_A^2 - \Delta d^2}{2\Delta d} \quad \text{et} \quad d_B = \frac{R_B^2 - R_A^2 + \Delta d^2}{2\Delta d} \quad [\text{m}] \quad (11.164)$$

On peut exprimer a en fonction de R_A , R_B et Δd mais comme l'expression ainsi obtenue est plutôt compliquée, on préfère utiliser

$$a = \sqrt{d_A^2 - R_A^2} \quad [\text{m}] \quad (11.165)$$

L'argument du logarithme sur le cercle interne est K_A^2 et celui sur le cercle externe est K_B^2 . Les deux valeurs sont données par

$$K_A^2 = \frac{d_A + a}{d_A - a} \quad \text{et} \quad K_B^2 = \frac{d_B + a}{d_B - a} \quad [-] \quad (11.166)$$

On constate que la transformation projette la surface entre les deux cercles sur un condensateur plan situé entre les lignes $u_A = \ln K_A$ et $u_B = \ln K_B$ dont la largeur est une période 2π le long de la variable v . La capacité linéique vaut donc [13]

$$C' = \varepsilon \frac{\Delta v}{\Delta u} = \varepsilon \frac{2\pi}{u_A - u_B} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(K_A/K_B)} \quad [\text{F/m}] \quad (11.167)$$

11.7 TRANSFORMATIONS DE SCHWARTZ-CHRISTOFFEL

Pour résoudre l'équation de Laplace en deux dimensions avec une transformation conforme, il faut disposer d'une fonction qui effectue la bijection de la géométrie à étudier (en général de forme compliquée) sur une géométrie plus simple, comme celle du condensateur à plaques parallèles (§ 11.1.1).

Lorsque les limites du problème à résoudre ne comportent que des segments de droites (polygones généralisés) – qui peuvent être soit des conducteurs électriques parfaits (électrodes), soit des conducteurs magnétiques parfaits (plans de symétrie) – alors la transformation de Schwarz-Christoffel peut être utilisée [110]. Cette transformation a en effet la propriété d'introduire localement des rotations qui permettent de redresser les angles. On procède généralement en deux étapes, introduisant un plan intermédiaire.

11.7.1 Description générale

Le polygone dans lequel on cherche à résoudre l'équation de Laplace, dans le plan initial $\underline{z} = x + jy$, est transformé en une droite, l'axe réel du plan intermédiaire $\underline{t} = p + jq$. On transforme aussi un condensateur à plaques parallèles dans le plan $\underline{w} = u + jv$ dans le plan $\underline{t} = p + jq$. La combinaison des deux transformations fournit alors une fonction $\underline{z} = f(\underline{w})$ qui assure le passage direct de la géométrie initiale au condensateur plan.

On a ainsi trouvé la transformation recherchée, et la suite des opérations procède selon le processus décrit dans la section précédente, qui est utilisable pour toutes les transformations conformes (sect. 11.6).

11.7.2 Redressement d'un angle

Le paragraphe 11.6.5 présente les transformations conformes $w = \underline{z}^p$ qui permettent d'étudier les champs près d'une arête ou d'un angle de conducteur. On remplace ici le plan w par le plan intermédiaire \underline{t} .

L'angle $\alpha = \pi/p$ situé au point $\underline{z} = 0$ est "redressé", devenant en fait un "angle" π au point $\underline{t} = 0$. On peut mettre cette rotation sous la forme

$$\underline{z} = \underline{t}^{(1/p)} = \underline{t}^{\alpha/\pi} \quad [m] \quad (11.168)$$

Si le point où se situe l'angle à redresser n'est pas situé à l'origine du plan mais en un point arbitraire $\underline{z} = \underline{z}_0$, et que le point que l'on cherche à atteindre dans le plan \underline{t} est placé en $\underline{t} = \underline{t}_0$, la fonction devient simplement

$$\underline{z} - \underline{z}_0 = (\underline{t} - \underline{t}_0)^{\alpha/\pi} \quad [m] \quad (11.169)$$

On peut également définir la transformation au moyen de sa dérivée

$$\frac{d\underline{z}}{d\underline{t}} = (\underline{t} - \underline{t}_0)^{(\alpha/\pi - 1)} \quad (11.170)$$

Dans (11.170), la position du point de départ \underline{z}_0 a disparu, tandis que celle du point d'arrivée \underline{t}_0 reste définie. On complète la transformation avec un facteur d'échelle et une rotation, contenus dans une constante complexe, ce qui donne la relation plus générale

$$\frac{d\underline{z}}{d\underline{t}} = \underline{K} (\underline{t} - \underline{t}_0)^{(\alpha/\pi - 1)} \quad (11.171)$$

Le facteur d'échelle est le module de \underline{K} , l'angle de rotation φ son argument (fig. 11.29).

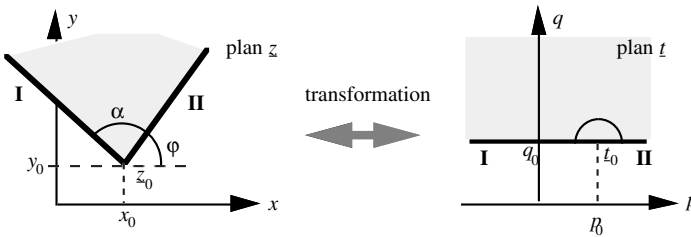


Fig. 11.29 Transformation comportant le redressement d'un angle, une rotation et des translations.

Les côtés de l'angle (I, II) sont projetés sur une horizontale dans le plan \underline{t} , de part et d'autre de \underline{t}_0 . La zone interne de l'angle α devient le demi-plan supérieur $q > q_0$. Pour simplifier les développements, on choisit $\underline{t}_0 = p_0$ réel (projection sur l'axe $q = 0$).

11.7.3 Généralisation au cas d'un polygone

Pour projeter le pourtour du polygone de la figure 11.30 sur l'axe réel du plan \underline{t} , on combine une séquence de rotations, pour chacun des sommets du polygone, en multipliant des expressions (11.171) pour chaque rotation.

$$\frac{d\underline{z}}{d\underline{t}} = \underline{K} (\underline{t} - p_1)^{(\alpha_1/\pi - 1)} (\underline{t} - p_2)^{(\alpha_2/\pi - 1)} (\underline{t} - p_3)^{(\alpha_3/\pi - 1)} \dots \quad (11.172)$$

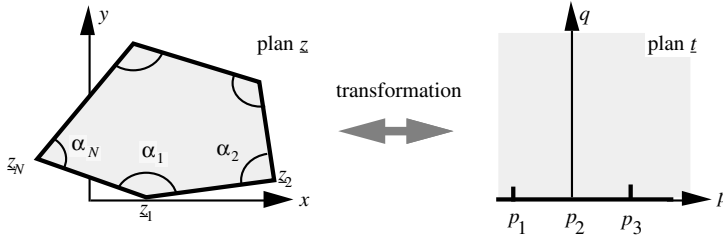


Fig. 11.30 Transformation d'un polygone du plan z sur l'axe réel du plan t .

Comme précédemment, les positions des point d'arrivée (leurs abscisses p_i) apparaissent dans la relation (11.172), mais non celles des sommets correspondants z_i du polygone. À ce stade des développements, les positions p_i sont inconnues. La région interne du polygone est projetée sur la moitié supérieure du plan t .

Il faut ensuite intégrer (11.172), ce qui forme le point crucial de toute la procédure. Si l'on y parvient, on obtient une relation de la forme

$$\underline{z} = \underline{K}_1 F(t, p_1, p_2, \dots, p_n) + \underline{K}_2 \quad [\text{m}] \quad (11.173)$$

On détermine les valeurs des constantes en appliquant cette relation à chaque sommet du polygone, ce qui donne pour le sommet i

$$\underline{z}_i = \underline{K}_1 F(p_i, p_1, p_2, \dots, p_n) + \underline{K}_2 \quad [\text{m}] \quad (11.174)$$

On obtient ainsi un système de n équations à $n+2$ inconnues, dont les constantes d'intégration \underline{K}_1 et \underline{K}_2 . Cela signifie qu'on peut choisir deux des abscisses p_i de façon arbitraire, mais que la position des points restants est complètement déterminée.

11.7.4 Généralisation : points situés à l'infini

Dans certains problèmes d'électromagnétisme, les polygones ne sont pas fermés, en ce sens qu'un ou plusieurs de leurs sommets z_i sont situés à l'infini. Or, la présence d'un point z_i à l'infini n'introduit aucune modification dans (11.172), puisque les coordonnées des sommets du polygone n'apparaissent pas dans cette expression. Il faudra bien entendu introduire le terme correspondant dans le membre de droite, avec l'angle α_i qui signale le changement de direction à l'infini.

Si en revanche on veut faire correspondre à un sommet le point à l'infini dans le plan t ($p_i = \infty$), on doit introduire un terme de la forme $(t - \infty)$ dans (11.172). Pour que la différentielle reste définie, la constante \underline{K}_1 doit être posée égale à zéro, de telle manière que le produit $\infty \cdot \underline{K}_1$ reste borné. En fait, cela signifie qu'on peut ignorer purement et simplement ce point.

En fait, l'angle de la figure 11.29 peut être considéré comme étant un polygone dont un des sommets est situé à l'infini.

Les géométries rencontrées en électromagnétisme comportent très souvent deux électrodes à des potentiels V_A et V_B . On souhaite projeter ces deux électrodes, respectivement, sur les demi-axes réels $p < 0$ et $p > 0$ dans le plan t . Une seconde transformation fait correspondre les deux demi-axes aux deux plaques d'un condensateur plan.

11.7.5 Exemple: extrémité d'un condensateur plan

On considère un condensateur plan ayant deux plaques parallèles de dimensions finies, respectivement aux potentiels $+U/2$ et $-U/2$ (fig. 11.31).

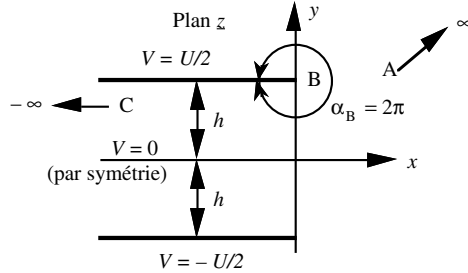


Fig. 11.31 Extrémité des plaques d'un condensateur plan.

Suite à la symétrie de la structure, le plan situé à mi-chemin entre les deux plaques (sur lequel on place l'axe des x) se trouve au potentiel nul. Il suffit donc de considérer le demi-plan supérieur. On fait passer l'axe des y à l'extrémité des plaques ($x = 0$, $y = \pm h$). Le "polygone généralisé" comporte alors 3 sommets : le point à l'infini A à l'extérieur de la structure, l'extrémité B de la plaque et le point à l'infini C entre les deux plaques.

Dans le plan t , on projette le point A' à l'infini (et par conséquent on n'a pas besoin d'en tenir compte), le point B' en $t = -1$ et le point C' sur l'origine. L'électrode supérieure, qui va du point A au point C en passant par le point B, correspond donc au demi-axe réel gauche, $p < 0$, tandis que le plan de symétrie $y = 0$, qui s'étend du point C au point A, se projette sur le demi-axe de droite $p > 0$ (fig. 11.32).

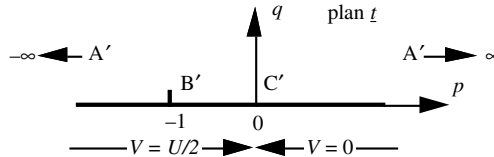


Fig. 11.32 Transformée intermédiaire du condensateur plan à plaques de dimensions finies.

Les angles de rotation (fig. 11.31) valent ici $\alpha_B = 2\pi$ et $\alpha_C = 0$. On peut donc écrire l'équation différentielle comme suit

$$\frac{dz}{dt} = \underbrace{K_1}_{\text{Point B}}(t+1)^{2-1} \underbrace{(t-0)^{0-1}}_{\text{Point C}} = K_1 \left(1 + \frac{1}{t}\right) \quad (11.175)$$

L'intégration est ici immédiate et donne

$$z = K_1(t + \ln t) + K_2 \quad (11.176)$$

Pour déterminer les constantes, on se place au point B, pour lequel $z_B = jh$ et $t_B = -1$, on introduit ces valeurs dans (11.176) et, par conséquent :

$$jh = K_1(-1 + j\pi) + K_2 \quad [m] \quad (11.177)$$

Au point C, pour lequel $z_C = -\infty$ et $t_C = 0$, on obtient $-\infty = -\infty$, ce qui ne donne pas d'information quant aux constantes. Il faut donc considérer le voisinage du point C. On prend dans ce but deux points a et b, situés à la même abscisse, mais sur les deux lignes horizontales dans le plan z (fig. 11.33)

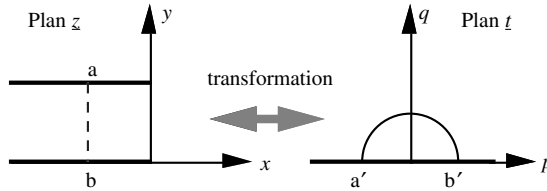


Fig. 11.33 Étude du comportement à l'infini pour déterminer les constantes.

Ces deux points sont à une distance h l'un de l'autre dans le plan z , ce qui donne avec (11.175):

$$-jh = z_b - z_a = \int dz = \int \underline{K}_1(1+1/t)dt \quad [m] \tag{11.178}$$

Pour évaluer correctement l'intégrale de droite, il faut rester dans la région où la fonction est analytique, c'est-à-dire dans le demi-plan supérieur. On choisit donc un demi-cercle entre les points a' et b' , sur lequel on a $t = \rho e^{j\varphi}$. On prend ensuite la limite $\rho \rightarrow 0$

$$-jh = \lim_{\rho \rightarrow 0} \underline{K}_1 \int \left(1 + \frac{1}{\rho e^{j\varphi}}\right) j\rho e^{j\varphi} d\varphi = -j\underline{K}_1\pi \quad [m] \tag{11.179}$$

Il en résulte que $\underline{K}_1 = h/\pi$ et, avec (11.177), on obtient la fonction recherchée

$$z = \frac{h}{\pi}(1+t+\ln t) \quad [m] \tag{11.180}$$

On passe alors à la seconde partie du problème: faire correspondre l'axe p du plan t aux plaques d'un condensateur plan dans le plan w (fig. 11.34).

Le point A'' se trouve toujours à l'infini (vers le haut), le point C'' est envoyé à l'infini vers le bas et le point B'' est placé à l'origine. Il reste à spécifier l'abscisse de la seconde plaque, que l'on situe en $u = u_0$. On procède ensuite comme pour la première transformation. On a ici $\alpha_B = \pi$ et $\alpha_C = 0$, ce qui entraîne

$$\frac{dw}{dt} = \underline{K}_1(t+1)^{1-1}(t-0)^{0-1} = \frac{\underline{K}_1}{t} \tag{11.181}$$

Point B Point C

L'intégration, immédiate, donne

$$w = \underline{K}_1 \ln t + \underline{K}_2 \tag{11.182}$$

On détermine les constantes comme précédemment. Ici aussi, le point C' est situé à l'infini, et on a donc une indétermination qu'on lève en considérant des points sur les deux plaques. La relation devient, après introduction des constantes:

$$w = j\frac{u_0}{\pi} \ln t + u_0 \tag{11.183}$$

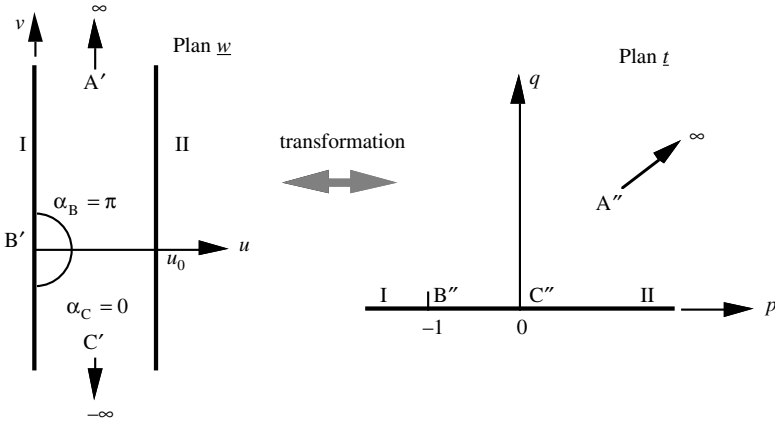


Fig. 11.34 Deuxième transformation $\underline{w} \rightarrow \underline{t}$.

On extrait \underline{t} de cette relation et on introduit l'expression ainsi obtenue dans (11.180), ce qui donne la transformation complète recherchée

$$\underline{z} = \frac{h}{\pi} \left[1 + j\pi \left(\frac{w}{u_0} - 1 \right) + e^{j\pi(w/u_0 - 1)} \right] \quad [\text{m}] \quad (11.184)$$

Déterminant alors les lignes $u = \text{cste}$ et $v = \text{cste}$ dans le plan \underline{z} , on trouve, respectivement, les équipotentielles et les lignes de champ (fig. 11.35).

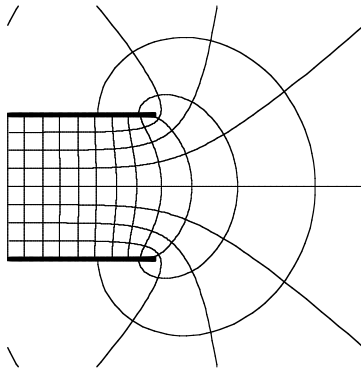


Fig. 11.35 Lignes de champ et équipotentielles à l'extrémité d'un condensateur plan de dimensions finies.

11.7.6 Remarques

Il faut noter ici que, dans les deux transformations dont on a fait usage, il a été possible de déterminer la fondamentale par une simple intégration analytique. Cela ne sera pas toujours possible, et on devra parfois avoir recours à une intégration numérique, auquel cas la fonction $\underline{z}(w)$ ne sera pas connue sous forme explicite [96].

La détermination des constantes a donné lieu à une certaine difficulté, du fait qu'un des points à considérer est situé à l'infini.

La seconde transformation $\underline{t}(\underline{w})$ assure le passage des coordonnées polaires aux coordonnées rectangulaires, et elle se retrouve dans beaucoup de problèmes traités par cette méthode. La première phase, en revanche, variera selon les problèmes traités.

On n'a considéré ici qu'une des extrémités des plaques du condensateur. Or les plaques sont également de dimensions finies à leur autre extrémité. Une autre transformation de Schwartz-Christoffel (plus compliquée) permet de résoudre ce problème.

11.7.7 Champs entre deux conducteurs coudés

La structure considérée est esquissée à la figure 11.36. On a dans ce cas quatre "sommets", dont les points B et D sont situés à l'infini.

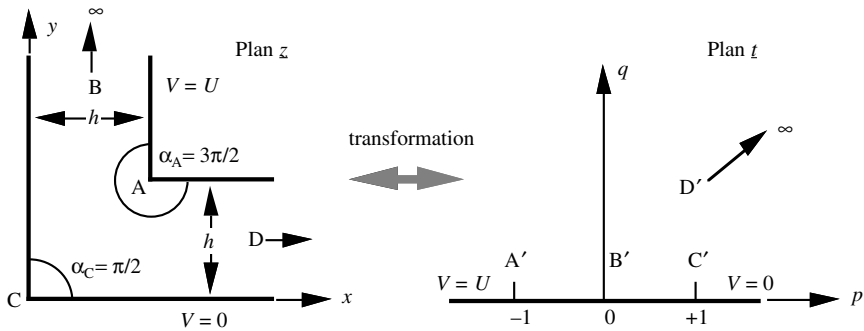


Fig. 11.36 Conducteurs coudés.

Dans le plan \underline{t} , on place le point B' à l'origine, et les points A' et C' e part et d'autre en $p = \pm 1$ (on peut le faire grâce à la symétrie). Le point D' reste à l'infini, et on n'a donc pas besoin d'en tenir compte. La transformation est ici donnée par

$$\frac{dz}{dt} = \frac{K_1}{t} (t+1)^{1/2} (t-0)^{-1} (t-1)^{-1/2} = \frac{K_1}{t} \sqrt{\frac{t+1}{t-1}} \tag{11.185}$$

Point A Point B Point C

L'intégration de cette relation, suivie de l'évaluation des constantes, donne

$$z = \frac{h}{\pi} \left[\ln \left(t + \sqrt{t^2 - 1} \right) + \operatorname{arccsc} t \right] \tag{11.186}$$

[m]

La seconde transformation transfère le point A'' en $\underline{w} = u_0$, le point C'' en $\underline{w} = 0$, et les points B'' et D'' sont de nouveau à l'infini (fig. 11.37). L'équation à intégrer est

$$\frac{dw}{dt} = \frac{K_1}{t} (t+1)^{1-1} (t-0)^{0-1} (t-1)^{1-1} = \frac{K_1}{t} \tag{11.187}$$

Point A Point B Point C

On retrouve ici la même relation qu'en (11.181). Toutefois, les conditions aux limites ne sont pas les mêmes, de sorte que l'on a

$$\underline{w} = -j \frac{u_0}{\pi} \ln t \quad \text{et donc} \quad t = e^{(j\pi w / u_0)} \tag{11.188}$$

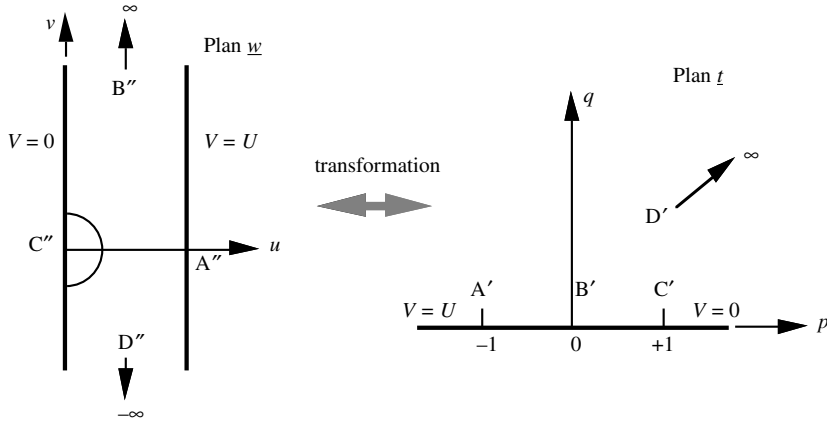


Fig. 11.37 Condensateur plan.

On remplace \underline{t} par sa valeur dans (11.186), ce qui donne la transformation conforme recherchée. Procédant comme dans les sections précédentes, on détermine les équations des courbes $u = \text{cste}$ et $v = \text{cste}$ qui donnent, respectivement, les équipotentiels et les lignes de champ dans la structure (fig. 11.38).

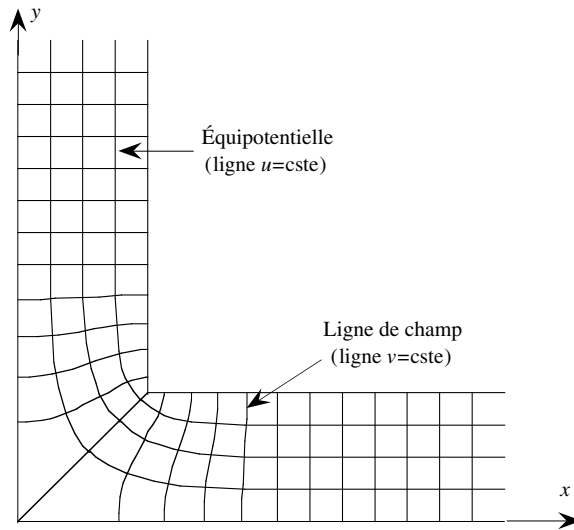


Fig. 11.38 Équipotentiels et lignes de champ dans un conducteur coudé.

On a considéré ici des conducteurs de même largeur de part et d'autre du coude, c'est-à-dire un coude symétrique. Pour cette raison, la transformation dans le plan \underline{t} est également symétrique, avec des points situés en $\underline{t} = \pm 1$: c'est ce qui a permis de choisir arbitrairement trois points, au lieu de deux comme indiqué au paragraphe 11.7.3.

11.8 EXERCICES

11.8.1 Déterminer approximativement la capacité linéique d'une ligne de transmission formée de deux plaques parallèles, larges de 20 mm, séparées l'une de l'autre par un diélectrique épais de 0.1 mm qui a une permittivité relative de $\epsilon_r = 9$.

11.8.2 Déterminer approximativement la capacité d'un condensateur plan inhomogène formé de plusieurs couches de matériaux diélectriques différents, comme représenté dans la figure 11.39. La largeur du condensateur est donnée par a , sa longueur par b .

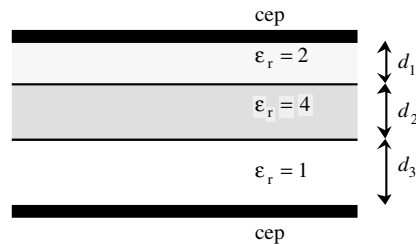


Fig. 11.39 Condensateur plan inhomogène multicouches.

Déterminer numériquement la capacité lorsque $d_1 = 2 \mu\text{m}$, $d_2 = 5 \mu\text{m}$, $d_3 = 1 \mu\text{m}$, avec $a = b = 1 \text{ mm}$.

11.8.3 Déterminer le rayon interne du conducteur tubulaire d'une ligne coaxiale, sachant que le conducteur interne a un rayon de 0,5 mm, que le diélectrique a une permittivité relative $\epsilon_r = 4$ et que l'impédance caractéristique est de 75Ω .

11.8.4 Quelle est la distribution du potentiel et l'allure du champ électrique, solutions de l'équation de Laplace à l'intérieur du rectangle de la figure 11.40 ? Que vaut le potentiel au centre du rectangle ? Esquisser l'allure des lignes de champ et des équipotentielles.

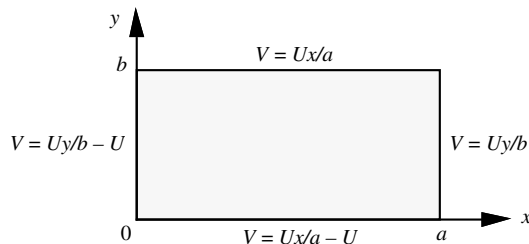


Fig. 11.40 Problème rectangulaire avec des valeurs limites.

11.8.5 Un cylindre diélectrique, de rayon R_A et de permittivité relative $\epsilon_{rA} = 4$, est situé dans un tube diélectrique concentrique de rayon R_B ayant une permittivité relative $\epsilon_{rB} = 2$, et le tout est entouré d'air (fig. 11.41). Le potentiel sur les surfaces de séparation vaut, respectivement, $V = U \sin(2\varphi)$ en $\rho = R_A$ et $V = U \cos(\varphi)$ en $\rho = R_B$. Déterminer le potentiel et le champ électrique dans tout l'espace, ainsi que les densités de charges qui doivent être disposées sur les deux surfaces de séparation pour obtenir ces distributions.

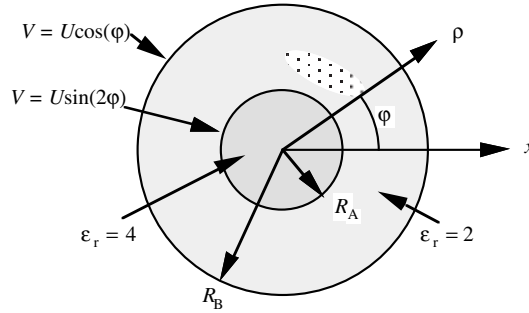


Fig. 11.41 Problème cylindrique circulaire avec des valeurs limites.

11.8.6 On introduit une sphère métallique de rayon R_A , couverte d'un diélectrique d'épaisseur d dans un champ électrique homogène (avant l'introduction de la sphère) d'amplitude E_0 dirigé selon l'axe z . Déterminer la distribution du potentiel et le champ électrique.

11.8.7 Déterminer si la fonction $w = \tan z$ est analytique, et indiquer quelles sont les limitations éventuelles.

11.8.8 Déterminer si la fonction $w = \tan z^*$ est analytique.

11.8.9 Pour quel quotient de dimensions d/R d'une ligne bifilaire les relations approchées du paragraphe 11.6.9 donneront-elles une précision relative de 5 % ?

11.8.10 Analyser la transformation conforme $w = \arcsin(z/d)$ et déterminer quelles géométries elle permet d'étudier.

11.8.11 Faisant usage de la méthode décrite dans le paragraphe 11.6.11, étudier les caractéristiques d'une ligne de transmission bifilaire dont les deux fils ont des rayons différents R_A et R_B , la distance entre les deux centres étant donnée par D . Comparer les résultats obtenus avec ceux pour la ligne tubulaire desaxée.

MÉTHODES INTÉGRALES

12.1 PROBLÈMES UNIDIMENSIONNELS

Lorsque les champs ne dépendent que d'une seule coordonnée, on peut également faire usage de la forme intégrale des équations de Maxwell pour résoudre des problèmes d'électromagnétisme. Il s'agit le plus souvent de déterminer les champs produits par des charges et des courants présentant des conditions particulières de symétrie.

12.1.1 Champ électrique produit par une densité de charge à dépendance radiale

On fait usage d'une des équations intégrales de Maxwell (1.18)

$$\oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) \, dA = \oint_S \mathbf{n} \cdot \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) \, dA = \int_V \rho(\mathbf{r}) \, dV = q_V \quad [\text{As}] \quad (12.1)$$

Le flux du champ de déplacement à travers une surface fermée est égal à la charge totale q_V contenue dans le volume entouré par cette surface. Une seule relation porte sur trois composantes du champ, ce qui ne suffit pas pour déterminer toutes leurs valeurs dans le cas général.

En revanche, une densité de charge sphériquement symétrique $\rho(r)$ crée un champ électrique et un potentiel qui ont également une symétrie sphérique. Ils ne dépendent que de la coordonnée r , et le champ est purement radial. On considère un milieu homogène, pour lequel $\varepsilon \neq f(\mathbf{r})$. On applique la relation (12.1) à une sphère de rayon r , ce qui donne

$$\oint_S \varepsilon E_r(r) \, dA = 4\pi r^2 \varepsilon E_r(r) = \int_0^r \rho(r) 4\pi r^2 \, dr = q(r) \quad [\text{As}] \quad (12.2)$$

où $q(r)$ est la charge totale contenue dans la sphère. Le champ électrique vaut donc

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon r^2} \int_0^r \rho(r) 4\pi r^2 \, dr = \frac{q(r)}{4\pi\varepsilon r^2} \quad [\text{V/m}] \quad (12.3)$$

Lorsque la totalité des charges est contenue à l'intérieur d'une sphère de rayon a , et que par conséquent $\rho(r > a) = 0$, le champ électrique décroît selon $1/r^2$ quand $r > a$. À l'extérieur de la sphère, le champ est le même que si la charge totale $q(a) = q$ était concentrée au centre de la sphère (charge ponctuelle q)

$$E_r(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} \quad [\text{V/m}] \quad (12.4)$$

12.1.2 Potentiel produit par une densité de charge à dépendance radiale

Le potentiel $V(r)$ dont dérive le champ électrique est alors obtenu par intégration

$$V(r) = - \int_0^r E_r(r) dr + \text{cste} = - \int_0^r \frac{q(r)}{4\pi\epsilon r^2} dr + \text{cste} \quad [\text{V}] \quad (12.5)$$

À l'extérieur de la sphère de rayon a qui contient toutes les charges, le potentiel est le même que si la charge totale $q(a) = q$ était concentrée au centre de la sphère (charge ponctuelle q). Le potentiel produit par une charge décroît avec la distance de sorte que, en l'absence d'autres sources de potentiel, la constante d'intégration doit être nulle et on a

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon r} \quad [\text{V}] \quad (12.6)$$

L'allure du champ électrique et celle du potentiel produits par une charge ponctuelle sont représentées à la figure 12.1.

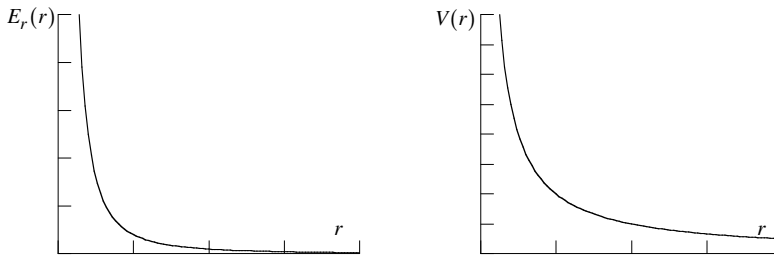


Fig. 12.1 Champ électrique et potentiel produits par une charge ponctuelle.

En dehors de l'origine – où est située la charge ponctuelle – il n'y a pas de charges et le potentiel doit être une solution de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques (§ 11.5.1), qui correspond au cas $m = 0$, $n = 0$.

12.1.3 Remarque

On procède de la même manière en coordonnées cylindriques circulaires pour déterminer le champ électrique et le potentiel produits par une charge linéique rectiligne disposée le long de l'axe z – ou par toute autre distribution de charge qui présente une symétrie radiale $\rho(\rho)$.

En coordonnées cartésiennes, la même méthode sert à déterminer le champ électrique et le potentiel produits par une distribution de charge ne dépendant que d'une seule variable x , y ou z , par exemple dans la jonction pn considérée au paragraphe 10.1.4.

12.1.4 Champ magnétique produit par une densité de courant à dépendance radiale

Une équation de Maxwell (1.17) lie le champ magnétique à la densité de courant

$$\oint_C \mathbf{H}(r) \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}(r) dA \quad [\text{A}] \quad (12.7)$$

C'est ici la circulation du champ magnétique sur un contour fermé C qui est égale au courant total qui traverse la surface. On dispose d'une seule relation scalaire qui lie les trois composantes du champ magnétique aux trois composantes de la densité de courant, ce qui ne suffit manifestement pas pour déterminer leurs valeurs dans le cas général.

Cependant, si le courant est dirigé selon une seule direction, par exemple parallèlement à l'axe z , et qu'il ne varie que dans une direction perpendiculaire, comme la direction radiale en coordonnées cylindriques circulaires, on peut utiliser (12.7) pour déterminer le champ magnétique. On choisit comme contour d'intégration un cercle centré sur un point de l'axe z (fig. 12.2).

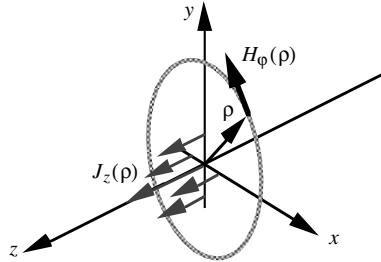


Fig. 12.2 Contour d'intégration pour déterminer le champ magnétique.

On constate que le champ magnétique doit être purement azimutal, de sorte que

$$\oint_C H_\varphi(\rho) dl = 2\pi\rho H_\varphi(\rho) = \int_0^\rho J_z(\rho) 2\pi\rho d\rho = I(\rho) \quad [A] \quad (12.8)$$

où $I(\rho)$ est le courant total qui traverse le contour C . Le champ magnétique vaut alors

$$H_\varphi(\rho) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_0^\rho J_z(\rho) 2\pi\rho d\rho = \frac{I(\rho)}{2\pi\rho} \quad [A/m] \quad (12.9)$$

Lorsque tout le courant passe à l'intérieur d'un contour de rayon a , et par conséquent que $J_z(\rho > a) = 0$, le champ magnétique décroît selon $1/\rho$ pour $\rho > a$. On obtient la même valeur pour le champ, en $\rho > a$, lorsque tout le courant $I(a) = I$ est concentré sur l'axe z (conducteur filiforme)

$$H_\varphi(\rho) = \frac{I}{2\pi\rho} \quad [A/m] \quad (12.10)$$

12.1.5 Principe d'équivalence

On obtient la même valeur de champ magnétique hors du conducteur lorsqu'on a une densité surfacique de courant $I/(2\pi a)$ qui circule à la surface du conducteur (par exemple sur un cep). Il existe en fait une infinité de distributions radiales de courant qui produisent le même champ magnétique à l'extérieur du conducteur, qui sont donc *équivalentes* [111]. On ne peut pas déterminer la répartition du courant dans le conducteur en mesurant le champ magnétique à l'extérieur, puisque celui-ci ne dépend que du courant total. On choisit la distribution la plus simple pour la suite des calculs (12.10).

12.1.6 Champ magnétique dans une ligne coaxiale

On considère la géométrie de la figure 11.6 (§ 11.2.1) et on note que la structure comporte quatre régions différentes qu'on doit étudier séparément.

- La première région, pour $\rho < R_A$, est le conducteur central. Le courant I se répartit de façon uniforme sur toute la section droite, de sorte que le courant qui traverse un contour de rayon ρ est proportionnel au quotient des surfaces

$$I(\rho < R_A) = I(\rho/R_A)^2 \quad [\text{A}] \quad (12.11)$$

Introduisant cette dépendance dans (12.9), on obtient le champ magnétique

$$H_\varphi(\rho < R_A) = \frac{I\rho}{2\pi R_A^2} \quad [\text{A/m}] \quad (12.12)$$

- La deuxième région, définie par $R_A < \rho < R_B$, s'étend entre les deux conducteurs, où aucun courant ne circule. Le courant qui passe à travers le cercle de rayon ρ est le courant I qui circule dans le conducteur central, qui reste constant, et le champ magnétique vaut alors

$$H_\rho(R_A < \rho < R_B) = \frac{I}{2\pi\rho} \quad [\text{A/m}] \quad (12.13)$$

- La troisième région s'étend entre R_B et R_D , il s'agit du conducteur tubulaire extérieur. Le courant qui traverse le cercle de rayon ρ , situé dans le conducteur extérieur, comporte tout le courant dans le conducteur central et une partie de celui dans le conducteur extérieur, proportionnel au quotient des surfaces

$$I(R_B < \rho < R_D) = I - I \frac{(\rho^2 - R_B^2)}{(R_D^2 - R_B^2)} = I \frac{(R_D^2 - \rho^2)}{(R_D^2 - R_B^2)} \quad [\text{A}] \quad (12.14)$$

Introduisant cette dépendance dans (12.9), on obtient le champ magnétique

$$H_\varphi(R_B < \rho < R_D) = \frac{I}{2\pi\rho} \frac{(R_D^2 - \rho^2)}{(R_D^2 - R_B^2)} \quad [\text{A/m}] \quad (12.15)$$

- La quatrième région, $\rho > R_D$, est située en dehors des deux conducteurs. Le courant total qui traverse un cercle de rayon $\rho > R_D$ est la somme des courants dans les deux conducteurs, qui vaut $I - I = 0$. Par (1.17), le champ magnétique est donc nul dans toute cette région.

Les mêmes résultats ont été obtenus aux paragraphes 11.2.2 et 11.2.3, et la dépendance radiale du champ est présentée à la figure 11.10. La résolution du problème est plus simple par la méthode intégrale, où on n'a pas besoin des conditions aux limites. De plus, la raison pour laquelle le champ hors du conducteur extérieur s'annule est ici évidente.

12.1.7 Remarque

On procède de la même manière en coordonnées cartésiennes pour déterminer le champ magnétique produit par un courant circulant dans une plaque métallique, considéré au paragraphe 11.1.5, et on peut généraliser la méthode pour étudier l'effet de courants circulant sur un ensemble de plaques parallèles.

12.1.8 Potentiel vecteur produit par un courant infinitésimal

La relation qui lie le potentiel vecteur magnétique $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ à la densité de courant, en régime magnétostatique, est donnée par (10.31) lorsque $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad [\text{Vs/m}^3] \quad (12.16)$$

On considère une composante de cette relation vectorielle, par exemple celle selon y

$$\nabla^2 A_y(\mathbf{r}) = -\mu J_y(\mathbf{r}) \quad [\text{Vs/m}^3] \quad (12.17)$$

Cette relation a la même forme que l'équation de Poisson (10.27): la composante du potentiel vecteur magnétique $A_y(\mathbf{r})$ dépend du courant $J_y(\mathbf{r})$ de la même manière que le potentiel électrique $V(\mathbf{r})$ dépend de la charge $\rho(\mathbf{r})$ (mais avec un coefficient différent). L'équivalent magnétostatique d'une charge ponctuelle est un élément infinitésimal de courant $J_{\delta y}$, de sorte qu'en transcrivant (12.6), on obtient

$$A_y(r) = \frac{\mu J_{\delta y}}{4\pi r} \quad [\text{Vs/m}] \quad (12.18)$$

On procède de la même façon pour les composantes dans les deux autres directions, et on combine les trois composantes du potentiel vecteur

$$\mathbf{A}(r) = \mathbf{e}_x A_x(r) + \mathbf{e}_y A_y(r) + \mathbf{e}_z A_z(r) = \mathbf{e}_x \frac{\mu J_{\delta x}}{4\pi r} + \mathbf{e}_y \frac{\mu J_{\delta y}}{4\pi r} + \mathbf{e}_z \frac{\mu J_{\delta z}}{4\pi r} = \frac{\mu \mathbf{J}_{\delta}}{4\pi r} \quad [\text{Vs/m}] \quad (12.19)$$

Le potentiel vecteur est parallèle à l'élément de courant qui le produit, et son amplitude décroît selon $1/r$ lorsqu'on s'éloigne de la source.

12.1.9 Remarque

Un élément infinitésimal de courant ne peut pas exister de manière indépendante, mais il doit toujours être connecté à d'autres éléments, de telle sorte que leur ensemble forme un circuit fermé (§ 12.7.4). En superposant les potentiels créés par tous les éléments de courant, on obtient le potentiel total produit par le courant qui circule dans tout le circuit (10.32).

12.1.10 Dipôle de Hertz en régime sinusoïdal

Le problème correspondant en régime sinusoïdal – avec la notation des vecteurs-phaseurs – est traité dans la section 9.1, en résolvant l'équation d'onde dans un système de coordonnées sphériques. La solution obtenue devient singulière à l'origine, ce qui indique la présence d'un élément infinitésimal de courant \mathbf{J}_{δ} , appelé dipôle de Hertz. Lorsqu'on fait usage de la jauge de Lorentz (7.34), le potentiel vecteur $\underline{\mathbf{A}}(r)$ produit par le dipôle de Hertz est donné par (9.8)

$$\underline{\mathbf{A}}(r) = \frac{\mu}{4\pi} \mathbf{J}_{\delta} \frac{e^{-j\omega\sqrt{\epsilon\mu}r}}{r} \quad [\text{Vs/m}^2] \quad (12.20)$$

On constate qu'on retrouve bien la solution du problème magnétostatique (12.19) lorsqu'on pose que $\omega = 0$ dans (12.20).

12.2 SUPERPOSITION

12.2.1 Translation d'une charge ponctuelle

Les problèmes traités dans la section 12.1 considèrent des sources ponctuelles situées à l'origine ou un courant filiforme qui circule le long d'un axe. Quand on étudie des structures avec plusieurs charges (courants), ces charges (courants) se trouvent à des endroits différents. On détermine les champs et les potentiels produits, et on les superpose.

En coordonnées cartésiennes, un déplacement linéaire s'effectue très facilement, mais il n'en va pas de même pour les systèmes de coordonnées sphériques ou cylindriques circulaires [112]. On exprime donc les potentiels et les champs, précédemment déterminés dans d'autres systèmes de coordonnées, en termes des coordonnées cartésiennes pour pouvoir effectuer un décalage latéral (sans rotation).

Le potentiel créé par une charge q située au point $\mathbf{r}' = e_x x' + e_y y' + e_z z'$ est donné par une translation de (12.6)

$$V(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{q}{4\pi\epsilon \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \quad [\text{V}] \quad (12.21)$$

On obtient ensuite le champ électrique en prenant le gradient du potentiel

$$\mathbf{E}(x, y, z) = -\nabla V(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{e_x(x-x') + e_y(y-y') + e_z(z-z')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \quad [\text{V/m}] \quad (12.22)$$

Lorsque la source n'est pas située à l'origine du système de coordonnées, le potentiel et le champ dépendent de plusieurs variables, et la direction du champ n'est plus simplement radiale.

12.2.2 Application: dipôle électrique

On désigne sous ce nom un ensemble de deux charges ponctuelles de même amplitude mais de polarités opposées disposées infiniment près l'une de l'autre. On considère deux charges $+q$ et $-q$, qui sont disposées sur l'axe vertical z aux points $z = +d$ et $z = -d$ (fig. 12.3).

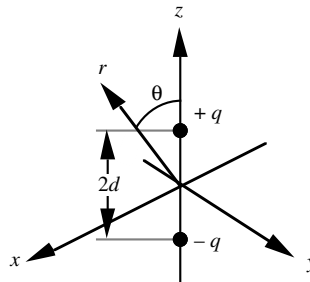


Fig. 12.3 Dipôle électrique ou doublet.

Le potentiel $V(x, y, z)$ est obtenu en superposant deux expressions de la forme (12.20)

$$V(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right] \quad [\text{V}] \quad (12.23)$$

On développe cette expression, ce qui donne pour le premier terme

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2dz + d^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2dz + d^2}} = \frac{1}{r\sqrt{1 - 2dz/r^2 + d^2/r^2}} \quad [\text{m}^{-1}] \quad (12.24)$$

On fait ensuite tendre vers zéro la distance $2d$ entre les charges, tout en maintenant constant le moment p du dipôle, défini par

$$p = e_z p = e_z 2qd \quad [\text{Asm}] \quad (12.25)$$

Lorsque d devient très petit, des approximations sont possibles et on néglige certains termes supérieurs du développement. L'expression (12.24) prend alors la forme

$$\frac{1}{r\sqrt{1 - 2dz/r^2 + d^2/r^2}} \cong \frac{1}{r\sqrt{1 - 2dr\cos\theta/r^2}} \cong \frac{1 + d\cos\theta/r}{r} \quad [\text{m}^{-1}] \quad (12.26)$$

où on a fait usage du développement limité $(1 + \delta)^n \cong 1 + n\delta$ pour $\delta \ll 1$. On applique le même traitement au second terme de (12.23) et on regroupe les deux termes transformés, ce qui donne

$$V(x, y, z) \cong \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1 + d\cos\theta/r}{r} - \frac{1 - d\cos\theta/r}{r} \right] = \frac{2qd\cos\theta}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon r^2} \quad [\text{V}] \quad (12.27)$$

On remarque que les deux charges sont situées à l'origine, et qu'il n'en existe pas d'autres dans tout le reste de l'espace. Par conséquent, en dehors de l'origine le potentiel satisfait à l'équation de Laplace et correspond au cas $m = 1$, $n = 0$ du paragraphe 11.5.1.

On peut encore développer l'expression du potentiel avec le moment du dipôle

$$V(x, y, z) \cong \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \mathbf{p} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \quad [\text{V}] \quad (12.28)$$

Les équipotentielles s'obtiennent en posant que le potentiel donné par (12.27) est constant, ce qui donne

$$r = C\sqrt{\cos\theta} \quad [\text{m}] \quad (12.29)$$

Le champ électrique est ensuite déterminé en prenant le gradient du potentiel

$$\mathbf{E}(x, y, z) \cong \frac{p}{4\pi\epsilon r^3} [2\mathbf{e}_r \cos\theta + \mathbf{e}_\theta \sin\theta] \quad [\text{V/m}] \quad (12.30)$$

On établit l'équation différentielle des lignes de champ en égalant les quotients des éléments de longueur (en coordonnées sphériques) aux valeurs des composantes, puis en regroupant les fonctions de r et de θ

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta} \quad \rightarrow \quad \frac{dr}{2\cos\theta} = \frac{r d\theta}{\sin\theta} \quad \rightarrow \quad \frac{dr}{r} = 2 \frac{\cos\theta d\theta}{\sin\theta} \quad (12.31)$$

Dans la dernière expression, les numérateurs sont les dérivées des dénominateurs, de sorte que l'intégration donne des logarithmes et on obtient l'équation des lignes de champ

$$r = K \sin^2 \theta \quad K = \text{cste} \quad [\text{m}] \quad (12.32)$$

Les deux familles de courbes sont représentées dans la figure 12.4. Du fait de la symétrie autour de l'axe z , le potentiel et le champ ne dépendent pas de la variable azimutale φ : cette figure reste inchangée si on la fait tourner autour de l'axe z .

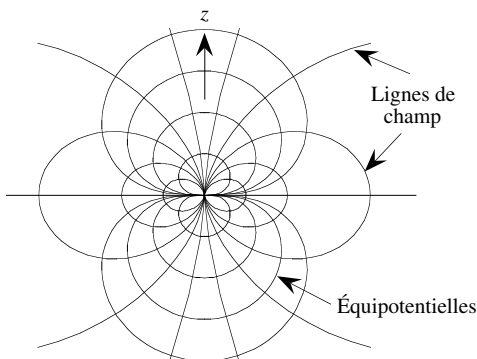


Fig. 12.4 Équipotentiels et lignes de champ d'un dipôle électrique.

12.2.3 Remarque

Dans les approximations effectuées en prenant la limite $d \rightarrow 0$, on a négligé les termes en d^2 et obtenu une dépendance du potentiel en r^{-2} . Si l'on considère des assemblages de plus de deux charges, qui donnent une dépendance en r^{-n} avec $n > 2$, on doit conserver des termes d'ordre supérieur, de façon à obtenir une dépendance non nulle.

12.2.4 Translation d'un courant infinitésimal

De façon similaire à ce qui a été fait pour une charge (§ 12.2.1), le potentiel vecteur $\mathbf{A}(x, y, z)$ produit par un élément de courant infinitésimal \mathbf{J}_δ en un point \mathbf{r}' est donné par

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu \mathbf{J}_\delta}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mu \mathbf{J}_\delta}{4\pi \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \quad [\text{Vs/m}] \quad (12.33)$$

Le champ magnétique qui en découle s'obtient en prenant le rotationnel

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(x, y, z) &= \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}(x, y, z) = \frac{1}{\mu} \nabla \times \frac{\mu \mathbf{J}_\delta}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi} \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times \mathbf{J}_\delta = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{J}_\delta \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{\mathbf{e}_x [J_{\delta y} (z - z') - J_{\delta z} (y - y')] + \mathbf{e}_y [J_{\delta z} (x - x') - J_{\delta x} (z - z')] + \mathbf{e}_z [J_{\delta x} (y - y') - J_{\delta y} (x - x')]}{4\pi [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad [\text{A/m}] \quad (12.34)$$

12.2.5 Champ magnétique autour d'un conducteur filiforme

La composante azimutale du champ magnétique produit par un courant filiforme est donnée par (12.10). Cette relation peut être mise sous forme cartésienne

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I \mathbf{e}_\varphi}{2\pi\rho} = \frac{I \mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\rho}}{2\pi\rho^2} = \frac{I \mathbf{e}_z \times (\mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y)}{2\pi\rho^2} = \frac{I(-\mathbf{e}_x y + \mathbf{e}_y x)}{2\pi(x^2 + y^2)} \quad [\text{A/m}] \quad (12.35)$$

Il est alors simple d'effectuer une translation pour considérer l'effet d'un courant filiforme parallèle à l'axe z situé en (x', y')

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I[-\mathbf{e}_x(y - y') + \mathbf{e}_y(x - x')]}{2\pi[(x - x')^2 + (y - y')^2]} \quad [\text{A/m}] \quad (12.36)$$

Par permutation cyclique, on peut également déterminer le champ magnétique produit par des courants parallèles à l'axe x ou à l'axe y . En superposant on obtient ensuite le champ résultant d'une combinaison quelconque de courants filiformes dirigés selon les trois axes de coordonnées. Les courants sont toujours uniformes, c'est-à-dire qu'ils ne varient pas le long du conducteur, qui doit de ce fait être de longueur infinie.

On peut également déterminer le champ magnétique produit par un courant dirigé obliquement, en remplaçant le vecteur direction du courant \mathbf{e}_z et le vecteur distance au conducteur $\boldsymbol{\rho}$ dans (12.35) par les valeurs idoines.

12.3 MÉTHODE DES IMAGES

12.3.1 Charge ponctuelle et plaque métallique

Une charge ponctuelle située près d'un plan métallique en cep (fig. 12.5(a)) crée un champ électrique qui a une composante tangentielle non nulle sur le conducteur. Ce champ ne satisfait pas les conditions aux limites, et il faut ajouter une solution de l'équation de Laplace, de façon à annuler la composante tangentielle totale.

Le terme ajouté est le champ produit par les charges de surface qui apparaissent sur le conducteur pour annuler le champ électrique tangent. Suite à la symétrie cylindrique du problème, la solution de l'équation de Laplace est une intégrale de superposition (convolution, transformée de Hankel) de fonctions de Bessel (§ 11.4.1) [113].

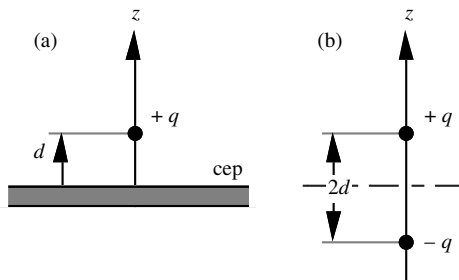


Fig. 12.5 Charge électrique près d'un plan métallique: (a) structure à étudier, (b) structure équivalente.

Il existe toutefois une méthode beaucoup plus simple (et plus élégante) pour résoudre ce problème, en considérant le plan métallique comme un miroir [114], et en introduisant une charge image fictive – de l’autre côté du miroir en quelque sorte. On supprime alors le conducteur (fig. 12.5(b)) et on obtient un dipôle électrique (§ 12.2.2), – mais on ne prend pas la limite. Au-dessus de la plaque, le potentiel est donné par (12.23), et on peut contrôler qu’il est nul en $z = 0$. La condition sur la surface métallique est bien satisfaite.

12.3.2 Charge ponctuelle dans un angle de conducteur

Il est possible d’appliquer simultanément la méthode des images à plusieurs plaques métalliques, pour autant qu’on puisse définir un ensemble cohérent de charges images (fig. 12.6). Il faut que le nombre total de charges, disposées sur un cercle, soit pair.

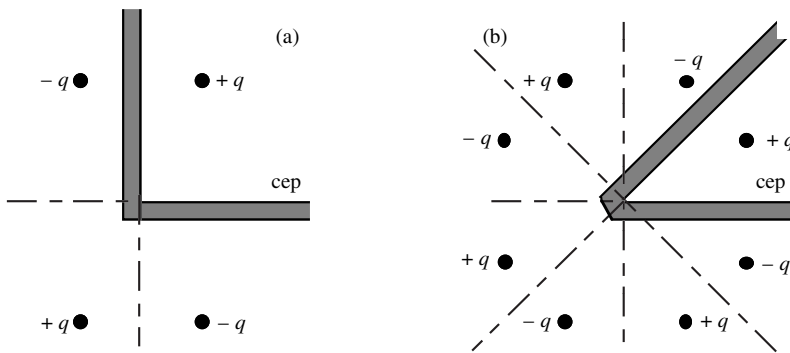


Fig. 12.6 Charges dans un angle de conducteur: (a) angle de 90° , (b) angle de 45° .

12.3.3 Charge ponctuelle entre deux plaques métalliques parallèles

Lorsqu’une charge est située entre deux plaques parallèles, on ne peut plus assurer une distribution symétrique de charges virtuelles avec un nombre fini de charges. On doit dans ce cas introduire un ensemble infini d’images (fig. 12.7), et évaluer une somme comportant un nombre infini de termes. On constate toutefois que la contribution des charges décroît avec leur distance, et on tronque la somme lorsque les termes ultérieurs ne sont plus significatifs. On peut accélérer la convergence en formant des groupes de deux, quatre ou huit points adjacents: on obtient alors une série qui converge plus rapidement.

La méthode des images permet aussi d’étudier des structures formées des couches de diélectriques différents, en introduisant des charges virtuelles partielles [115].

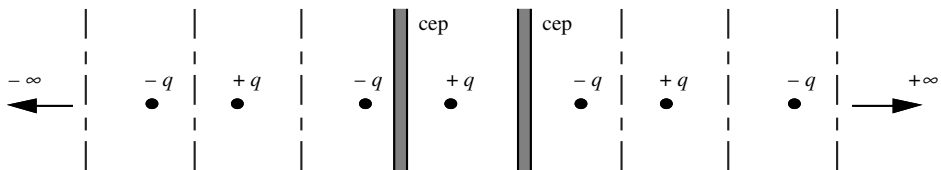


Fig. 12.7 Charge entre deux plans métalliques.

12.4 INTÉGRATION EN ÉLECTROSTATIQUE

On peut généraliser l'analyse et considérer des distributions continues de charges électriques, distribuées dans un volume, sur une surface ou le long d'un contour. Le potentiel et le champ électrique s'obtiennent en intégrant sur l'ensemble des charges.

12.4.1 Potentiel scalaire produit par une distribution de charges

Une distribution générale de charges peut comporter (fig. 12.8):

- une densité de charge volumique $\rho(\mathbf{r}') \text{ [As/m}^3\text{]}$ dans un volume V' ;
- une densité de charge surfacique $\rho_s(\mathbf{r}') \text{ [As/m}^2\text{]}$ sur une surface S' ;
- une densité de charge linéique $\rho_l(\mathbf{r}') \text{ [As/m]}$ sur un contour C' ;
- un ensemble de charges ponctuelles $q_k \text{ [As]}$ aux points \mathbf{r}'_k .

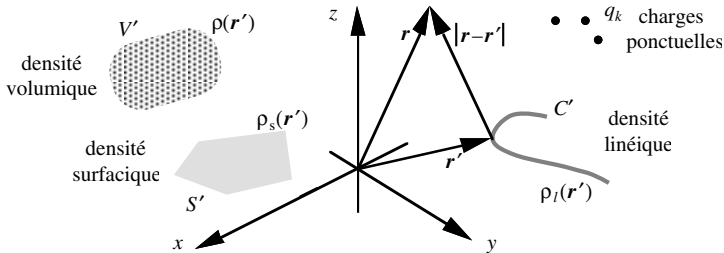


Fig. 12.8 Ensemble de charges et définition des grandeurs.

Le potentiel produit par une distribution quelconque des quatre types de charges est donné par la relation générale

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \int_{S'} \frac{\rho_s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \int_{C'} \frac{\rho_l(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dl' + \sum_k \frac{q_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k|} \right] \quad [\text{V}] \quad (12.37)$$

Le vecteur $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ indique la distance entre l'élément de charge considéré et le point d'observation. Le potentiel n'est fonction que de la coordonnée \mathbf{r} , tandis que les éléments de charge ρ , ρ_s et ρ_l ne dépendent que de \mathbf{r}' . Les intégrations sont effectuées sur les régions qui contiennent des charges, elles portent sur la seule coordonnée \mathbf{r}' .

Lorsque les densités de charge sont connues, on peut déterminer le potentiel produit en tout point de l'espace – pour autant qu'on puisse évaluer les intégrales. Dans certaines situations simples, l'intégration peut s'effectuer analytiquement, mais pour des structures plus complexes on a recours à des méthodes d'intégration numérique à l'ordinateur [96].

Dans les problèmes qu'on rencontre couramment dans la pratique, en revanche, les densités de charges ne sont pas connues *a priori* – à l'exception de termes de source éventuels, nécessaires pour spécifier le problème. On doit chercher quelles densités de charges permettent de satisfaire les conditions aux limites du problème (sect. 13.4). Pour cela on fait des approximations, que l'on ajuste avec des techniques de CAO (§ 13.6.1).

12.4.2 Champ électrique produit par une distribution de charges

Le champ électrique est obtenu en prenant le gradient du potentiel

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad [\text{V/m}] \quad (12.38)$$

Ces deux grandeurs ne dépendent que de la coordonnée \mathbf{r} (point d'observation), de sorte que les dérivations ne portent que sur cette coordonnée. On introduit le potentiel $V(\mathbf{r})$ donné par (12.37) dans (12.38) et on inverse l'ordre des opérations d'intégration et de dérivation. Prenant le gradient on trouve que

$$\nabla \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad [\text{m}^{-2}] \quad (12.39)$$

Le champ électrique est alors donné par

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\int_{V'} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dV' + \int_{S'} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho_s(\mathbf{r}') dS' + \int_{C'} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho_l(\mathbf{r}') dl' + \sum_k \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k|^3} q_k \right] \quad [\text{V/m}] \quad (12.40)$$

L'intégration des expressions dans (12.40) pour le champ est plus difficile que celle de (12.37) pour le potentiel. Il est en général préférable de déterminer d'abord le potentiel, donné par une relation scalaire, et d'en prendre ensuite le gradient, plutôt que d'intégrer directement (12.40), qui est une relation vectorielle à 3 composantes.

12.4.3 Singularités

Le potentiel et le champ électrique présentent des singularités et des discontinuités en présence de systèmes de charges:

- à l'emplacement d'une charge ponctuelle q ou d'une densité linéique de charge ρ_l le potentiel et le champ électrique sont singuliers,
- le potentiel est fini et continu, mais le champ électrique est discontinu en présence d'une densité de charge de surface ρ_s ,
- le potentiel et le champ électrique sont tous deux finis et continus dans une région occupée par une densité volumique de charges ρ .

12.4.4 Potentiel produit par une ligne de charge

On considère un segment de droite de longueur finie $2d$, chargé par une densité linéique de charges ρ_l constante (fig. 12.9). On choisit le système de coordonnées cylindriques circulaires pour déterminer le potentiel V , car c'est celui qui convient le mieux pour étudier cette géométrie. Comme la structure est symétrique, le potentiel ne dépend pas de la coordonnée azimutale, de sorte que les termes à introduire dans (12.37) ont la forme $\mathbf{r} = \rho\mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_z z$, $\mathbf{r}' = \mathbf{e}_z z'$ et $d\mathbf{l}' = \mathbf{e}_z dz'$, ce qui donne

$$V(\rho, z) = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon} \int_{-d}^{+d} \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon} \ln \frac{\sqrt{\rho^2 + (d - z)^2} + (d - z)}{\sqrt{\rho^2 + (d + z)^2} - (d + z)} \quad [\text{V}] \quad (12.41)$$

Les équipotentielles sont alors fournies par la relation

$$\frac{\sqrt{\rho^2 + (d-z)^2} + (d-z)}{\sqrt{\rho^2 + (d+z)^2} - (d+z)} = \text{cste} \quad [-] \quad (12.42)$$

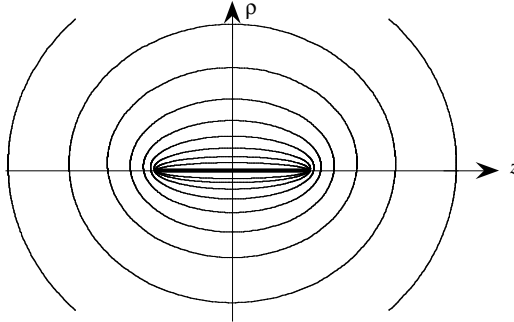


Fig. 12.9 Potentiel d'une densité linéique de charge.

On peut encore développer le potentiel en série, ce qui donne après de sérieux calculs au moyen d'expansions en développements limités

$$V(r, \theta) \cong \frac{2d\rho_l}{4\pi\epsilon r} + \frac{d^3\rho_l}{6\pi\epsilon r^3} \left[\frac{3}{4} \cos 2\theta + \frac{1}{4} \right] + \dots \quad [V] \quad (12.43)$$

Le premier terme est celui d'une charge ponctuelle $2d\rho_l$ placée à l'origine, les termes suivants sont ceux de multipôles d'ordre impair, avec des dépendances en P_2^0/r^3 , P_4^0/r^5 , etc. À grande distance du segment de conducteur, on peut remplacer celui-ci par un ensemble de multipôles [116]. En dehors de la région qui contient les charges, le potentiel satisfait l'équation de Laplace (polynômes de Legendre, § 9.1.3).

12.4.5 Potentiel produit par une lame métallique chargée

On considère une lame métallique de largeur $2a$ et de longueur théoriquement infinie, chargée par une densité surfacique de charges ρ_s constante (fig. 12.10). On détermine dans ce cas le potentiel en coordonnées cartésiennes, disposant la lame symétriquement par rapport à l'axe z dans le plan $y = 0$.

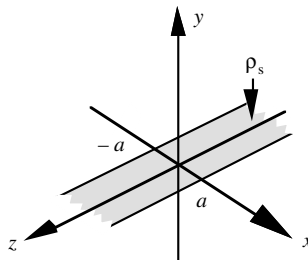


Fig. 12.10 Lame métallique avec une densité de charge électrique ρ_s .

On considère cette lame comme formée de fils infiniment minces de densité linéique de charge ρ_l . Pour un fil situé le long de l'axe z , on obtient le potentiel en considérant un cylindre de rayon a centré sur l'axe z , de longueur l , sur lequel on évalue l'équation intégrale de Maxwell (1.18)

$$\oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) \, dA = 2\pi\rho l D_\rho = \int_V \rho(\mathbf{r}) \, dV = \rho_l l \quad [\text{As}] \quad (12.44)$$

On en tire que

$$\mathbf{D} = \epsilon_\rho \frac{\rho_l}{2\pi\rho} \quad \text{et donc que} \quad V = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \rho \quad [\text{V}] \quad (12.45)$$

Sur la lame métallique chargée (fig. 12.10), ρ_l devient $\rho_s \, dx'$, la coordonnée ρ est remplacée par sa valeur en coordonnées cartésiennes décalées, et il faut évaluer l'intégrale

$$V = -\frac{\rho_s}{2\pi\epsilon} \int_{-a}^{+a} \ln \sqrt{(x-x')^2 + y^2} \, dx' = -\frac{\rho_s}{4\pi\epsilon} \int_{-a-x}^{+a-x} \ln(u^2 + y^2) \, du \quad [\text{V}] \quad (12.46)$$

On trouve sa valeur dans les tables mathématiques [117]

$$V(x, z) = -\frac{\rho_s}{4\pi\epsilon} a \ln \left\{ \left[(x-a)^2 + y^2 \right] \left[(x+a)^2 + y^2 \right] \right\} \\ - \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon} \left\{ x \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} + 2y \arctan \frac{2ay}{y^2 + x^2 - a^2} - 4a \right\} \quad [\text{V}] \quad (12.47)$$

Le potentiel $V(x, z)$ ne tend pas vers zéro à l'infini parce que la charge totale sur la lame n'est pas bornée. Le potentiel dans cette structure est représenté dans la figure 12.11.

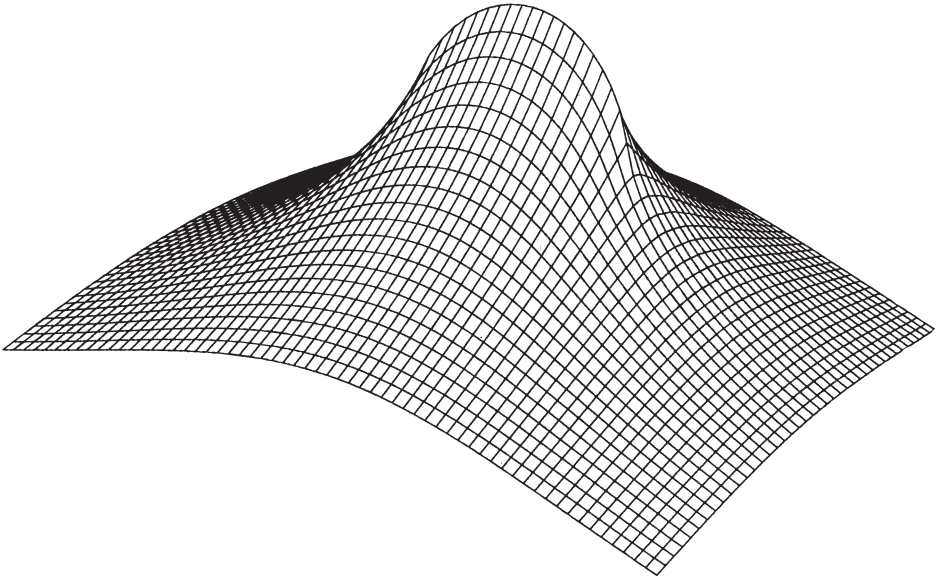


Fig. 12.11 Potentiel d'une lame métallique chargée.

12.5 INTÉGRATION EN MAGNÉTOSTATIQUE

12.5.1 Potentiel vecteur produit par une distribution de courants

On procède de la même manière pour trouver le potentiel vecteur produit par un ensemble arbitraire de courants, formé de trois différentes distributions (fig. 12.12):

- une densité de courant volumique $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ [A/m²] dans un volume V' ;
- une densité de courant de surface $\mathbf{J}_s(\mathbf{r}')$ [A/m] sur une surface S' ;
- un courant filiforme $I(\mathbf{r}')$ [A] sur un contour C' .

Le potentiel vecteur produit par une distribution quelconque de ces trois types de courants est donné par la relation générale

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi\epsilon} \left[\int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \int_{S'} \frac{\mathbf{J}_s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \int_{C'} \frac{I(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{l}' \right] \quad [\text{Vs/m}] \quad (12.48)$$

Le vecteur $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ indique la distance de l'élément de courant considéré au point d'observation. Le potentiel vecteur ne dépend que de la coordonnée \mathbf{r} , tandis que les courants \mathbf{J} , \mathbf{J}_s et I dépendent de \mathbf{r}' . Les intégrations portent sur la coordonnée \mathbf{r}' .

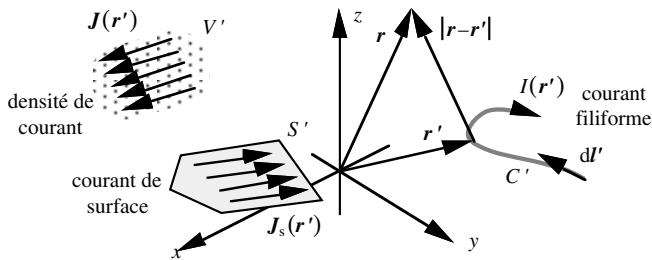


Fig. 12.12 Ensemble de courants et définition des grandeurs.

Lorsque tous les courants sont connus, on peut déterminer le potentiel vecteur produit en tout point de l'espace – pour autant que l'on parvienne à évaluer les intégrales.

12.5.2 Champ magnétique produit par une distribution de courants

Le champ magnétique est donné par le rotationnel du potentiel vecteur divisé par μ

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r})}{\mu} = \frac{\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})}{\mu} \quad [\text{A/m}] \quad (12.49)$$

On introduit le potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ donné par (12.48) et on effectue les dérivations, en tenant compte du fait qu'elles ne concernent que la coordonnée \mathbf{r} . Par exemple, le terme relatif à la densité de courant prend la forme

$$\nabla \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \left[\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') = \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad [\text{A/m}^4] \quad (12.50)$$

Le champ magnétique produit par une distribution arbitraire des trois types de courants est alors fourni par

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left[\int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' + \int_{S'} \frac{\mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS' + \int_{C'} \frac{I(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{l}' \right] \quad [\text{A/m}] \quad (12.51)$$

L'intégration des expressions dans (12.51) pour le champ magnétique est généralement plus difficile que celle de (12.48) pour le potentiel vecteur, du fait de la présence du cube de la distance au dénominateur. Il est le plus souvent préférable de chercher d'abord le potentiel vecteur, puis d'en prendre le rotationnel. En particulier, la présence de pôles de troisième ordre dans (12.51) rend l'évaluation numérique des intégrales plus délicate que celles des intégrales de (12.48), qui ont des singularités d'ordre 1.

12.5.3 Conducteur rectiligne de longueur finie

On considère un conducteur rectiligne infiniment mince de longueur $2d$, disposé le long de l'axe z et parcouru par un courant uniforme I (fig. 12.13). Il s'agit en fait d'une partie de structure – par exemple du quart d'une spire carrée – car un courant ne peut pas sortir subitement du néant en un point pour y retourner en un autre point – la structure complète du conducteur doit être continue pour permettre le passage du courant (§ 12.7.4).

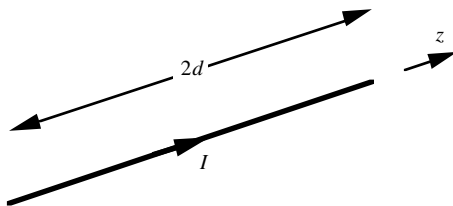


Fig. 12.13 Conducteur rectiligne de longueur finie $2d$.

Du fait de la symétrie axiale de cette géométrie, le champ magnétique est purement azimutal et ne dépend pas de la variable φ . Le système qui convient le mieux pour traiter ce problème est le repère de coordonnées cylindriques circulaires, et on a ici $\mathbf{r} = e_\rho \rho + e_z z$, $\mathbf{r}' = e_z z'$ et $d\mathbf{l}' = e_z dz'$

$$\mathbf{H}(\rho, z) = e_\varphi \frac{I\rho}{4\pi} \int_{-d}^{+d} \frac{dz'}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = e_\varphi \frac{I}{4\pi\rho} \left[\frac{d - z}{\sqrt{\rho^2 + (d - z)^2}} + \frac{d + z}{\sqrt{\rho^2 + (d + z)^2}} \right] \quad [\text{A/m}] \quad (12.52)$$

Le rapport entre l'amplitude du champ magnétique et le courant est présenté à la figure 12.12, en fonction de la position radiale relative ρ/d , dans différents plans transverses z/d . On constate que le potentiel est singulier à l'emplacement où se trouve le courant, et qu'il s'annule partout ailleurs sur l'axe z . À grande distance du conducteur le potentiel décroît comme $1/r^2$.

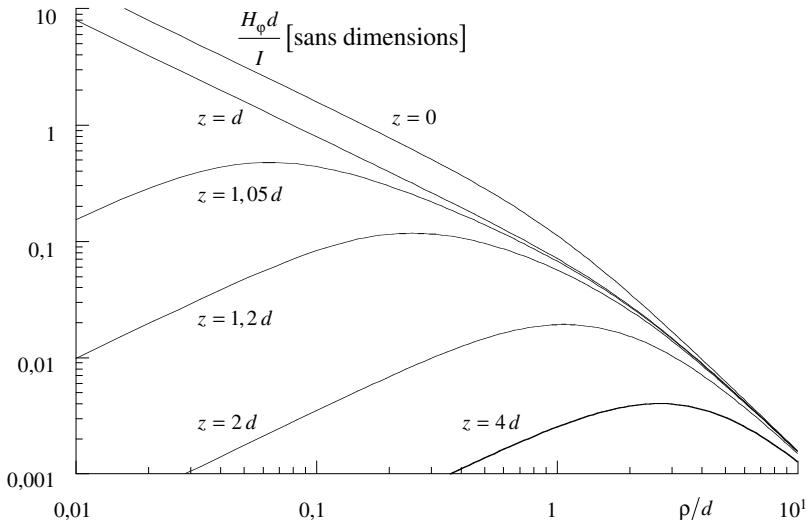


Fig. 12.14 Champ magnétique d'un conducteur rectiligne de longueur finie.

12.5.4 Dipôle magnétique

On considère ensuite un courant qui circule sur une spire circulaire (fig. 12.15). Par suite de la symétrie par rapport à l'axe z , le champ magnétique $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ et le potentiel ne dépendent pas de la coordonnée φ . Par ailleurs, également par suite de la symétrie, le potentiel vecteur n'a qu'une seule composante A_φ . On ne considère donc que l'élément de potentiel vecteur dA_φ produit par un élément de contour $d\mathbf{l}'$

$$dA_\varphi = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l}' \cos \varphi'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad [\text{Vs/m}] \quad (12.53)$$

On intègre (12.53) sur le contour C'

$$A_\varphi = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\mathbf{l}' \cos \varphi'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mu I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\varphi' \quad [\text{Vs/m}] \quad (12.54)$$

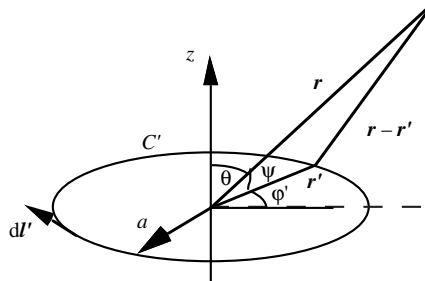


Fig. 12.15 Spire circulaire de conducteur parcourue par un courant uniforme.

La distance $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ est déterminée géométriquement en considérant la figure 12.15

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \psi = r^2 + a^2 - 2ar \sin \theta \cos \varphi' \quad [\text{m}^2] \quad (12.55)$$

En introduisant cette relation dans (12.54), on obtient une intégrale qui donne des fonctions elliptiques (§ 12.6.2). On ne considère pour l'instant que le cas $r \gg a$ pour lequel on peut effectuer des simplifications

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 - 2 \left(\frac{a}{r} \right) \sin \theta \cos \varphi' \right]^{-1/2} \cong \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right) \sin \theta \cos \varphi' \right] \quad [\text{m}^{-1}] \quad (12.56)$$

On introduit cette valeur approchée dans (12.54) que l'on peut alors intégrer, ce qui donne la valeur asymptotique de A_φ

$$A_\varphi \cong \frac{\mu I a}{4\pi r} \int_0^{2\pi} \left(\cos \varphi' + \frac{a}{r} \sin \theta \cos^2 \varphi' \right) d\varphi' = \frac{\mu I a^2}{4r^2} \sin \theta \quad [\text{Vs/m}] \quad (12.57)$$

Le champ d'induction $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ est alors obtenu en prenant le rotationnel

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cong \frac{\mu I a^2}{4r^3} [2\mathbf{e}_r \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta] \quad [\text{Vs/m}^2] \quad (12.58)$$

En comparant ce résultat avec celui obtenu pour le dipôle électrique (§ 12.2.2), on constate que la dépendance des champs à grande distance est la même. On a les mêmes équipotentielles et les mêmes lignes de champ que dans la figure 12.4. On parle donc de dipôle magnétique et on introduit par analogie le moment dipolaire magnétique \mathbf{m}

$$\mathbf{m} = \mathbf{e}_z I \pi a^2 \quad [\text{Am}^2] \quad (12.59)$$

Le potentiel vecteur est alors défini par

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu}{4\pi} \mathbf{m} \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \quad [\text{Vs/m}] \quad (12.60)$$

On note ici le parallélisme avec (12.28) en électrostatique.

12.5.5 Rayonnement d'une boucle de courant ou dipôle magnétique

Le rayonnement d'une antenne boucle de petites dimensions par rapport à la longueur d'onde a été considéré dans la section 9.3, en termes des vecteurs-phaseurs en régime sinusoïdal. La boucle métallique a un rayon a et elle est parcourue par un phaseur de courant I . Le potentiel vecteur à grande distance de la boucle prend la forme (9.24)

$$\underline{\mathbf{A}}(r, \theta) \cong \mathbf{e}_\varphi \frac{j\mu_0 I a}{2r} J_1(\beta_0 a \sin \theta) e^{-j\beta_0 r} \cong -\mathbf{e}_\varphi \frac{\mu_0 I (\beta_0 a)^2}{4j\beta_0 r} \sin \theta e^{-j\beta_0 r} \quad [\text{Vs/m}] \quad (12.61)$$

On constate que, si cette expression a la même dépendance angulaire que (12.58), en revanche sa décroissance est en r^{-1} , qui correspond au rayonnement. Quand on prend la limite $\beta_0 \rightarrow 0$, le potentiel-vecteur à grande distance tend vers zéro, ce qui indique que la boucle ne produit pas de rayonnement à fréquence nulle.

12.6 INDUCTANCE MUTUELLE

12.6.1 Inductance mutuelle entre un conducteur rectiligne et une spire carrée

On considère l'effet d'un conducteur rectiligne, disposé selon l'axe des z , sur une spire carrée de côté $2a$. L'axe y est disposé perpendiculairement à la spire, placée dans le plan $y = d$ (fig. 12.16). La distance b entre le conducteur rectiligne et la projection de l'axe de symétrie de la spire carrée dans le plan $y = 0$ indique le décalage latéral de celle-ci. Les spires sont situées dans un milieu non aimantable, et donc $\mu = \mu_0$.

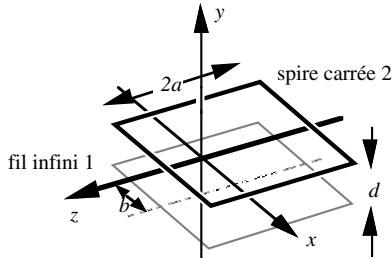


Fig. 12.16 Conducteur rectiligne et spire carrée.

Le champ magnétique produit par un courant uniforme dans un conducteur rectiligne, déterminé au paragraphe 12.1.4, est donné dans le plan $y = d$ par

$$\mathbf{H}(x, d) = \frac{I}{2\pi} \frac{-\mathbf{e}_x d + \mathbf{e}_y x}{x^2 + d^2} \quad [\text{A/m}] \quad (12.62)$$

On admet que cette relation, dérivée dans le cas magnétostatique, est encore valable pour un courant qui varie lentement (§ 10.6.5), et on fait usage de (10.38) pour déterminer l'inductance mutuelle, l'élément de surface valant ici $\mathbf{n} dA_2 = \mathbf{e}_y dx dz$

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{z-a}^{z+a} dz \int_{-a-b}^{a-b} \frac{x dx}{x^2 + d^2} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{(a-b)^2 + d^2}{(a+b)^2 + d^2} \quad [\text{H}] \quad (12.63)$$

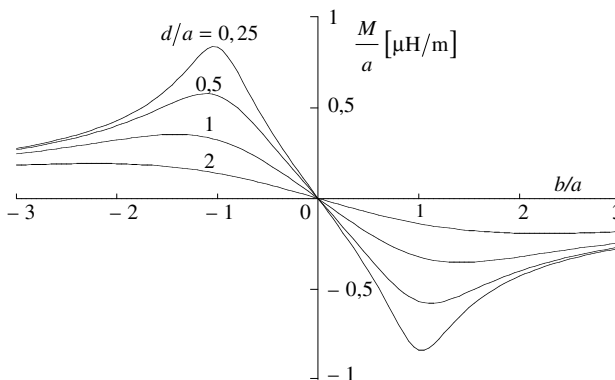


Fig. 12.17 Inductance mutuelle entre un conducteur rectiligne et une spire carrée.

La variation de l'inductance mutuelle M est représentée dans la figure 12.17 en fonction du déplacement latéral relatif b/a , pour plusieurs hauteurs d/a de la spire. Lorsque $b = 0$, c'est-à-dire lorsque le conducteur rectiligne est situé en dessous de l'axe de symétrie de la spire carrée, l'inductance mutuelle est nulle. L'inversion du signe de l'inductance mutuelle entraîne un changement de sens de la tension induite dans la spire.

12.6.2 Inductance mutuelle entre deux spires coaxiales

Pour déterminer l'inductance mutuelle entre deux spires coaxiales, on fait usage de l'équation de Neumann (10.42).

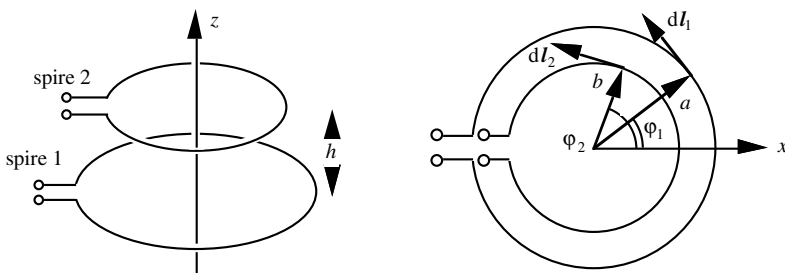


Fig. 12.18 Spires coaxiales dans des plans parallèles.

On a ici un problème à traiter en coordonnées cylindriques circulaires, dans lequel les éléments de longueur des deux spires valent $a d\varphi_1$ et $b d\varphi_2$ (fig. 12.18). Leur produit scalaire est $d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = ab \cos(\varphi_2 - \varphi_1) d\varphi_1 d\varphi_2$. La distance entre deux points est donnée par

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2 = h^2 + [a - b \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]^2 + [b \sin(\varphi_2 - \varphi_1)]^2 = h^2 + a^2 + b^2 - 2ab \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad [\text{m}^2] \quad (12.64)$$

L'inductance mutuelle est alors donnée par (10.42)

$$M = \frac{\mu ab}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sqrt{h^2 + a^2 + b^2 - 2ab \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}} d\varphi_1 d\varphi_2 \quad [\text{H}] \quad (12.65)$$

Pour évaluer cette intégrale, on pose tout d'abord $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ lors de l'intégration par rapport à φ_2 , dans laquelle φ_1 reste constant. Les limites d'intégration ne sont pas modifiées par suite de la périodicité des fonctions sinusoïdales et (12.62) devient

$$M = \frac{\mu ab}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\pi} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{h^2 + a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi}} d\varphi \quad [\text{H}] \quad (12.66)$$

La seconde intégrale ne dépend pas de φ_1 , et la première intégrale donne donc 2π . Pour évaluer l'intégrale restante, on trouve dans les formulaires que les intégrales elliptiques complètes (sect. 14.4) [118], "ressemblent" à l'intégrale de (12.66)

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad \text{et} \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (12.67)$$

On fait apparaître des fonctions elliptiques dans (12.66) en posant $\varphi = \pi - 2\theta$, et

$$\cos \varphi = 2 \sin^2 \theta - 1 \quad \text{et} \quad d\varphi = -2d\theta \quad [-] \quad (12.68)$$

On trouve ensuite

$$\sqrt{a^2 + b^2 + h^2 - 2ab \cos \varphi} = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2 - 2ab(2 \sin^2 \theta - 1)} = \sqrt{(a+b)^2 + h^2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \quad [m] \quad (12.69)$$

où l'on a introduit le facteur $k = 2\sqrt{ab}/\sqrt{(a+b)^2 + h^2}$. En regroupant les termes on obtient la relation pour l'inductance mutuelle

$$\begin{aligned} M &= \mu k \sqrt{ab} \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin^2 \theta - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta = \mu k \sqrt{ab} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{2/k^2 - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} - \frac{2}{k^2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \right] d\theta \\ &= \mu k \sqrt{ab} \left[\left(\frac{2}{k^2} - 1 \right) K(k) - \frac{2}{k^2} E(k) \right] \quad [H] \quad (12.70) \end{aligned}$$

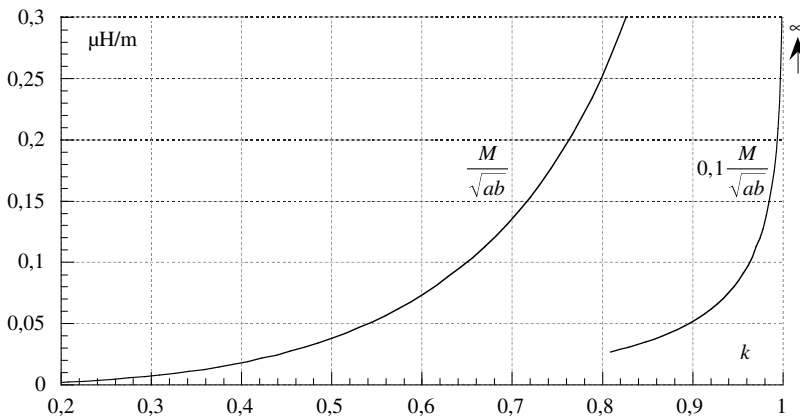


Fig. 12.19 Inductance mutuelle entre deux spires circulaires coaxiales parallèles.

L'inductance mutuelle est représentée dans la figure 12.19. Pour k petit, l'inductance est faible. Elle tend vers l'infini si k tend vers 1. On obtient une approximation de faible couplage (petites valeurs de k) en développant les intégrales elliptiques en série de Taylor

$$\frac{2}{\pi} K(k) = 1 + 2 \left(\frac{k^2}{8} \right) + 9 \left(\frac{k^2}{8} \right)^2 + \dots \quad \text{et} \quad \frac{2}{\pi} E(k) = 1 - 2 \left(\frac{k^2}{8} \right) - 3 \left(\frac{k^2}{8} \right)^2 + \dots \quad (12.71)$$

On introduit ces développements (12.71) dans la relation (12.70) et on retient le premier terme non nul, ce qui donne une valeur approchée pour l'inductance mutuelle

$$M \cong \mu ab \frac{\pi k^3}{2 \cdot 8} \cong \mu \frac{\pi a^2 b^2}{2 h^3} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{(\pi a^2)(\pi b^2)}{h^3} \quad [H] \quad \text{pour } h \gg a, h \gg b \quad (12.72)$$

L'inductance mutuelle de deux spires éloignées ($h \ll 1$) est proportionnelle aux surfaces des deux spires et inversement proportionnelle au cube de la distance entre elles.

12.6.3 Inductance mutuelle entre des bobines

Lorsque des bobines comportent plusieurs spires (N_1, N_2) enroulées de façon serrée (spires très proches les unes des autres), une valeur approchée de l'inductance s'obtient en multipliant l'inductance mutuelle des deux spires au centre de chaque bobine par $N_1 N_2$. En revanche, si l'épaisseur des bobines est comparable à leur espacement ou aux rayons des spires, on doit utiliser des formules mises au point pour ces géométries [119].

12.6.4 Limitations

On n'a considéré ici que des spires fixes dans un milieu homogène isotrope linéaire. Le problème se complique en présence de matériaux ferromagnétiques (fer, nickel, cobalt, alliages ou oxydes, et certaines terres rares), dont les propriétés sont non linéaires, présentant des rémanences et des cycles d'hystérèse (effet de mémoire) [95].

De plus, lorsque des pièces sont mobiles, comme c'est le cas dans des transducteurs, des moteurs ou des génératrices, les contours d'intégration varient dans le temps. On rencontre cette situation dans l'étude des machines (vol. IX et X), des instruments de mesure électromécaniques (vol. XVII) et en électroacoustique (vol. XXI).

12.7 INDUCTANCE PROPRE

L'inductance propre L représente l'effet d'un courant sur lui-même, que l'on détermine en faisant tendre les deux spires l'une vers l'autre. Mais si le contour C_1 coïncide exactement avec le contour C_2 dans la figure 10.5, on obtient une inductance infinie: on doit obligatoirement tenir compte de l'épaisseur non nulle du conducteur.

12.7.1 Inductance propre (self inductance) d'une spire

On considère séparément l'effet du champ magnétique à l'intérieur et à l'extérieur du conducteur et on définit les inductances externe L_e et interne L_i

$$L = L_e + L_i \quad [\text{H}] \quad (12.73)$$

On évalue l'inductance interne L_i avec l'énergie magnétique (1.37) d'un conducteur rectiligne de rayon R et de longueur d parcouru par un courant I (12.10)

$$W_m = d \frac{\mu}{2} \int_0^R \left(\frac{I \rho}{2\pi R^2} \right)^2 2\pi \rho d\rho = d \frac{\mu I^2}{4\pi R^4} \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\mu d I^2}{16\pi} \quad [\text{J}] \quad (12.74)$$

L'énergie ne dépend pas du rayon du conducteur. Par ailleurs, on connaît l'énergie magnétique emmagasinée dans une inductance L , donnée par (§ IV.1.3.2)

$$W_m = L_i I^2 / 2 \quad [\text{J}] \quad (12.75)$$

On identifie (12.72) avec (12.73) et on en tire l'inductance interne du conducteur

$$L_i = \mu d / 8\pi \quad [\text{H}] \quad (12.76)$$

De même que l'énergie magnétique emmagasinée, l'inductance interne ne dépend pas du rayon R du conducteur, mais elle est proportionnelle à sa longueur. La relation (12.76) a été dérivée pour un conducteur rectiligne, mais elle peut aussi être utilisée pour des conducteurs courbes si leur rayon de courbure est nettement supérieur à R .

L'inductance externe L_e est donnée par l'équation de Neumann (10.42), en prenant la fibre centrale du conducteur et une ligne sur la surface extérieure comme contours d'intégration (fig. 12.20). Les contours ne se touchent pas, et il n'y a pas de singularité.

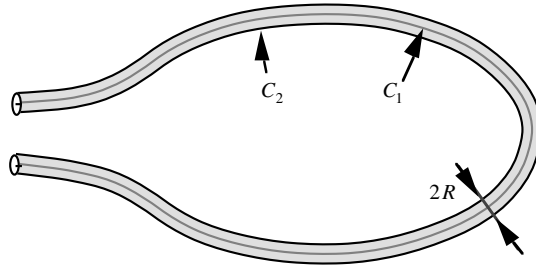


Fig. 12.20 Définition des contours d'intégration pour évaluer l'inductance propre.

L'inductance totale est la somme des contributions interne et externe

$$L \equiv \frac{\mu}{4\pi} \left[\frac{d}{2} + \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{dI_1 \cdot dI_2}{|r_2 - r_1|} \right] \quad [\text{H}] \quad (12.77)$$

12.7.2 Inductance propre d'une spire circulaire de fil mince

On applique les développements du paragraphe précédent à une spire circulaire de rayon a formée d'un conducteur de rayon R (fig. 12.21). Le contour C_1 est le cercle de rayon a , le contour C_2 celui de rayon $b = a - R$. On utilise les résultats obtenus pour les deux spires (§ 12.6.2) en posant $h = 0$, $R \ll a$ et $d = 2\pi a$. Le facteur k est alors donné par

$$k^2 = \frac{4a(a-R)}{(2a-R)^2} = \frac{4a^2 - 4aR}{4a^2 - 4aR + R^2} = 1 - \left(\frac{R}{2a-R} \right)^2 \quad [-] \quad (12.78)$$

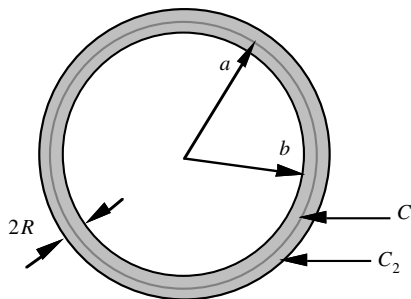


Fig. 12.21 Spire circulaire de rayon moyen a .

Le facteur k est proche de 1 et on prend les valeurs asymptotiques des intégrales elliptiques

$$K(k) \equiv \ln \left[\frac{4}{\sqrt{1-k^2}} \right] \equiv \ln \frac{8a}{R} \quad \text{et} \quad E(k) \equiv 1 \quad [-] \quad (12.79)$$

On obtient alors l'inductance propre à l'aide de (12.70) et (12.79)

$$L \equiv \frac{\mu}{4\pi} \frac{2\pi a}{2} + \mu a \left[\ln \frac{8a}{R} - 2 \right] = \mu a \left[\ln \frac{8a}{R} - 1,75 \right] \quad [\text{H}] \quad (12.80)$$

Pour une bobine de N spires enroulées de façon serrée, avec les distances entre les spires beaucoup plus petites que le rayon a d'une spire, on obtient une approximation pour l'inductance propre de la bobine en multipliant celle d'une spire (12.80) par N^2 .

12.7.3 Inductance d'une ligne bifilaire

Connaissant l'inductance mutuelle entre deux spires circulaires (§ 12.6.2) et l'inductance propre d'une spire (§ 12.7.2), on peut déterminer l'inductance d'une ligne bifilaire en prenant la limite d'un rayon de courbure a tendant vers l'infini. On considère deux conducteurs de rayon R séparés par une distance $2d$ entre leurs centres (fig. 2.9).

Pour trouver l'inductance mutuelle par unité de longueur, on pose que $a = b$ et on remplace h par $2d$ dans (12.67), puis on divise la valeur obtenue par $2\pi a$ et on fait tendre le rayon a de la spire vers l'infini. On fait usage des valeurs asymptotiques (12.79) des intégrales elliptiques pour k tendant vers 1

$$M' = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{M}{2\pi a} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\mu}{2\pi} \left[\ln \frac{4a}{d} - 2 \right] = \infty \quad [\text{H/m}] \quad (12.81)$$

Le prime (') spécifie une grandeur par unité de longueur. On note que cette limite diverge. On trouve similairement les inductances linéiques propres des deux conducteurs (§ 12.7.2), et on constate que, là aussi, les limites ne sont pas définies

$$L'_1 = L'_2 = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\mu}{2\pi} \left[\ln \frac{8a}{R} - 1,75 \right] = \infty \quad [\text{H/m}] \quad (12.82)$$

Quand un signal se propage sur une ligne (§ 1.1.2), les deux conducteurs sont parcourus par des courants qui vont dans des directions opposées. L'inductance linéique totale de la ligne s'obtient en tenant compte de toutes les interactions entre les courants

$$L' = L'_1 + L'_2 - 2M' = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\mu}{2\pi} \left[2 \ln \frac{8a}{R} - 3,5 - 2 \ln \frac{4a}{d} + 4 \right] = \frac{\mu}{\pi} \left[\ln \frac{2d}{R} + 0,25 \right] \quad [\text{H/m}] \quad (12.83)$$

On obtient ici une valeur finie, car le rayon a de courbure a disparu dans le développement. L'inductance linéique totale reste bornée lorsqu'on prend la limite.

12.7.4 Constatation

Le fait que les inductances d'un conducteur solitaire divergent signifie, physiquement, que l'énergie magnétique emmagasinée est infinie: il faut fournir une énergie infinie pour faire circuler un courant dans un conducteur unique. En revanche l'énergie est bornée lorsqu'un second conducteur assure le retour du courant, formant un circuit fermé.

12.8 EXERCICES

12.8.1 Déterminer la charge totale, le champ électrique et le potentiel qui correspondent à une distribution sphérique de charge ayant la densité

$$\rho(r) = K \frac{1}{1+r^3} \quad [\text{As/m}^3]$$

12.8.2 Déterminer le potentiel produit par un ensemble de deux charges positives $+q$, placées aux points $(d,0,0)$ et $(-d,0,0)$, et de deux charges négatives $-q$, placées aux points $(0,d,0)$ et $(0,-d,0)$. Que devient ce potentiel lorsqu'on fait tendre d vers zéro tout en gardant le produit $\rho d^2 = \Psi$ constant ? Déterminer les équipotentielles et les lignes de champ dans le plan $z=0$.

12.8.3 Déterminer le champ magnétique produit par deux conducteurs filiformes parallèles espacés de $2d$, disposés de part et d'autre de l'axe z et parcourus par des courants $+I$ et $-I$.

12.8.4 Déterminer, au moyen de la méthode des images, le potentiel dans un cube métallique (cep) creux de côté a au centre duquel se trouve une charge ponctuelle Q . Le cube contient un diélectrique homogène de permittivité relative $\epsilon_r = 4$.

12.8.5 Un fil métallique formant un carré fermé de côté $2a$, disposé dans le plan $z=0$, est parcouru par un courant I . Déterminer le champ magnétique et le potentiel vecteur dans l'axe perpendiculaire au plan du carré et passant par le centre de celui-ci.

12.8.6 Déterminer l'inductance mutuelle entre deux fils rectilignes infiniment longs qui se croisent à une distance d en formant entre eux un angle ψ (fig. 12.22).

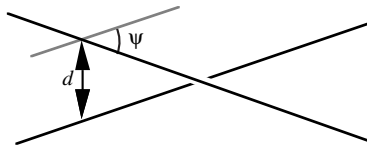


Fig. 12.22 Deux fils croisés infiniment longs.

12.8.7 Déterminer l'inductance mutuelle et les inductances propres de deux spires circulaires de conducteur, placées comme dans la figure 12.18, avec $a = 8 \text{ mm}$, $b = 12 \text{ mm}$ et $h = 1 \text{ mm}$. Les conducteurs ont des rayons $R_1 = 0,2 \text{ mm}$ et $R_2 = 0,1 \text{ mm}$.

MÉTHODES APPROCHÉES

Beaucoup de structures utilisées en électromagnétisme ont une forme trop complexe pour qu'on puisse les analyser de façon exacte. On peut rarement faire coïncider les limites du problème avec des lignes de coordonnées, même en faisant appel aux transformations conformes. Quant aux méthodes intégrales du chapitre 12, pour pouvoir les utiliser il faut au préalable connaître la distribution des charges ou des courants. Pour étudier la distribution des champs dans des structures plus complexes, on a dû mettre au point des méthodes de résolution basées sur des approximations. Toutefois, avec l'aide de l'ordinateur et de moyens mathématiques adéquats, on peut réduire les erreurs introduites par les approximations et obtenir des valeurs numériques précises pour les champs, les potentiels, et les grandeurs dérivées. On n'obtient en revanche pas de relations mathématiques explicites.

Ce chapitre présente les principales méthodes disponibles, avec leur utilisation pour résoudre l'équation de Laplace en deux dimensions (section droite d'une ligne, sect. 10.7). Toutes les méthodes traitent également les problèmes en trois dimensions et les équations d'onde, et les principales techniques utilisées sont brièvement présentées.

13.1 APPROXIMATION DES CONDITIONS AUX LIMITES

13.1.1 Principe de base

Dans un milieu non borné, on peut toujours déterminer la solution générale exacte de l'équation de Laplace, formée par la superposition des solutions déterminées dans les sections 11.3, 11.4 et 11.5. En présence de limites, certaines composantes des champs doivent satisfaire des conditions de continuité, ce qui réduit les solutions acceptables. Les problèmes apparaissent quand les limites ne peuvent pas être exprimées par une relation simple dans un système de coordonnées ou avec une transformation conforme. Tel est le cas pour la ligne de transmission dont la section droite est représentée à la figure 13.1.

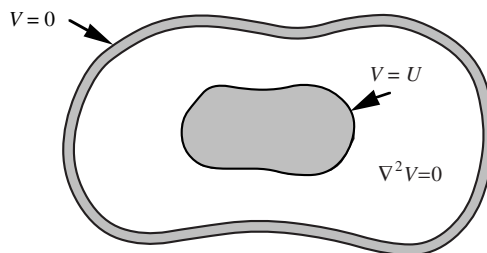


Fig. 13.1 Section droite d'une ligne à analyser par une méthode approchée.

13.1.2 Collocation par points

Dans la région située entre les conducteurs, on écrit la solution générale de l'équation de Laplace, donnée par la somme de toutes les solutions. Pour étudier une structure à deux dimensions, on choisit les coordonnées cylindriques circulaires (§ 11.4.1)

$$V(\rho, \varphi) = A \ln \rho + B + \sum_{m=1}^{\infty} \left[C_m \rho^m \cos(m\varphi) + D_m \rho^m \sin(m\varphi) + \frac{E_m}{\rho^m} \cos(m\varphi) + \frac{F_m}{\rho^m} \sin(m\varphi) \right] \quad [V] \quad (13.1)$$

Cette relation comporte une infinité d'inconnues, qu'il s'agit de déterminer en utilisant les conditions aux limites. On pose $V = 0$ sur le conducteur extérieur, et $V = U$ sur le conducteur intérieur. Il n'est manifestement pas possible de satisfaire rigoureusement les conditions sur tous les points du pourtour de la structure: cela donnerait un nombre infini d'équations avec un nombre infini de constantes à déterminer – système que l'on ne peut pas résoudre en un temps fini.

On peut en revanche satisfaire ces conditions exactement en un nombre restreint de points, en tronquant la somme de (13.1) pour considérer les termes jusqu'à l'ordre M . L'expression contient alors $4M + 2$ inconnues et, si on l'applique à $4M + 2$ points choisis sur le contour, on obtient un système de $4M + 2$ équations linéaires. On résout ce système en inversant sa matrice ou, si le nombre d'inconnues est grand, en utilisant une technique mathématique itérative [120].

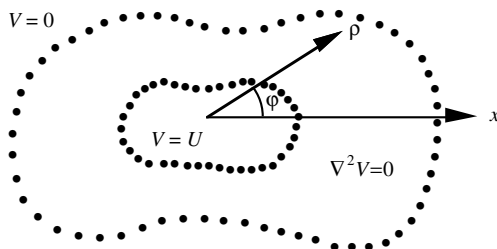


Fig. 13.2 Collocation par points.

Cette méthode, connue sous le nom de *collocation par points* (*point matching*), ne satisfait les conditions aux limites qu'en un nombre déterminé de points (fig. 13.2). Elle remplace en fait une frontière solide par un ensemble de fils minces parallèles à l'axe z , sur lesquels le potentiel est spécifié. Elle ne donne pas directement d'information quant aux valeurs que prend le potentiel entre ces points – pour les déterminer il faut effectuer des calculs supplémentaires. On admet en général que, si les points sur le contour sont "suffisamment proches" les uns des autres, la condition est approximativement satisfaite sur le reste du contour.

L'origine du repère de coordonnées de la figure 13.1 est fixée arbitrairement, à l'intérieur d'un conducteur. De même, le choix des $4M + 2$ points sur les conducteurs est plus ou moins arbitraire. Toutefois, pour obtenir une bonne précision avec un nombre restreint de termes, il est souhaitable de les disposer de manière régulière. On peut parfois tirer profit de conditions de symétrie pour réduire la complexité du problème et, par conséquent, la mémoire nécessaire et le temps de calcul.

Pour évaluer la précision obtenue, on calcule le potentiel à d'autres points du contour. Si la précision obtenue n'est pas suffisante, on augmente l'ordre de troncature M , et donc le nombre d'équations à résoudre [121].

13.1.3 Moindres carrés

Au lieu de satisfaire exactement les conditions aux limites en un nombre restreint de points, on peut aussi décider de ne les satisfaire qu'approximativement, mais en un plus grand nombre de points, voire même de façon moyenne sur l'ensemble du contour. La somme des carrés des différences entre le potentiel calculé et la valeur spécifiée forme la fonction objectif (test du χ carré [122]). Un processus d'optimisation (§ 4.4.10) détermine les constantes qui minimisent cette fonction.

13.1.4 Expansion en multipôles multiples (MMP)

La collocation par points donne de bons résultats lorsque les structures sont relativement régulières, avec des distances entre l'origine et les points sur les conducteurs qui ne varient pas trop. En revanche, lorsque le quotient de la distance maximale à la distance minimale devient très grand, les points proches ont beaucoup plus d'influence que les points lointains dans les termes en ρ^{-m} , et l'inverse se produit pour les termes en ρ^m . Les résultats ne convergent alors que très lentement vers la solution.

Une méthode plus élaborée évite ce défaut, en combinant la collocation par points avec le principe de superposition. Au lieu de considérer un seul pôle d'ordre multiple, situé à l'origine du repère de coordonnées (§ 13.1.2), on introduit des termes en $(\rho - \rho_j)^{-m}$, qui ont des pôles multiples aux points ρ_j , qu'on distribue régulièrement sur la section des conducteurs, et des termes en $(\rho - \rho_j)^m$, qui s'annulent aux points ρ_i entre les conducteurs. Le potentiel s'obtient en superposant les potentiels produits par les multipôles et les zéros. On satisfait les conditions aux limites en imposant celles-ci en un nombre de points égal au nombre d'inconnues (§ 13.1.2) ou par la méthode des moindres carrés (§ 13.1.3).

Cette méthode, appelée expansion en *multipôles multiples*, requiert un certain doigté dans le positionnement des pôles et des zéros, qui ne doivent pas être choisis trop proches les uns des autres pour assurer la stabilité mathématique du système [116]. Elle est particulièrement intéressante pour étudier les champs dans des structures qui ont des formes arrondies. En revanche, il est difficile de satisfaire les conditions au voisinage d'angles vifs. Cette méthode s'utilise également pour résoudre l'équation d'onde dans le domaine fréquentiel et étudier la diffraction produite par des obstacles de forme complexe.

13.1.5 Remarque

La ligne coaxiale (§ 2.4.2, § 11.2.1) est un cas particulier pour lequel les conditions aux limites sont exactement satisfaites par les deux premiers termes de (13.1), pour autant que l'origine du repère de coordonnées soit choisi sur l'axe des conducteurs.

La ligne bifilaire (§ 2.4.3, § 11.6.8) est une autre géométrie particulière, pour laquelle les conditions aux limites sont satisfaites exactement avec deux pôles situés à des emplacements spécifiques définis dans les deux conducteurs – qui ne sont toutefois pas situés aux centres de ceux-ci.

13.2 DIFFÉRENCES FINIES

13.2.1 Principe de la méthode

Une autre technique approchée modifie les conditions aux limites, mais également les équations à résoudre: dans toutes les équations considérées (Laplace ou Maxwell), on remplace les dérivées par des différences finies – c’est-à-dire qu’on ne fait pas tendre la distance entre deux points vers zéro quand on effectue la dérivation.

On découpe la structure à étudier au moyen d’une grille carrée (en deux dimensions, fig. 13.3) ou cubique (en trois dimensions). Les équations aux dérivées partielles pour les potentiels ou les champs à des points particuliers du carré ou du cube sont remplacées par des équations linéaires, qu’on résout par inversion de matrice ou par d’autres techniques.

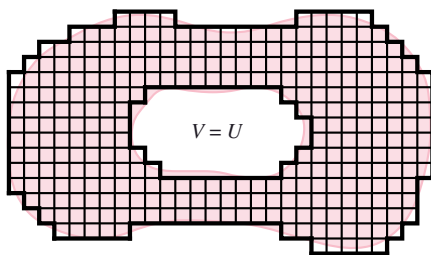


Fig. 13.3 Quadrillage de la structure pour la méthode des différences finies.

Les limites de la structure originelle doivent être adaptées pour le découpage en carrés, ce qui implique le remplacement des courbes par des escaliers (structures de type “Manhattan”). Pour que cette approximation n’ait pas un effet trop important sur la précision, il faut que les mailles restent petites.

13.2.2 Différences finies en électrostatique

Pour trouver l’équation de Laplace en différences finies, on développe le potentiel au point $x + h$ en série de Taylor, en fonction des valeurs du potentiel et de ses dérivées au point adjacent x

$$\begin{aligned}
 V(x + h, y, z) = & \\
 V(x, y, z) + h \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} \Big|_x & + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 V(x, y, z)}{\partial x^2} \Big|_x + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 V(x, y, z)}{\partial x^3} \Big|_x + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 V(x, y, z)}{\partial x^4} \Big|_x + \dots
 \end{aligned}
 \tag{13.2}$$

On procède de la même manière pour le point en $x - h$, qui est situé de l’autre côté du point x

$$\begin{aligned}
 V(x - h, y, z) = & \\
 V(x, y, z) - h \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} \Big|_x & + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 V(x, y, z)}{\partial x^2} \Big|_x - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 V(x, y, z)}{\partial x^3} \Big|_x + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 V(x, y, z)}{\partial x^4} \Big|_x - \dots
 \end{aligned}
 \tag{13.3}$$

On effectue ensuite la somme des deux expressions

$$V(x+h, y, z) + V(x-h, y, z) = 2V(x, y, z) + h^2 \frac{\partial^2 V(x, y, z)}{\partial x^2} \Big|_x + \frac{h^4}{12} \frac{\partial^4 V(x, y, z)}{\partial x^4} \Big|_x + \dots \quad [V] \quad (13.4)$$

On en tire la seconde dérivée du potentiel

$$\frac{\partial^2 V(x, y, z)}{\partial x^2} = \frac{V(x+h, y, z) + V(x-h, y, z) - 2V(x, y, z)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 V(x, y, z)}{\partial x^4} \Big|_x + \dots \quad [V] \quad (13.5)$$

Le dernier terme contient la quatrième dérivée du potentiel, dont l'effet peut généralement être négligé si l'on choisit une maille avec un pas h suffisamment petit. On procède de la même manière pour les dépendances en y et en z et on obtient l'équation de Laplace en différences finies

$$V(x, y, z) \cong \frac{1}{6} [V(x+h, y, z) + V(x-h, y, z) + V(x, y+h, z) + V(x, y-h, z) + V(x, y, z+h) + V(x, y, z-h)] \quad [V] \quad (13.6)$$

Le potentiel sur un nœud est la moyenne des potentiels sur les six nœuds adjacents (ou sur les quatre nœuds adjacents dans le cas bidimensionnel). Appliquant cette relation aux N nœuds de la grille, on obtient N équations homogènes linéaires avec N inconnues. On peut écrire le système d'équations sous forme matricielle et le résoudre par inversion de matrice. Les potentiels des points qui sont situés sur les limites doivent être spécifiés: ce sont les données du problème.

13.2.3 Méthode de relaxation

On a souvent besoin d'un grand nombre N de nœuds, qui peut atteindre plusieurs milliers même pour des problèmes simples. La matrice comporte N^2 termes, en majorité des zéros car aucune équation n'implique plus de 7 nœuds. La matrice est donc creuse, de sorte que son inversion par un algorithme de type "classique" est peu efficace en termes de places en mémoire et de temps de calcul.

La méthode itérative par relaxation génère automatiquement les équations et garde en mémoire les potentiels sur les nœuds, au nombre de N [123]. Partant d'une situation arbitraire pour les potentiels – que l'on pose souvent égaux à zéro, valeur qui est particulièrement facile à introduire – on calcule le potentiel en chaque nœud en prenant la moyenne des nœuds qui l'entourent et on obtient une nouvelle valeur pour le potentiel – qui remplace directement la valeur antérieure.

Les valeurs obtenues pour le potentiel servent de point de départ à l'itération suivante. On répète le processus, qui converge vers le potentiel qu'on obtiendrait en inversant la matrice. Le processus se termine lorsqu'une nouvelle itération n'apporte plus de changement significatif des potentiels.

Comme on a généralement un très grand nombre de points, on ne peut pas évaluer la convergence du potentiel pour chacun d'eux. On doit donc se contenter d'observer comment le potentiel converge en quelques points judicieusement choisis.

13.2.4 Application à un problème simple

On demande de déterminer les valeurs approchées des potentiels sur les quatre nœuds A, B, C et D à l'intérieur d'un carré, la valeur du potentiel sur les quatre côtés du carré étant spécifié dans la figure 13.4.

Les potentiels sur les quatre nœuds doivent satisfaire quatre relations

$$\begin{aligned}
 V_A &= \frac{1}{4}(V_B + V_C + 80 + 100) & V_B &= \frac{1}{4}(V_A + V_D + 100 + 20) \\
 V_C &= \frac{1}{4}(V_A + V_D + 80 + 60) & V_D &= \frac{1}{4}(V_B + V_C + 20 + 60)
 \end{aligned}
 \tag{13.7}$$

qu'on peut écrire sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/4 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 & -1/4 \\ -1/4 & 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & -1/4 & 1 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \\ V_D \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix} 45 \\ 30 \\ 35 \\ 20 \end{bmatrix}
 \tag{13.8}$$

En éliminant les inconnues dans (13.7) ou en inversant la matrice de (13.8), on trouve que $V_A = 77,5\text{V}$, $V_B = 62,5\text{V}$, $V_C = 67,5\text{V}$ et $V_D = 52,5\text{V}$.

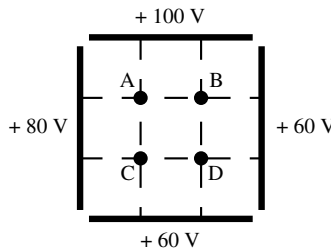


Fig. 13.4 Exemple de résolution numérique: le potentiel est spécifié sur les 4 côtés.

On met en route la méthode de relaxation en posant que les quatre potentiels sont nuls au début du processus, et on procède par itérations successives, prenant chaque fois la moyenne des quatre points contigus. On remplace l'ancienne valeur par la nouvelle, qu'on utilise pour la suite des calculs. Les résultats sur les quatre nœuds de la figure 13.4, avec dix itérations, sont donnés dans le tableau 13.5.

Tableau 13.5 Résultats obtenus par la méthode de relaxation.

	Ordre des itérations										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V_A	0	45,000	66,875	74,844	76,836	77,334	77,458	77,490	77,497	77,499	77,500
V_B	0	41,250	57,188	61,172	62,168	62,417	62,479	62,495	62,499	62,500	62,500
V_C	0	46,250	62,188	66,172	67,168	67,417	67,479	67,495	67,499	67,500	67,500
V_D	0	41,875	49,844	51,836	52,334	52,458	52,490	52,497	52,499	52,500	52,500

On remarque que, pour la géométrie considérée, les valeurs calculées convergent rapidement, qu'on obtient déjà une très bonne approximation après 5 itérations, et qu'après 10 itérations, on obtient les mêmes valeurs qu'en inversant la matrice. Quand on a un plus grand nombre de valeurs à déterminer, toutefois, la convergence est moins rapide.

On peut introduire une meilleure approximation pour les valeurs initiales, en tenant compte du potentiel sur les bords: on réduit ainsi d'un ou deux le nombre des itérations, ce qui ne donne toutefois pas une amélioration très significative au point de vue du calcul. En contrepartie, l'évaluation et l'introduction de valeurs de départ non nulles entraînent une augmentation significative de la complexité de la programmation.

13.2.5 Méthode de surrelaxation

On peut accélérer sensiblement la convergence de la méthode au moyen de la surrelaxation, technique qui consiste à extrapoler, à chaque itération, la différence entre l'ancienne et la nouvelle valeur du potentiel par un *facteur de surrelaxation* g

$$V_{\text{nit}} = V_{\text{ait}} + g(V_c - V_{\text{ait}}) \quad [V] \quad (13.9)$$

où V_{ait} est le potentiel au début de l'itération antérieure, V_c le potentiel calculé dans l'itération antérieure, et V_{nit} le potentiel de départ de la nouvelle itération. Lorsque $g = 1$, on retrouve la méthode de relaxation.

L'étude du processus montre qu'on a une convergence monotone lorsque g est choisi entre 1 et la valeur optimale de g , qui est située entre 1,3 et 1,5. La convergence est oscillante, mais reste garantie si le facteur g est situé entre la valeur optimale et 2. Quand g est supérieur à 2, le processus diverge.

La valeur optimale de g correspond à l'amortissement critique du système, et c'est pour cette situation que la convergence est la plus rapide. Cette valeur dépend toutefois des paramètres du système et n'est pas connue *a priori*. Il est possible de la calculer et de l'ajuster, durant le processus de surrelaxation, afin de réduire le plus possible le temps de calcul – ceci augmente la complexité de la méthode, mais le gain en temps peut être significatif lorsqu'on considère un grand nombre de nœuds.

13.2.6 Remarque générale

Des techniques plus élaborées font usage d'un maillage rectangulaire, dont les mailles peuvent même avoir des dimensions différentes. On peut ainsi obtenir une résolution plus fine au voisinage d'arêtes – où les amplitudes des champs varient rapidement – sans augmenter de façon trop importante le nombre d'inconnues. La programmation devient en revanche nettement plus complexe.

On peut également mettre en route le processus d'itération avec une grille relativement grossière, puis passer à des grilles de plus en plus fines au fur et à mesure que l'on s'approche de la solution.

Plus ou moins intuitivement, on prévoit que la précision augmente lorsqu'on réduit la largeur h de la maille: c'est effectivement ce qui se passe en premier lieu. Toutefois, quand on réduit h en dessous d'une certaine limite, la précision se met à décroître, à cause d'erreurs d'arrondis sur les nombreuses valeurs calculées pour le potentiel – on doit alors faire usage de précision multiple pour réduire ces erreurs de calcul.

13.3 DIFFÉRENCES FINIES DANS LE DOMAINE TEMPOREL (FDTD)

La méthode des différences finies permet aussi d'étudier des champs qui varient dans le temps, en résolvant de manière approchée les équations de Maxwell. Leur traitement dans le domaine temporel permet notamment d'étudier des régimes transitoires, des systèmes non linéaires, voire même des structures qui varient dans le temps et l'espace.

13.3.1 Principe de la méthode

Les équations rotationnelles de Maxwell (1.13) fournissent six équations scalaires aux dérivées partielles, comportant les six composantes des champs électrique et magnétique, qui deviennent en coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned}
 \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} &= \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} & \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} & \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \\
 \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} & \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} & \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}
 \end{aligned}
 \tag{13.10}$$

Dans d'autres systèmes de coordonnées, on obtient des relations similaires, mais qui sont nettement plus complexes. La méthode *FDTD* (*Finite Differences in Time Domain*) considère par conséquent une discrétisation en carrés ou en cubes. L'espace est découpé en cubes, introduits par Yee [124], comme celui présenté à la figure 13.6.

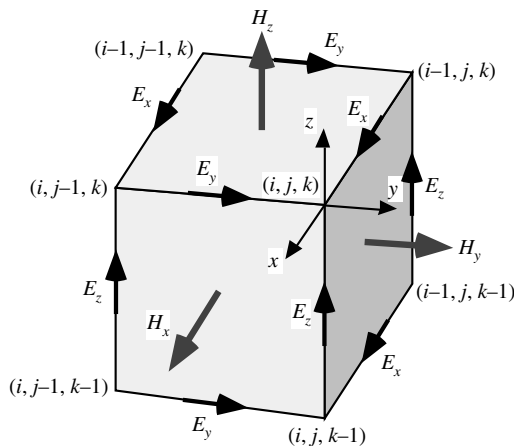


Fig. 13.6 Cube de Yee utilisé pour la grille FDTD en trois dimensions.

Comme cela a été fait en électrostatique (§ 13.2.2), toutes les dérivées spatiales sont remplacées par des différences finies, avec des mailles Δx , Δy et Δz . La dérivation par rapport au temps est également discrétisée, avec un pas temporel Δt .

Les deux relations de gauche dans (13.10) prennent alors la forme

$$\frac{H_x^{n+1/2}(i, j+1/2, k+1/2) - H_x^{n-1/2}(i, j+1/2, k+1/2)}{\Delta t} = \frac{E_y^n\left(i, j+\frac{1}{2}, k+1\right) - E_y^n\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right)}{\mu \Delta z} - \frac{E_z^n\left(i, j+1, k+\frac{1}{2}\right) - E_z^n\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right)}{\mu \Delta y} \quad [\text{A/ms}]$$

$$\frac{E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) - E_x^{n-1}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta t} = \frac{H_z^{n-1/2}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right) - H_z^{n-1/2}\left(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k\right)}{\varepsilon \Delta y} - \frac{H_y^{n-1/2}\left(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right) - H_y^{n-1/2}\left(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2}\right)}{\varepsilon \Delta z} \quad [\text{V/ms}] \quad (13.11)$$

Les indices (i, j, k) indiquent la position selon (x, y, z) , tandis que l'indice n spécifie le moment dans le temps. Les composantes du champ électrique, définies au milieu des arêtes du cube, sont calculées aux temps $n\Delta t$, celles du champ magnétique, au milieu des faces du cube, aux temps $(n+1/2)\Delta t$. Une composante ne dépend que des événements de la période temporelle précédente. Les trois composantes du champ électrique ont un indice spatial fractionnaire, celles du champ magnétique en ont deux. On procède de la même façon pour les quatre autres relations tirées des équations de Maxwell (13.10).

Il faut noter que les différentes composantes sont définies à des endroits différents et à des temps différents, ce qui donne lieu à certaines difficultés lors de la spécification des limites (dans des plans différents pour les différentes composantes).

On choisit généralement $\Delta x = \Delta y = \Delta z$, ce qui donne une grille FDTD cubique. Pour assurer la stabilité des résultats, il faut que les distances entre nœuds et les périodes satisfassent la relation [125]

$$v_{\max} \Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^{-2} + (\Delta y)^{-2} + (\Delta z)^{-2}}} \quad [\text{m}] \quad (13.12)$$

où v_{\max} est la vitesse de phase maximale.

13.3.2 Mise en œuvre de la méthode FDTD

Toute la structure à analyser est discrétisée selon une grille FDTD qui s'étend jusqu'aux bords de la structure considérée.

À l'origine du temps, on pose que toutes les composantes des champs dans la structure sont nulles. Une excitation est alors appliquée à certains points de la grille, le long d'une ligne ou sur un plan. L'excitation varie dans le temps, et on choisit en général une dépendance gaussienne du temps. On évalue la réponse de la structure, en fonction du temps, jusqu'à ce que toutes les composantes soient amorties.

On détermine la réponse en un point (ou en plusieurs points) d'observation, où les composantes des champs sont enregistrées en fonction du temps. Si l'on souhaite ensuite déterminer la réponse en fréquence, on prend la transformée de Fourier de la réponse temporelle [20].

On peut également appliquer une excitation sinusoïdale discrétisée, auquel cas la réponse observée tend vers une réponse périodique – qui ne s'établit qu'après plusieurs périodes de l'excitation lorsque la structure a un facteur de qualité élevé [126].

La méthode FDTD a été développée en premier lieu pour étudier des structures sans pertes, dont les propriétés ne dépendent pas de la fréquence. En revanche, les matériaux réels ont des pertes et sont dispersifs (§ 7.3.2), de sorte que leur réponse temporelle comporte des intégrales de convolution (§ 1.6.4). La méthode FDTD peut incorporer les effets de pertes dans les matériaux, mais dans ce cas les composantes des champs dépendent des valeurs prises lors de plusieurs périodes antérieures [127]. On doit donc garder en mémoire les valeurs prises durant plusieurs périodes, ce qui augmente considérablement la complexité de la programmation, et rend plus difficile l'implémentation de la méthode.

13.3.3 Extension à une structure ouverte

Par la force des choses, une méthode qui discrétise l'espace considère un maillage de dimensions finies, afin d'effectuer les calculs en un temps fini. La méthode des différences finies s'applique donc naturellement à des structures fermées (guides d'ondes et cavités).

Pour pouvoir également étudier des structures ouvertes comme les antennes et déterminer la diffraction produite par divers corps, on introduit une frontière absorbante, qui simule un milieu infini (adaptation sans réflexion, § 4.4.3) [128]. Une onde plane uniforme qui se propage vers l'extérieur n'est pas réfléchiée par cette frontière et on peut ainsi utiliser la méthode FDTD pour étudier des phénomènes de rayonnement [129].

Les premières frontières absorbantes n'ont toutefois pas donné pleine satisfaction, l'absorption n'étant adéquate qu'au voisinage de l'incidence normale. Plus récemment, la mise au point de parois dites "parfaitement absorbantes" a été reçue avec beaucoup d'intérêt, mais il n'est pas encore certain que ces parois absorbent également bien les ondes non uniformes qui apparaissent dans la région du champ proche [130].

13.3.4 Besoins en moyens de calcul

La méthode FDTD calcule les six composantes des champs à chaque période, en fonction de celles de la période précédente, pour chaque cellule – et en présence de pertes, il faut aussi tenir compte des périodes antérieures. Une étude détaillée requiert un grand nombre de points de discrétisation, ce qui implique un nombre important de places en mémoire et un temps de calcul considérable.

Ces besoins informatiques importants ont, par le passé, considérablement freiné l'implémentation de la méthode. Par conséquent, on a dû consacrer beaucoup de temps et de moyens pour améliorer la modélisation des structures, en vue de faire un usage optimal de l'espace en mémoire et pour accélérer les calculs.

Toutefois, les moyens informatiques augmentent rapidement, avec la disponibilité croissante de processeurs massivement parallèles, tandis que des logiciels performants sont maintenant disponibles. De nombreux utilisateurs ont acquis une solide expérience dans l'utilisation de la méthode FDTD pour résoudre les problèmes les plus divers. Il s'agit donc d'une méthode qui présente de grandes potentialités pour analyser les champs dans de nombreuses structures utilisées en électromagnétisme – pour autant que l'on dispose de moyens informatiques adéquats.

Des grilles non cubiques ont été introduites pour traiter des structures dont les limites ont des formes complexes, par exemple dans le cas de parois recourbées. Les algorithmes de calcul ont été généralisés à des systèmes de coordonnées curvilignes [131]. On évite ainsi les erreurs inhérentes aux approximations en escalier. On fait également usage de grilles à espacement variable pour améliorer la précision aux endroits où les champs varient rapidement. On réduit aussi le temps de calcul en tenant compte, dans l'algorithme FDTD, des singularités qui apparaissent sur les arêtes (§ 11.6.5).

13.3.5 Avantages de la méthode FDTD

Le traitement de problèmes d'électromagnétisme dans le domaine temporel, utilisé par la FDTD, fournit des résultats qui décrivent directement l'évolution temporelle du système étudié, permettant de "voir" comment les champs se répartissent et se propagent. On suit en quelque sorte de très près le processus physique. La méthode présente par conséquent un aspect très intéressant pour l'ingénieur, car elle lui permet de se représenter de façon visuelle comment fonctionnent des appareils, où se situent les zones pouvant présenter des problèmes, etc. – pour autant que l'on dispose d'un équipement informatique adéquat pour la visualisation des résultats.

Par ailleurs, les traitements dans le domaine temporel sont les seuls qui permettent d'aborder les structures à caractéristiques non linéaires, et celles dont les paramètres varient en fonction du temps (par exemple, la cuisson d'un poulet dans un four micro-ondes). De tels problèmes sont hors de portée des méthodes fréquentielles du fait que celles-ci sont intimement liées au principe de superposition, qui n'est applicable que dans des structures linéaires et invariantes.

L'extension de la méthode à des structures ouvertes a considérablement augmenté le champ d'action de la méthode, et on dispose actuellement de frontières absorbantes qui absorbent de façon adéquate. L'utilisation de ces frontières implique toutefois des besoins informatiques supplémentaires qui peuvent être importants.

13.3.6 Limitations de la méthode FDTD

À l'origine, la méthode FDTD a été développée pour des structures pouvant être discrétisées par des cubes, et elle fonctionne particulièrement bien pour de telles structures. Il est maintenant possible de s'affranchir de cette contrainte, au moins en principe, car les extensions à des systèmes curvilignes impliquent une sérieuse augmentation dans la complexité des programmes, du temps de calcul et des places en mémoire, qu'on ne peut considérer que si l'on dispose de moyens informatiques puissants.

Par ailleurs, la méthode FDTD a principalement considéré des structures sans pertes. Ici également, il est en principe possible de s'affranchir de cette limitation, et d'utiliser la méthode FDTD pour considérer des structures comportant des pertes. Cela implique également une augmentation importante des besoins en moyens informatiques, qui peuvent devenir prohibitifs.

On doit toujours se rappeler qu'il n'existe pas de méthode idéale, qui permettrait de résoudre de façon efficace tous les problèmes qu'on rencontre en électromagnétisme. L'extension d'une méthode au-delà de sa zone d'excellence peut présenter des effets négatifs, introduisant des complications qui peuvent masquer les mérites de la méthode.

13.4 MATRICE DE LA LIGNE DE TRANSMISSION (TLM)

Comme dans la méthode FDTD, la matrice de la ligne de transmission (TLM) remplace la structure d'origine par une grille carrée ou cubique [132]. Elle est basée sur le principe de Huygens pour la propagation et la diffraction d'une onde plane, et définit un ensemble de lignes de transmission qui relient les nœuds adjacents [133].

13.4.1 Traitement d'un problème bidimensionnel

La méthode TLM a été développée pour résoudre des problèmes de diffraction (*scattering*) bidimensionnels, en discrétisant la géométrie sur un maillage carré (fig. 13.3). Chaque segment de droite devient une ligne de transmission TEM, et les nœuds sont des jonctions où quatre lignes de transmission sont connectées. Chaque nœud est représenté par un quadriporte, aux accès duquel sont définies des tensions et les courants, qui correspondent à des composantes des champs électriques et magnétiques.

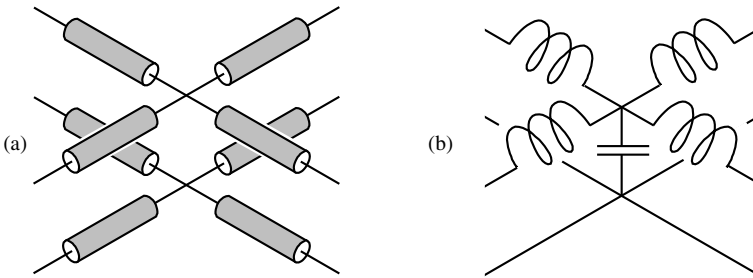


Fig. 13.7 Nœud parallèle et schéma équivalent.

Le nœud parallèle de la figure 13.7 correspond à un champ électrique dirigé perpendiculairement au plan de la structure, avec le champ magnétique situé dans le plan (mode TE). Un signal incident à un accès est partiellement réfléchi et partiellement transmis vers les quatre accès adjacents (fig. 13.8).

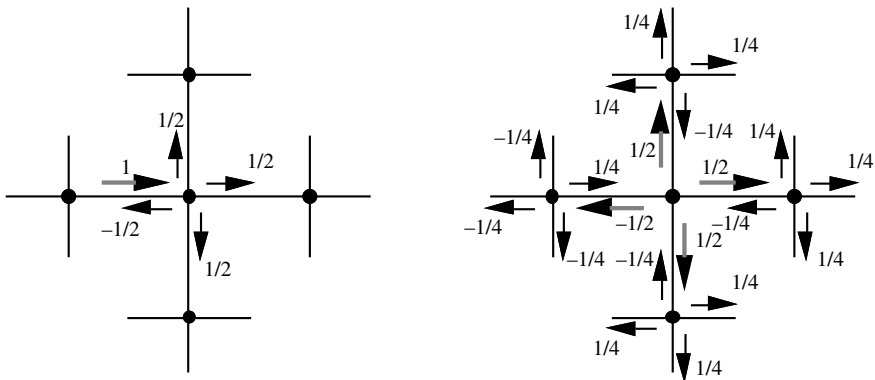


Fig. 13.8 Transmission et réflexion à un nœud TLM parallèle (deux pas successifs).

Chaque nœud est représenté par une matrice, qui lie les signaux incidents aux signaux réfléchis. On regroupe les matrices des nœuds pour former une matrice globale.

Le réseau est excité par des impulsions de tension appliquées sur un nœud de la structure (accès d'entrée). L'instant suivant, les signaux transmis et réfléchis (fig. 13.8) atteignent les quatre nœuds adjacents, et sont à leur tour transmis et réfléchis. On procède de façon itérative, de proche en proche. En fonction du temps, on détermine comment les signaux voyagent dans la structure, comment ils sont transmis et réfléchis aux interfaces et sur les bords. La présence de matériaux diélectriques et de pertes est simulée par des sections de lignes de transmission connectées aux nœuds [133]. On enregistre la tension en fonction du temps aux nœuds définis comme étant les sorties de la structure.

Tout le processus fonctionne dans le domaine temporel, et on peut considérer des éléments non linéaires et des variations temporelles des paramètres. Les caractéristiques fréquentielles peuvent ensuite être déterminées avec une transformée de Fourier [20].

Comme cette méthode discrétise la structure au moyen d'un maillage, l'étude ne peut considérer qu'une région finie de l'espace (guide d'onde ou cavité). On aborde l'étude des structures ouvertes en introduisant des limites absorbantes, qui simulent l'espace libre.

13.4.2 Précision

La méthode TLM est une méthode approchée, et lorsqu'on fait des approximations on introduit forcément des imprécisions. Plus spécifiquement, trois sources d'erreurs sont inhérentes à la méthode TLM:

- la vitesse de propagation dépend de la direction;
- la durée limitée du signal d'entrée (impulsion) produit une erreur de troncature;
- au voisinage d'arêtes, l'allure des champs devient très irrégulière et il faut placer beaucoup de nœuds rapprochés, ce qui augmente le temps de calcul et le nombre de places en mémoire.

Ces sources d'erreurs ont fait l'objet d'études approfondies et des moyens de les corriger ont été introduites [134].

13.4.3 Structure avec connexions en série

On définit de façon similaire le problème dual, celui d'un champ magnétique perpendiculaire au plan de la structure bidimensionnelle, avec le champ électrique dans le plan de la structure (mode TM). Les lignes de transmission sont alors connectées en série à chaque nœud, qui est aussi représenté par une matrice liant les tensions des signaux incidents et réfléchis. Une matrice globale regroupe les matrices de tous les nœuds.

13.4.4 Nœuds tridimensionnels

On étudie des structures tridimensionnelles en combinant des nœuds en série et des nœuds en parallèle, ce qui donne le schéma équivalent (a) de la figure 13.9 (nœud 3D distribué). On procède ensuite de la même manière que lors de la résolution des problèmes bidimensionnels. Dans le schéma équivalent (a), chaque jonction correspond à une des composantes des champs (électrique et magnétique). Comme les jonctions sont distinctes, les différentes composantes des champs sont définies à des endroits différents.

Pour éviter ce défaut de la méthode, on a introduit le nœud TLM condensé de la figure 13.9(b), dans lequel toutes les lignes de transmission convergent en un même point. La définition de la matrice du nœud est plus complexe dans ce cas, mais au moins les six composantes des champs sont définies au même endroit. Le processus mathématique de résolution n'est en revanche pas modifié.

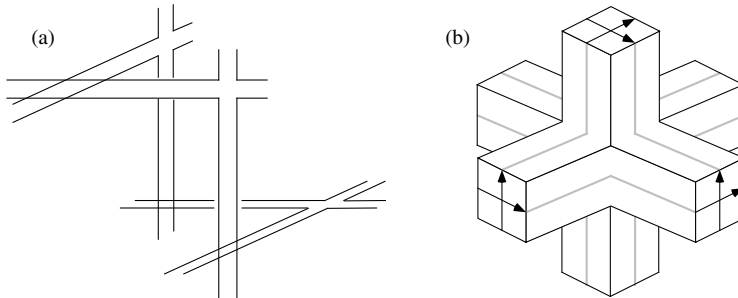


Fig. 13.9 Nœuds TLM tridimensionnels: (a) distribué, (b) condensé.

13.4.5 Applications

La méthode TLM présente une grande similitude avec la méthode FDTD, et ceci bien que les principes qui sont à la base des deux méthodes soient fondamentalement différents. Les deux méthodes discrétisent le temps et l'espace de façon similaire, et on peut même faire coïncider le nœud distribué de la figure 13.9(a) avec trois des faces du cube de Yee (fig. 13.6).

De ce fait, les deux méthodes peuvent être utilisées pour résoudre les mêmes types de problèmes. La méthode TLM a surtout été utilisée pour étudier des structures en microruban et en ligne coplanaire (discontinuités et filtres), et un logiciel pour l'analyse de structures bidimensionnelles est distribué commercialement [134].

Du fait des nombreux points communs aux deux méthodes, notamment lors de la résolution mathématique des équations obtenues, les développements des méthodes FDTD et TLM ont été effectués en parallèle, et les nouveautés introduites dans l'une des deux ont rapidement été adaptées à l'autre. On a pu tirer profit de ce parallélisme pour améliorer de façon significative les performances des deux méthodes, qui conservent toutefois leurs caractéristiques propres.

13.4.6 Méthode des lignes

Une troisième méthode, connue sous le nom de *méthode des lignes*, présente certains points communs avec les deux méthodes décrites précédemment (FDTD, sect. 13.3, TLM, sect. 13.4). Dans cette méthode, qui a été principalement utilisée pour analyser des structures imprimées, les champs sont discrétisés dans les deux directions transverses – parallèles à la surface du substrat diélectrique – mais leur dépendance dans la direction normale est déterminée de façon rigoureuse. D'un usage moins répandu que les deux techniques précédentes, cette méthode a servi à l'analyse de discontinuités, de résonateurs et de filtres [135].

13.5 PRINCIPES VARIATIONNELS

13.5.1 Introduction

Une manière fondamentalement différente de traiter des problèmes d'électromagnétisme consiste à remplacer la résolution d'un système d'équations différentielles – les équations de Maxwell – par la minimisation d'une expression intégrale, qu'on appelle fonctionnelle [136]. Par exemple, il a été démontré que l'énergie d'un système passe par un minimum lorsqu'on la calcule avec la solution exacte. On fait usage de cette propriété, notamment en mécanique, sous le nom de principe des travaux virtuels. En électrostatique, l'expression qu'il faut minimiser est donnée par

$$F(V) = \int_V E^2(\mathbf{r}) dV = \int_V |\nabla V(\mathbf{r})|^2 dV \quad [V^2\text{m}] \quad (13.13)$$

On doit remarquer que dans (13.13), certains termes V représentent le potentiel électrique, tandis que d'autres se réfèrent au volume: l'usage regrettable d'un même symbole pour définir des quantités différentes est susceptible de causer ici des confusions, et il faut prendre les précautions nécessaires pour éviter de confondre ces deux grandeurs. Quand on considère un problème bidimensionnel, le volume d'intégration est remplacé par une surface et il n'y a alors plus d'ambiguïté.

Lorsqu'une fonction satisfait l'équation de Laplace, la valeur que prend l'expression fonctionnelle $F(V)$ qui lui correspond passe par un minimum (fig. 13.10) – pour autant que le potentiel satisfasse des conditions de cep (§ 1.4.6) ou de cmp (§ 1.4.7) sur la surface qui entoure le volume considéré.

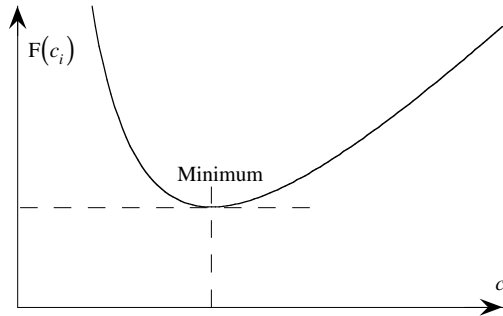


Fig. 13.10 Minimum de la fonction $F(V)$ au voisinage de la solution exacte (le terme c_i est un des coefficients qui définissent l'expression fonctionnelle).

On doit alors chercher, parmi toutes les fonctions qui satisfont les conditions aux limites, celle qui minimise la valeur de la fonctionnelle (13.13). Le problème original – la résolution de l'équation de Laplace – est ainsi remplacé par la recherche d'un minimum. Bien entendu, il est fort peu probable qu'on trouve "par hasard" cette fonction optimale: on a donc défini une stratégie de recherche systématique, au moyen de laquelle on s'ingénie à définir, puis à tester toutes les fonctions susceptibles de correspondre à la solution du problème considéré.

13.5.2 Méthode de Rayleigh-Ritz

Pour former “toutes les fonctions possibles”, on remplace le potentiel inconnu $V(\mathbf{r})$ par une somme de fonctions indépendantes $f_i(\mathbf{r})$, qui forment un ensemble complet [137]

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i(\mathbf{r}) \quad \text{et} \quad V_a(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^M c_i f_i(\mathbf{r}) \quad [\text{V}] \quad (13.14)$$

Les coefficients c_i sont les inconnues à déterminer. Comme on ne peut pas résoudre un système d'équations infini, on doit tronquer la série, ce qui donne $V_a(\mathbf{r})$, approximation de la valeur exacte $V(\mathbf{r})$. On introduit (13.14) dans (13.13), et on évalue $F(V_a)$, qui devient une fonction quadratique des M coefficients inconnus c_i . Pour trouver le potentiel approché $V_a(\mathbf{r})$ qui minimise $F(V_a)$, on annule les dérivées par rapport à tous les c_i , ce qui fournit un système de M équations linéaires pour les M inconnues c_i

$$\frac{\partial F(c_1, c_2, \dots, c_j, \dots, c_M)}{\partial c_i} = 0 \quad \text{avec} \quad i = 1, 2, \dots, j, \dots, M \quad (13.15)$$

Le système d'équations obtenu s'exprime de façon compacte sous forme matricielle

$$[\mathbf{A}][\mathbf{c}] = [\mathbf{b}] \quad (13.16)$$

où $[\mathbf{A}]$ est une matrice carrée d'ordre M , $[\mathbf{c}]$ est le vecteur colonne qui contient les inconnues c_i , et $[\mathbf{b}]$ le vecteur colonne qui contient les constantes introduites aux limites. Ce système peut être résolu par des méthodes classiques comme la triangularisation de Gauss.

Il y a plusieurs manières de choisir les fonctions de base $f_i(\mathbf{r})$. On peut prendre des fonctions sinusoïdales, des fonctions de Bessel, ou des polynômes (§ 13.1.3). Cependant, la méthode la plus courante (§ 13.5.3) divise le domaine en sous-régions et introduit dans chaque sous-région un polynôme, défini uniquement dans cette sous-région.

13.5.3 Méthode des éléments finis (FEM)

La méthode des éléments finis (*Finite Element Method = FEM*) fut développée et appliquée en premier lieu en génie civil et en mécanique, et n'a trouvé sa place que peu à peu en électricité, vers la fin des années 1960 [138]. Quand on considère une structure bidimensionnelle, on divise la surface du problème en sous-régions, le plus souvent de forme triangulaire. Lorsque le problème concerne un volume, on divise celui-ci en un ensemble de tétraèdres, ou parfois de prismes (fig. 13.11).

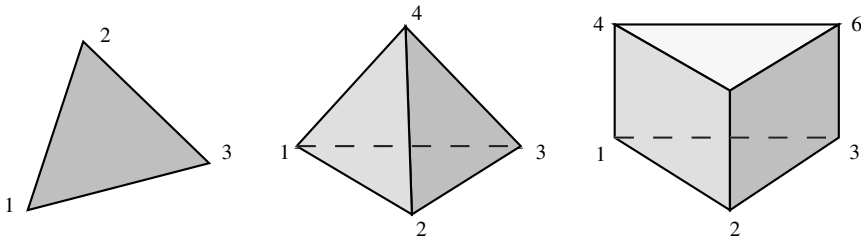


Fig. 13.11 Éléments finis: triangle pour le découpage des surfaces, tétraèdre et prisme pour les volumes.

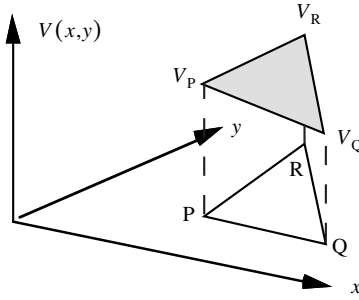


Fig. 13.12 Approximation polynomiale sur un triangle.

Dans le cas bidimensionnel, le potentiel approché $V_a(x,y)$ à l'intérieur du triangle est donné par l'interpolation linéaire des potentiels aux trois sommets du triangle, situés aux points P, Q et R du plan $x - y$ (fig. 13.12), qui donne

$$V(x,y) = Lx + My + N \quad [V] \quad (13.17)$$

où les coefficients L , M et N sont directement liés aux valeurs du potentiel aux trois sommets du triangle. Les deux premiers termes sont donnés par

$$L = \frac{V_P(y_Q - y_R) + V_Q(y_R - y_P) + V_R(y_P - y_Q)}{x_P(y_Q - y_R) + x_Q(y_R - y_P) + x_R(y_P - y_Q)}$$

$$M = \frac{V_P(x_Q - x_R) + V_Q(x_R - x_P) + V_R(x_P - x_Q)}{y_P(x_Q - x_R) + y_Q(x_R - x_P) + y_R(x_P - x_Q)}$$
(13.18)

On ne détermine pas ici la constante N parce qu'elle n'apparaît pas dans la suite des opérations. La contribution de ce triangle particulier à la fonctionnelle $F(V_a)$ est obtenue en prenant le gradient du potentiel, qui est un vecteur de longueur constante, puis en multipliant son module carré par la surface S_{PQR} du triangle, ce qui donne

$$(L^2 + M^2)S_{PQR} \quad [V^2] \quad (13.19)$$

La somme des contributions de tous les triangles de la section droite (fig. 13.13) fournit la fonctionnelle $F(V_a)$ recherchée. Sa valeur dépend des potentiels V_i aux sommets de tous les triangles. Le potentiel est donc continu de part et d'autre de la ligne qui sépare deux triangles contigus.

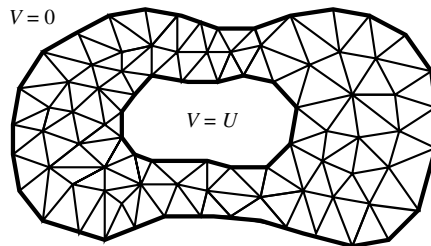


Fig. 13.13 Découpage en triangles de la section droite d'une ligne de transmission.

On trouve le minimum de la fonctionnelle en annulant ses dérivées par rapport à tous les coefficients

$$\frac{\partial F(V_A, V_B, \dots, V_Z)}{\partial V_J} = 0 \quad \text{avec } J = A, B, \dots, I, \dots, N \quad [V] \quad (13.20)$$

La structure comporte N sommets de triangles à l'intérieur des limites, et on obtient un ensemble de N équations à N inconnues. Comme le potentiel en un nœud n'apparaît que pour les triangles contigus à ce nœud, la matrice résultante est creuse.

13.5.4 Exemple d'application

On considère un rectangle, de côtés $3a$ et $2b$, respectivement (fig. 13.14). Trois côtés sont au potentiel nul, le quatrième à un potentiel de 1 V . On demande de déterminer le potentiel en deux points situés sur l'axe de symétrie.

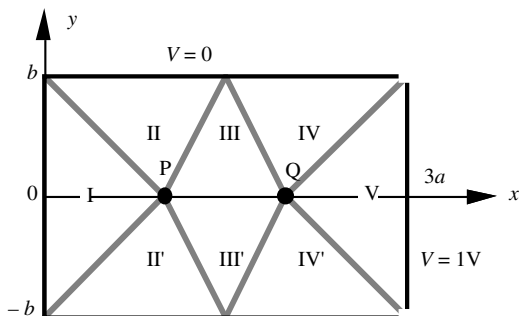


Fig. 13.14 Détermination du potentiel dans un rectangle.

Le rectangle est divisé en huit triangles mais, par symétrie, seuls cinq sont à considérer. Le potentiel approché $V_a(x,y)$ est défini comme suit

$$\begin{aligned} V_I &= V_P \frac{x}{a} & V_{II} &= V_P \left(1 - \frac{|y|}{b}\right) & V_{III} &= (V_Q - V_P) \frac{x}{a} - (V_Q + V_P) \frac{|y|}{2b} + 2V_P - V_Q \\ V_{IV} &= V_Q \left(1 - \frac{|y|}{b}\right) & V_V &= (1 - V_Q) \frac{x}{a} + 3V_Q - 2 \end{aligned} \quad [V] \quad (13.21)$$

On prend ensuite le gradient des potentiels et on évalue la fonctionnelle

$$F(V_P, V_Q) = \frac{ab}{4} \left[\left(\frac{8}{a^2} + \frac{7}{b^2} \right) V_P^2 - 2 \left(\frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) V_P V_Q + \left(\frac{8}{a^2} + \frac{7}{b^2} \right) V_Q^2 - \frac{8}{a^2} V_Q + \frac{4}{a^2} \right] \quad [V^2] \quad (13.22)$$

Dérivant par rapport à V_P et à V_Q , on obtient deux équations qu'on égale à zéro

$$\begin{aligned} \left(\frac{8}{a^2} + \frac{7}{b^2} \right) V_P - \left(\frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) V_Q &= 0 \\ \left(\frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) V_P - \left(\frac{8}{a^2} + \frac{7}{b^2} \right) V_Q + \frac{4}{a^2} &= 0 \end{aligned} \quad [V] \quad (13.23)$$

On en tire finalement

$$V_P = \frac{4b^2 - a^2}{8b^2 + 7a^2} V_Q \quad \text{et} \quad V_Q = \frac{1}{6} \frac{8b^4 + 7a^2b^2}{2b^4 + 5a^2b^2 + 2a^4} \quad [\text{V}] \quad (13.24)$$

On constate que, pour un problème simple qui n'a que deux inconnues et pour lequel la symétrie permet des simplifications, la formulation devient déjà complexe. Cette méthode ne convient que pour des calculs à l'ordinateur. Suite à la nature très mathématique du développement, on perd un peu de vue la signification des résultats obtenus.

13.5.5 Résolution par éléments finis des équations de Maxwell

La méthode des éléments finis sert aussi à résoudre les équations de Maxwell. On trouve notamment que l'expression suivante, en termes du vecteur-phaseur magnétique \underline{H} (dans le domaine fréquentiel), est variationnelle, c'est-à-dire qu'elle passe par un minimum lorsque le champ correspond à la solution du problème [139]

$$F(\underline{H}) = \int_V \frac{1}{\mu} [(\nabla \times \underline{H}) \cdot (\nabla \times \underline{H}^*) - k^2 \epsilon_r \underline{H} \cdot \underline{H}^*] dV \quad [\text{VA/s}] \quad (13.25)$$

L'expression est liée à la différence des énergies électrique et magnétique, qui est nulle pour la solution exacte. Elle est variationnelle, c'est-à-dire insensible aux petites variations du vecteur-phaseur magnétique \underline{H} – au voisinage de la valeur exacte.

Pour résoudre un problème d'électromagnétisme, on procède comme dans le cas électrostatique des paragraphes précédents, en développant les trois composantes du vecteur-phaseur magnétique \underline{H} sur un ensemble de fonctions de base.

En électromagnétisme, la méthode des éléments finis a été utilisée en premier lieu pour étudier des guides d'ondes de section arbitraire, des guides partiellement remplis de diélectrique [140] et de lignes imprimées blindées – structures où l'on détermine les champs sur la section droite (problèmes à deux dimensions). Plusieurs développements algébriques ont été considérés pour représenter les champs [141].

Par la suite, des problèmes tridimensionnels ont aussi été abordés, notamment l'étude de cavités partiellement chargées de diélectrique, et les réflexions produites par des objets disposés dans des guides d'ondes [142]. La méthode a été adaptée à l'étude de cavités cylindriques circulaires destinées à des accélérateurs de particules [143].

Le découpage en triangles ou en tétraèdres implique une grille finie et donc une structure bornée. Comme pour la FDTD (sect. 13.3), la méthode a été adaptée au traitement de problèmes ouverts en plaçant des frontières absorbantes [130]. On peut l'utiliser pour des antennes de dimensions finies, et disposées sur des surfaces courbées [144].

13.5.6 Solutions parasites

On doit toutefois constater que, fort malencontreusement, des solutions fournies par certaines formulations en éléments finis ne sont pas acceptables, parce que les potentiels et les champs obtenus présentent des discontinuités et des singularités qui ne correspondent pas au problème considéré. Ces *solutions parasites* apparaissent en même temps que des résultats qui, eux, représentent bien des distributions cohérentes des champs. Il faut donc détecter et éliminer ces solutions parasites, tout en conservant les bonnes solutions [145].

On constate donc que certaines approximations introduisent – en plus d'imprécisions prévisibles – des modifications plus profondes du problème traité, qui donnent lieu à des réponses parasites. Elles ont été attribuées diversement au non-respect de conditions aux limites et à des champs à divergence non nulle. Il ne semble toutefois pas que la cause réelle de ces solutions parasites ait été élucidée de façon satisfaisante.

13.5.7 Logiciel disponible

Un logiciel performant pour l'étude de problèmes électromagnétiques complexes, par la méthode des éléments finis, est disponible commercialement. Ce logiciel, appelé "*High-Frequency Structure Simulator*" (HFSS), a été mis au point par Ansoft Corporation et est actuellement distribué par la compagnie Hewlett-Packard [146]. Il sert à déterminer la distribution des champs et la matrice de répartition de circuits hyperfréquences passifs (chap. XIII.6), utilisant la méthode des éléments finis pour modéliser des structures tridimensionnelles complexes. Il peut aussi modéliser des composants à semiconducteurs et possède des capacités étendues pour le traitement des résultats.

De même que pour d'autres techniques approchées à usage polyvalent, cette méthode requiert une grande capacité de mémoire et un temps de calcul important.

13.6 MÉTHODE DES MOMENTS

Au lieu de résoudre l'équation de Laplace ou l'équation d'onde dans l'espace situé entre des conducteurs, pour appliquer ensuite les conditions aux limites, on peut partir des limites elles-mêmes, en déterminant quelles densités de charges et de courants il faut y disposer pour que le champ qu'elles produisent satisfassent les conditions.

13.6.1 Section droite d'une ligne de transmission

On considère à nouveau la section droite d'une ligne de transmission (fig. 13.1) et on découpe les parois métalliques en lames longitudinales minces, dont on admet qu'elles sont planes. La section droite ainsi obtenue est représentée dans la figure 13.15. On suppose que la lame i est couverte d'une densité de charge de surface ρ_{si} , pour l'instant inconnue [147].

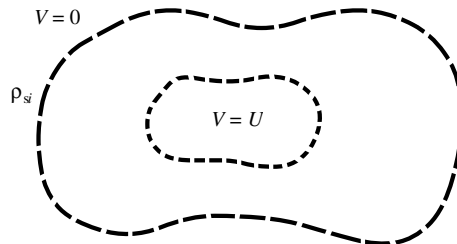


Fig. 13.15 Remplacement des surfaces limites par des lames chargées.

Le potentiel produit par une lame plane avec une charge de surface homogène a été déterminé au paragraphe 12.4.5. Obtenu par intégration de (11.37) sur la surface de la lame, il est donné par (12.47)

$$-4\pi\epsilon \frac{V(x_i, z_i)}{\rho_{si}} = a_i \ln \left\{ \left[(x_i - a_i)^2 + y_i^2 \right] \left[(x_i + a_i)^2 + y_i^2 \right] \right\} \\ + x_i \ln \left[\frac{(x_i + a_i)^2 + y_i^2}{(x_i - a_i)^2 + y_i^2} \right] + 2y_i \arctan \frac{2a_i y_i}{y_i^2 + x_i^2 - a_i^2} - 4a_i \quad (13.26)$$

où x_i et y_i sont les coordonnées locales liées à la lame i , de largeur $2a_i$ et couverte d'une densité de charge de surface constante ρ_{si} – qui est une des inconnues du problème.

Le potentiel en un point est la somme des contributions des N lames chargées – y compris celle de la lame sur laquelle se trouve le point. Le potentiel étant spécifié par les conditions aux limites, on obtient une relation pour le potentiel en ce point en fonction des N densités de charge de surface ρ_{si} sur toutes les lames. En déterminant le potentiel en N points – par exemple aux centres des lames – on obtient N équations à N inconnues, qu'on résout par inversion de matrice ou avec d'autres techniques de résolution [120].

On peut aussi évaluer le potentiel en un grand nombre de points sur le contour et minimiser la fonction objectif des moindres carrés (§ 13.1.3). On peut aussi prendre une moyenne – simple ou pondérée – du potentiel sur chaque lame ou sur l'ensemble du contour pour satisfaire les conditions aux limites (méthode des moments).

La charge totale sur un conducteur est la somme des charges sur tous les segments. En la divisant par le tension on obtient la capacité linéique de la ligne (§ 2.1.1).

13.6.2 Calcul du rayonnement de conducteurs

Le potentiel vecteur magnétique produit par une distribution connue de courant électrique se détermine avec des équations intégrales, définies en termes des fonctions de Green de l'espace libre (§ 9.1.6)

$$\underline{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\underline{J}(\mathbf{r}') e^{-j\omega\sqrt{\epsilon\mu}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' = \int_{V'} \underline{J}(\mathbf{r}') \underline{G}_{AJ}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') dV' = \underline{J} \otimes \underline{G}_{AJ} \quad [\text{Vs/m}] \quad (13.27)$$

Dans la majorité des situations qu'on rencontre dans la pratique, on ne sait pas quel courant circule sur l'ensemble des pièces métalliques. On doit donc commencer par le déterminer, avant de pouvoir étudier le rayonnement d'une antenne ou d'un circuit. Pour ce faire, on introduit une expression approchée pour le courant, et on l'affine au moyen de la méthode des moments, jusqu'à ce que les champs qui résultent de cette expression satisfassent les conditions aux limites sur les bords de la structure considérée. Plus spécifiquement, on doit avoir sur les bords d'un bon conducteur

$$\mathbf{n} \times (\underline{E} - \underline{Z}_m \underline{J}_s) = \mathbf{n} \times [\underline{E} - (1+j)\sqrt{\omega\mu/2\sigma} \underline{J}_s] = 0 \quad [\text{V/m}] \quad (13.28)$$

où \underline{J}_s est la densité de courant de surface et \underline{Z}_m l'impédance d'onde du métal (§ 8.2.6), défini par sa perméabilité μ et sa conductivité σ . Dans beaucoup de situations, on admet que le métal est un conducteur électrique parfait (cep, § 1.6.6), auquel cas $\underline{Z}_m = 0$.

Une partie du champ électrique est produit par les courants qui circulent dans les conducteurs considérés dans le problème, mais une autre partie provient de leur environnement (onde incidente sur une antenne réceptrice, dispositif d'excitation). On distingue ainsi le champ interne $\underline{E}^{\text{int}}$ du champ externe $\underline{E}^{\text{ext}}$, étant bien entendu que la condition limite porte sur la somme des deux.

13.6.3 Formulation intégrale pour le champ électrique (EFIE)

Dans la formulation intégrale pour champ électrique (EFIE), le champ électrique produit par les courants de surface est remplacé par son expression en termes de fonctions de Green (§ 9.1.8), ce qui donne

$$\mathbf{n} \times (\underline{E}^{\text{ext}} + \underline{E}^{\text{int}} - \underline{Z}_m \underline{J}_s) = \mathbf{n} \times (\underline{E}^{\text{exc}} + \overline{\overline{\mathbf{G}}}_{EJ} \otimes \underline{J}_s - \underline{Z}_m \underline{J}_s) = 0 \quad (13.29)$$

Le champ qui existe à la surface des conducteurs est en partie produit par le courant qui circule dans ces conducteurs, et on doit déterminer l'effet d'un point sur lui-même. Certaines composantes de la fonction de Green $\overline{\overline{\mathbf{G}}}_{EJ}$ divergent selon $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-3}$, et on ne peut pas évaluer une intégrale de superposition directement dans le domaine spatial [148].

Quand on analyse des antennes filaires (formées de fils métalliques), on admet que le courant circule le long de l'axe du conducteur, tandis que la condition limite s'applique sur son pourtour. Les points de source ne se trouvant pas sur le pourtour, il n'y a pas de singularité. La même méthode sert à déterminer l'inductance propre d'un conducteur (§ 12.7.1). Le code électromagnétique numérique (NEC) [149] et le logiciel MININEC [92] utilisent cette méthode pour analyser des antennes filaires (fils de rayon non nul).

En revanche, dans une structure formée de couches métalliques minces, on ne peut pas séparer les sources des limites, puisque les deux se trouvent au même niveau. Le champ électrique possède alors une singularité importante au point de coïncidence, dont on peut éviter l'effet en passant dans un domaine transformé de Fourier ou de Hankel [150]. On transforme les courants dans le conducteur et les conditions aux limites, et tous les traitements ultérieurs sont effectués dans le domaine transformé (*méthode spectrale*). Bien entendu, cette méthode ne peut être utilisée que si la géométrie du domaine considéré est susceptible d'être transformée.

13.6.4 Formulation intégrale pour les potentiels mixtes (MPIE)

Une autre manière d'éviter les fortes singularités consiste à faire usage des potentiels $\underline{A}(\mathbf{r})$ et $\underline{V}(\mathbf{r})$ dans la formulation intégrale pour potentiels mixtes (MPIE), qui a été introduite en premier lieu pour des antennes filaires [147]. Dans ce cas, la condition à satisfaire est donnée par

$$\mathbf{n} \times \left[\underline{E}^{\text{ext}} + j\omega \overline{\overline{\mathbf{G}}}_{AJ} \otimes \underline{J}_s + \nabla \left(\underline{G}_V \otimes \underline{q}_s \right) - \underline{Z}_m \underline{J}_s \right] = 0 \quad [\text{V/m}] \quad (13.30)$$

La densité de charge de surface q_s est associée à la densité de courant de surface \underline{J}_s par l'équation de continuité en deux dimensions. Les fonctions de Green pour les potentiels n'ont que des singularités de premier ordre en $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$, de sorte que l'intégrale de superposition peut être évaluée dans le domaine spatial, ce qui, dans ce cas, ne présente pas de difficulté majeure [151].

13.6.5 Développement des densités de courant et de charge

Le courant de surface \underline{J}_s apparaît à l'intérieur d'intégrales de superposition, qu'on ne peut pas inverser, de sorte qu'on ne peut pas le déterminer exactement. On l'exprime par une somme de *fonctions de base*, et on fait de même pour la densité de charge

$$\underline{J}_s = \sum_{i=1}^N \alpha_i \underline{J}_{si} \quad [\text{A/m}] \quad \text{et} \quad \underline{q}_s = \sum_{i=1}^N \alpha_i \underline{q}_{si} \quad [\text{As/m}^2] \quad (13.31)$$

Les fonctions de base \underline{J}_{si} font partie d'un ensemble complet de fonctions linéairement indépendantes (orthogonales) [147] et les densités de charge \underline{q}_{si} leur sont liées par l'équation de continuité.

Lorsque les conducteurs ont une géométrie simple, on choisit une fonction de base définie sur toute la structure. Par exemple, sur une antenne filaire rectiligne, on prend des sinus, qui s'annulent aux deux extrémités (série de Fourier). Le courant sur une plaque rectangulaire s'exprime avec un développement bidimensionnel en série de Fourier, celui sur une structure circulaire ou annulaire avec des fonctions de Bessel.

Les géométries irrégulières, en revanche, doivent être divisées en sous-sections. On découpe une antenne filaire en segments, dont on admet qu'ils sont rectilignes. On décompose une plaque métallique en cellules rectangulaires (fig. 13.3) ou triangulaires (fig. 13.13). Le courant dans chaque sous-section peut être constant, à variation linéaire ou avec une dépendance plus complexe (polynomiale ou sinusoïdale). On fait souvent usage de fonctions en "faîte-de-toit" qui s'étendent sur deux cellules adjacentes (fig. 13.16). Dans ce cas, les densités de charges de surface sont constantes sur chaque cellule.

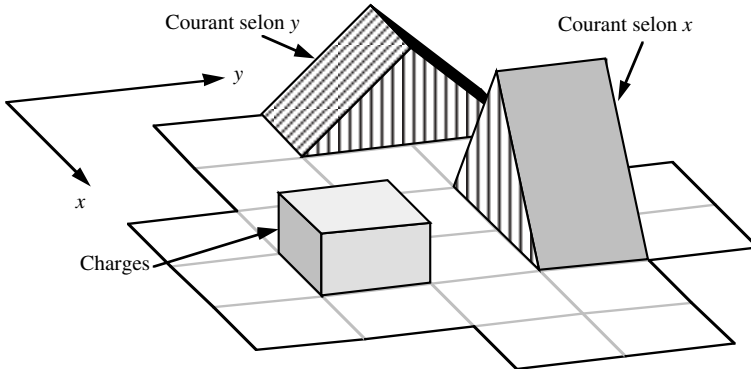


Fig. 13.16 Découpage en cellules rectangulaires avec distribution des courants en fonctions "faîte de toit".

Les cellules rectangulaires peuvent toutes avoir la même dimension, auquel cas la programmation est simple mais où il faut beaucoup de cellules pour bien modéliser la géométrie. En prenant des cellules rectangulaires de dimensions différentes, on peut en réduire le nombre, mais on augmente la complexité de la programmation [152]. L'emploi de cellules triangulaires est plus adéquat pour des structures à limites curvilignes. Le choix d'un découpage dépend fortement des moyens de calcul disponibles.

La méthode des éléments finis (sect. 13.5) effectue un développement similaire, d'un potentiel ou d'un champ inconnu sur un ensemble de fonctions. Les cellules sont dans ce cas bi- ou tridimensionnelles (triangle, tétraèdres ou prismes).

13.6.6 Résolution du problème

Les coefficients $\underline{\alpha}_i$ de (13.31) sont les inconnues du problème, qu'il faut déterminer en appliquant les conditions aux limites, exprimées dans la formulation EFIE (§ 13.6.3), ou dans la formulation MPIE (§ 13.6.4). Le nombre de coefficients dépend des termes pris dans un développement, ou des cellules utilisées pour découper la structure. Il doit être suffisant pour obtenir une précision adéquate, mais pas excessif, pour ne pas augmenter de façon inutile le temps de calcul ou saturer l'espace disponible en mémoire.

La condition limite ne peut pas être appliquée sur tous les points de la surface des conducteurs. On peut parfois se contenter de la satisfaire en quelques points, judicieusement choisis. On peut aussi la satisfaire de façon approchée, en multipliant la condition par une *fonction de test*, puis en intégrant l'expression obtenue, soit sur la ligne qui joint les centres des sous-domaines adjacents, soit sur la surface des domaines. Dans tous les cas, on obtient N équations linéaires à N inconnues, qu'on exprime sous forme matricielle

$$[\mathbf{Z}^{\text{mom}}][\underline{\alpha}] = [\mathbf{V}] \quad (13.32)$$

où $[\underline{\alpha}]$ est le vecteur colonne des inconnues, $[\mathbf{Z}^{\text{mom}}]$ la matrice liant les courants aux tensions d'excitation et $[\mathbf{V}]$ le vecteur colonne des termes dus au champ électrique venant de l'extérieur $\underline{E}^{\text{ext}}$ (onde incidente, ligne de transmission connectée à la structure).

On résout le système matriciel (13.32), ce qui permet d'obtenir les distributions de courants et de charges sur les conducteurs. On en déduit ensuite les paramètres de la structure, l'impédance d'entrée, la matrice de répartition et, s'il s'agit d'antennes, le diagramme de rayonnement et le gain.

13.6.7 Principales étapes de la méthode des moments

- La relation (9.11) permet de déterminer le potentiel vecteur $\underline{A}(\mathbf{r})$ produit par n'importe quelle distribution de courants $\underline{J}(\mathbf{r}')$ sur les surfaces des conducteurs.
- Toutefois on ne connaît pas les courants, en dehors de celui fourni par la source connectée à l'entrée de la structure.
- Pour réduire la complexité du problème, on développe les courants inconnus, en séries de Fourier (§ IV.7.4.6) ou sur des sous-structures, avec N coefficients indéterminés qui deviennent les inconnues du problème.
- On calcule le potentiel vecteur $\underline{A}(\mathbf{r})$ et le champ électrique $\underline{E}(\mathbf{r})$ qui en découlent pour toutes les N composantes du développement des courants.
- Le champ électrique tangentiel doit satisfaire la condition (13.28) sur la surface métallique. On applique la condition limite, sous forme EFIE ou MPIE, et on obtient un système de N équations linéaires à N inconnues, que l'on exprime sous forme matricielle.
- On résout le système par inversion de matrice, ce qui fournit tous les coefficients des développements du courant sur tous les conducteurs.
- La distribution du courant $\underline{J}(\mathbf{r}')$ sur les conducteurs étant connue, la relation (13.27) permet de déterminer le potentiel vecteur $\underline{A}(\mathbf{r})$ en tout point de l'espace et notamment dans le champ lointain, dont on tire le diagramme de rayonnement et la directivité.
- On détermine également la tension aux bornes de la source, et on en tire l'impédance d'entrée de l'antenne.

13.6.8 Extensions de la méthode aux antennes imprimées

Dans le cas des antennes imprimées (fig. 9.12), on tient compte du plan de masse avec la méthode des images (sect. 12.3). Pour ce faire, on suppose que ce plan est parfaitement conducteur et de dimensions transverses infinies. La présence de charges ou de courants virtuels peut être directement incorporée à la fonction de Green.

La présence d'un substrat diélectrique peut être considéré de deux manières fondamentalement différentes:

- En remplaçant le diélectrique par des courants équivalents de polarisation [153]. Cette méthode augmente considérablement le nombre d'inconnues du problème, et donc les moyens informatiques nécessaires pour le résoudre. Elle permet en revanche d'étudier des antennes ayant des dimensions finies.
- On peut aussi incorporer la présence de couches de diélectrique (supposées de dimensions infinies) dans les fonctions de Green, qui sont alors des intégrales de Sommerfeld (transformées de Hankel). Comme leur intégrant a des singularités, l'évaluation des intégrales a posé bien des problèmes par le passé. Elle peut maintenant être effectuée sans difficulté par des algorithmes spécialisés [154].

Il est ainsi possible d'analyser le comportement d'antennes imprimées multicouches, alimentées par une ligne microruban à travers une fente [155]. Un logiciel de calcul, appelé "Ensemble", a été spécifiquement mis au point pour l'analyse, au moyen de la méthode intégrale MPIE décrite dans cette section, d'antennes de ce type, ainsi que de circuits multicouches, pouvant aussi comporter des fils métalliques verticaux [92].

13.7 CONSTATATIONS DIVERSES

13.7.1 Aspect numériques

Plusieurs méthodes numériques ont un point commun: après un développement mathématique plus ou moins complexe, elles fournissent un système d'équations linéaires qu'il s'agit de résoudre. Le nombre d'équations devient très important quand la structure a de grandes dimensions. Tant que le nombre d'inconnues est petit, on résout le système en inversant la matrice, en utilisant les logiciels inclus dans les collections de programmes courants. Toutefois, les besoins en places de mémoire et en temps de calcul augmentent rapidement avec l'ordre du système à résoudre.

Quand on a un très grand nombre d'inconnues, on ne peut pas utiliser les algorithmes habituels d'inversion de matrices. Certaines méthodes fournissent des matrices avec des structures en blocs, des sous-matrices nulles et des zones à contribution négligeable, pour lesquelles on utilise des méthodes itératives comme la surrelaxation (§ 13.2.5) ou les gradients biconjugués [120]. On tire aussi profit de la symétrie et de la réciprocité pour réduire l'espace en mémoire nécessaire et le temps de calcul.

Lorsque toutes les précautions nécessaires sont prises, on obtient typiquement une correspondance de l'ordre de 1–2% entre les valeurs calculées et les résultats obtenus expérimentalement. Cette précision est généralement suffisante en pratique, elle est même souvent meilleure que les tolérances sur les propriétés physiques des structures étudiées.

13.7.2 Critères de choix

Beaucoup de méthodes ont été développées pour résoudre des problèmes, en électrostatique, en magnétostatique et en électromagnétisme. Beaucoup de logiciels ont été mis au point et sont maintenant disponibles, présentant une large gamme de performances et des caractéristiques variées – mais il n'existe pas de moyen infaillible de faire "le meilleur choix possible" entre ces différents programmes. En vue de choisir judicieusement un logiciel, voici quelques questions (élémentaires) qu'il faut se poser :

- le problème est-il statique, quasistatique ou dynamique ?
- la structure considérée est-elle ouverte ou fermée ?
- quelle est la forme de la structure à étudier : plane, arrondie, avec des arêtes, etc. ?
- est-elle unidimensionnelle, bidimensionnelle ou tridimensionnelle ?
- s'agit-il d'une machine, d'une ligne, d'un circuit ou d'une antenne ?
- cherche-t-on une réponse temporelle ou fréquentielle ?
- les matériaux sont-ils linéaires ou non linéaires ?
- les matériaux sont-ils non dissipatifs, ou présentent-ils des pertes ?

Dans certains cas, le choix d'une méthode s'impose dès qu'on a répondu aux questions. Dans certains autres, plusieurs techniques peuvent résoudre le problème, avec plus ou moins d'efforts et de moyens techniques. Toutefois, dans bien des situations, aucune méthode ne permet de traiter le problème, on doit alors recourir à plusieurs d'entre elles et les combiner. On n'a pas encore découvert de méthode universelle qui permette de traiter tous les problèmes rencontrés en électromagnétisme – et pourtant, on a déjà bien cherché et on cherche encore (la quête du Graal de l'électromagnétisme est ouverte...).

13.7.3 Sur l'évolution des méthodes

Au début de son évolution, une méthode se développe à partir d'un principe de base bien spécifique, en vue de résoudre un type particulier de problème. Par exemple, les méthodes qui discrétisent l'espace s'adaptent bien aux problèmes fermés, tandis que les formulations intégrales conviennent mieux à l'étude de structures ouvertes, etc. À ce stade, chaque méthode aboutit à la mise au point de logiciels peu exigeants en moyens de calcul, qui peuvent notamment fonctionner avec des ordinateurs personnels.

Bien entendu, chaque méthode possède un domaine d'utilisation restreint, et ne traite donc qu'un type de problèmes. Pour étendre ce domaine, le promoteur de la méthode ajoute alors des "accessoires": la transformée de Fourier extrait une réponse fréquentielle des résultats fournis par une étude en temps réel, l'adjonction de frontières absorbantes permet de discrétiser des structures ouvertes, etc. Ainsi, on étend le domaine d'application de la méthode, mais en le faisant on augmente sa complexité, de sorte que les besoins en moyens informatiques s'accroissent. Il existe une tendance à mettre au point de grands logiciels polyvalents, qui devraient permettre, en principe, de résoudre la majorité des problèmes courants. Cette tendance est directement liée à l'augmentation fabuleuse des moyens informatiques à disposition, ainsi qu'à l'apparition d'algorithmes performants pour la résolution mathématique.

De ce fait, on est souvent amené à utiliser des moyens sophistiqués pour traiter des problèmes simples – parce qu'on a ces moyens sous la main. Par exemple, un ordinateur vectoriel peut être requis pour résoudre un problème avec un logiciel de haut niveau, alors qu'une méthode mieux adaptée le traiterait tout aussi bien sur un ordinateur personnel !

13.8 EXERCICES

13.8.1 On considère la ligne “coaxiale” à section droite carrée de la figure 13.17, et on demande de déterminer approximativement le potentiel entre les deux conducteurs au moyen de la méthode de la collocation par points. Du fait de la symétrie, d’importantes simplifications sont possibles, dont il s’agit de tirer profit. Dans ce problème, les côtés $2a$ et $2b$ sont quelconques.

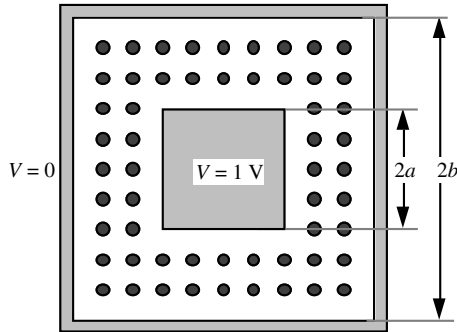


Fig. 13.17 Ligne de transmission à section carrée.

13.8.2 Déterminer au moyen de la méthode des différences finies les potentiels sur les points indiqués dans la figure 13.17. Pour ce problème, on pose que $b = 2,5 a$.

13.8.3 En utilisant la méthode des différences finies en trois dimensions, on demande de déterminer les potentiels sur les huit points situés à l’intérieur du cube de la figure 13.18 (aux intersections des plans qui découpent le cube en trois).

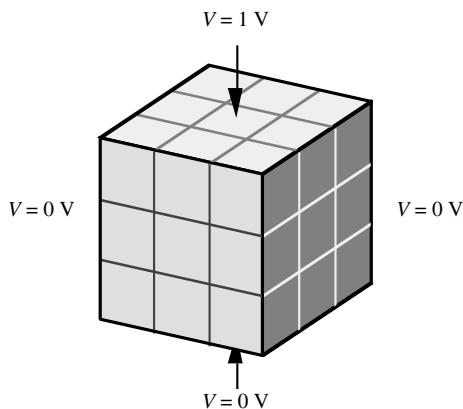


Fig. 13.18 Cube avec cinq côtés au potentiel nul et un côté au potentiel $V = 1 V$.

13.8.4 Déterminer au moyen de la méthode des éléments finis les potentiels sur les points A à D de la figure 13.4.

ANNEXES

14.1 CALCUL VECTORIEL

14.1.1 Relations vectorielles élémentaires

On considère trois vecteurs \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C} , dont les trois composantes A_i , B_i et C_i , ($i=1,2,3$) sont dirigées respectivement selon trois vecteurs unitaires \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 dans un système dextrogyre de coordonnées orthogonales – telles que les coordonnées cartésiennes, cylindriques circulaires ou sphériques (fig. 14.1).

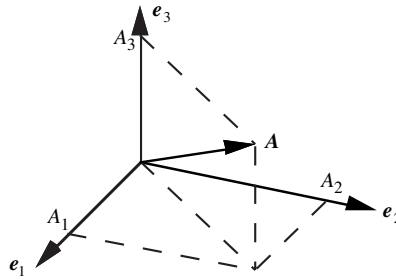


Fig. 14.1 Vecteur formé de trois composantes dans un repère orthogonal.

On définit les opérations vectorielles comme suit :

- addition et soustraction vectorielles

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (A_1 \pm B_1)\mathbf{e}_1 + (A_2 \pm B_2)\mathbf{e}_2 + (A_3 \pm B_3)\mathbf{e}_3 \quad (14.1)$$

- produit scalaire

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (14.2)$$

où θ est l'angle formé par les deux vecteurs \mathbf{A} et \mathbf{B} (fig. 14.2). Le produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaires est nul.

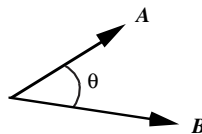


Fig. 14.2 Angle formé par deux vecteurs.

- produit vectoriel

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_2 B_3 - A_3 B_2) \mathbf{e}_1 + (A_3 B_1 - A_1 B_3) \mathbf{e}_2 + (A_1 B_2 - A_2 B_1) \mathbf{e}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (14.3)$$

Le vecteur résultant d'un produit vectoriel est perpendiculaire aux deux vecteurs qui forment le produit (fig. 14.3), son module est donné par

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| |\sin \theta| \quad (14.4)$$

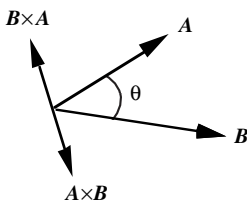


Fig. 14.3 Vecteur résultant d'un produit vectoriel.

Le produit vectoriel de deux vecteurs parallèles est nul.

- triple produit scalaire

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \quad (14.5)$$

- triple produit vectoriel

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C} \quad (14.6)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{A} \quad (14.7)$$

Ces deux relations sont tout à fait différentes : la position des parenthèses est essentielle pour définir un triple produit vectoriel.

14.1.2 Définition de l'opérateur différentiel "del" ou "nabla" ∇

L'opérateur différentiel ∇ agit sur une fonction scalaire f pour former son gradient, sur une fonction vectorielle \mathbf{A} pour former sa divergence (produit scalaire) ou son rotationnel (produit vectoriel)

$$\nabla f = \mathbf{grad} f \quad (14.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{div} \mathbf{A} \quad (14.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{rot} \mathbf{A} \quad (14.10)$$

Comme ∇ est un opérateur différentiel, les règles de base de la différentiation s'appliquent. Par exemple, l'application à un produit de fonctions donne

$$\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f \quad (14.11)$$

14.1.3 L'opérateur différentiel "del" ou "nabla" ∇ en coordonnées cartésiennes

Dans le cas particulier des coordonnées cartésiennes, on peut exprimer l'opérateur différentiel ∇ en termes de dérivées partielles par rapport aux trois coordonnées x , y et z

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (14.12)$$

et on peut alors expliciter les trois opérations

$$\nabla f = \mathbf{grad} f = \mathbf{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial f}{\partial z} \quad (14.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathit{div} \mathbf{A} = \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (14.14)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = \mathit{rot} \mathbf{A} &= \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (14.15)$$

Les relations dans les principaux autres systèmes de coordonnées sont données dans les paragraphes 14.1.8 et 14.1.9. Il n'est pas possible dans ces cas d'obtenir une expression explicite pour l'opérateur ∇ .

On peut en revanche faire usage des développements en coordonnées cartésiennes pour déterminer les propriétés de l'opérateur, qui restent valables dans d'autres systèmes de coordonnées.

14.1.4 Divergence du rotationnel

Cette combinaison d'opérations donne un triple produit scalaire (14.5), dont les deux premiers termes sont des opérateurs ∇ . Le résultat est un scalaire comportant des dérivées croisées de second ordre

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} \right) + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} \right) = 0 \quad (14.16)$$

Pour les grandeurs que l'on rencontre en électromagnétisme, les composantes du vecteur \mathbf{A} sont doublement différentiables et l'ordre de différentiation est commutable. Par conséquent les trois termes entre parenthèses dans (14.16) sont nuls. Il en résulte que la divergence d'un rotationnel est toujours nulle – quel que soit le système de coordonnées. Par conséquent, lorsque la divergence d'une fonction vectorielle est nulle – on parle aussi de fonction solénoïdale – on peut toujours poser que cette fonction est le rotationnel d'une autre fonction vectorielle, que l'on appelle *potentiel vecteur* (§ 1.4.6).

14.1.5 Rotationnel d'un gradient

On rencontre une situation similaire lorsqu'on prend le rotationnel d'un gradient

$$\nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) = 0 \quad (14.17)$$

Ici aussi les trois termes entre parenthèses dans (14.17) sont nuls. Il en résulte que le rotationnel d'un gradient est toujours nul. Par conséquent, lorsque le rotationnel d'une fonction vectorielle est nul, on peut poser que la fonction est le gradient d'une grandeur scalaire que l'on appelle *potentiel scalaire* (§ 1.4.7).

14.1.6 Rotationnel d'un rotationnel

Cette opération a la forme d'un triple produit vectoriel (14.6) dans lequel les deux premiers termes sont des opérateurs ∇ . Certaines précautions d'écriture doivent être prises lors du développement, car un opérateur différentiel ne peut agir que sur les termes qui le suivent (à sa droite). Il en résulte que

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{A} \quad (14.18)$$

Le dernier terme dans cette relation est appelé le laplacien vectoriel et on le représente généralement par

$$(\nabla \cdot \nabla)\mathbf{A} = \nabla^2 \mathbf{A} = \Delta \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \quad (14.19)$$

14.1.7 Laplaciens en coordonnées cartésiennes

Dans le système de coordonnées cartésiennes, on peut développer le laplacien

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} &= (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{A} = \left[\left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \mathbf{A} \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z) = \mathbf{e}_x \nabla^2 A_x + \mathbf{e}_y \nabla^2 A_y + \mathbf{e}_z \nabla^2 A_z \\ &= \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (14.20)$$

En coordonnées cartésiennes, le laplacien vectoriel est un vecteur dont chaque composante est le laplacien scalaire de la composante correspondante du vecteur. Le laplacien scalaire est donné par

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (14.21)$$

Ces relations ne sont valables qu'en coordonnées cartésiennes.

14.1.8 Opérations différentielles en coordonnées cylindriques circulaires

Le système de coordonnées (ρ, φ, z) est défini dans la figure 14.4. Les opérations différentielles dans ce système de coordonnées sont données par

$$\nabla f = \mathbf{grad} f = e_\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + e_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + e_z \frac{\partial f}{\partial z} \quad (14.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{div} \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (14.23)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = e_\rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) + e_\varphi \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + e_z \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} e_\rho & e_\varphi & \frac{1}{\rho} e_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & A_\varphi & A_z \end{vmatrix} \quad (14.24)$$

$$\nabla^2 f = \Delta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (14.25)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} = & e_\rho \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} \right) - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial z^2} \right] \\ & + e_\varphi \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} \right) - \frac{A_\varphi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} \right] \\ & + e_z \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (14.26)$$

On peut noter ici l'augmentation considérable de complexité par rapport aux relations correspondantes en coordonnées cartésiennes. La résolution des problèmes est directement affectée par cette complexité.

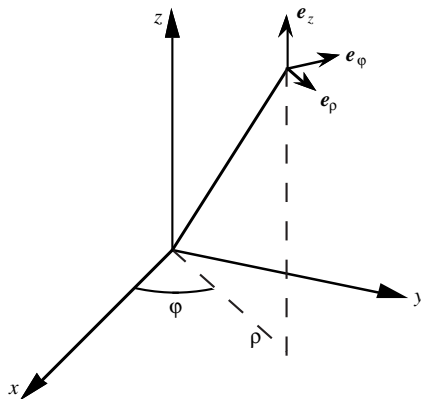


Fig. 14.4 Système de coordonnées cylindriques circulaires.

14.1.9 Opérations différentielles en coordonnées sphériques

Le système de coordonnées (r, θ, φ) est défini dans la figure 14.5. Les opérations différentielles dans ce système de coordonnées sont données par

$$\nabla f = \mathbf{grad} f = \mathbf{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \quad (14.27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathit{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (14.28)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathit{rot} \mathbf{A}$$

$$= \mathbf{e}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r \sin \theta A_\varphi)}{\partial r} \right) + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \quad (14.29)$$

$$\nabla^2 f = \Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (14.30)$$

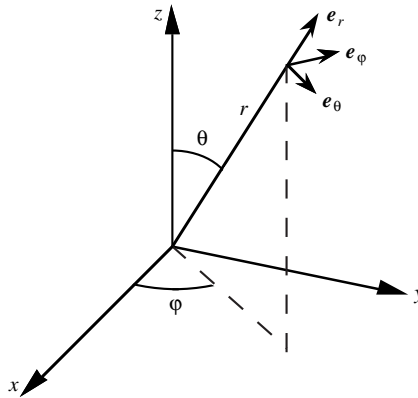


Fig. 14.5 Système de coordonnées sphériques.

14.1.10 Quelques relations vectorielles

$$\nabla (fg) = f \nabla g + g \nabla f \quad (14.11)$$

$$\nabla e^f = e^f \nabla f \quad (14.31)$$

$$\nabla \cdot (f \mathbf{A}) = f \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f \quad (14.32)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} \quad (14.33)$$

$$\nabla \times (f \mathbf{A}) = f \nabla \times \mathbf{A} + \nabla f \times \mathbf{A} \quad (14.34)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (14.35)$$

$$\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (14.36)$$

$$\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f \quad (14.37)$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (14.16)$$

$$\nabla \times \nabla f = 0 \quad (14.17)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (14.18)$$

14.2 RELATIONS INTÉGRALES

Plusieurs expressions permettent de remplacer l'intégration d'une quantité dans un volume par une autre intégration qui porte seulement sur la surface qui entoure le volume. Il est ainsi possible de passer d'une intégration en trois dimensions à une intégration en deux dimensions, réduisant la complexité du problème à résoudre. D'autres relations permettent similairement de remplacer une intégrale de surface par une intégrale sur le pourtour de cette surface, passant ainsi de deux dimensions à une dimension. Il faut pour cela que les dérivées des fonctions soient définies dans les domaines considérés et que les intégrales indiquées existent.

14.2.1 Théorème du gradient

On considère un volume V , formé d'éléments de volume dV , et entouré par une surface S , sur laquelle on définit des éléments de surface dA et le vecteur unité \mathbf{n} normal à la surface (fig. 14.6).

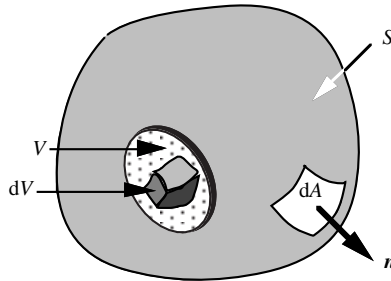


Fig. 14.6 Définition d'un volume V entouré d'une surface S .

Le *théorème du gradient* permet de remplacer l'intégrale de volume du gradient d'une fonction $f(\mathbf{r})$ – définie dans tout le volume – par l'intégrale de surface de la fonction $f(\mathbf{r})$ elle-même

$$\int_V \nabla f(\mathbf{r}) dV = \oint_S \mathbf{n} f(\mathbf{r}) dA \quad (14.38)$$

14.2.2 Théorème de la divergence

De façon tout à fait similaire, le *théorème de la divergence* indique que l'intégrale de volume portant sur la divergence d'une fonction vectorielle $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ peut être remplacée par une intégrale de surface

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) dV = \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) dA \quad (14.39)$$

14.2.3 Théorème du rotationnel

Finalement, une relation similaire concerne l'intégrale du rotationnel d'une fonction vectorielle $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, qui peut aussi être remplacée par une intégrale de surface

$$\int_V \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) dV = \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) dA \quad (14.40)$$

14.2.4 Première identité de Green

Deux relations intégrales, qui portent respectivement sur des fonctions scalaires et vectorielles, sont appelées les *identités de Green*

$$\int_V [\nabla f(\mathbf{r}) \cdot \nabla g(\mathbf{r}) + g(\mathbf{r}) \nabla^2 f(\mathbf{r})] dV = \oint_S g(\mathbf{r}) \mathbf{n} \cdot \nabla f(\mathbf{r}) dA \quad (14.41)$$

$$\int_V \nabla \cdot [\mathbf{F}(\mathbf{r}) \times \nabla \times \mathbf{G}(\mathbf{r})] dV = \oint_S \mathbf{n} \cdot [\mathbf{F}(\mathbf{r}) \times \{\nabla \times \mathbf{G}(\mathbf{r})\}] dA \quad (14.42)$$

14.2.5 Seconde identité de Green

Deux autres relations intégrales, dérivées de (14.41) et de (14.42), sont appelées les *secondes identités de Green*

$$\int_V [g(\mathbf{r}) \nabla^2 f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) \nabla^2 g(\mathbf{r})] dV = \oint_S [g(\mathbf{r}) \nabla f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) \nabla g(\mathbf{r})] dA \quad (14.43)$$

$$\begin{aligned} \int_V [\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{G}(\mathbf{r}) - \mathbf{G}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})] dV \\ = \oint_S [\mathbf{G}(\mathbf{r}) \times \{\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})\} - \mathbf{F}(\mathbf{r}) \times \{\nabla \times \mathbf{G}(\mathbf{r})\}] dA \end{aligned} \quad (14.44)$$

14.2.6 Théorème de Stokes

On procède de la même manière pour une surface S dans un contour C (fig. 14.7) pour remplacer l'intégrale de surface d'un rotationnel par une intégrale de contour

$$\int_S \mathbf{n} \cdot [\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})] dA = \oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} \quad (14.45)$$

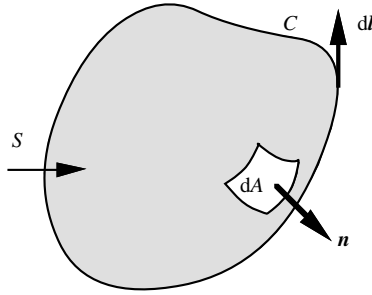


Fig. 14.7 Définition d'une surface S limitée par un contour C .

14.3 FONCTIONS DE BESSEL

Dans la résolution de beaucoup de problèmes à symétrie circulaire, on obtient des fonctions de Bessel, dont les principales propriétés et relations sont regroupées dans cette section. Ces fonctions sont tabulées [103], [117]. Des algorithmes pour leur calcul sont inclus dans beaucoup de logiciels standard.

14.3.1 Équation différentielle

Les fonctions de Bessel de première et de seconde espèce d'ordre m sont des solutions particulières de l'équation différentielle

$$x^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + x \frac{df(x)}{dx} + (x^2 - m^2) f(x) = 0 \quad (14.46)$$

dont la solution générale a la forme

$$f(x) = Z_m(x) = AJ_m(x) + BN_m(x) \quad (14.47)$$

où A et B sont des constantes arbitraires et où $J_m(x)$ et $N_m(x)$ sont respectivement les fonctions de Bessel de première et de seconde espèce d'ordre m . Le comportement des fonctions de Bessel des deux espèces est représenté dans les figures 14.8 et 14.9, pour les premières valeurs entières de m . Les abscisses qui correspondent aux zéros et aux extrema des fonctions de première espèce $J_m(x)$ sont répertoriées dans les tableaux 14.10 et 14.11.

Les fonctions de Bessel de première espèce $J_m(x)$ sont nulles en $x = 0$ lorsque $m \neq 0$, tandis que celles de seconde espèce $N_m(x)$ ont toutes une singularité en $x = 0$.

14.3.2 Développement en série

Pour des valeurs entières positives de m , on a le développement suivant pour $J_m(x)$

$$J_m(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^m \left[1 - \frac{(x/2)^2}{1!(m+1)!} + \frac{(x/2)^4}{2!(m+2)!} - \frac{(x/2)^6}{3!(m+3)!} + \dots \right] \quad (14.48)$$

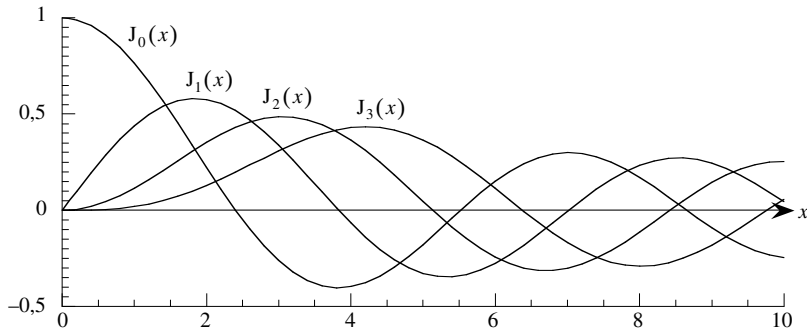


Fig. 14.8 Fonction de Bessel de première espèce pour $m = 0, 1, 2$ et 3 .

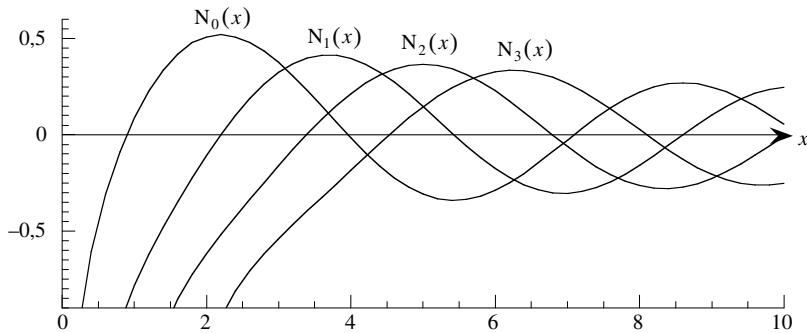


Fig. 14.9 Fonction de Bessel de seconde espèce pour $m = 0, 1, 2$ et 3 .

Tableau 14.10 Zéros de 5 fonctions de Bessel de première espèce: $J_m(x) = 0$ pour $0 < x < 15$.

m	$n = 1$	2	3	4	5
0	2,40483	5,52008	8,65373	11,79153	14,93092
1	3,83171	7,01559	10,17347	13,32369	
2	5,13562	8,41724	11,61984	14,79595	
3	6,38016	9,76102	13,01520		
4	7,58834	11,06471	14,37254		

Tableau 14.11 Extrema des fonctions de Bessel de première espèce: $dJ_m(x)/dx = 0$ pour $0 < x < 10$.

m	$n = 1$	2	3	4	5
0	3,83171	7,01559	10,17347	13,32369	
1	1,8412	5,3314	8,5363	11,7060	14,8636
2	3,0542	6,7061	9,9695	13,1704	
3	4,2012	8,0152	11,3459	14,5859	
4	5,3175	9,2824	12,6819		

14.3.3 Développement asymptotique pour de très grandes valeurs de x

$$J_m(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left[x - \frac{\pi}{4}(2m+1) \right] \quad N_m(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left[x - \frac{\pi}{4}(2m+1) \right] \quad (14.49)$$

14.3.4 Formules de récurrence

$$Z_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} Z_m(x) - Z_{m-1}(x) \quad (14.50)$$

$$\frac{dZ_m(x)}{dx} = -\frac{m}{x} Z_m(x) + Z_{m-1}(x) = \frac{m}{x} Z_m(x) - Z_{m+1}(x) = \frac{1}{2} [Z_{m-1}(x) - Z_{m+1}(x)] \quad (14.51)$$

14.3.5 Intégrale de Sommerfeld

La fonction de Bessel de première espèce peut être exprimée en termes de fonctions trigonométriques au moyen de l'intégrale de Sommerfeld

$$J_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \varphi - m\varphi) d\varphi \quad (14.52)$$

14.3.6 Fonctions de Hankel

On définit, sous le nom de *fonctions de Hankel*, deux fonctions complexes d'une variable réelle x dont la partie réelle est la fonction de Bessel de première espèce, la partie imaginaire étant la fonction de Bessel de seconde espèce, munie respectivement d'un signe positif ou négatif

$$H_m^1(x) = J_m(x) + jN_m(x) \quad H_m^2(x) = J_m(x) - jN_m(x) = (H_m^1(x))^* \quad (14.53)$$

14.3.7 Fonctions de Bessel d'arguments imaginaires

Les fonctions de Bessel modifiées de premières et de seconde espèce d'ordre m sont des solutions particulières de l'équation différentielle

$$x^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + x \frac{df(x)}{dx} - (x^2 + m^2) f(x) = 0 \quad (14.54)$$

Comparant cette expression avec (14.46), on voit que la seule différence est le signe de x^2 : les solutions sont simplement les fonctions de Bessel de l'argument jx . On définit comme suit les fonctions de Bessel modifiées $I_m(x)$ et $K_m(x)$

$$I_m(x) = e^{-jm\pi/2} J_m(jx) \quad K_m(x) = j \frac{\pi}{2} e^{jm\pi/2} H_m^1(jx)$$

Le comportement des fonctions de Bessel modifiées est décrit par la figure 14.12 pour les premières valeurs entières de m . Les développements en série (§ 14.3.2) et asymptotiques (§ 14.3.3) peuvent être dérivés de ceux des fonctions de Bessel.

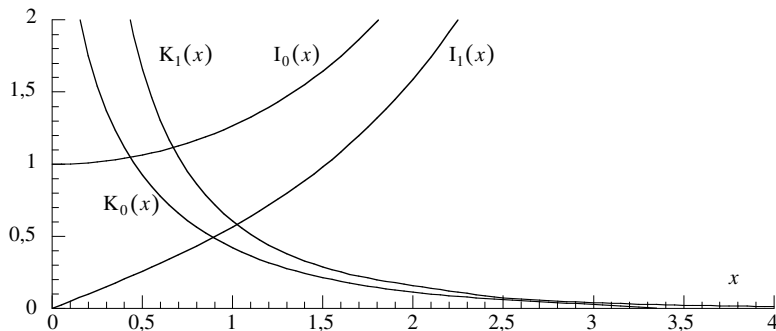


Fig. 14.12 Fonction de Bessel modifiées de première et de seconde espèce pour $m = 0$ et 1.

Toutes les fonctions de Bessel modifiées sont réelles positives. À l'origine, les fonctions $I_m(x)$ sont nulles si $m \neq 0$, tandis que les fonctions $K_m(x)$ ont toutes une singularité. Pour de grandes valeurs de l'argument, les fonctions $I_m(x)$ croissent exponentiellement, tandis que les fonctions $K_m(x)$ décroissent.

14.3.8 Fonctions de Bessel d'arguments complexes

Dans l'étude de la propagation dans des conducteurs métalliques circulaires, on rencontre des fonctions de Bessel de première espèce d'ordre zéro d'arguments complexes (§ 11.2.4). En fait, la partie réelle et la partie imaginaire de l'argument ont le même module, de sorte que (11.44)

$$J_0(\sqrt{-j}x) = J_0\left(\frac{1-j}{\sqrt{2}}x\right) = \text{ber}(x) + j\text{bei}(x) \quad [-] \quad (11.44)$$

Cette relation définit les deux fonctions $\text{ber}(x)$ et $\text{bei}(x)$, qui sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de la fonction de Bessel. Ces fonctions sont tabulées et leurs développements en série et asymptotiques peuvent être dérivés de ceux des fonctions de Bessel d'arguments réels. Leur variation est représentée dans la figure 14.13.

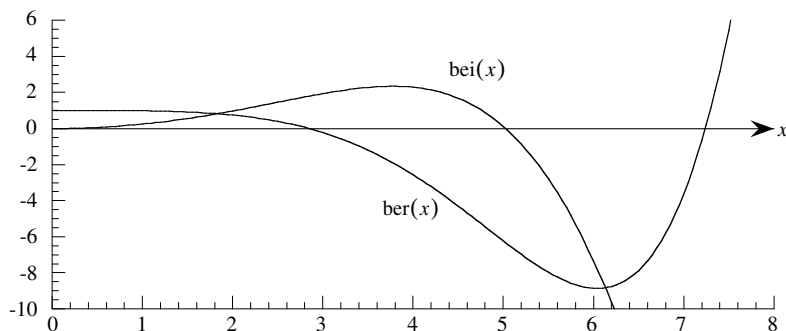


Fig. 14.13 Fonction de Bessel d'argument complexe: $\text{ber}(x)$ et $\text{bei}(x)$.

14.4 INTÉGRALES ELLIPTIQUES

Dans des problèmes à symétrie circulaire traitées avec des méthodes intégrales, on rencontre des intégrales comportant des expressions trigonométriques sous une racine carrée (§ 12.6.2). Il est parfois possible de mettre l'intégrand sous la forme qui correspond à une intégrale elliptique complète, dont les valeurs sont tabulées [118].

14.4.1 Définition des intégrales elliptiques

Les deux expressions suivantes sont appelées *intégrales elliptiques complètes* de premier et de second ordre

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \quad \text{et} \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} \, d\theta \quad (14.45)$$

La variation en fonction de l'argument k , défini entre zéro et un, est présentée dans la figure 14.14. La fonction $K(k)$ diverge lorsque son argument s'approche de l'unité.

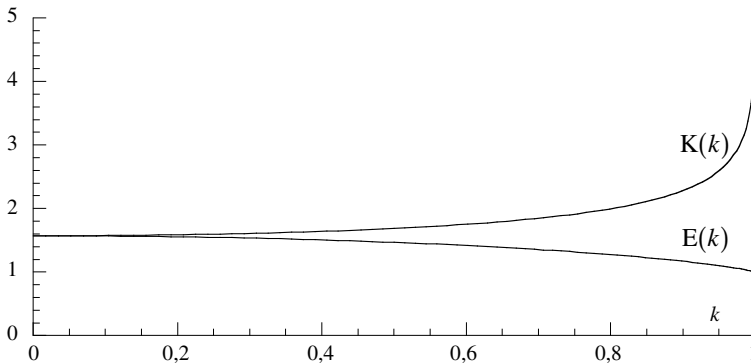


Fig. 14.14 Intégrales elliptiques complètes.

14.4.2 Développement en série

Le développement en série des deux intégrales elliptiques complètes donne

$$\frac{2}{\pi} K(k) = 1 + 2 \left(\frac{k^2}{8} \right) + 9 \left(\frac{k^2}{8} \right)^2 + \dots \quad \text{et} \quad \frac{2}{\pi} E(k) = 1 - 2 \left(\frac{k^2}{8} \right) - 3 \left(\frac{k^2}{8} \right)^2 + \dots \quad (14.46)$$

14.4.3 Comportement asymptotique

Quand l'argument k est proche de 1 on peut utiliser le développement asymptotique

$$K(k) \rightarrow \ln \left[\frac{4}{\sqrt{1-k^2}} \right] \quad (14.47)$$

14.5 PROPRIÉTÉS DES MATÉRIAUX USUELS

Tableau 14.15 Permittivité relative de différents milieux diélectriques [156].

Matériaux	ϵ'_r		$\tan \delta = \epsilon''/\epsilon'$	
	1 KHz	3 GHz	1 kHz	3 GHz
Polystyrène expansé	1,03	1,03	< 0,0001	0,0001
Vaseline	2,16	2,16	0,0002	0,00066
Polyéthylène	2,26	2,26	< 0,0002	0,00031
Caoutchouc naturel	2,6	2,4	0,0004	0,006
Résine epoxy	3,67	3,09	0,0024	0,027
Glace		3,2		0,0009
Quartz	3,78	3,78	0,00075	0,00006
Bakélite	4,74	3,70	0,022	0,043
Porcelaine	5,36		0,014	
Mica	5,4	5,4	0,0006	0,0003
Alcool éthylique		6,5		0,25
Alumine	8,83	8,79	0,00057	0,001
Eau distillée	80	76,70		0,15

Tableau 14.16 Perméabilité pour différents matériaux [156].

Matériaux	μ_r	μ_r
	(maximum)	(à faible aimantation)
<i>Matériaux ferromagnétiques</i>		
Nickel	50	50
Cobalt	60	60
Fonte	90	60
Acier	450	300
Ferrite	3000	2500
Fer au silicium	7000	3500
Fer pur	275000	25000
Supermalloy	900000	60000
<i>Matériaux paramagnétiques</i>		
Air	1,0000004	
Aluminium	1,00000065	
Béryllium	1,00000079	
Platine	1,0003	
<i>Matériaux diamagnétiques</i>		
Cuivre	0,999990	
Eau	0,999991	
Bismuth	0,9999986	
Argent	0,99999981	

Tableau 14.17 Résistivité et conductivité de différents matériaux [156].

Matériaux	Résistivité à 20°C en nΩm	Conductivité à 20°C en MS/m
Argent	16,2	61,73
Cuivre	17,2	58,13
Or	24,4	40,98
Chrome	26	38,46
Aluminium	26,2	38,16
Laiton	39	25,64
Nickel	69	14,49
Platine	105	9,52
Plomb	219	4,56
Germanium	450	2,22
Eau distillée	1000	1,00
Bismuth	1150	0,87
Graphite	14000	0,07
Silice	$1 \cdot 10^{11}$	$1,0 \cdot 10^{-8}$

Tableau 14.18 Champ disruptif pour différents matériaux [156].

Matériaux	Champ disruptif en MV/m
Air	2,5
Verre	18
Huile minérale	20
Caoutchouc	20
Papier	22
Plexiglas	25
Porcelaine	27
Ébonite	27
Résine epoxy	35
Mica	57

BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. GILBERT, *De Magnete*, Londres, 1600, republié par Dover, New York, 1958.
- [2] *Maxwell ou les champs de la lumière*, Les Cahiers de Science et Vie, hors série, N° 17, décembre 1993.
- [3] J. CLERK MAXWELL, *Treatise on Electricity and Magnetism*, Londres, 1873, republié par Dover, New York, 1954
- [4] COMMISSION ÉLECTROTECHNIQUE INTERNATIONALE, *Letter Symbols, Including Conventions and Signs for Electrical Technology*, Office Central CEI, Genève, 1983.
- [5] E. C. JORDAN, *Electromagnetic Waves and Radiating Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1968.
- [6] I. V. LINDELL, A. H. SIHVOLA, S. A. TRETYAKOV, et A. J. VIITANEN, *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Materials*, Artech, Boston, 1994.
- [7] W. R. BEAM, *Electronics of solids*, McGraw Hill, New York, 1965.
- [8] R. LUEBBERS, "Lossy Dielectrics in FDTD", *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 41, novembre 1993, pp. 1586–1588.
- [9] A. PAPOULIS, *The Fourier Integral and its Applications*, McGraw Hill, N. Y., 1965.
- [10] R. B. ADLER, L. J. CHU, et R. M. FANO, *Electromagnetic Energy Transmission and Radiation*, Wiley, New York, 1960.
- [11] L. LANDAU et E. LIFCHITZ, *Électrodynamique des milieux continus*, MIR, Moscou, 1965.
- [12] H. A. WHEELER, "Transmission Line Properties of Parallel Strips Separated by a Dielectric Sheet", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 13, 1965, pp. 172-185.
- [13] F. GARDIOL, *Lossy Transmission Lines*, Artech, Boston, 1987.
- [14] H. HOWE, *Stripline Circuit Design*, Artech, Boston, 1974.
- [15] M. A. R. GUNSTON, *Microwave Transmission Line Impedance Data*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1972.
- [16] F. GARDIOL, *Microstrip Circuits*, Wiley, New York, 1994.
- [17] E. O. HAMMERSTAD, et O. JENSEN, "Accurate Models for Microstrip Computer-Aided Design", *Dig. IEEE MTT-S Internat. Microwave Symp.*, 1980, pp. 407–409.
- [18] L. BERGERON, *Du coup de bélier en hydraulique au coup de foudre en électricité*, Dunod, Paris, 1949.
- [19] H. J. JOSEPHS, *Heaviside's Electric Circuit Theory*, Methuen, Londres, 1946.
- [20] R. N. BRACEWELL, *The Fourier Transform and its Applications*, McGraw Hill, New York, 1978.
- [21] F. GARDIOL, "Etude expérimentale de la propagation sur une ligne de transmission ouverte", *Bulletin AGEN*, N°17, décembre 1974, pp. 32-38.
- [22] R. F. HARRINGTON, *Time Harmonic Electromagnetic Fields*, McGraw Hill, New York, 1961.
- [23] F. TESCHE, "On the Use of the Hilbert Transform for Processing Measured CW Data", *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility*, vol. 34, août 1992, pp. 259-266.
- [24] J. BOK et N. HULIN-JUNG, *Ondes Electromagnétiques et Relativité*, Hermann, Paris, 1991.
- [25] Y. CHOW, et E. CASSIGNOL, *Théorie et application des graphes de fluence*, Dunod, Paris, 1965.

- [26] C. G. MONTGOMERY, R. H. DICKE, ET E. M. PURCELL, *Principles of Microwave Circuits*, McGraw Hill, New York, 1948.
- [27] A. E. BOOTH, *Microwave Data Tables*, Iliffe, Londres, 1959.
- [28] S. M. EL-GHAZALY, R. B. HAMMOND et T. ITOH, "Analysis of Superconducting Structures: Application to Microstrip Lines", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 40, 1992, pp. 499-508.
- [29] PH. SMITH, *Electronic Applications of the Smith Chart in Waveguide, Circuit and Component Analysis*, McGraw Hill, New York, 1969.
- [30] J. KRETZSCHMAR, ET D. SCHOONAERT, "Smith Chart for Lossy Transmission Lines", *Proc. IEEE*, vol. 57, septembre 1969, pp. 1658-1660.
- [31] B. NEDRUD, *DragonWave™ 7.0 User's Manual*, Nedrud Data Systems, Melbourne Beach, Floride, 1994.
- [32] F. GARDIOL, *LOSLIN: Lossy Line Calculation Software and User's Manual*, Artech, Boston, 1989.
- [33] R. WROBLEWSKI, "Synthesis and Design of Small-Signal and Low-Noise GaAs MESFET Amplifiers", in *GaAs Mesfet Circuit Design*, édité par R. SOARES, Artech, Boston, 1988.
- [34] G. L. MATTHAEI, L. YOUNG et E. M. T. JONES, *Microwave Filters, Impedance-Matching Networks and Coupling Structures*, McGraw Hill, New York, 1964.
- [35] F. GARDIOL, "Chebyshev Transformer Nomograms", *MicroWaves*, vol. 6, novembre 1967, pp. 56-58.
- [36] F. C. DE RONDE, "A Precise and Sensitive Reflecto"Meter" providing Full Band Matching of Reflection Coefficient", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol 11, juillet 1965, pp. 435-440.
- [37] J. A. DOBROWOLSKI, *Introduction to Computer Methods for Microwave Circuit Analysis and Design*, Artech, Boston, 1991.
- [38] S. ROSLONIEC, *Algorithms for Computer-Aided Design of Linear Microwave Circuits*, Artech, Boston, 1990.
- [39] R. M. FANO, "Theoretical Limitations on the Broad-Band Matching of Arbitrary Impedances", *Journal Franklin Institute*, vol. 249, janvier 1950, pp. 57-83, et février 1950, pp. 139-154.
- [40] P. KARTASCHOFF, *Frequency and Time*, Academic Press, New York, 1978.
- [41] J. THUERY, *Les Micro-ondes et leurs effets sur la matière*, Technique et Documentation, Lavoisier, Paris, 1983.
- [42] C. G. MONTGOMERY, R. H. DICKE, et E. M. PURCELL, *Principles of Microwave Circuits*, MIT Radiation Laboratory Series, McGraw Hill, New York, 1948.
- [43] G. PUJOLLE, et E. HORLAI, *Architecture des réseaux informatiques, tome 1: les outils de communications*, Eyrolles, Paris, 1990.
- [44] J. A. OLSZEWSKI, et H LUBARS, "Structural Return Loss Phenomenon in Coaxial Cables", *Proceedings IEEE*, vol. 58, juillet 1970, pp. 1036-1050.
- [45] F. CHALET, R. GOLDSCHMIDT, et A. SAILLIEN, "Historique de la bobine Pupin et de son emploi en Suisse", *Bulletin Technique des PTT*, N° 5, 1975.
- [46] D. BOUSSARD, *Les accélérateurs de particules*, Collection Que sais-je?, PUF, N° 1316, Paris, 1984 (2e édition).
- [47] J. VOGÉ, *Les tubes aux hyperfréquences*, Eyrolles, Paris, 1973.
- [48] J. A. G. MALHERBE, *Microwave Transmission Line Filters*, Artech, Boston, 1979.

- [49] L. BRILLOUIN, et M. PARODI, *Propagation dans les milieux périodiques*, Masson, Paris, 1956.
- [50] G. FLOQUET, "Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques", *Annales Ecole Normale Supérieure*, vol. 12, N° 47, 1883.
- [51] J. HELSZAJN, *Synthesis of Lumped Element, Distributed and Planar Filters*, McGraw Hill, New York, 1990.
- [52] R. LEVY, "Directional Couplers", in *Advances in Microwaves*, vol. I., édité par L. YOUNG, Academic Press, New York, 1966.
- [53] C. R. PAUL, "On the Superposition of Inductive and Capacitive Coupling in Crosstalk Prediction Models", *IEEE Trans. Electromagnetic Compat.*, vol. 24, août 1982, pp. 335-343.
- [54] S. FRANKEL, *Multiconductor Transmission Line Analysis*, Artech, Boston, 1977.
- [55] W. H. LOUISELL, *Coupled Mode and Parametric Electronics*, Wiley, New York, 1960.
- [56] A. R. DJORDJEVIC, M. B. BAZDAR, T. K. SARKAR, et R. F. HARRINGTON, *LINPAR for Windows: Matrix Parameters for Multiconductor Transmission Lines, Software and User's Manual*, Artech, Boston, 1995.
- [57] K. OGATA, *State Space Analysis of Control Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1967.
- [58] L. A. PIPES, et S. A. HOVANESSIAN, *Matrix Computer Methods in Engineering*, Wiley, New York, 1969.
- [59] L. GRUNER, "Multiconductor Transmission Lines and the Green's Matrix", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 22, septembre 1974, pp. 837-839.
- [60] F. GARDIOL, et M. C. DECRÉTON, "Théorie générale des lignes couplées", *Bull. Assoc. Suisse des Électriciens (ASE)*, vol. 64, juillet 1973, pp. 905-910.
- [61] C. R. PAUL, "Solutions of the Transmission-Line Equation for Three-Conductor Lines in Homogeneous Media", *IEEE Trans. Electromagnetic Compat.*, vol. 20, février 1978, pp. 216-222.
- [62] H. A. KRAMERS, "La diffusion de la lumière par les atomes", *Atti del congresso internazionale dei fisici*, 11-20 September 1927, Nicola Zanichelli, Bologne, 1928.
- [63] J. H. VAN VLECK, "The Relation between Absorption and Dispersion", in *Propagation of Short Radio Waves*, édité par D. E. KERR, Radiation Laboratory Series, McGraw Hill, New York, 1951.
- [64] A. D. BRESLER, "On the TE_{n0} Modes of a Ferrite Slab Loaded Rectangular Waveguide and the Associated Thermodynamic Paradox", *IRE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 8, janvier 1960, pp. 81-95.
- [65] F. GARDIOL, "On the Thermodynamic Paradox in Ferrite Loaded Waveguides", *Proc. IEEE*, vol. 55, septembre 1967, pp. 1616-1617.
- [66] G. D. MONTEATH, *Applications of the Electromagnetic Reciprocity Principle*, Pergamon, New York, 1973.
- [67] J. A. STRATTON, *Electromagnetic Theory*, McGraw Hill, New York, 1941.
- [68] S. RAMO, J. R. WHINNERY, et T. VAN DUZER, *Fields and Waves in Communications Electronics*, Wiley, New York, 1965.
- [69] H. J. NUSSBAUMER, *Fast Fourier Transform and Convolution Algorithms*, Springer, Berlin, 1982.
- [70] A. COZANNET, *Optique et Télécommunications*, Eyrolles, Paris, 1981.

- [71] E. K. MILLER, et F. J. DEADRICK, "Some Computational Aspects of Thin-Wire Modeling", in *Numerical and Asymptotic Methods in Electromagnetics*, chap. 4, Springer, New York, 1975.
- [72] A. D. YAGHJIAN, "An Overview of Near-Field Antenna Measurements", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 34, janvier 1986, pp. 30-45.
- [73] J. D. KRAUS, *Antennas*, seconde édition, McGraw Hill, New York, 1988.
- [74] K. FUJIMOTO, A. HENDERSON, K. HIRASAWA, et J. R. JAMES, *Small Antennas*, Research Studies Press, Letchworth, Angleterre, 1987.
- [75] M. D. YACCOUB, *Foundations of Mobile Radio Engineering*, CRC, Boca Raton, 1993.
- [76] E. FERNANDEZ et M. MATHIEU, *Les faisceaux hertziens analogiques et numériques*, Dunod, Paris, 1991.
- [77] N. BUI-HAI, *Antennes Micro-Ondes*, Masson, Paris, 1978.
- [78] H. T. FRIIS, "A Note on a Simple Transmission Formula", *Proc. IRE*, vol. 34, mai 1946, pp. 254-256.
- [79] P. F. COMBES, *Transmission en espace libre et sur les lignes*, Dunod, Paris, 1983.
- [80] M. J. BUCKINGHAM, *Noise in Electronic Devices and Systems*, Ellis Horwood, Chichester, 1983.
- [81] D. SLATER, *Near-Field Antenna Measurements*, Artech, Boston, 1991.
- [82] D. M. POZAR, et B. KAUFMAN, "Comparison of Three Methods for the Measurement of Printed Antenna Efficiency", *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 36, janvier 1988, pp. 136-139.
- [83] P. J. B. CLARRICOATS, et A. D. OLVER, *Corrugated Horns for Microwave Antennas*, Peter Peregrinus (IEE), Londres, 1984.
- [84] A. W. LOVE, *Reflector Antennas*, IEEE Press, New York, 1978.
- [85] J. R. JAMES, et P. S. HALL, *Handbook of Microstrip Antennas*, Peter Peregrinus (IEE), Londres, 1989.
- [86] J.-F. ZÜRCHER, et F. GARDIOL, *Broadband Patch Antennas*, Artech, Boston, 1995.
- [87] R. J. MAILLOUX, *Phased Array Antenna Handbook*, Artech, Boston, 1994.
- [88] G. THIELE, "Analysis of Yagi-Uda Type Antennas", *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 17, janvier 1969, pp. 24-31.
- [89] W. L. STUTZMANN, et G. A. THIELE, *Antenna Theory and Design*, Wiley, New York, 1981.
- [90] D. POZAR, *Antenna Design using Personal Computers*, Artech, Boston, 1985.
- [91] J. W. ROCKWAY, et J. C. LOGAN, *MININEC Professional for Windows*, EM Scientific, Carcon City, Nevada, 1995.
- [92] G. JANKOVIC, D. I. WU, et D. C. CHANG, "Computer-Aided Design of Probe-fed and Loaded Microstrip Antennas in Multilayer Configurations", *Proc. ANTEM'94*, Ottawa, Canada, août 1994, pp. 117-120.
- [93] E. DURAND, *Électrostatique*, Masson, Paris, 1955.
- [94] J. P. LONCHAMP, *Comprendre et appliquer l'électrostatique*, Masson, Paris, 1988.
- [95] R. M. BOZORTH, *Ferromagnetism*, Van Nostrand, New York, 1951, nouvelle édition IEEE Press, New York, 1993.
- [96] C. T. H. BAKER, *The Numerical Treatment of Integral Equations*, Oxford Press, deuxième édition, 1978.
- [97] R. PLONSEY et R. E. COLLIN, *Principles and Applications of Electromagnetic Fields*, McGraw Hill, New York, 1961.

- [98] R. M. FANO, L. J. CHU, et R. B. ADLER, *Electromagnetic Fields, Energy, and Forces*, Wiley, New York, 1960.
- [99] S. M. SZE, *Physics of Semiconductor Devices*, Wiley, New York, 1981.
- [100] P. M. MORSE et H. FESHBACH, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw Hill, New York, 1953.
- [101] P. W. HAWKES, *Quadrupoles in Electron Lens Design*, Advances in Electronics and Electron Physics, Supplements 7, Academic Press, New York, 1970.
- [102] R. E. COLLIN, *Field Theory of Guided Waves*, McGraw Hill, New York, 1960.
- [103] F. OBERHETTINGER, *Tables of Bessel Transforms*, Springer, Berlin, 1972.
- [104] B. E. KEISER, *Principles of Electromagnetic Compatibility*, Artech, Boston, 1984.
- [105] M. ABRAMOWITZ et I. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1972.
- [106] M. LAVRENTIEV et B. CHABAT, *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe*, MIR, Moscou, 1972.
- [107] J. E. MARSDEN, *Basic Complex Analysis*, W.H. Freeman, San Francisco, 1973.
- [108] W. J. GIBBS, *Conformal Transformations in Electrical Engineering*, Chapman & Hall, Londres, 1958.
- [109] W. HILBERG, *Electrical Characteristics of Transmission Lines*, Artech, Boston, 1979.
- [110] P. SILVESTER, *Modern Electromagnetic Fields*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1968.
- [111] L. B. FELSEN, et N. MARCUVITZ, *Radiation Scattering of Waves*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
- [112] CHEN-TO TAI, *Dyadic Green Functions in Electromagnetic Theory*, IEEE Press, New York, 1994.
- [113] I. SNEDDON, *The Use of Integral Transforms*, McGraw Hill, New York, 1972.
- [114] I. V. LINDELL, "Application of the Image Concept in Electromagnetics", in *Review of Radio Science 1990-1992*, édité par R. STONE, Oxford University Press, Londres, 1993, pp. 107-126.
- [115] M. IANOVICI et J. J. MORF, "Calculation of the potential distribution around a charge or current in the presence of three dielectric media using the image method", *IEEE Trans. Electrical Insulation*, vol. EI-12, 1977, pp. 165-170.
- [116] C. HAFNER, et L. BOMHOLT, *The 3D Electrodynamical Wave Simulator*, Wiley, New York, 1993.
- [117] W. H. BEYER, *Handbook of Mathematical Sciences*, CRC Press, Boca Raton, Floride, 1978.
- [118] E. JAHNKE et F. EMDE, *Tables of Functions*, Dover, New York, 1945.
- [119] D. BRUCE MONTGOMERY, *Solenoid Magnet Design, the Magnetic and Mechanical Aspects of Resistive and Superconducting Systems*, Wiley, New York, 1969.
- [120] T. K. SARKAR, "On the Application of the Generalized Biconjugate Gradient Method", *J. of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 1, 1987, pp. 223-242.
- [121] R. H. T. BATES, "The Theory of the Point Matching Method for Perfectly Conducting Waveguides and Transmission Lines", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 17, juin 1969, pp. 294-301.
- [122] R. HAMMING, *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, New York, 1973.

- [123] G. F. FORSYTHE, et W. R. WASOW, *Finite difference methods for partial differential equations*. Wiley, New York, 1960.
- [124] K. S. YEE, "Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems involving Maxwell's Equations in Isotropic Media", *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 14, mai 1966, pp. 302-307.
- [125] A. TAFLOVE, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, Artech, Boston, 1995.
- [126] K. S. KUNZ and R. J. LUEBBERS, *The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics*, CRC Press, Boca Raton, Floride, 1993.
- [127] R. SIUSHANSIAN, et J. LOVETRI, "A Comparison of Numerical Techniques for Modeling Electromagnetic Dispersive Media", *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 5, décembre 1995, pp. 426-428.
- [128] G. MUR, "Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference Approximation of the Time-Domain Electromagnetic-Field Equations", *IEEE Trans. Electromagnetic Compat.* vol. 23, novembre 1981, pp. 377-382.
- [129] A. REINEIX, et B JECKO, "Analysis of Microstrip Patch Antennas using Finite Difference Time Domain Method", *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 37, novembre 1989, pp. 1361-1369.
- [130] J. P. BÉRENGER, "A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves", *Journal of Computational Physics*, vol. 114, septembre 1994, pp. 185-200.
- [131] M. FUSCO, "FDTD Algorithm in Curvilinear Coordinates", *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 38, janvier 1990, pp. 76-89.
- [132] P. B JOHNS, et R. L. BEURLE, "Numerical Solution of 2-Dimensional Scattering Problems using a Transmission Line Matrix", *IEE Proc.*, vol. 118, septembre 1971, pp. 1203-1208.
- [133] W. J. R. HOEFER, "The Transmission Line Matrix (TLM) Method", in *Numerical Techniques for Microwave and Millimeter Wave Passive Structures*, édité par T. ITOH, Wiley, New York, 1989.
- [134] W. J. R. HOEFER, et P. P. M. SO, *The Electromagnetic Wave Simulator*, Wiley, New York, 1991.
- [135] S. B. WORM, et R. PREGLA. "Hybrid Mode Analysis of Arbitrarily Shaped Planar Microwave Structures by the Method of Lines", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 32, février 1984, pp. 191-196.
- [136] A. D. BERK, "Variational Principles for Electromagnetic Resonators and Waveguides", *IRE Trans. Antennas Propag.*, vol. 4, avril 1956, pp. 104-111.
- [137] A. S. VANDER VORST, A. LALOUX, et R. J. M. GOVAERTS, "A Computer Optimization of the Rayleigh-Ritz Method", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 17, août 1969, pp. 454-460.
- [138] J. N. REDDY, *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill, New York, 1984.
- [139] P. P. SILVESTER, et R. L. FERRARI, *Finite Elements for Electrical Engineers*, Cambridge University Press, 1983.
- [140] S. AHMED, et P. DALY, "Finite-element Methods for Inhomogeneous Waveguides", *IEE Proc.*, vol. 116, octobre 1969, pp. 1203-1208.

- [141] A. KONRAD, "Higher-order Triangular Finite Elements for Electromagnetic Waves in Anisotropic Media", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 25, mai 1977, pp. 353-360.
- [142] J. P. WEBB, G. L. MAILE, et R. L. FERRARI, "Finite-Element Solution of Three-Dimensional Electromagnetic Problems", *IEE Proc.*, vol. 130, pt. H, mars 1983, pp. 153-159.
- [143] J. B. DAVIES, F. A. FERNANDEZ, et G. Y. PHILIPPOU, "Finite Element Analysis of all Modes in Cavities with Circular Symmetry", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 30, novembre 1982, pp. 1975-1980.
- [144] J. L. VOLAKIS, J. GONG et T. OZDEMIR, "Finite Element Method for Patch Antennas", in *Finite Element Software for Microwave Engineering*, édité par P. SILVESTER, G. PELOSI et T. ITOH, Wiley, New York, 1996.
- [145] D. SUN, J. MANGES, X. YUAN, et Z. CENDES, "Spurious Modes in Finite-Element Methods", *IEEE Antennas Propag. Mag.*, vol. 37, octobre 1995, pp. 12-24.
- [146] *HFSS User's Manual*, Hewlett-Packard Co., Palo Alto, CA, 1990.
- [147] R. F. HARRINGTON, *Field Computation by Moment Methods*, Macmillan, New York, 1968.
- [148] T. E. VAN DEVENTER, P. B. KATEHI, ET A. C. CANGELLARIS, "An Integral Equation Method for the Evaluation of Conductor and Dielectric Losses in High-Frequency Interconnects", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 37, décembre 1989, pp. 1964-1972.
- [149] G. J. BURKE, et A. G. POGGIO, *Numerical Electromagnetics Code (NEC) – Method of Moments*, NOSC (Naval Ocean Systems Center) TD 116, janvier 1981.
- [150] T. UWANO, et T. ITOH, "Spectral Domain Approach", in *Numerical Techniques for Microwave and Millimeter Wave Passive Structures*, édité par T. ITOH, Wiley, New York, 1989.
- [151] J. R. MOSIG, "Integral Equation Techniques for Three-Dimensional Microstrip Structures", in *Review of Radio Science 1990-1992*, édité par R. STONE, Oxford University Press, Londres, 1993, pp. 127-152.
- [152] A. SKRIVERVIK, et J. R. MOSIG, "Impedance Matrix of Multiport Microstrip Discontinuities Including Radiation Effects", *Archiv Elektronik Übertragungstech. (AEÜ)*, vol. 44, 1990, pp. 453-461.
- [153] C. A. BALANIS, *Advanced Engineering in Electromagnetics*, Wiley, New York, 1989.
- [154] J. R. MOSIG, R. C. HALL, et F. GARDIOL, "Numerical Analysis of Microstrip Patch Antennas", in *Handbook of Microstrip Antennas*, édité par J. R. JAMES et P. S. HALL, Peter Peregrinus (IEE), Londres, 1989.
- [155] R. C. HALL, et J. R. MOSIG, "The Analysis of Aperture Coupled Patch Antennas Via a Mixed Potential Integral Equation", à paraître, *IEEE Trans. Antennas Propag.*
- [156] I. T. T. *Reference Data for Radio Engineers*, Howard W. Sams, Indianapolis, 1970.

SOLUTIONS DES EXERCICES

CHAPITRE 1

1.9.1 La force électrique vaut $qE = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1000 \text{ VAs/m} = 1,6 \cdot 10^{-16} \text{ N}$, et l'amplitude de la force magnétique est donnée par

$$qvB = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot \frac{10^5}{3600} \cdot 1 \text{ As} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 0,444 \dots \cdot 10^{-17} \text{ N}$$

La force électrique produit une accélération constante le long du champ électrique, de sorte que la vitesse – dans cette direction – augmente linéairement avec le temps. La force magnétique est dirigée perpendiculairement au vecteur vitesse de l'électron et au champ d'induction, et produit donc une rotation. Pour la situation spécifiée dans la donnée du problème, l'électron parcourt une hélice dont le pas croît linéairement, sur une surface cylindrique circulaire.

1.9.2 L'équation différentielle des lignes de champ est donnée par (1.8)

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{a^2 dx}{E_0 xz} = \frac{dy}{E_y} = \frac{a^2 dy}{E_0 2yz} \quad \text{et donc} \quad \frac{dy}{y} = 2 \frac{dx}{x}$$

On supprime les termes communs, on regroupe fonctions de x d'un côté et fonctions de y de l'autre côté (si nécessaire), et on intègre les expressions de part et d'autre

$$\ln y = 2 \ln x + \ln C \quad \text{et donc} \quad y = Cx^2 \quad \text{où } C \text{ est une constante d'intégration.}$$

Il s'agit de l'équation d'une famille de paraboles, qui se croisent toutes au point $x=0, y=0$. On vérifie aisément que le champ en ce point est effectivement nul (fig. S.1).

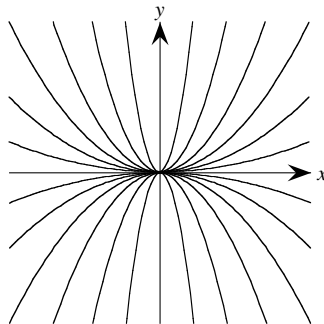


Fig. S.1 Lignes de champs: famille de paraboles.

1.9.3 La divergence et le rotationnel du champ sont donnés par

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{E_0}{a^2} 3z \neq 0 \quad \text{et} \quad \nabla \times \mathbf{E} = \frac{E_0}{a^2} (-2\mathbf{e}_{x,y} + \mathbf{e}_{y,x}) \neq 0$$

Comme la divergence n'est pas nulle, le champ ne dérive pas d'un potentiel vecteur, et comme le rotationnel n'est pas nul, il ne dérive pas non plus d'un potentiel scalaire.

1.9.4 On prend sa divergence de la fonction donnée \mathbf{B}

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{B_0}{a^2} \nabla \cdot (\mathbf{e}_{x,xz} + \mathbf{e}_{y,yz} + \mathbf{e}_{z,xy}) = \frac{B_0}{a^2} \left(\frac{\partial xz}{\partial x} + \frac{\partial yz}{\partial y} + \frac{\partial xy}{\partial z} \right) = \frac{B_0}{a^2} 2z \neq 0$$

L'expression ne représente pas un champ d'induction \mathbf{B} , qui doit satisfaire (1.13).

1.9.5 Le champ d'induction \mathbf{B} est le rotationnel du potentiel vecteur \mathbf{A} (1.19)

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{A_0}{a^2} [-4\mathbf{e}_{x,xz} + 4\mathbf{e}_{y,yz} - \mathbf{e}_z(y^2 - x^2)]$$

On divise par μ pour obtenir \mathbf{H} , dont le rotationnel est la densité de courant \mathbf{J} (1.13)

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} = -\frac{2A_0}{\mu a^2} [\mathbf{e}_{x,y} + \mathbf{e}_{y,x}]$$

La relation (1.49) est aussi satisfaite, les grandeurs étant toutes indépendantes du temps.

1.9.6 Pour déterminer le potentiel vecteur \mathbf{A} dont dérive un champ d'induction \mathbf{B} , on vérifie si ce potentiel existe: la divergence de \mathbf{B} est bien nulle. Le problème est l'inverse du précédent, et on cherche une solution particulière, dirigée selon \mathbf{e}_x

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} = B_y = \frac{B_0}{a^5} 2xy^3z \quad \text{et} \quad \frac{\partial A_x}{\partial y} = -B_z = \frac{B_0}{a^5} 3xy^2z^2$$

En intégrant, on obtient une solution particulière qui satisfait les deux relations. On obtient la solution générale en ajoutant le gradient d'une fonction arbitraire $\Psi(x, y, z)$

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x \frac{B_0}{a^5} x y^3 z^2 + \nabla \Psi(x, y, z)$$

Les deux dépendances recherchées correspondent à deux choix de $\Psi(x, y, z)$

- une seule composante, selon \mathbf{e}_x $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_x = \mathbf{e}_x \frac{B_0}{a^5} x y^3 z^2 + \nabla \Psi(x)$
- aucune composante selon \mathbf{e}_x $\mathbf{A} = -\mathbf{e}_y \frac{3B_0}{2a^5} x^2 y^3 z^2 - \mathbf{e}_z \frac{B_0}{a^5} x^2 y^3 z + \nabla \Phi(y, z)$

1.9.7 On considère les équations de Maxwell (1.13). On constate que si un champ magnétique varie dans le temps, il génère toujours un champ électrique. En revanche, un champ électrique peut varier dans le temps sans créer de champ magnétique quand

$$\frac{\partial \mathbf{D}(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \mathbf{J}(t, \mathbf{r}) = 0$$

Cette condition peut être satisfaite dans des plasmas (milieux ionisés), et on a alors propagation d'ondes électrocinétiques – sans champ magnétique associé. On ne rencontre en revanche pas cette situation dans les milieux couramment utilisés.

1.9.8 La composante tangentielle de \mathbf{E} donne – $E_{t1} = E_1 \sin \psi_1 = E_{t2} = E_2 \sin \psi_2$ – et la composante normale de \mathbf{D} – $D_{n1} = \epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_1 E_1 \cos \psi_1 = D_{n2} = \epsilon_2 E_{n2} = \epsilon_2 E_2 \cos \psi_2$. Le quotient des deux expressions fournit la relation entre les angles

$$\frac{\tan \psi_1}{\epsilon_1} = \frac{\tan \psi_2}{\epsilon_2}$$

1.9.9 Pour déterminer le champ magnétique, on prend d'abord le rotationnel de \mathbf{E}

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_x \beta E_0 \cos(px) \cos(\omega t - \beta z) - \mathbf{e}_z p E_0 \sin(px) \sin(\omega t - \beta z) = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

On intègre ensuite par rapport au temps. Il faut “en principe” ajouter une constante d'intégration mais, précisément parce que c'est une constante, elle n'a aucune relation avec le problème dynamique considéré, et on peut sans autre poser qu'elle est nulle

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{e}_x \frac{\beta E_0}{\omega \mu} \cos(px) \sin(\omega t - \beta z) - \mathbf{e}_z \frac{p E_0}{\omega \mu} \sin(px) \cos(\omega t - \beta z)$$

Le vecteur de Poynting est alors le produit vectoriel des deux champs

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{e}_x \frac{p E_0^2}{\omega \mu} \sin(2px) \sin(2\omega t - 2\beta z) + \mathbf{e}_z \frac{\beta E_0^2}{\omega \mu} \cos^2(px) \sin^2(\omega t - \beta z)$$

1.9.10 Les densités d'énergie électrique et magnétique valent

$$W_e = \frac{\epsilon_0 E^2(z, t)}{2} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \sin^2(\omega t - \beta z) \quad W_m = \frac{\mu_0 H^2(z, t)}{2} = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{2} E_0^2 \sin^2(\omega t - \beta z) = W_e$$

Le vecteur de Poynting est le produit vectoriel des deux champs

$$\mathbf{S}(z, t) = \mathbf{E}(z, t) \times \mathbf{H}(z, t) = \mathbf{e}_z \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} E_0^2 \sin^2(\omega t - \beta z)$$

On vérifie finalement que le théorème de Poynting est satisfait

$$\nabla \cdot \mathbf{S}(z, t) = -\beta \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} E_0^2 \sin(2\omega t - 2\beta z) = -\frac{\partial W_e}{\partial t} - \frac{\partial W_m}{\partial t} \quad \text{avec} \quad \beta \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} = \omega \epsilon_0.$$

CHAPITRE 2

2.8.1 La célérité est donnée par $c = c_0 / \sqrt{2,1} = 2,07 \cdot 10^8$ m/s, et le temps qu'il faut au signal pour parcourir 1 kilomètre est donc

$$t = \frac{l}{c} = \frac{1000}{3 \cdot 10^8} \sqrt{2,1} = 4,8 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 4,8 \text{ } \mu\text{s}$$

2.8.2 La vitesse de cette ligne, avec $C' = 35 \text{ nF/km}$ et $L' = 0,7 \text{ mH/km}$, vaut

$$c = 1/\sqrt{L'C'} = 1/\sqrt{0,7 \cdot 10^{-3} \cdot 35 \cdot 10^{-9}} = 2,0203 \cdot 10^5 \text{ km/s} = 2,0203 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Elle est inférieure à la vitesse de la lumière c_0 . L'impédance caractéristique est de

$$Z_c = \sqrt{L'/C'} = \sqrt{0,7 \cdot 10^{-3}/35 \cdot 10^{-9}} = 141,42 \Omega$$

2.8.3 La vitesse ne dépend que de la permittivité relative $\epsilon_r = 3,5$ et vaut donc $c = c_0/\sqrt{3,5} = 1,604 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. L'impédance caractéristique de la ligne coaxiale est

$$Z_c = \frac{120\pi}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{R_B}{R_A}\right) = \frac{60}{\sqrt{3,5}} \ln\left(\frac{4}{1,2}\right) = 38,613 \Omega$$

2.8.4 L'impédance caractéristique d'une ligne bifilaire est donnée par (2.32)

$$Z_c \cong \frac{120}{\sqrt{\epsilon_r}} \operatorname{arcosh}\left(\frac{d}{R}\right) = 120 \operatorname{arcosh}\left(\frac{3}{1}\right) = 120 \cdot 1,763 = 211,56 \Omega$$

2.8.5 L'impédance caractéristique d'une ligne à ruban équilibré est approximativement donnée par (2.34), pour le cas $w = 4 \text{ mm}$, $h = 1,2 \text{ mm}$, $b = 0,2 \text{ mm}$ et $\epsilon_r = 2,8$

$$Z_c \cong \frac{94,172}{\sqrt{\epsilon_r}} \left[\frac{xw}{2h} + \frac{\ln(F(x))}{\pi} \right]^{-1} = \frac{94,172}{\sqrt{2,8}} \left[\frac{1,0909 \cdot 4}{2,4} + \frac{\ln 5,814}{\pi} \right]^{-1} = 23,66 \Omega, \text{ avec}$$

$$F(x) = \frac{(x+1)^{(x+1)}}{(x-1)^{(x-1)}} = \frac{(2,0909)^{(2,0909)}}{(0,0909)^{(0,0909)}} = 0,5814 \quad \text{et} \quad x = \frac{1}{1-b/2h} = \frac{1}{1-0,2/2,4} = 1,0909$$

2.8.6 On tire le facteur de réflexion ρ_t de (2.38), ce qui donne, pour une résistance de 10Ω connectée à l'extrémité d'une ligne à impédance caractéristique de 50Ω ,

$$\rho_t = \frac{R_t - Z_c}{R_t + Z_c} = \frac{10 - 50}{10 + 50} = -\frac{2}{3} = -0,6666 \text{ (sans dimensions)}$$

2.8.7 En considérant le diagramme de Bergeron à la figure 2.18, on voit que si $R_t < Z_c$ et $R_g > Z_c$, la "spirale" tourne en sens opposé. On obtient une croissance monotone du courant lorsque $R_t < Z_c$ et $R_g < Z_c$.

2.8.8 Le temps mesuré par un réflectomètre avec 10 cm de ligne à $\epsilon_r = 2,18$ est de $6,666 \dots \cdot 100 = 666,6 \dots \text{ ps} = 0,6666 \dots \text{ ns}$.

2.8.9 Pour qu'une ligne ayant $C' = 35 \text{ nF/km}$, $L' = 0,7 \text{ mH/km}$ et $R' = 120 \Omega/\text{km}$ ne soit pas dispersive, il faut que sa conductance vale $G' = 6 \text{ mS/km}$. L'affaiblissement est alors de $0,849 \text{ Np/km}$ et la tension du signal décroît d'un facteur dix (soit $2,3 \text{ Np}$ dans le tableau 3.5) sur une distance de $2,71 \text{ km}$.

CHAPITRE 3

3.8.1 Le développement du paragraphe 3.1.7 établit que la valeur moyenne de la puissance dans le domaine temporel $\langle p(z,t) \rangle$ est égale à la partie réelle de la puissance complexe $\underline{S}(z)$. Quant à la dépendance temporelle de $p(z,t)$, elle disparaît dans (3.10) et ne peut pas être retrouvée dans $\underline{S}(z)$. Par exemple, on ne peut pas savoir à quel instant la puissance passe par un maximum à un emplacement donné, ni à quel instant elle s'annule.

3.8.2 Une réduction de puissance d'un facteur 100 000 correspond à un affaiblissement de 11,513 Np, ou 50 dB. Le rapport des tensions est la racine carrée, soit 316,23.

3.8.3 (a) Ligne $R'C'$. On a ici $\underline{Z}' = R'$ et $\underline{Y}' = j\omega C'$. Par conséquent

$$\underline{\gamma} = \sqrt{j\omega C'R'} = (1+j)\sqrt{\omega C'R'/2} \text{ de sorte que } \alpha = \beta = \sqrt{\omega C'R'/2} \quad [\text{m}^{-1}]$$

L'affaiblissement linéique est égal au déphasage linéique, et tous deux sont proportionnels à la racine carrée de la fréquence (fig. S.2).

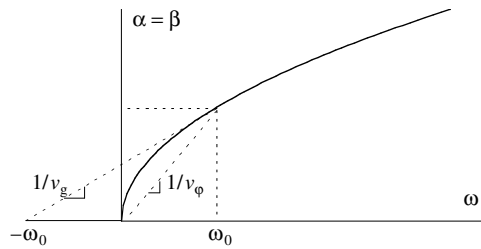


Fig. S.2 Courbe de dispersion pour une ligne $R'C'$.

La vitesse de phase et la vitesse de groupe sont données par

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{2\omega / C'R'} \quad \text{et} \quad v_g = \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)^{-1} = 2\sqrt{2\omega / C'R'} = 2v_\phi \quad [\text{m/s}]$$

La vitesse de groupe est le double de la vitesse de phase, parce que la courbe $\beta(\omega)$ est une parabole. L'impédance caractéristique est $\underline{Z}_c = \sqrt{R' / j\omega C'} = (1-j)\sqrt{R' / 2\omega C'}$

(b) Ligne $L'C'$ avec capacité en série. Ici, $\underline{Z}' = j\omega L' + 1 / j\omega C'_1$ et $\underline{Y}' = j\omega C'_2$. Deux situations sont possibles:

- si $\omega^2 < \frac{1}{L'C'_1}$, $\underline{\gamma} = \alpha = \sqrt{\frac{C'_2}{C'_1} - \omega^2 L'C'_2}$, on a affaiblissement sans propagation;
- si $\omega^2 > \frac{1}{L'C'_1}$, $\underline{\gamma} = j\beta = j\sqrt{\omega^2 L'C'_2 - \frac{C'_2}{C'_1}}$, on a propagation sans affaiblissement.

Ce schéma correspond à un mode transverse magnétique (mode TM) dans un guide d'ondes. Le diagramme de dispersion est celui de la figure 3.11.

Pour les fréquences de propagation, les vitesses de phase et de groupe sont

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L'C'_2 - \frac{C'_2}{\omega^2 C'_1}}} \quad \text{et} \quad v_g = \left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\right)^{-1} = \frac{\sqrt{L'C'_2 - \frac{C'_2}{\omega^2 C'_1}}}{L'C'_2} = \frac{1}{L'C'_2 v_\phi} \quad [\text{m/s}]$$

L'impédance caractéristique est donnée par

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{j\omega L' + 1/j\omega C'_1}{j\omega C'_2}} = \sqrt{\frac{L'}{C'_2} - \frac{1}{\omega^2 C'_1 C'_2}} \quad [\Omega]$$

Elle est purement imaginaire dans la bande où il n'y a pas de propagation, et devient réelle dans la bande dans laquelle le signal se propage.

(c) Ligne $L'G'$ avec capacité en série. Ici, $\underline{Z}' = j\omega L' + 1/j\omega C'$ et $\underline{Y}' = G'$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{jG' \left(\omega L' - \frac{1}{\omega C'} \right)} = (1+j) \sqrt{\frac{G'}{2} \left(\omega L' - \frac{1}{\omega C'} \right)} \quad [\text{m}^{-1}]$$

Le terme sous la racine de droite est réel, mais il peut être positif ou négatif, de sorte que deux cas sont possibles. Dans les deux cas, on choisit – par convention – la valeur positive de β

- si $\omega^2 < \frac{1}{L'C'}$, on a $-\alpha = \beta = \sqrt{\frac{G'}{2} \left(\frac{1}{\omega C'} - \omega L' \right)}$ [m⁻¹]
- si $\omega^2 > \frac{1}{L'C'}$, on a $\alpha = \beta = \sqrt{\frac{G'}{2} \left(\omega L' - \frac{1}{\omega C'} \right)}$ [m⁻¹]

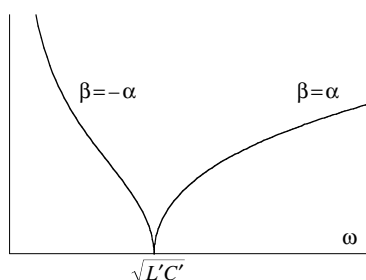


Fig. S.3 Diagramme de dispersion d'une ligne de transmission $L'G'$ avec capacité en série.

On a d'abord une région à onde inverse (§ 2.4.5) où β décroît: les fronts d'onde se déplacent dans une direction, la puissance dans l'autre. Cela explique pourquoi $\alpha = -\beta$ dans cette bande de fréquences. Par ailleurs, les vitesses de phase et de groupe sont de signe opposé. On a ensuite une région à propagation "normale", qui tend asymptotiquement vers le cas de la ligne $L'G'$ (fig. S.3).

Les vitesses de phase et de groupe, pour les deux situations, sont données par

- si $\omega^2 < \frac{1}{L'C'}$, $v_\varphi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{G'}{2} \left(\frac{1}{\omega C'} - \omega L' \right)}}$ et $v_g = -\sqrt{\frac{8}{G'}} \frac{\sqrt{\frac{1}{\omega C'} - \omega L'}}{\frac{1}{\omega^2 C'} + L'}$
- si $\omega^2 > \frac{1}{L'C'}$, $v_\varphi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{G'}{2} \left(\omega L' - \frac{1}{\omega C'} \right)}}$ et $v_g = \sqrt{\frac{8}{G'}} \frac{\sqrt{\omega L' - \frac{1}{\omega C'}}}{L' + \frac{1}{\omega^2 C'}}$

L'impédance caractéristique vaut ici

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{Z}'}{\underline{Y}} = (1+j) \sqrt{\frac{1}{2G'} \left(\omega L' - \frac{1}{\omega C'} \right)} \quad [\Omega]$$

3.8.4 La ligne de transmission du problème 3.8.3 (b) ne présente pas de pertes, et pourtant son exposant de propagation est purement réel lorsque $\omega^2 < 1/(L'C')$. Plus généralement, on rencontre une telle situation lorsque les éléments connectés en série et les éléments connectés en parallèle dans le schéma équivalent sont de même nature – inductances de part et d'autre, ou capacités de part et d'autre. L'impédance caractéristique est alors purement imaginaire. Une telle ligne peut transporter une puissance active si l'onde progressive et l'onde rétrograde sont simultanément présentes (§ 3.3.3).

3.8.5 Sur une ligne avec pertes, la vitesse de groupe ne dépend pas de la fréquence lorsque β est directement proportionnel à ω . Ceci correspond à la condition de Heaviside $C'R' = G'L'$ (§ 2.7.6), et on a alors $Z_c = \sqrt{L'/C'}$ et $\alpha = \sqrt{G'R'}$.

3.8.6 L'exposant de propagation d'une ligne de transmission définie par $\underline{Y}' = j\omega C'$ et $\underline{Z}' = j(\omega - \omega_0)L'$ est donné par

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}'\underline{Y}'} = \sqrt{(\omega_0 - \omega)\omega L'C'} \quad [\text{m}^{-1}]$$

Quand $\omega < \omega_0$, l'exposant de propagation est purement réel, de sorte que le signal est affaibli, tandis que lorsque $\omega > \omega_0$, le signal se propage sans affaiblissement.

3.8.7 Le module du facteur de réflexion est $|\rho| = (\text{ROS} - 1)/(\text{ROS} + 1) = 2/4 = 0,5$. Les valeurs maximale et minimale prises par la tension valent donc

$$U_{\max} = |\underline{U}_+|(1 + |\rho|) = 10 \cdot 1,5 = 15 \quad \text{et} \quad U_{\min} = |\underline{U}_+|(1 - |\rho|) = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ V}$$

Les valeurs maximale et minimale prises par le courant valent alors

$$I_{\max} = \frac{|\underline{U}_+|}{Z_c}(1 + |\rho|) = \frac{10}{50}1,5 = 0,3 \quad \text{et} \quad I_{\min} = \frac{|\underline{U}_+|}{Z_c}(1 - |\rho|) = \frac{10}{50}0,5 = 0,1 \text{ A}$$

3.8.8 On détermine les termes des matrices d'impédance, d'admittance et de chaîne, ainsi que les éléments qui composent les schémas équivalents en \mathbf{T} et en $\mathbf{\Pi}$ au moyen des relations de la section 3.6, en fonction de $\beta d = 2\pi d/\lambda$. Vu le grand nombre de valeurs considérées, il est préférable de les regrouper sous forme de tableau, dans lequel plusieurs colonnes sont ajoutées pour faire apparaître la périodicité. L'indication 0_+ veut dire un petit peu plus grand que 0, etc.

Tableau S.4 Matrices et schémas équivalents en fonction de la longueur électrique d'une ligne.

d/λ	0+	0,01	0,1	0,25	0,4	0,5-	0,5+	0,6	0,75	1-	1+
degrés	0+	3,6	36	90	144	180-	180+	216	270	360-	360+
$Z_{11}=Z_{22}$	$-j\infty$	$-j794,73$	$-j68,82$	0	$j68,82$	$j\infty$	$-j\infty$	$-j68,8$	0	$j\infty$	$-j\infty$
$Z_{12}=Z_{21}$	$-j\infty$	$-j796,30$	$-j85,06$	$-j50$	$-j85,06$	$-j\infty$	$j\infty$	$j85,0$	$j50$	$j\infty$	$-j\infty$
$Y_{11}=Y_{22}$	$-j\infty$	$-j0,3179$	$-j0,0275$	0	$j0,0275$	$j\infty$	$-j\infty$	$-j0,027$	0	$j\infty$	$-j\infty$
$Y_{12}=Y_{21}$	$j\infty$	$j0,3185$	$j0,0340$	$j0,02$	$j0,0340$	$j\infty$	$-j\infty$	$-j0,034$	$-j0,02$	$-j\infty$	$j\infty$
$\underline{A}=\underline{D}$	1	0,998	0,8099	0	$-0,8099$	-1	-1	$-0,809$	0	1	1
\underline{B}	0	$-j3,139$	$-j29,399$	$-j50$	$-j29,399$	0	0	$j29,39$	$j50$	0	0
\underline{C}	0	$-j0,0013$	$-j0,0127$	$-j0,02$	$-j0,0127$	0	0	$j0,012$	$j0,02$	0	0
Z_s	0	$j1,571$	$j16,246$	$j50$	$j153,98$	$j\infty$	$-j\infty$	$-j153,9$	$-j50$	0	0
Z_p	$-j\infty$	$-j796,3$	$-j85,065$	$-j50$	$-j85,065$	$-j\infty$	$j\infty$	$j85,06$	$j50$	$j\infty$	$-j\infty$
Y_s	$-j\infty$	$-j0,318$	$-j0,0340$	$-j0,02$	$-j0,0340$	$-j\infty$	$j\infty$	$j0,034$	$j0,02$	$j\infty$	$-j\infty$
Y_p	0	$j0,0006$	$j0,0064$	$j0,02$	$j0,0615$	$j\infty$	$-j\infty$	$-j0,061$	$-j0,02$	0	0

Lorsque $d/\lambda = 0; 0,5; 1; \text{etc.}$, plusieurs termes divergent, passant de ∞ à $-\infty$ ou vice-versa. Pour déterminer ce que cela signifie, on cherche les relations entre les tensions et les courants, et on trouve que $\underline{U}_1 = \pm \underline{U}_2$ et $\underline{I}_1 = \pm(-\underline{I}_2)$, c'est-à-dire des courants qui ne dépendent pas des tensions, et vice-versa. On ne peut pas définir de matrice d'impédance ou d'admittance. Toutefois, ces termes infinis – à une exception près – multiplient des grandeurs nulles, c'est-à-dire qu'on a des indéterminations de la forme $\infty \times 0$.

Lorsque $d/\lambda = 0,25; 0,75; \text{etc.}$, on rencontre une autre situation particulière, pour laquelle $\underline{U}_1 \sim \underline{I}_2$ et $\underline{U}_2 \sim \underline{I}_1$. La tension à un accès est proportionnelle au courant à l'autre accès – mais ne dépend pas de la tension à cet accès. On utilise cette propriété dans les transformateurs quart d'onde (§ 4.4.8). Il n'y a pas de termes singuliers dans ce cas.

Quand la ligne est plus courte que $\lambda/2$, les schémas équivalents sont formés d'inductances en série et de capacités en parallèle. Lorsqu'elle est plus longue que $\lambda/2$, ils comportent des capacités en série et des inductances en parallèle.

3.8.9 On détermine les facteurs de réflexion et de transmission avec (3.92)

$$\rho_{-1} = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}} = \frac{75 - 50}{75 + 50} = 0,2 \quad \text{et} \quad \tau_{21} = \frac{2Z_{c2}}{Z_{c2} + Z_{c1}} = \frac{2 \cdot 75}{75 + 50} = 1,2$$

La matrice de répartition est donnée par

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 & \tau_{12} \frac{\sqrt{Z_{c2}}}{\sqrt{Z_{c1}}} \\ \tau_{21} \frac{\sqrt{Z_{c1}}}{\sqrt{Z_{c2}}} & \rho_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,8 \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{50}} \\ 1,2 \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{75}} & -0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,98 \\ 0,98 & -0,2 \end{bmatrix}$$

Les pourcentages de puissance réfléchiée – aux deux accès – sont donnés par

$$|\underline{S}_{11}|^2 = 0,2^2 = 0,04 \quad \text{et} \quad |\underline{S}_{22}|^2 = (-0,2)^2 = 0,04$$

Le pourcentage de puissance transmise d'un accès à l'autre est donné par

$$|\underline{S}_{12}|^2 = |\underline{S}_{21}|^2 = 0,98^2 = 0,96$$

La somme des pourcentages est égale à l'unité, ce qui indique qu'il n'y a pas de dissipation du signal à la jonction entre les deux lignes.

CHAPITRE 4

4.6.1 Une ligne de transmission avec une impédance caractéristique de 50Ω aboutit à une terminaison dont l'impédance vaut $150 + j20 \Omega$. Le facteur de réflexion au droit de la terminaison est donné par

$$\rho_t = \frac{150 + j20 - 50}{150 + j20 + 50} = \frac{100 + j20}{200 + j20} = \frac{51 + j5}{101} = 0,5073 e^{j0,0977}$$

Aux autres positions le long de la ligne, on obtient alors en fonction de z :

$$\rho(z) = 0,5073 e^{2\gamma(z-d) + j0,0977}$$

L'impédance localisée est donnée par

$$\underline{Z}(z) = Z_c \frac{1 + \rho(z)}{1 - \rho(z)} = 50 \frac{1 + 0,5073 e^{2\gamma(z-d) + j0,0977}}{1 - 0,5073 e^{2\gamma(z-d) + j0,0977}} = 50 \frac{(15 + j2) - 5 \tanh[\gamma(z-d)]}{5 - (15 + j2) \tanh[\gamma(z-d)]}$$

La tension et le courant sont donnés par (3.58) et (3.59)

$$\begin{aligned} \underline{U}(z) &= \underline{U}_+ e^{-\gamma z} [1 + \rho(z)] = \underline{U}_+ e^{-\gamma z} [1 + 0,5073 e^{2\gamma(z-d) + j0,0977}] \\ \underline{I}(z) &= \underline{Y}_c \underline{U}_+ e^{-\gamma z} [1 - \rho(z)] = 0,02 \underline{U}_+ e^{-\gamma z} [1 - 0,5073 e^{2\gamma(z-d) + j0,0977}] \end{aligned}$$

La puissance complexe est le produit du phasor tension par le complexe conjugué du phasor courant (3.60)

$$\begin{aligned} \underline{S}(z) &= \underline{U}(z) \underline{I}^*(z) \\ &= |\underline{U}_+|^2 e^{-2\alpha z} [0,02 - 0,0051 e^{4\alpha(z-d) + j0,0977} + j0,0203 e^{2\alpha(z-d)} \sin\{2\beta(z-d) + 0,0977\}] \end{aligned}$$

La puissance active (partie réelle) ne varie pas le long de la ligne, tandis que la puissance réactive (partie imaginaire) varie périodiquement avec la position.

4.6.2 L'impédance de la terminaison capacitive est $Z_t = 1/j\omega C_t$, ce qui donne pour l'impédance à l'entrée de la ligne

$$\underline{Z} = Z_c \frac{\frac{1}{j\omega C_t} + jZ_c \tan \beta d}{Z_c + \frac{1}{\omega C_t} \tan \beta d}$$

Pour que cette impédance corresponde à un court-circuit $\underline{Z} = 0$, il faut que le numérateur s'annule et donc que

$$\frac{1}{\omega C_t} - Z_c \tan \beta d = 0, \text{ d'où } \tan \beta d = \frac{1}{\omega C_t Z_c}$$

Elle correspond à un circuit ouvert $\underline{Z} = \infty$ quand le dénominateur s'annule

$$Z_c + \frac{1}{\omega C_t} \tan \beta d = 0 \text{ et, par conséquent } \tan \beta d = -\omega C_t Z_c$$

Il n'est pas possible d'expliciter ces relations pour extraire ω . On les résout graphiquement, en cherchant les intersections de la tangente avec les fonctions de $-\omega$ ou de $1/\omega$ (pointillés dans la fig. S.4). On peut aussi utiliser un programme de recherche de zéros.

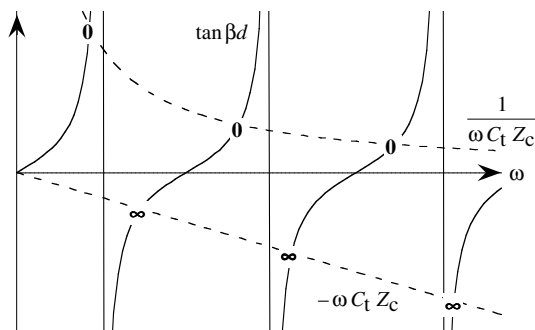


Fig. S.4 Recherche des fréquences pour lesquelles l'impédance d'entrée est nulle ou infinie.

4.6.3 Combinant (4.7) et (4.9), on trouve que

$$Z_c = \sqrt{Z_{in}^{cc} Z_{in}^{lo}} = \sqrt{j20 \cdot (-j120)} = 48,99 \Omega$$

$$\tanh \gamma d = \frac{Z_{in}^{cc}}{Z_c} = j20/48,99 = j0,409 = j \tan \beta d$$

On en tire que

$$\beta = \frac{1}{d} \arctan 0,409 = \frac{1}{d} (0,388 + k\pi) \quad [m^{-1}]$$

Du fait du caractère périodique de la tangente, on n'obtient pas une solution unique, mais un ensemble de valeurs possibles. La valeur du nombre entier k devra être déterminée en utilisant d'autres informations.

4.6.4 Un ROS de 5 correspond à un facteur de réflexion ayant un module de

$$|\underline{\rho}| = (5-1)/(5+1) = 4/6 = 0,666\dots = e^{-2\alpha d}$$

On en tire l'affaiblissement

$$\alpha = -\frac{1}{2d} \ln|\underline{\rho}| = -\frac{1}{200} \ln(0,666\dots) = 0,00203 \text{ Np/m} = 0,01765 \text{ dB/m}$$

4.6.5 Dans le plan des impédances normalisées, la courbe (a) $|\underline{Z}/\underline{Z}_c| = 2$ est un cercle de rayon 2, la courbe (b) $\arg(\underline{Z}/\underline{Z}_c) = 45^\circ$ une droite à 45° . Leurs transformées sont deux cercles (fig. S.5), qui passent par les points $2j$, 2 et $-2j$ pour la courbe (a), par 0 , $x(1+j)$ et ∞ pour la courbe (b) (avec x variant de 0 à ∞).

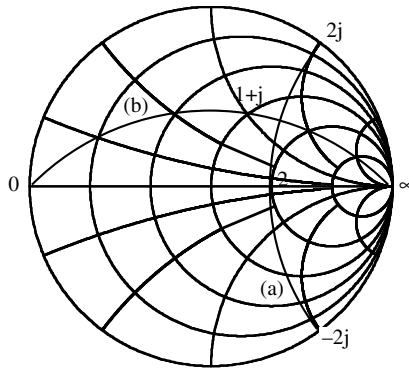


Fig. S.5 Lieux des points sur lesquels le module de l'impédance ou son argument sont constants.

Les équations des cercles sont obtenues après quelques calculs (on pose $\underline{\rho} = a + jb$)

$$(a) \quad (a-3)^2 + b^2 = (2\sqrt{2})^2$$

$$(b) \quad a^2 + (b+1)^2 = (\sqrt{2})^2$$

4.6.6 Les calculs deviennent très compliqués pour ce problème, car ils requièrent l'évaluation de fonctions hyperboliques d'argument complexe. Il est alors fortement recommandé, voire même pratiquement indispensable, de les effectuer sur un ordinateur [32]. On trouve le quotient des puissances $P_t/P_e = 2,514 \cdot 10^{-5}$, qui correspond à un affaiblissement de 46 dB.

4.6.7 Pour adapter la terminaison d'impédance $\underline{Z}_t = 20 + j20 \Omega$ à une ligne d'impédance caractéristique $Z_c = 100 \Omega$, au moyen d'un segment de ligne de transmission et un élément réactif, on peut, soit calculer quelle longueur donne une impédance d'entrée dont la partie réelle vaut Z_c [32], soit utiliser l'abaque de Smith avec la procédure illustrée dans les figures 4.11 et 4.12.

Pour adapter en connectant une réactance en série, on insère une section de ligne de longueur $0,034 \lambda$, et l'impédance d'entrée est alors située sur le cercle qui passe par le centre de l'abaque. On atteint ensuite le centre de l'abaque en connectant une réactance de -180Ω (condensateur). Pour adapter avec une inductance, il faut une plus longue section de ligne ($0,284 \lambda$) et une réactance de 180Ω .

Pour adapter avec une susceptance connectée en parallèle sur la ligne, en connectant une section longue de $0,034 \lambda$ on obtient une admittance d'entrée sur le cercle qui passe par le centre de l'abaque. On atteint le centre en connectant une susceptance de $0,018 \text{ S}$ (condensateur). Il faut une plus longue section de ligne ($0,402 \lambda$) pour adapter avec une inductance, et une susceptance de $-0,018 \text{ S}$.

On note que les éléments utilisés pour l'adaptation (capacités ou inductances) ne prennent pas les mêmes valeurs quand on adapte en connectant un composant en série ou quand on en connecte un en parallèle. Dans le problème considéré ici, c'est avec une capacité connectée en parallèle que la section de ligne est la plus courte.

4.6.8 Pour adapter avec un transformateur quart d'onde (§ 4.4.8), on insère tout d'abord une section de ligne, longue de $0,21 \lambda$, pour que l'impédance à l'entrée de cette section soit purement réelle. On insère alors la ligne quart d'onde, qui doit avoir une impédance caractéristique de 114Ω .

Dans le présent problème, on peut également insérer une simple section de ligne et chercher la longueur et l'impédance qui donnent l'adaptation [32]. L'impédance caractéristique de la ligne doit valoir $38,73 \Omega$ et sa longueur est de $0,159 \lambda$.

4.6.9 Les fréquences de résonance de la ligne court-circuitée à ses deux extrémités correspondent à des nombres entiers de demi-longueurs d'onde, et sont données par

$$f_n = \frac{nc}{2d} = \frac{nc_0}{2d\sqrt{\epsilon_r}}$$

où n est un entier différent de zéro. Pour un résonateur formé d'une ligne longue de 40 centimètres, on obtient

$$(a) \quad f_n|_{\epsilon_r=1} = n \cdot 375 \quad (b) \quad f_n|_{\epsilon_r=4} = n \cdot 187,5 \quad (c) \quad f_n|_{\epsilon_r=620} = n \cdot 15,06 \text{ MHz}$$

Si l'on remplace le court-circuit connecté à une extrémité par un circuit ouvert, on modifie une des conditions aux limites: le courant s'annule à une extrémité, tandis que la tension est nulle à l'autre. Ceci réduit de moitié la première fréquence de résonance ($n = 1$, pour une ligne longue de $\lambda/4$), mais les espacements entre les fréquences subséquentes restent les mêmes.

Les fréquences de résonance prennent dans ce cas les valeurs suivantes

$$(a) \quad f_n|_{\epsilon_r=1} = 187,5 + (n-1) \cdot 375 \text{ MHz}$$

$$(b) \quad f_n|_{\epsilon_r=4} = 93,75 + (n-1) \cdot 187,5 \text{ MHz}$$

$$(c) \quad f_n|_{\epsilon_r=620} = 7,53 + (n-1) \cdot 15,06 \text{ MHz}$$

CHAPITRE 5

5.4.1 La relation pour la propagation sur la ligne chargée périodiquement est

$$\cosh(\gamma_p d) = \cos(\beta d) - \frac{BZ_c}{2} \sin(\beta d)$$

Pour le cas considéré, avec des espacements de 50 centimètres et une ligne à air, on obtient $\beta d = \omega d/c_0 = (\omega/6) \cdot 10^{-8}$, qu'on utilise comme fréquence normalisée. On détermine ensuite le terme produit par la susceptance (inductance de 41,7 nH)

$$\frac{BZ_c}{2} = -\frac{Z_c}{2\omega L} = -\frac{50}{2\omega \cdot 41,5 \cdot 10^{-9}} = -\frac{6,024 \cdot 10^8}{\omega} = -\frac{1,004}{\beta d}$$

La fonction qu'il faut considérer est par conséquent

$$\cosh(\gamma_p d) = \cos(\beta d) + 1,004 \frac{\sin(\beta d)}{\beta d}$$

Lorsque le module de cette expression – représenté dans la figure S.6 – est plus grand que 1, il y a affaiblissement et on se trouve dans une bande bloquée. Lorsqu'il est inférieur à 1, il y a propagation et on est dans une bande passante.

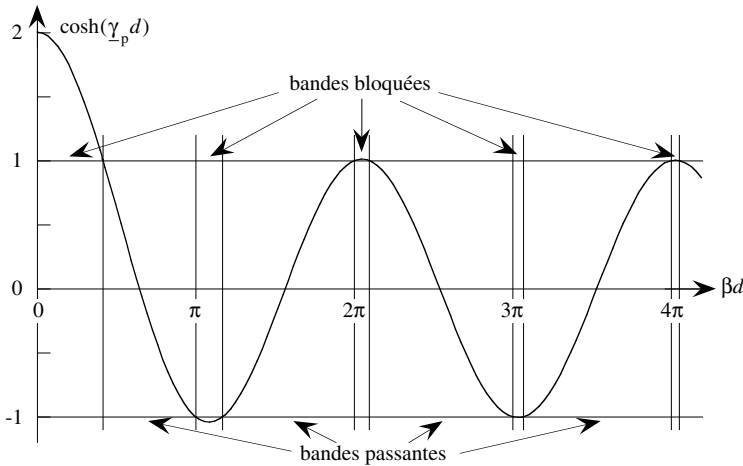


Fig. S.6 Termes de l'équation caractéristique pour une structure périodique.

Les fréquences des passages d'une bande passante à une bande bloquée et vice-versa correspondent aux passages par ± 1 de l'expression donnée plus haut. La relation admet des solutions "simples", avec $\beta d = n\pi$, qui donnent $f = (nc_0)/2d = n0,3$ GHz (limites inférieures des bandes bloquées), et d'autres solutions moins immédiates, qui nécessitent la recherche des racines de la fonction. Les limites supérieures des bandes bloquées sont situées en $f = 0,125; 0,351; 0,629; 0,92$ GHz.

Le maximum d'affaiblissement est dans la première bande bloquée, à fréquence nulle et correspond à $\cosh(\alpha_p d) = 1 + 1,004 = 2,004$ et on en tire $\alpha_p d = 1,319$ Np.

La séquence bandes passantes – bandes bloquées est l'inverse de celle rencontrée dans la figure 5.8. La première bande est bloquée, elle est suivie d'une bande passante, etc. La largeur des bandes bloquées diminue avec la fréquence, tandis que celle des bandes passantes augmente. Cette structure peut servir de filtre coupe-bas, elle présente un court-circuit en continu.

5.4.2 La susceptance B formée d'une inductance L et d'une capacité C connectées en série est donnée par $\omega C/(1-\omega^2 LC)$. L'effet de la capacité prédomine en basse fréquence, où structure se comporte comme celle de la figure 5.8. On atteint ensuite une résonance, à laquelle la susceptance devient infinie, court-circuitant la ligne, et on a une large bande bloquée. L'effet de inductance est plus important au-dessus de la résonance, et on tend vers la situation du problème 5.4.1. En choisissant judicieusement l'espacement et les composants, cette structure peut servir de filtre coupe-bande.

5.4.3 On a ici une susceptance $B = \omega C - 1/\omega L$, et la situation est l'inverse de celle du problème 5.4.2. En basse fréquence, l'inductance prédomine et la structure se comporte comme celle du problème 5.4.1. À la résonance, la susceptance devient nulle et n'affecte pas la propagation: on a une large bande passante. Aux plus hautes fréquences, la capacité est prépondérante et le comportement de la structure tend vers celui de la figure 5.8. En choisissant judicieusement l'espacement et les composants, la structure peut servir de filtre passe-bande.

5.4.4 Le déphasage linéique de la première branche de la figure 5.9, pour laquelle $0 \leq \beta_p^I d \leq \pi$, est donné par

$$\beta_p^I = (1/d) \arccos[\cos(\omega d/c) - (\omega C Z_c/2) \sin(\omega d/c)]$$

La vitesse de phase est simplement donnée par

$$v_\phi^I = \omega / \beta_p^I = \omega d / \arccos[\cos(\omega d/c) - (\omega C Z_c/2) \sin(\omega d/c)]$$

On obtient ensuite la vitesse de groupe en dérivant β par rapport à ω

$$v_g^I = \left(\frac{\partial \beta_p^I}{\partial \omega} \right)^{-1} = \frac{\sqrt{1 - [\cos(\omega d/c) - (\omega C Z_c/2) \sin(\omega d/c)]^2}}{(d/c + C Z_c/2) \sin(\omega d/c) + (\omega C Z_c d/2c) \cos(\omega d/c)}$$

La deuxième branche de la figure 5.9 correspond à $\pi \leq \beta_p^II d \leq 2\pi$ et on a

$$\beta_p^II = (1/d) \{2\pi - \arccos[\cos(\omega d/c) - (\omega C Z_c/2) \sin(\omega d/c)]\}$$

La vitesse de phase est donnée par

$$v_\phi^II = \omega / \beta_p^II = \omega d / \{2\pi - \arccos[\cos(\omega d/c) - (\omega C Z_c/2) \sin(\omega d/c)]\}$$

La vitesse de groupe est l'inverse de celle de la première branche

$$v_g^II = \left(\frac{\partial \beta_p^II}{\partial \omega} \right)^{-1} = - \frac{\sqrt{1 - [\cos(\omega d/c) - (\omega C Z_c/2) \sin(\omega d/c)]^2}}{(d/c + C Z_c/2) \sin(\omega d/c) + (\omega C Z_c d/2c) \cos(\omega d/c)} = -v_g^I$$

5.4.5 Il s'agit de faire les calculs complets, en introduisant les valeurs dans un programme de calcul [32], qui donne les résultats suivants.

Tableau S.7 Affaiblissement d'une ligne pupinisée.

Fréquence	α	α_p
1 kHz	0,067	0,0166
2 kHz	0,090	0,0156
3 kHz	0,105	0,0219
4 kHz	0,116	0,0199

5.4.6 Après quelques calculs, en développant le dénominateur de (5.20), et en introduisant le demi-argument $\gamma d/2$, on trouve que l'impédance périodique de la structure du problème 5.4.1 a la forme [13]

$$\underline{Y}_p = \underline{Y}_c \sqrt{\frac{\tan(\omega d/2c) - (Z_c/2\omega L)}{1 + (Z_c/2\omega L)\tan(\omega d/2c)}}$$

5.4.7 On pose $N = 1$ dans l'équation (5.22), en vue de retrouver la matrice de chaîne d'une seule cellule, donnée par (5.5). Pour les termes diagonaux, la vérification est immédiate, et on obtient

$$\underline{A} = \underline{D} = \cosh(\underline{\gamma}_p d) = \cosh(\underline{\gamma} d) + \frac{Z_c \underline{Y}_d}{2} \sinh(\underline{\gamma} d)$$

Pour l'un des termes hors diagonale, la vérification est également immédiate

$$\underline{C} = \underline{Y}_p \sinh(\underline{\gamma}_p d) = \underline{Y}_c \left[\sinh(\underline{\gamma} d) + \frac{Z_c \underline{Y}_d}{2} (\cosh(\underline{\gamma} d) + 1) \right]$$

Le développement du dernier terme est moins évident. On trouve d'abord

$$\underline{B} = \underline{Z}_p \sinh(\underline{\gamma}_p d) = \frac{Z_c \sinh^2(\underline{\gamma} d)}{\left[\sinh(\underline{\gamma} d) + \frac{Z_c \underline{Y}_d}{2} (\cosh(\underline{\gamma} d) + 1) \right]}$$

Comme le déterminant de (5.5) est égal à l'unité, on obtient la relation suivante

$$\left[\sinh(\underline{\gamma} d) + \frac{Z_c \underline{Y}_d}{2} (\cosh(\underline{\gamma} d) + 1) \right] \left[\sinh(\underline{\gamma} d) + \frac{Z_c \underline{Y}_d}{2} (\cosh(\underline{\gamma} d) - 1) \right] = \sinh^2(\underline{\gamma} d)$$

et, par conséquent, on retrouve effectivement que

$$\underline{B} = \underline{Z}_c \left[\sinh(\underline{\gamma} d) + \frac{Z_c \underline{Y}_d}{2} (\cosh(\underline{\gamma} d) - 1) \right]$$

On a ainsi démontré que, en posant $N = 1$ dans la matrice de chaîne d'un ensemble de cellules, on retrouve bien la matrice de chaîne d'une seule cellule.

CHAPITRE 6

6.5.1 Pour que le couplage capacitif compense exactement le couplage inductif, et donc que les effets du couplage entre les deux lignes disparaissent, les deux exposants de propagation donnés par (6.16) doivent être ceux des lignes non couplées, c'est à dire que

$$\underline{\gamma}_1^2 = \underline{Z}'_1 \underline{Y}'_1 = \frac{\underline{D}_1 + \underline{D}_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\underline{D}_1 - \underline{D}_2}{2}\right)^2 + \underline{E}_1 \underline{E}_2} \quad [\text{m}^{-2}]$$

$$\underline{\gamma}_2^2 = \underline{Z}'_2 \underline{Y}'_2 = \frac{\underline{D}_1 + \underline{D}_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{\underline{D}_1 - \underline{D}_2}{2}\right)^2 + \underline{E}_1 \underline{E}_2} \quad [\text{m}^{-2}]$$

La somme de ces deux expressions donne, en utilisant (6.17)

$$\underline{Z}'_1 \underline{Y}'_1 + \underline{Z}'_2 \underline{Y}'_2 = \underline{D}_1 + \underline{D}_2 = \underline{Z}'_1 \underline{Y}'_1 + \underline{Z}'_2 \underline{Y}'_2 + (\underline{Z}'_1 + \underline{Z}'_2 - 2\underline{Z}'_m) \underline{Y}'_m$$

Il faut donc que le terme entre parenthèses soit nul, ou que \underline{Y}'_m soit nul. Cette deuxième solution n'est pas acceptable, elle équivaut à une absence de couplage capacitif entre les lignes, auquel cas il n'y aurait pas de compensation possible. La différence des deux expressions donne ensuite

$$\underline{Z}'_1 \underline{Y}'_1 - \underline{Z}'_2 \underline{Y}'_2 = \sqrt{(\underline{D}_1 - \underline{D}_2)^2 + 4\underline{E}_1 \underline{E}_2} \quad [\text{m}^{-2}]$$

On peut introduire les termes définis dans (6.17), et développer, ce qui donne la condition recherchée.

6.5.2 Pour qu'on ait $\underline{\gamma}_1 = \underline{\gamma}_2$, il faut que la racine carrée interne de (6.16) soit nulle, et donc que

$$(\underline{D}_1 - \underline{D}_2)^2 + 4\underline{E}_1 \underline{E}_2 = 0$$

Ici aussi, on obtient la condition recherchée en introduisant les termes de (6.17) et en développant la relation.

6.5.3 Pour deux modes sur deux lignes téléphoniques identiques, couplées capacitivement, dans le cas $\omega L' \ll R'$, on trouve

$$\underline{D}_1 = \underline{D}_2 = \underline{D} = j\omega R'(C' + C'_m) \quad \text{et} \quad \underline{E}_1 = \underline{E}_2 = \underline{E} = -j\omega R' C'_m$$

On introduit ces valeurs dans (6.16), et on obtient alors les exposants de propagation pour les deux modes

$$\underline{\gamma}_1 = \sqrt{\underline{D} + \underline{E}} = \sqrt{j\omega R' C'} \quad \text{et} \quad \underline{\gamma}_2 = \sqrt{\underline{D} - \underline{E}} = \sqrt{j\omega R'(C' + 2C'_m)}$$

Le signal sur la ligne 2 est 30 dB en dessous du signal injecté à l'extrémité de la ligne 1 lorsque la condition suivante est satisfaite (6.33)

$$\left| e^{-0,5(\underline{\gamma}_1 + \underline{\gamma}_2)z} \sinh \frac{\underline{\gamma}_1 - \underline{\gamma}_2}{2} z \right| = 0,0316 \text{ V}$$

6.5.4 Pour trouver quelle longueur de ligne couplée il faut pour réaliser un coupleur de 20 dB, on considère la relation (6.27), on suppose qu'on a deux lignes identiques et sans pertes, auquel cas la condition qu'il s'agit de satisfaire est

$$\sin \Delta\beta d = \sin(2\pi d/\Delta\lambda) = 0,1$$

d'où l'on tire la longueur

$$d = \frac{\Delta\lambda}{2\pi} \arcsin(0,1) = 0,0159 \Delta\lambda$$

6.5.5 Sur une ligne couplée sans pertes, les facteurs D et F sont tous réels. Pour que les exposants de propagation aient une partie réelle, il faut que le terme sous la racine interne de (6.16) soit négatif, ce qui ne peut se produire que si l'on a

$$(D_1 - D_2)^2 + 4F_1F_2 < 0 \quad \text{ce qui implique que} \quad F_1F_2 < 0$$

Il faut pour cela que F_1 et F_2 soient de signe opposé. Les signaux décroissent sur les deux lignes, ce qui signifie qu'il y a un transfert de puissance d'une ligne à l'autre en présence d'une onde inverse (§ 3.4.5).

CHAPITRE 7

7.5.1 On cherche le vecteur-phaseur électrique qui correspond au champ suivant

$$\mathbf{E}(t) = 32\mathbf{e}_x \sin(\omega t + \pi/8) + 27\mathbf{e}_y \sin(\omega t + 3\pi/8) \quad [\text{V/m}]$$

Comme le cosinus est la partie réelle de l'exponentielle complexe, il est intéressant de transformer la formule ci-dessus, en faisant usage de la relation $\sin t = \cos(t - \pi/2)$. On obtient ainsi une relation qui ne contient que des cosinus, et le passage à la notation complexe est alors immédiat

$$\mathbf{E}(t) = 32\mathbf{e}_x \cos(\omega t - 3\pi/8) + 27\mathbf{e}_y \cos(\omega t - \pi/8) = \text{Re} \left[\left(32\mathbf{e}_x e^{-j3\pi/8} + 27\mathbf{e}_y e^{-j\pi/8} \right) e^{j\omega t} \right]$$

d'où l'on tire le vecteur-phaseur (après avoir divisé l'expression par $\sqrt{2}$)

$$\underline{\mathbf{E}} = 22,63\mathbf{e}_x e^{-j3\pi/8} + 19,09\mathbf{e}_y e^{-j\pi/8}$$

Les parties réelle et imaginaire du vecteur-phaseur valent donc

$$\text{Re}[\underline{\mathbf{E}}] = 22,63\mathbf{e}_x \cos(3\pi/8) + 19,09\mathbf{e}_y \cos(\pi/8) = 8,66\mathbf{e}_x + 17,64\mathbf{e}_y$$

$$\text{Im}[\underline{\mathbf{E}}] = -22,63\mathbf{e}_x \sin(3\pi/8) - 19,09\mathbf{e}_y \sin(\pi/8) = -20,91\mathbf{e}_x - 7,31\mathbf{e}_y$$

Pour vérifier si les relations (7.5) et (7.6) sont effectivement satisfaites, on détermine le champ aux temps $t = 0$ et $t = T/4$, que l'on compare aux parties réelle et imaginaire du vecteur-phaseur

$$\mathbf{E}(0) = 32\mathbf{e}_x \sin(\pi/8) + 27\mathbf{e}_y \sin(3\pi/8) = 12,246\mathbf{e}_x + 24,95\mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{E}(T/4) = 32\mathbf{e}_x \sin(\pi/2 + \pi/8) + 27\mathbf{e}_y \sin(\pi/2 + 3\pi/8) = 29,56\mathbf{e}_x + 10,33\mathbf{e}_y$$

7.5.2 Dans quelles situations les produits scalaires et vectoriels d'un vecteur-phaseur électrique (non nul) par lui-même et par son conjugué complexe s'annulent-ils ? Quelles sont les conséquences pour le champ électrique ?

$$(a) \quad \underline{E} \cdot \underline{E} = (\underline{E}_r + j\underline{E}_i) \cdot (\underline{E}_r + j\underline{E}_i) = E_r^2 - E_i^2 + 2j\underline{E}_r \cdot \underline{E}_i = 0$$

On a ici $E_r = E_i$ et $\underline{E}_r \cdot \underline{E}_i = 0$. La partie réelle est égale à la partie imaginaire, et les deux sont perpendiculaires: on a donc une **polarisation circulaire**.

$$(b) \quad \underline{E} \cdot \underline{E}^* = (\underline{E}_r + j\underline{E}_i) \cdot (\underline{E}_r - j\underline{E}_i) = E_r^2 + E_i^2 = 0$$

Si la somme de deux carrés est nulle, chaque terme est nul. On a donc $E_r = E_i = 0$, ce qui est incompatible avec une partie de la donnée: $\underline{E} \neq 0$.

$$(c) \quad \underline{E} \times \underline{E} = (\underline{E}_r + j\underline{E}_i) \times (\underline{E}_r + j\underline{E}_i) = \underline{E}_r \times \underline{E}_r + \underline{E}_i \times \underline{E}_i + j(\underline{E}_r \times \underline{E}_i + \underline{E}_i \times \underline{E}_r) \equiv 0$$

Le produit vectoriel d'un vecteur par lui-même est toujours nul. L'inversion de l'ordre dans le produit vectoriel a pour résultat de changer le signe. La relation est identiquement nulle, et donc toujours satisfaite quel que soit le vecteur-phaseur \underline{E} . Elle ne donne de ce fait aucune information sur ses propriétés.

$$(d) \quad \underline{E} \times \underline{E}^* = (\underline{E}_r + j\underline{E}_i) \times (\underline{E}_r - j\underline{E}_i) = -2j\underline{E}_r \times \underline{E}_i = 0$$

Cette relation est satisfaite si la partie réelle et la partie imaginaire du vecteur-phaseur sont parallèles, ou si l'une des deux est nulle. Ces deux possibilités correspondent à une **polarisation linéaire**.

7.5.3 On a un champ $\mathbf{E}(t, z) = \sqrt{2} E_0 [\mathbf{e}_x \sin(\omega t - \beta z + \pi/6) + \mathbf{e}_y \sin(\omega t - \beta z)]$, que l'on demande d'étudier.

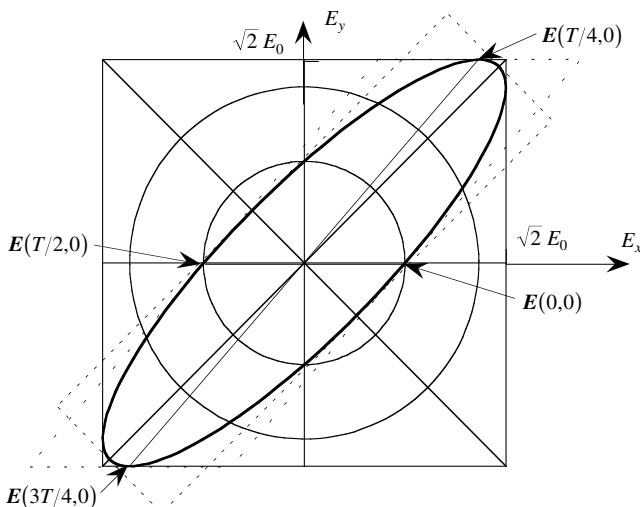


Fig. S.8 Étude de la polarisation du champ électrique.

(a) On considère en premier lieu le champ dans le plan $z = 0$. Les composantes selon x et selon y ne sont pas en phase: la polarisation n'est pas linéaire. Elles ont les deux la même amplitude, mais ne sont pas en quadrature: la polarisation n'est pas circulaire. On a une ellipse inscrite dans un carré (fig. S.8). Le champ en $t = 0$ et celui en $t = T/4$ sont deux demi-axes conjugués, à l'aide desquels on construit un losange circonscrit à l'ellipse.

Lorsque le champ électrique est maximal, la dérivée de son module par rapport au temps s'annule. Il en va de même pour la dérivée de l'énergie électrique, donnée par

$$W_e = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = \frac{\epsilon_0}{2} (E_x^2 + E_y^2) = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 \left[\sin^2\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2(\omega t) \right] \quad [\text{VAs/m}^3]$$

On dérive cette expression par rapport au temps, et on annule la dérivée

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_e}{\partial t} &= \frac{\omega \epsilon_0}{2} E_0^2 \left[2 \sin\left(\omega t_m + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\omega t_m + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \sin(\omega t_m) \cos(\omega t_m) \right] \\ &= \frac{\omega \epsilon_0}{2} E_0^2 \left[\sin\left(2\omega t_m + \frac{\pi}{3}\right) + \sin(2\omega t_m) \right] = 0 \end{aligned}$$

On constate, après quelques calculs, que les axes principaux correspondent à

$$\sin\left(2\omega t_m + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \quad \text{ce qui entraîne que} \quad t_m = \frac{1}{2\omega} \left(-\frac{\pi}{6} + k\pi \right) = \frac{T}{4} \left(-\frac{1}{6} + k \right)$$

Le demi-petit axe correspond au cas $k = 0$

$$\mathbf{E}(t_m, z) = \sqrt{2} E_0 \left[\mathbf{e}_x \sin(-\pi/12 + \pi/6) + \mathbf{e}_y \sin(-\pi/12) \right] = 0,259 \sqrt{2} E_0 \left[\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y \right] = 0,366 E_0 \left[\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y \right]$$

Le demi-grand axe est similairement donné par $k = 1$

$$\mathbf{E}(t_M, z) = \sqrt{2} E_0 \left[\mathbf{e}_x \sin(5\pi/12 + \pi/6) + \mathbf{e}_y \sin(5\pi/12) \right] = 0,966 \sqrt{2} E_0 \left[\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \right] = 1,366 E_0 \left[\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \right]$$

Comme les deux composantes ont la même amplitude, les deux axes principaux de l'ellipse sont dirigées selon les deux diagonales du carré circonscrit (droites à $\pm 45^\circ$).

(b) On décompose le champ électrique en deux composantes linéairement polarisées:

- perpendiculaires l'une à l'autre dans l'espace – on peut choisir deux paires d'axes perpendiculaires quelconques, par exemple selon x et selon y

$$\mathbf{E}_1(t, z) = \sqrt{2} E_0 \mathbf{e}_x \sin(\omega t - \beta z + \pi/6) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_2(t, z) = \sqrt{2} E_0 \mathbf{e}_y \sin(\omega t - \beta z)$$

- déphasées de 90° dans le temps – on développe la somme de façon à obtenir un terme en $\cos(\omega t - \beta z)$ et un terme en $\sin(\omega t - \beta z)$

$$\mathbf{E}_1(t, z) = \sqrt{2} E_0 \mathbf{e}_x \cos(\omega t - \beta z) \sin(\pi/6) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_2(t, z) = \sqrt{2} E_0 \sin(\omega t - \beta z) \left[\mathbf{e}_x \cos(\pi/6) + \mathbf{e}_y \right]$$

on peut aussi changer l'origine du temps et obtenir des termes en $\sin(\omega t - \beta z + \psi)$ et en $\cos(\omega t - \beta z + \psi)$, où ψ est une phase quelconque;

- simultanément perpendiculaires et déphasées de 90° – cette condition n'est satisfaite qu'avec les demi-axes principaux de l'ellipse de polarisation

$$\mathbf{E}_1(t, z) = 1,366 E_0 \left[\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \right] \sin(\omega t - \beta z + \pi/12) \quad [\text{V/m}]$$

$$\mathbf{E}_2(t, z) = 0,366 E_0 \left[\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y \right] \cos(\omega t - \beta z + \pi/12) \quad [\text{V/m}]$$

(c) Quand une polarisation elliptique est représentée par la somme de deux polarisations circulaires, le demi-grand axe de l'ellipse est la somme des rayons des deux cercles, tandis que le demi-petit-axe est leur différence. On décompose donc le champ électrique en deux composantes circulairement polarisées en faisant la demi-somme et la demi-différence des expressions trouvées dans le cas précédent

$$\begin{aligned} E_1(t, z) &= 0,866E_0 \left\{ [e_x + e_y] \sin(\omega t - \beta z + \pi/12) + [e_x - e_y] \cos(\omega t - \beta z + \pi/12) \right\} \\ &= 1,225E_0 \left\{ e_x \sin(\omega t - \beta z + \pi/3) - e_y \cos(\omega t - \beta z - \pi/3) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2(t, z) &= 0,5E_0 \left\{ [e_x + e_y] \sin(\omega t - \beta z + \pi/12) - [e_x - e_y] \cos(\omega t - \beta z + \pi/12) \right\} \\ &= 0,707E_0 \left\{ -e_x \cos(\omega t - \beta z + \pi/3) + e_y \sin(\omega t - \beta z + \pi/3) \right\} \end{aligned}$$

(d) Le champ magnétique $\mathbf{H}(t, z)$ correspondant – dans le vide (ϵ_0, μ_0) – s'obtient avec une équation de Maxwell (1.13), qui donne ici

$$\nabla \times \mathbf{E}(t, z) = -e_x \frac{\partial E_y}{\partial z} + e_y \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}(t, z)}{\partial t} = \sqrt{2} \beta E_0 \left[e_x \cos(\omega t - \beta z) - e_y \cos\left(\omega t - \beta z + \frac{\pi}{6}\right) \right]$$

On en tire la dérivée par rapport au temps de $\mathbf{H}(t, z)$, que l'on intègre

$$\mathbf{H}(t, z) = \frac{\sqrt{2} \beta E_0}{\omega \mu_0} \left[-e_x \sin(\omega t - \beta z) + e_y \sin(\omega t - \beta z + \pi/6) \right] \quad [\text{A/m}]$$

Lors de l'intégration par rapport au temps, on doit en principe ajouter une "constante" d'intégration, qui est plutôt ici une fonction arbitraire indépendante du temps. Comme une telle fonction (à fréquence nulle) ne présente aucun rapport avec l'onde électromagnétique que l'on étudie ici, on doit la poser égale à zéro.

Faisant usage d'une autre équation de Maxwell (1.13), on prend le rotationnel de $\mathbf{H}(t, z)$ et on le compare à la dérivée par rapport au temps de $\mathbf{E}(t, z)$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}(t, z) &= \frac{\sqrt{2} \beta^2 E_0}{\omega \mu_0} \left[e_x \cos(\omega t - \beta z + \pi/6) + e_y \cos(\omega t - \beta z) \right] = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(t, z)}{\partial t} \\ &= \sqrt{2} \omega \epsilon_0 E_0 \left[e_x \cos(\omega t - \beta z + \pi/6) + e_y \cos(\omega t - \beta z) \right] \end{aligned}$$

La seconde ligne est obtenue en dérivant le champ électrique (donnée du problème) par rapport au temps. On identifie les deux relations, ce qui donne $(\omega/\beta)^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0 = c_0^2$, où c_0 est la vitesse de la lumière dans le vide. On peut simplifier l'expression obtenue pour le champ magnétique et l'exprimer comme suit

$$\mathbf{H}(t, z) = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 \left[-e_x \sin(\omega t - \beta z) + e_y \sin(\omega t - \beta z + \pi/6) \right] \quad [\text{A/m}]$$

On constate que $\mathbf{E}(t, z) \cdot \mathbf{H}(t, z) = 0$, de sorte qu'en tout point et à n'importe quel moment le champ magnétique est perpendiculaire au champ électrique. Leurs amplitudes sont liées par l'impédance caractéristique du vide $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \cong 120\pi = 376,6 \Omega$.

(e) Du fait que le champ magnétique est perpendiculaire en tout temps au champ électrique, l'extrémité de son vecteur décrit aussi une ellipse, qui est perpendiculaire – dans le plan x - y – à celle obtenue pour le champ électrique.

(f) Pour déterminer les vecteurs-phaseurs, on voit tout de suite – ou presque – que

$$\sin(\omega t - \beta z + \pi/6) = \operatorname{Re}\left[-j e^{j(\omega t - \beta z + \pi/6)}\right] = \operatorname{Re}\left[e^{j(\omega t - \beta z + \pi/6 - \pi/2)}\right]$$

On peut donc écrire

$$\underline{\mathbf{E}}(z) = E_0 e^{-j\beta z} \left[\mathbf{e}_x e^{-j\pi/3} + \mathbf{e}_y e^{-j\pi/2} \right] \quad [\text{V/m}]$$

$$\underline{\mathbf{H}}(z) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 e^{-j\beta z} \left[-\mathbf{e}_x e^{-j\pi/2} + \mathbf{e}_y e^{-j\pi/3} \right] \quad [\text{A/m}]$$

7.5.4 On cherche le vecteur-phaseur électrique associé à $\underline{\mathbf{H}}(z) = \mathbf{e}_x \sinh(\underline{\gamma}z)$. Pour cela, on utilise une équation rotationnelle de Maxwell (7.23)

$$\underline{\mathbf{E}}(z) = \frac{1}{j\omega\underline{\epsilon}} \nabla \times \underline{\mathbf{H}}(z) = \frac{1}{j\omega\underline{\epsilon}} \nabla \times \mathbf{e}_x \sinh(\underline{\gamma}z) = \frac{1}{j\omega\underline{\epsilon}} \mathbf{e}_y \frac{\partial \sinh(\underline{\gamma}z)}{\partial z} = \frac{\underline{\gamma}}{j\omega\underline{\epsilon}} \mathbf{e}_y \cosh(\underline{\gamma}z)$$

L'autre équation rotationnelle permet de retrouver $\underline{\mathbf{H}}$

$$\underline{\mathbf{H}}(z) = -\frac{1}{j\omega\underline{\mu}} \nabla \times \underline{\mathbf{E}}(z) = -\frac{\underline{\gamma}}{\omega^2 \underline{\epsilon} \underline{\mu}} \nabla \times \mathbf{e}_y \cosh(\underline{\gamma}z) = -\frac{\underline{\gamma}^2}{\omega^2 \underline{\epsilon} \underline{\mu}} \mathbf{e}_x \sinh(\underline{\gamma}z)$$

En identifiant, on trouve que (pour 3,2 MHz, $\underline{\epsilon}_r = 73 - j14$, $\underline{\mu}_r = 1,3 - j0,2$)

$$\underline{\gamma}^2 = -\omega^2 \underline{\epsilon} \underline{\mu} = -\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 (73 - j14)(1,3 - j0,2) = -0,4135 + j0,1473$$

d'où l'on tire, en prenant la racine, $\underline{\gamma} = 0,1127 + j0,6528$. Le quotient imaginaire qui intervient de la relation pour le champ électrique peut aussi être développé, comme suit

$$\frac{\underline{\gamma}}{j\omega\underline{\epsilon}} = \frac{j\omega\sqrt{\underline{\epsilon}\underline{\mu}}}{j\omega\underline{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\underline{\mu}}{\underline{\epsilon}}} = \sqrt{\frac{\underline{\mu}_0(1,3 - j0,2)}{\epsilon_0(73 - j14)}} = 120\pi \sqrt{\frac{1,3 - j0,2}{73 - j14}} = \underline{Z}_c \quad [\Omega]$$

C'est l'impédance caractéristique du milieu. Le vecteur-phaseur de Poynting est alors donné par

$$\underline{\mathbf{S}}(z) = \underline{\mathbf{E}}(z) \times \underline{\mathbf{H}}^*(z) = \underline{Z}_c \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x \cosh(\underline{\gamma}z) \sinh(\underline{\gamma}z) = -\frac{\underline{Z}_c}{2} \mathbf{e}_z \sinh(2\underline{\gamma}z)$$

On vérifie encore si le théorème de Poynting complexe (7.27) est satisfait par les grandeurs obtenues

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{\mathbf{S}}(z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{\underline{Z}_c}{2} \sinh(2\underline{\gamma}z) \right] = -\underline{\gamma} \underline{Z}_c \cosh(2\underline{\gamma}z) = j\omega\underline{\mu} \cosh(2\underline{\gamma}z) \\ &= j\omega \left[\underline{\epsilon}^* |\underline{\mathbf{E}}(z)|^2 - \underline{\mu} |\underline{\mathbf{H}}(z)|^2 \right] = j\omega \left[\underline{\epsilon}^* \left| \frac{\underline{\gamma}}{j\omega\underline{\epsilon}} \cosh(\underline{\gamma}z) \right|^2 - \underline{\mu} |\sinh(\underline{\gamma}z)|^2 \right] \end{aligned}$$

La condition à satisfaire est

$$\underline{\mu} \cosh(2\underline{\gamma}z) = \underline{\epsilon}^* \left| \frac{\underline{\gamma}}{j\omega\underline{\epsilon}} \cosh(\underline{\gamma}z) \right|^2 - \underline{\mu} |\sinh(\underline{\gamma}z)|^2$$

CHAPITRE 8

8.6.1 L'exposant de propagation d'une onde plane uniforme dans un diélectrique sans pertes est imaginaire (8.13). Pour $\epsilon_r = 3,25$ et une fréquence de 11,4 THz, on obtient

$$\underline{\gamma} = j\beta = j\omega\sqrt{\epsilon\mu} = j\frac{2\pi \cdot 11,4 \cdot 10^{12}}{3 \cdot 10^8} \sqrt{3,25} = j0,43 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$$

L'impédance d'onde est donnée par (8.15)

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}} \cong 120\pi \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} = 209,12 \Omega$$

8.6.2 Dans un milieu diélectrique sans pertes, une onde plane non uniforme ne peut exister que si la partie réelle de l'exposant de propagation est perpendiculaire à sa partie imaginaire (8.11). Lorsque $\alpha = 0,4 \beta$, on obtient

$$\alpha^2 - \beta^2 = \beta^2(0,16 - 1) = -\omega^2 \epsilon \mu$$

Résolvant pour β , on obtient

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{0,84}} \underline{\gamma} = \frac{2\pi \cdot 11,4 \cdot 10^{12}}{3 \cdot 10^8} \sqrt{\frac{3,25}{0,84}} = 0,469 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$$

$$\alpha = 0,4\beta = 0,188 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$$

8.6.3 On trouve l'affaiblissement et le déphasage linéique pour une onde plane non uniforme avec (8.26). Dans un milieu dissipatif, avec $\epsilon_r = 4 - j 0,2$ et $\mu_r = 2 - j0,2$, et un angle $\zeta = 42^\circ$ entre les deux vecteurs, on obtient

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\omega}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(4 \cdot 2 - 0,2 \cdot 0,2)^2 + \left(\frac{4 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 2}{\cos 42^\circ}\right)^2} + 4 \cdot 2 - 0,2 \cdot 0,2} \\ &= \frac{\omega}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{63,36 + 2,61 + 7,96}} = 2,836 \omega \text{ m}^{-1} \\ \alpha &= \frac{\omega}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{63,36 + 2,61} - 7,96} = 0,285 \omega \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

8.6.4 Une onde plane uniforme est entièrement réfléchiée sur la surface entre des milieux de permittivités 1,5 et 1 lorsque l'angle d'incidence vaut (8.73)

$$\theta_{in} > \arcsin n = \arcsin \sqrt{1/1,5} = 54,7^\circ$$

L'affaiblissement dans le second milieu est donné par

$$\alpha_{z2} = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\epsilon_1} \sqrt{\sin^2 \theta_{in} - \epsilon_2 / \epsilon_1} = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{1,5} \sqrt{\sin^2 \theta_{in} - 0,666...} \text{ Np/m}$$

8.6.5 Une onde spécifiée par $\underline{E}(\mathbf{r}) = E_0 \mathbf{e}_x e^{-j\beta(y+z)}$ tombe sur le plan $z = 0$ qui sépare deux milieux diélectriques non magnétiques sans pertes ayant des permittivités $\epsilon_1 = 2,5\epsilon_0$ (pour $z < 0$) et $\epsilon_2 = 1,5\epsilon_0$ (pour $z > 0$).

(a) Comme le champ est toujours dirigé dans une même direction, selon la coordonnée x , la polarisation intrinsèque de l'onde ne peut être que *linéaire* – il n'est même pas nécessaire de faire des calculs pour le voir. Le plan d'incidence contient la normale à la surface de séparation, soit \mathbf{e}_z et le phaseur de propagation, que l'on obtient en considérant l'exposant népérien dans la formulation du champ

$$\underline{\eta} \cdot \mathbf{r} = \underline{\gamma}_x x + \underline{\gamma}_y y + \underline{\gamma}_z z = j\beta(y+z), \text{ d'où l'on tire } \underline{\eta} = j\beta(\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z)$$

Le plan d'incidence est donc le plan y - z . Le champ électrique, dirigé selon x , lui est toujours perpendiculaire, on a donc une polarisation perpendiculaire (fig. S.9).

(b) La direction de propagation de l'onde incidente est ici selon $\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z$. L'angle d'incidence est donc 45° . L'angle de réflexion, selon la loi de Snell, vaut également 45° . On trouve l'angle de transmission au moyen de la relation

$$\theta_\beta = \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \theta_{\text{in}}\right) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1,5}{2,5}} \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arcsin(0,9129) = 65,91^\circ$$

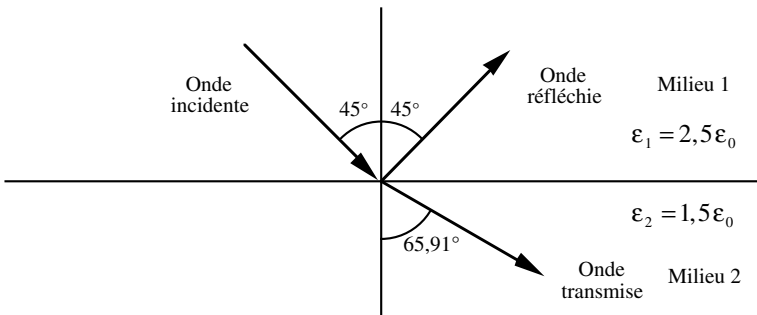


Fig. S.9 Transmission et réflexion entre deux milieux diélectriques.

(c) On trouve le facteur de réflexion avec la relation pour la polarisation perpendiculaire. Comme les deux milieux sont non magnétiques, les μ se simplifient et on obtient

$$\rho_\perp = \frac{\cos \theta_{\text{in}} - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_{\text{in}}}}{\cos \theta_{\text{in}} + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_{\text{in}}}} = \frac{0,7071 - \sqrt{0,6 - 0,5}}{0,7071 + \sqrt{0,6 - 0,5}} = 0,382$$

Le facteur de transmission est alors $\tau_\perp = 1 + \rho_\perp = 1,382$. Il est plus grand que 1, ce qui, pour une polarisation perpendiculaire, est toujours le cas quand $n < 1$. On note aussi que l'onde incidente provient du milieu de plus grande permittivité et que, si l'incidence avait été légèrement plus rasante, on aurait eu une réflexion totale.

8.6.6 La polarisation parallèle est entièrement transmise: on se trouve à l'angle de Brewster, avec une incidence de 22° (8.75). La permittivité du sol est alors donnée par

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 \cotan^2 \theta_{\text{in}} = 6,126$$

8.6.7 Pour avoir une transmission totale entre l'air et un milieu diélectrique, il faut annuler le facteur de réflexion dans la relation (8.63)

$$\sqrt{\underline{n}^2 - \sin^2 \theta_{in}} = \underline{n}^2 \cos \theta_{in} \quad \text{ou, en prenant le carré,} \quad \underline{n}^2 - \sin^2 \theta_{in} = \underline{n}^4 \cos^2 \theta_{in}$$

Dans le cas d'une permittivité relative complexe $2 - j0,1$, la partie réelle et la partie imaginaire de la relation donnent les deux conditions suivantes

$$\cos \theta_{in} = 0,578 \quad \text{et} \quad \cos \theta_{in} = 0,707$$

Ces deux relations sont manifestement incompatibles. On n'obtient une réflexion totale que si l'on peut éliminer une relation, c'est-à-dire si le matériau n'a pas de pertes.

Comme la partie imaginaire de la permittivité est très petite, on peut faire une approximation avec un développement limité, et écrire l'approximation suivante de (8.63)

$$\underline{\rho}_{//} \cong \frac{\sqrt{\epsilon'_r - \sin^2 \theta_{in}} - (\epsilon'_r - j\epsilon''_r) \cos \theta_{in} - j\epsilon''_r / 2\sqrt{\epsilon'_r - \sin^2 \theta_{in}}}{\sqrt{\epsilon'_r - \sin^2 \theta_{in}} + \epsilon'_r \cos \theta_{in}}$$

Le minimum de réflexion apparaît, approximativement, lorsque la partie réelle du numérateur s'annule, c'est-à-dire lorsque

$$\sqrt{\epsilon'_r - \sin^2 \theta_{in}} - \epsilon'_r \cos \theta_{in} = 0 \quad \text{et donc} \quad \theta_{in} \cong \arctan \sqrt{\epsilon'_r} = \arctan \sqrt{2} = 54,74^\circ$$

Le facteur de réflexion minimum vaut alors

$$\underline{\rho}_{//} \cong j \frac{\epsilon''_r}{2\epsilon'_r} \frac{\cos \theta_{in} - 1/2 \cos \theta_{in}}{\cos \theta_{in}} = j \frac{\epsilon''_r}{2\epsilon'_r} \left(1 - \frac{1}{2 \cos^2 \theta_{in}} \right) = j \frac{0,1}{4} \left(1 - \frac{1}{0,666} \right) = -j0,0125$$

Le facteur de transmission maximum vaut alors

$$\underline{\tau} = 1 - j0,0125$$

On pourrait également, bien entendu, chercher le module du facteur de transmission, puis annuler sa dérivée pour trouver la valeur exacte. Cela donne toutefois lieu à des calculs inutilement compliqués quand il s'agit de déterminer l'effet d'une petite variation.

8.6.8 Une onde électromagnétique, spécifiée par $\underline{E}(\mathbf{r}) = E_0 \mathbf{e}_x e^{-j\beta z}$, tombe sur le plan $z = 0$ entre de l'air ($z < 0$) et une plaque d'aluminium ($z > 0$) avec $\sigma = 38\,160\,000 \text{ S/m}$ ($\sigma \gg \omega\epsilon$ mais $\neq \infty$). Le signal a une fréquence de 25 MHz.

On a ici une incidence normale: il n'est alors pas possible de définir un plan d'incidence, et de ce fait les polarisations perpendiculaires et parallèles sont confondues – on doit obtenir les mêmes résultats pour les deux.

(a) L'indice de réfraction complexe air-métal est donné par

$$\underline{n}^2 \cong \frac{-j\sigma}{\omega\epsilon_0} \gg 1$$

ce qui donne, pour de l'aluminium à 25 MHz,

$$\underline{n}^2 \cong \frac{-j38,16 \cdot 10^6}{2\pi \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}} = -j2,744 \cdot 10^{10} \quad \text{et donc} \quad \underline{n} \cong (1 - j) 1,17 \cdot 10^5$$

(b) Les facteurs de réflexion et de transmission sont donnés respectivement par

$$\rho = \frac{1-n}{1+n} = \frac{\frac{1}{n}-1}{\frac{1}{n}+1} \cong -1 + \frac{2}{n} = -1 + (1+j) 4,27 \cdot 10^{-6} \quad \tau = \frac{2}{1+n} \cong \frac{2}{n} = (1+j) 4,27 \cdot 10^{-6}$$

(c) Le champ électrique vaut alors

$$\text{dans l'air } \underline{E} = E_0 \underline{e}_x \left[e^{-j\beta z} - \left(1 - \frac{2}{n}\right) e^{j\beta z} \right] = E_0 \underline{e}_x \left[-2j \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sin \beta z + \frac{2}{n} \cos \beta z \right]$$

$$\text{dans le métal } \underline{E} = E_0 \frac{2}{n} \underline{e}_x e^{-(\alpha_m + j\beta_m)z} \quad \text{avec } \alpha_m + j\beta_m = \sqrt{j\omega\mu_0\sigma}$$

Pour chacune des trois ondes, le champ magnétique est donné par la relation

$$\underline{H} = \frac{\underline{\gamma} \times \underline{E}}{j\omega\mu_0}$$

Cette relation doit être appliquée séparément à chaque onde, du fait que pour chacune $\underline{\gamma}$ a une valeur différente. Après quelques calculs, on trouve le champ magnétique

$$\text{dans l'air } \underline{H} = \frac{E_0}{Z_0} \underline{e}_y \left[e^{-j\beta z} + \left(1 - \frac{2}{n}\right) e^{j\beta z} \right] = \frac{E_0}{Z_0} \underline{e}_y \left[2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cos \beta z - \frac{2j}{n} \sin \beta z \right]$$

$$\text{dans le métal } \underline{H} = \frac{E_0}{Z_m} \frac{2}{n} \underline{e}_y e^{-(\alpha_m + j\beta_m)z}$$

$$\text{avec } Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cong 120 \pi \Omega \quad \text{et } Z_m = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\sigma}} = \frac{Z_0}{n} = (1+j) 2,61 \cdot 10^{-4} \Omega$$

On peut vérifier que le champ magnétique est approximativement continu en $z = 0$, au terme $1/n$ près (ce terme est très petit, en général négligeable).

(d) Le vecteur de Poynting est obtenu par $\underline{S}(\mathbf{r}) = \underline{E}(\mathbf{r}) \times \underline{H}^*(\mathbf{r})$ qui donne, dans l'air

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \frac{E_0^2}{Z_0} \underline{e}_z \left[e^{-j\beta z} - \left(1 - \frac{2}{n}\right) e^{j\beta z} \right] \left[e^{j\beta z} + \left(1 - \frac{2}{n^*}\right) e^{-j\beta z} \right] \\ &= \frac{E_0^2}{Z_0} \underline{e}_z \left[-2j \sin 2\beta z + \frac{4}{|n|^2} \left((1 + j \sin 2\beta z) \operatorname{Re}(n) - j \cos 2\beta z \operatorname{Im}(n) - 1 \right) \right] \end{aligned}$$

et dans le métal

$$\underline{S} = \frac{E_0^2}{Z_m^*} \frac{4}{|n|^2} \underline{e}_z e^{-2\alpha_m z}$$

(e) La densité de courant dans le conducteur est proportionnelle au champ électrique

$$\underline{J} = \sigma \underline{E} = E_0 \frac{2\sigma}{n} \underline{e}_x e^{-(\alpha_m + j\beta_m)z}$$

Dans le métal, la décroissance du courant est rapide, de sorte que celui-ci est surtout concentré après de la surface. On détermine le courant qui circule sur une tranche de conducteur d'une largeur unitaire (1 mètre) en intégrant sur toute l'épaisseur du métal

$$\underline{I} = \int_0^{\infty} \underline{J} dz = \int_0^{\infty} E_0 \frac{2\sigma}{n} e_x e^{-(\alpha_m + j\beta_m)z} dz = \frac{E_0}{\alpha_m + j\beta_m} \frac{2\sigma}{n} e_x = 2 \frac{E_0}{Z_0} e_x$$

Dans le cas limite du conducteur électrique parfait (cep), $n \rightarrow \infty$, et ce courant devient le courant de surface. Son amplitude est exactement celle du champ magnétique total au bord du conducteur, en $z = 0$, du côté air. Ceci correspond à la condition limite, du fait que pour des signaux variant dans le temps le champ magnétique est nul à l'intérieur d'un conducteur électrique parfait.

8.6.9 Les fréquences de coupure d'un guide d'ondes de section rectangulaire sont données par la relation (8.89). Pour une largeur de 3,5 cm \times 6,5 cm, rempli d'un matériau diélectrique ayant une permittivité $\epsilon = 3\epsilon_0$, on trouve

$$f_{mn} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} = \frac{3 \cdot 10^8}{2\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{m}{0,065}\right)^2 + \left(\frac{n}{0,035}\right)^2} = \sqrt{(m \cdot 1,332)^2 + (n \cdot 2,474)^2} \cdot 10^9 \quad [\text{Hz}]$$

où m et n sont des nombres entiers, dont l'un peut être nul. Les fréquences de coupure est donnée par la séquence suivante

$$f_{10} = 1,332 \text{ GHz}, \quad f_{01} = 2,474 \text{ GHz}, \quad f_{11} = 2,810 \text{ GHz}, \text{ etc.}$$

CHAPITRE 9

9.7.1 La puissance totale rayonnée par une antenne dipôle est donnée par (9.22). Avec les valeurs indiquées – $d = 10$ m, $I = 5$ A, $f = 6$ MHz – on obtient

$$P_T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{|I|^2}{3} \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 = 2\pi \cdot 120\pi \frac{5^2}{3} \left(\frac{10}{50}\right)^2 = 790 \text{ W}$$

On vérifie d'abord qu'à 100 mètres du centre de l'antenne, la condition $r > 1,6 \lambda$ est bien satisfaite: c'est effectivement le cas, puisque la longueur d'onde est de 50 m. Les valeurs maximales des champs sont données par (9.19) et par (9.20)

$$\left| \underline{H}_\phi(r, 90^\circ) \right| \cong \frac{\beta_0 I d}{4\pi r} = \frac{2\pi f}{c_0} \frac{I d}{4\pi r} = \frac{6 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10}{3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 100} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ A/m}$$

$$\left| \underline{E}_\theta(r, 90^\circ) \right| \cong 120\pi \left| \underline{H}_\phi(r, 90^\circ) \right| \cong 120\pi \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 1,88 \text{ V/m}$$

On vérifie encore que la condition plus générale (9.43) pour déterminer la limite de la région du champ lointain est aussi satisfaite

$$L = 100 \text{ m} \geq 2d^2/\lambda = 2 \cdot 10^2 / 50 = 4 \text{ m}$$

9.7.2 La densité de puissance maximale produite par une antenne est donnée par (9.37). On trouve ainsi que, à 10 km d'une antenne dont la directivité est de 34 dB et le rendement vaut 0,85, à laquelle on fournit 10 kW, la densité de puissance maximale est de

$$P_{\max} = \frac{P_f}{4\pi r^2} \eta D_{\max} = \frac{10^4}{4\pi 10^8} 0,85 \cdot 2512 = 0,017 \text{ W/m}^2$$

La surface de captation de cette antenne, à une fréquence de 3 GHz, est alors (9.41)

$$A_{\max} = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_{\max} = \frac{c_0^2}{4\pi f^2} \eta D_{\max} = \frac{9 \cdot 10^{16}}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^{18}} 0,85 \cdot 2512 = 1,7 \text{ m}^2$$

9.7.3 Le 25 août 1989, la sonde spatiale Voyager 2 a "frôlé" la planète Neptune, à une distance d'environ 4 500 000 000 km de la Terre. On évalue la puissance reçue (ordre de grandeur) avec les données suivantes: $P_f = 50 \text{ W}$, $G_e = 1000$, $G_r = 60 \text{ dB}$, $f = 4 \text{ GHz}$. Le gain en puissance de l'antenne de réception est $G_r = 10^6$, et la longueur d'onde $\lambda = c_0/f = 3 \cdot 10^8/4 \cdot 10^9 = 0,075 \text{ m}$. La formule de Friis (9.4.2) donne

$$P_r = P_f G_1 G_2 \left(\frac{\lambda}{4\pi L} \right)^2 = 50 \cdot 10^3 \cdot 10^6 \left(\frac{0,075}{4\pi \cdot 4,5 \cdot 10^{12}} \right)^2 = 8,795 \cdot 10^{-20} \text{ W}$$

Il s'agit d'une puissance extrêmement faible... – qui est détectable, puisqu'elle a été détectée: des images de haute définition de Neptune et de son satellite Triton ont été transmises et bien reçues lors de cette rencontre aux confins du système solaire.

9.7.4 L'angle minimal d'ouverture d'une antenne est donné par (9.31)

$$\psi = \frac{\lambda}{d} = \frac{c_0/f}{d} = \frac{0,00857}{1} = 0,00857 \text{ rad} = 0,49^\circ$$

La directivité maximale d'une antenne parabolique d'un mètre de diamètre à 35 GHz est donnée par (9.49)

$$D_{\max} = g \left(\frac{\pi d}{\lambda} \right)^2 = 0,82 \left(\frac{\pi}{0,00857} \right)^2 = 0,110 \cdot 10^6, \text{ qui correspond à } 50,4 \text{ dB}$$

La distance minimale à laquelle on peut mesurer l'antenne dans le champ lointain est de

$$L = \frac{2d^2}{\lambda} = \frac{2}{0,00857} = 233,4 \text{ m}$$

9.7.5 Les gains des trois antennes sont déterminés par (9.42) et (9.44). On constate ici que les antennes A et B ont le même gain. Introduisant les valeurs données, on obtient les trois produits des gains

$$G_A G_B = \frac{P_r}{P_f} \left(\frac{4\pi L}{\lambda} \right)^2 = \frac{0,851}{10} \left(\frac{4\pi \cdot 3}{0,2} \right)^2 = 3023,6$$

$$G_A G_C = G_B G_C = \frac{0,263}{10} \left(\frac{4\pi \cdot 3}{0,2} \right)^2 = 934,5$$

On obtient alors les gains individuels des trois antennes

$$G_A = G_B = \sqrt{3023,6} = 55 \quad \text{et} \quad G_A = G_B = \sqrt{\frac{934,5 \cdot 934,5}{3023,6}} = 17$$

Les surfaces de captation des trois antennes sont alors données par

$$A_A = A_B = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_A = \frac{0,04}{4\pi} 55 = 0,175 \text{ m}^2 \quad \text{et} \quad A_C = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_C = \frac{0,04}{4\pi} 17 = 0,054 \text{ m}^2$$

Si l'on sait *a priori* que deux antennes sont identiques, on peut économiser une mesure.

9.7.6 On cherche le diagramme de rayonnement de deux dipôles simples alignés selon l'axe z et séparés par une distance a (fig. S.10). Les deux courants ont la même amplitude, mais ils sont déphasés d'un angle ψ .

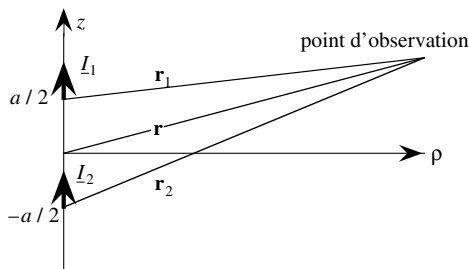


Fig. S.10 Deux dipôles superposés.

Cette structure possède une symétrie de révolution autour de l'axe z et, par conséquent, les champs ne dépendent pas de φ . Les angles $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv \varphi$ sont par ailleurs approximativement égaux, et il en va de même pour $\theta_1 \equiv \theta_2 \equiv \theta$. De plus, dans le dénominateur de l'expression pour le champ d'un dipôle, on peut encore poser $r_1 = r_2 = r$. Une évaluation plus précise est en revanche nécessaire pour les termes de phase de l'exposant – si l'on pose que les trois rayons sont identiques, on trouve le diagramme de rayonnement d'un seul dipôle, ce qui ne correspond manifestement pas aux observations. On doit donc poser

$$r_1 \equiv r - \frac{a}{2} \cos \theta \quad \text{et} \quad r_2 \equiv r + \frac{a}{2} \cos \theta$$

Le champ électrique produit par l'ensemble des deux dipôles est alors donné par

$$\underline{E}_\theta \equiv j120\pi I \frac{d\beta_0}{4\pi r} \sin \theta e^{-j\beta_0 r} \left[e^{+j\beta_0(a/2)\cos\theta} + e^{-j\beta_0(a/2)\cos\theta} e^{+j\psi} \right]$$

On peut écrire cette expression sous la forme suivante

$$\underline{E}_\theta \equiv j120\pi I \frac{d\beta_0}{4\pi r} \sin \theta e^{-j\beta_0 r + j\psi/2} \cos \left(\beta_0 \frac{a}{2} \cos \theta - \frac{\psi}{2} \right)$$

Le vecteur de Poynting est alors donné par

$$S_r \equiv 120\pi |I|^2 \left(\frac{d\beta_0}{4\pi r} \right)^2 \sin^2 \theta \left[1 + \cos(\beta_0 a \cos \theta - \psi) \right]$$

Pour déterminer la distribution du rayonnement, on a programmé la dépendance en élévation (angle θ) de cette relation, pour tracer la courbe avec un programme graphique (fig. S.11 et S.12).

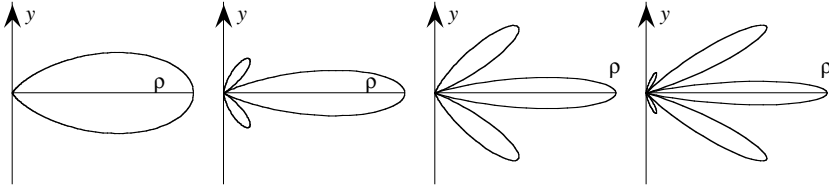


Fig. S.11 Diagramme de rayonnement de deux dipôles alimentés en phase ($\psi = 0$) avec $\beta a = \pi, 2\pi, 3\pi$ et 4π .

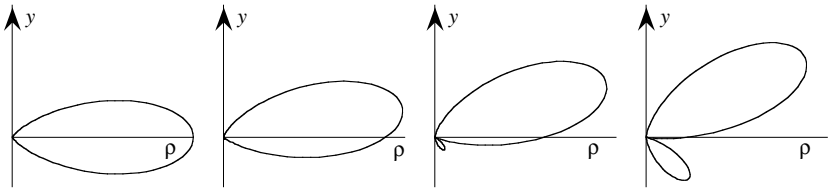


Fig. S.12 Diagramme de rayonnement de deux dipôles superposés pour $\beta a = \pi$, avec des dipôles déphasés de $\psi = 0, \pi/4, \pi/2$ et $3\pi/4$.

On trouve les directions dans lesquelles le rayonnement est maximal (minimal) en annulant la dérivée de S_r par rapport à θ , ce qui donne après quelques calculs

$$\sin\theta \left[2\cos\theta \{1 + \cos(\beta_0 a \cos\theta - \psi)\} + \beta_0 a \sin^2\theta \sin(\beta_0 a \cos\theta - \psi) \right] = 0$$

On a des extremums lorsque $\sin\theta = 0$ (minimum) et lorsque le terme entre crochets dans l'expression s'annule: lorsqu'on a deux antennes, la relation entre la direction de propagation maximale et le déphasage ψ n'est pas immédiate.

9.7.7 Une antenne cornet avec une ouverture carrée, de côtés $A = B = 6$ cm et qui fonctionne à 9 GHz a des angles d'ouverture donnés par (9.47) et (9.48)

$$\psi_E \cong \frac{56\lambda}{B} = \frac{56 \cdot 0,0333}{0,06} = 31,11^\circ \quad \text{et} \quad \psi_H \cong \frac{67\lambda}{B} = \frac{67 \cdot 0,0333}{0,06} = 37,22^\circ$$

9.7.8 Un réseau de 25 dipôles peut être considéré comme un "grand" réseau, et on utilise les relations de réseau infini pour déterminer le déphasage qu'il faut introduire entre les éléments rayonnants.

Pour obtenir un rayonnement maximal dans la direction $\varphi = 33^\circ$ lorsque la distance entre éléments est de $0,35\lambda$, on obtient le déphasage

$$\zeta = \beta_0 d \cos\varphi = (2\pi/\lambda) \cdot 0,35\lambda \cos 33^\circ = 1,844 \text{ rad}$$

CHAPITRE 10

10.8.1 On cherche si le champ électrostatique suivant dérive d'un potentiel

$$\mathbf{E}(x, y) = \frac{V_0}{a^2} [y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y] \quad [\text{V/m}]$$

- Si le champ est le gradient d'un potentiel, le potentiel doit satisfaire deux relations

$$\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} = -\frac{V_0}{a^2} y \quad \text{et} \quad \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} = -\frac{V_0}{a^2} x$$

En intégrant ces expressions, on trouve

$$V(x, y) = -V_0 \frac{xy}{a^2} + \text{cste}$$

Le potentiel existe, puisqu'on l'a trouvé.

- Si un potentiel existe, l'intégrale du champ électrique le long d'un contour entre deux points ne dépend pas du chemin d'intégration choisi. On intègre ici le champ le long des côtés d'un carré de côtés a .

Allant du point $(0, 0)$ au point (a, a) en suivant le côté de gauche, puis le côté supérieur du carré, on obtient $V_0(0 + a^2)/a^2 = V_0$. Quand suit le bas du carré, puis son côté droit, on obtient le même résultat.

La valeur de l'intégrale ne semble donc pas dépendre du chemin d'intégration, et rien n'empêche que le champ dérive d'un potentiel – il faudrait toutefois répéter l'exercice avec beaucoup plus de chemins différents pour acquérir une solide certitude.

On peut aussi déterminer si le potentiel existe en prenant le rotationnel du champ électrique et en constatant qu'il est nul.

10.8.2 Lorsqu'un potentiel satisfait l'équation de Laplace, sa valeur en un point est la moyenne des valeurs sur une sphère qui entoure le point. On vérifie cette propriété en intégrant un potentiel sur une sphère de rayon a centrée sur l'origine du système de coordonnées

$$\frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (V_0 + V_1 a \sin\theta \cos\varphi) a^2 \sin\theta d\varphi d\theta = V_0 \quad [\text{V}]$$

10.8.3 La capacité est définie par la relation (10.18). On l'applique ici à un condensateur sphérique, avec une électrode sphérique de rayon R_A à l'intérieur d'une cavité sphérique de rayon interne R_B . Le milieu entre les deux sphères est de l'air

$$C = \epsilon_0 \frac{\int_{S_{A'}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dA}{\int_A^B \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}} = \epsilon_0 \frac{\int_{S_{A'}} (K/R_A^2) dA}{\int_A^B (K/r^2) \cdot d\mathbf{l}} = \epsilon_0 \frac{(K/R_A^2) 4\pi R_A^2}{\frac{K}{R_A} - \frac{K}{R_B}} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}} \quad [\text{As/V}]$$

Si le rayon extérieur R_B tend vers l'infini, la capacité d'une sphère solitaire de rayon R_A est donnée par

$$C = 4\pi\epsilon_0 R_A \quad [\text{As/V}]$$

10.8.4 La réluctance magnétique d'un tube d'induction cylindrique d'un centimètre de rayon et long d'un mètre vaut

$$R_m = \frac{l}{\mu_0 S} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \pi(0,01)^2} = 2,533 \cdot 10^9 \text{ A/Vs}$$

La perméance est son inverse et vaut par conséquent

$$\Lambda = 1/R_m = 1/2,533 \cdot 10^9 = 0,395 \cdot 10^{-9} \text{ Vs/A}$$

10.8.5 La densité de courant $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ qui crée un potentiel vecteur spécifié est proportionnelle au rotationnel du rotationnel de $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ – dans le cas général. Toutefois, quand la divergence de $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ est nulle, $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ est proportionnel au laplacien de $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Dans le cas présent, on a donc

$$\mathbf{J}(\rho) = -\frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{A}(\rho) = -\frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \left[\mathbf{e}_z A_0 \left(\frac{\rho}{a} \right)^3 \right] = -\mathbf{e}_z \frac{A_0}{\mu_0 a^3} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \rho^3}{\partial \rho} \right) = -\mathbf{e}_z \frac{9A_0}{\mu_0 a^3} \rho$$

Il est important de vérifier, avant de procéder aux dérivations, si la divergence de $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ est nulle (jauge de Lorentz), car si ce n'est pas le cas, on ne peut pas prendre le laplacien et il faut évaluer le rotationnel du rotationnel.

10.8.6 Une spire circulaire ouverte, de 10 centimètres de rayon est placée dans un champ magnétique $H_0 \sin(2\pi f t)$ perpendiculaire au plan de la spire, avec $H_0 = 1 \text{ A/m}$ et $f = 50 \text{ Hz}$. La tension aux bornes de cette spire est donnée par (10.35)

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \int_{S_2} \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_1(t, \mathbf{r})}{\partial t} dA_2 = \pi a^2 \frac{\partial}{\partial t} \mu_0 H_0 \sin(2\pi f t) = \pi a^2 2\pi f \mu_0 H_0 \cos(2\pi f t) \\ &= \pi^2 \cdot 0,1^2 \cdot 2 \cdot 50 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cos(100\pi t) = 1,24 \cdot 10^{-6} \text{ V} \end{aligned}$$

CHAPITRE 11

11.8.1 La capacité linéique d'une ligne de transmission à plaques parallèles – larges de 20 mm et séparées par un diélectrique de 0,1 mm d'épaisseur qui a une permittivité relative de $\epsilon_r = 9$ – est donnée par

$$C' \cong \epsilon \frac{w}{a} = 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 9 \frac{0,02}{0,1 \cdot 10^{-3}} = 15,94 \cdot 10^{-9} \text{ F/m}$$

On a supposé que la largeur des plaques est nettement supérieure à l'épaisseur du diélectrique (ici 200), auquel cas les effets de bords peuvent être négligés.

11.8.2 Un condensateur formé d'un empilage de couches de diélectriques différents (fig. S.13), est équivalent à plusieurs condensateurs homogènes connectés en série car, du fait de la symétrie du problème, les plans de séparation sont des surfaces équipotentielles.

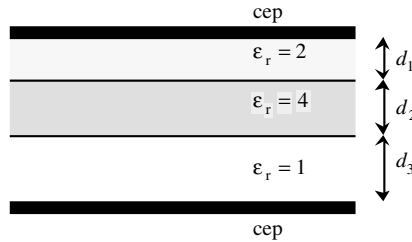


Fig. S.13 Condensateur plan inhomogène multicouches.

La largeur est donnée par $a = 1 \text{ mm}$, sa longueur par $b = 1 \text{ mm}$, et les épaisseurs des trois plaques sont $d_1 = 2 \mu\text{m}$, $d_2 = 5 \mu\text{m}$, $d_3 = 1 \mu\text{m}$. La capacité totale est donnée par

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} = \frac{1}{\frac{d_1}{\epsilon_1 \cdot a \cdot b} + \frac{d_2}{\epsilon_2 \cdot a \cdot b} + \frac{d_3}{\epsilon_3 \cdot a \cdot b}} = \frac{0,001 \cdot 0,001 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}}{\frac{2 \cdot 10^{-6}}{2} + \frac{5 \cdot 10^{-6}}{4} + \frac{10^{-6}}{1}}$$

$$= \frac{8,854 \cdot 10^{-12}}{1 + 1,25 + 1} = 2,724 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

11.8.3 On cherche le rayon interne du conducteur tubulaire R_B d'une ligne coaxiale, sachant que le conducteur interne R_A a un rayon de $0,5 \text{ mm}$, que le diélectrique a une permittivité relative $\epsilon_r = 4$ et que l'impédance caractéristique est de 75Ω . On fait usage pour cela de la relation (2.31), de laquelle on tire

$$R_B \cong R_A e^{\sqrt{\epsilon_r} Z_c / 60} = 0,5 e^{\sqrt{4} \cdot 75 / 60} = 6,09 \text{ mm}$$

11.8.4 Le potentiel à l'intérieur du rectangle est solution de l'équation de Laplace, en présence de conditions aux limites à dépendance linéaire des coordonnées. Parmi les solutions possibles, on choisit celles pour lesquelles $k_x = k_y = k_z = 0$.

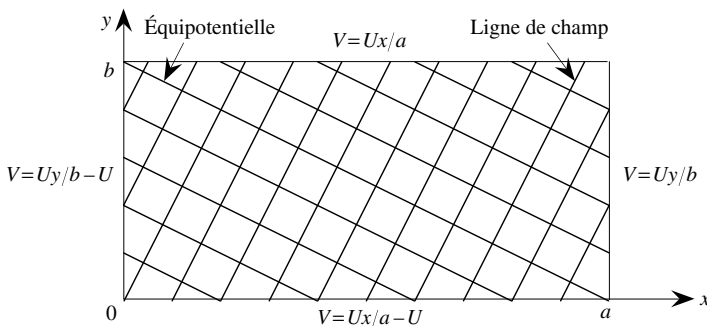


Fig. S.14 Problème rectangulaire avec des valeurs limites.

On traite un problème en deux dimensions, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de dépendance de z . La solution doit par conséquent avoir la forme générale suivante

$$V(x, y) = (A_1x + A_2)(B_1y + B_2)C_2 = A_1B_1C_2xy + A_2B_1C_2y + A_1B_2C_2x + A_2B_2C_2$$

La condition sur la paroi de gauche, en $x = 0$, requiert

$$V(0, y) = A_2B_1C_2y + A_2B_2C_2 = Uy/b - U$$

d'où l'on tire, en identifiant,

$$A_2B_1C_2 = U/b \quad \text{et} \quad A_2B_2C_2 = -U$$

La condition sur la paroi de gauche, en $y = 0$, requiert

$$V(x, 0) = A_1B_2C_2x + A_2B_2C_2 = Ux/a - U$$

d'où l'on tire, en identifiant,

$$A_1B_2C_2 = U/a \quad \text{et} \quad A_2B_2C_2 = -U$$

À ce stade, on introduit les valeurs obtenues jusqu'ici dans la relation pour le potentiel, qui prend la forme

$$V(x, y) = A_1B_1C_2xy + Uy/b + Ux/a - U$$

On applique la condition sur la paroi de gauche, ce qui donne

$$V(a, y) = A_1B_1C_2ay + Uy/b + Ua/a - U = Uy/b \quad \text{et, par conséquent,} \quad A_1B_1C_2 = 0$$

Finalement, on applique la condition sur la paroi de gauche, ce qui donne

$$V(x, b) = A_1B_1C_2xb + Ub/b + Ux/a - U = Ux/a \quad \text{et, par conséquent,} \quad A_1B_1C_2 = 0$$

On constate que toutes les conditions aux limites sont satisfaites, et donc que le choix de la solution qui a été fait au début est correct. Il n'est pas possible d'explicitier les valeurs des constantes individuelles, seuls les produits de trois constantes sont définis. Le potentiel dans le rectangle vaut, par conséquent,

$$V(x, y) = Uy/b + Ux/a - U$$

Au centre du rectangle, le potentiel vaut

$$V(a/2, b/2) = Ub/2b + Ua/2a - U = U/2 + U/2 - U = 0$$

Les équipotentielles sont les droites $y/b + x/a = \text{cste}$. Pour trouver les lignes de champ, on détermine le champ électrique qui vaut

$$\mathbf{E}(x, y) = -\nabla V(x, y) = -e_x \frac{U}{a} - e_y \frac{U}{b}$$

On constate que le champ est en fait constant dans tout le rectangle. L'équation des lignes de champ est ensuite obtenue par intégration

$$\frac{dx}{E_x} = -\frac{a dx}{U} = \frac{dy}{E_y} = -\frac{b dy}{U} \quad \text{d'où} \quad a dx = b dy \quad \text{et donc} \quad y = ax/b + \text{cste}$$

Il s'agit également d'une famille de droites, qui sont perpendiculaires aux équipotentielles. Les deux familles de droites sont représentées dans la figure S.14.

11.8.5 La structure à étudier, formée d'un cylindre diélectrique à l'intérieur d'un tube concentrique, est représentée dans la figure S.15. Le potentiel est défini sur les deux surfaces de séparation.

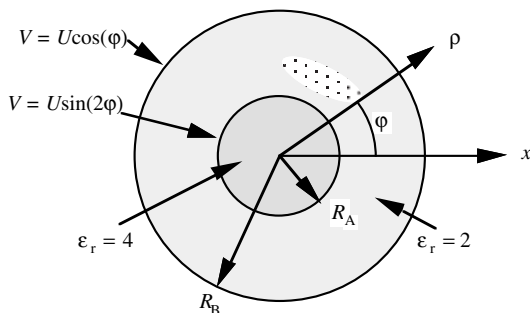


Fig. S.15 Problème cylindrique circulaire avec des valeurs limites.

Il s'agit d'un problème cylindrique, pour lequel les solutions sont tirées de (11.81) et (11.83). Il n'y a pas de dépendance de la coordonnée z et, comme on a une variation azimutale, on a une solution générale de la forme

$$V(\rho, \varphi) = (A_1 \rho^n + A_2 \rho^{-n}) [B_1 \sin(n\varphi) + B_2 \cos(n\varphi)] C_2 \Phi(\varphi) = B_1 \sin(n\varphi) + B_2 \cos(n\varphi)$$

On doit bien entendu considérer séparément les trois régions. Dans la région centrale, le potentiel ne doit pas devenir singulier en $\rho = 0$ – ce qui indiquerait qu'il y a une densité linéique de charges électriques. Tenant compte de la condition en $\rho = R_A$, on obtient

$$V(\rho \leq R_A, \varphi) = U (\rho/R_A)^2 \sin(2\varphi)$$

Dans la région extérieure, le potentiel doit disparaître à l'infini, et on trouve similairement en introduisant la condition en $\rho = R_B$

$$V(\rho \geq R_B, \varphi) = U (R_B/\rho) \cos \varphi$$

Dans la région intermédiaire, la dépendance est plus complexe, du fait que les deux conditions ont des dépendances azimutales différentes. On ne peut pas les satisfaire avec une seule expression, mais on y arrive en superposant deux solutions

$$V(R_A \leq \rho \leq R_B, \varphi) = U \frac{R_A R_B}{R_B^2 - R_A^2} \left(\frac{\rho}{R_A} - \frac{R_A}{\rho} \right) \cos \varphi - U \frac{R_A^2 R_B^2}{R_B^4 - R_A^4} \left(\frac{\rho^2}{R_B^2} - \frac{R_B^2}{\rho^2} \right) \sin(2\varphi)$$

Pour déterminer les densités de charges de surface, on détermine la composante radiale du champ électrique, on en déduit ensuite le champ de déplacement normal et on prend la différence, ce qui donne après quelques calculs,

$$\text{en } \rho = R_A \quad \rho_s(\rho = R_A, \varphi) = 4\epsilon_0 U \frac{R_B}{R_B^2 - R_A^2} \cos \varphi - 4\epsilon_0 \frac{U}{R_A} \frac{3R_B^4 - R_A^4}{R_B^4 - R_A^4} \sin(2\varphi)$$

$$\text{en } \rho = R_B \quad \rho_s(\rho = R_B, \varphi) = -\epsilon_0 \frac{U}{R_B} \frac{3R_B^2 + R_A^2}{R_B^2 - R_A^2} \cos \varphi + 8\epsilon_0 U \frac{R_A^2 R_B}{R_B^4 - R_A^4} \sin(2\varphi)$$

11.8.6 L'introduction d'une sphère métallique couverte de diélectriques se traite comme le problème du paragraphe 11.5.3, en remplaçant la condition au centre par celle au bord de la sphère conductrice, où on pose $V = 0$, On doit donc avoir (11.122)

$$V(r = R_A, \theta) = [A_1 R_A + A_2 / R_A^2] \cos \theta \quad [V]$$

On en tire une relation entre les deux constantes. On applique ensuite les conditions de continuité en $R_A + d$, ce qui donne après quelques calculs

$$V(r \leq R_B, \theta) = -\frac{3}{(\epsilon_r + 2) + 2(\epsilon_r - 1)(R_A/R_B)^3} \left(r - \frac{R_A^3}{r^2} \right) E_0 \cos \theta$$

$$V(r \geq R_B, \theta) = \left[\frac{(\epsilon_r - 1)R_B^3 + (\epsilon_r + 2)R_A^3}{(\epsilon_r + 2) + 2(\epsilon_r - 1)(R_A/R_B)^3} \frac{1}{r^2} - r \right] E_0 \cos \theta \quad [V]$$

On obtient le champ électrique en prenant le gradient du potentiel

$$E(r \leq R_B, \theta) = -E_0 \frac{3}{(\epsilon_r + 2) + 2(\epsilon_r - 1)(R_A/R_B)^3} \left[e_r \left(1 + \frac{2R_A^3}{r^3} \right) \cos \theta - e_\theta \left(1 - \frac{R_A^3}{r^3} \right) \sin \theta \right]$$

$$E(r \geq R_B, \theta) = -e_r \left[\frac{(\epsilon_r - 1)R_B^3 + (\epsilon_r + 2)R_A^3}{(\epsilon_r + 2) + 2(\epsilon_r - 1)(R_A/R_B)^3} \frac{1}{r^3} + 1 \right] E_0 \cos \theta$$

$$+ e_\theta \left[\frac{(\epsilon_r - 1)R_B^3 + (\epsilon_r + 2)R_A^3}{(\epsilon_r + 2) + 2(\epsilon_r - 1)(R_A/R_B)^3} \frac{1}{r^3} - 1 \right] E_0 \sin \theta \quad [V/m]$$

11.8.7 L'équation complexe à considérer est développée comme suit

$$\underline{w} = u + jv = \tan \underline{z} = \frac{-\sin(2y) + j \sinh(2x)}{\cos(2y) + \cosh(2x)}$$

On identifie les parties réelle et imaginaire, ce qui donne

$$u = \frac{-\sin(2y)}{\cos(2y) + \cosh(2x)} \quad \text{et} \quad v = \frac{\sinh(2x)}{\cos(2y) + \cosh(2x)}$$

On prend ensuite les dérivées et on trouve que

$$\frac{du}{dx} = \frac{2 \sin(2y) \sinh(2x)}{[\cos(2y) + \cosh(2x)]^2} = \frac{dv}{dy} \quad \text{et} \quad \frac{du}{dy} = -\frac{2 + 2 \cos(2y) \cosh(2x)}{[\cos(2y) + \cosh(2x)]^2} = -\frac{dv}{dx}$$

Les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites, de sorte que la fonction $\underline{w} = \tan \underline{z}$ est analytique – sauf aux points singuliers définis par $x = 0$ et $y = \pi/2 + k\pi$ (où k est un nombre entier). Ces points doivent être hors du domaine de la transformation.

11.8.8 Comparant avec le problème précédent, on constate que le fait de prendre le conjugué complexe équivaut à changer le signe de v , ce qui change le signe des relations entre les dérivées. Les conditions de Cauchy-Riemann ne sont alors pas satisfaites et, par conséquent, la fonction $\underline{w} = \tan \underline{z}^*$ n'est pas analytique.

11.8.9 Pour trouver la valeur de d/R pour laquelle l'approximation du paragraphe 11.6.9 donne une précision relative de 5 %, il faut résoudre l'équation suivante

$$\frac{\operatorname{arcosh}(d/R) - \ln(2d/R)}{\ln(2d/R)} = -0,05$$

Il ne semble guère possible de trouver analytiquement la solution, et on recourt au calcul. On trouve que la solution est $d/R \cong 2$; on a en effet

$$\frac{\operatorname{arcosh}(2) - \ln(4)}{\ln(4)} = \frac{\ln(2 + \sqrt{3}) - \ln(4)}{\ln(4)} = \frac{1,31696 - 1,38629}{1,38629} = -0,05$$

11.8.10 La transformation conforme $\underline{w} = \arcsin(\underline{z}/d)$ peut être mise sous la forme $\underline{z} = x + jy = d \sin \underline{w} = d(\sin u \cosh v + j \cos u \sinh v)$

Il est donc facile d'identifier les expressions pour x et pour y :

$$x = d \sin u \cosh v \quad \text{et} \quad y = d \cos u \sinh v$$

L'équation des lignes $u = \text{cste}$ s'obtient en combinant les deux expressions de façon à éliminer la variable v , comme suit

$$\cosh^2 v - \sinh^2 v = 1 = \left(\frac{x}{d \sin u} \right)^2 - \left(\frac{y}{d \cos u} \right)^2$$

Les courbes $u = \text{cste}$ sont des hyperboles (fig. S.16). Trois lignes particulières sont des droites (hyperboles aplaties):

- $u = \pi/2$ partie de l'axe des x sur laquelle $x > d$
- $u = -\pi/2$ partie de l'axe des x sur laquelle $x < -d$
- $u = 0$ axe des y

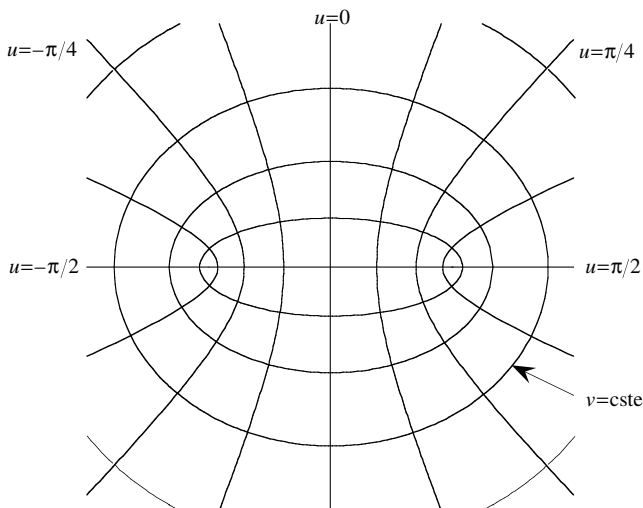


Fig. S.16 Courbes $u = \text{cste}$ et $v = \text{cste}$ pour la transformation conforme $\underline{w} = \arcsin(\underline{z}/d)$.

De manière similaire, l'équation des lignes $v = \text{cste}$ s'obtient en éliminant la variable u

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1 = \left(\frac{x}{d \cosh v} \right)^2 + \left(\frac{y}{d \sinh v} \right)^2$$

Les courbes $v = \text{cste}$ sont des ellipses confocales, dont les foyers sont en $x = \pm d$. La valeur particulière $v = 0$ correspond au segment de l'axe des x situé entre $-d$ et $+d$.

Les deux familles de courbes sont représentées dans la figure S.16. Cette transformation permet de déterminer le potentiel entre deux plaques métalliques coplanaires ou entre deux plaques perpendiculaires.

11.8.11 La ligne bifilaire asymétrique est représentée dans la figure S.17.

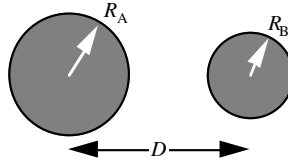


Fig. S.17 Ligne bifilaire asymétrique.

On utilise la méthode décrite dans le paragraphe 11.6.11, en posant dans ce cas que $D = d_A + d_B$, et on trouve alors également

$$d_A^2 - R_A^2 = a^2 \quad \text{et} \quad d_B^2 - R_B^2 = a^2 \quad [\text{m}^2] \quad (11.163)$$

$$d_A = \frac{R_A^2 - R_B^2 + D^2}{2D} \quad \text{et} \quad d_B = \frac{R_B^2 - R_A^2 + D^2}{2D} \quad [\text{m}]$$

La suite du développement reste la même, on définit similairement

$$K_A^2 = \frac{d_A + a}{d_A - a} \quad \text{et} \quad K_B^2 = \frac{d_B + a}{d_B - a} \quad [-] \quad (11.166)$$

La capacité par unité de longueur est donnée par

$$C' = \varepsilon \frac{\Delta v}{\Delta u} = \varepsilon \frac{2\pi}{u_A - u_B} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(K_A/K_B)} \quad [\text{F/m}] \quad (11.167)$$

CHAPITRE 12

12.8.1 Pour la distribution sphérique de charge spécifiée, la charge contenue dans une sphère de rayon r est donnée par

$$q(r) = \int_0^r \rho(r) 4\pi r^2 dr = 4\pi K \int_0^r \frac{r^2}{1+r^3} dr = \frac{4\pi K}{3} \ln(1+r^3)$$

La charge totale vaut alors $Q = q(\infty) = \infty$.

Le champ électrique est donné par (12.3)

$$E_r(r) = \frac{q(r)}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{K}{3\epsilon r^2} \ln(1+r^3) \quad [\text{V/m}]$$

et le potentiel vaut alors $V(r) = \int_0^r E_r(r) dr + V(0) = \frac{K}{3\epsilon} \int_0^r \frac{\ln(1+r^3)}{r^2} dr + V(0)$

12.8.2 Le potentiel produit par l'ensemble de quatre charges s'obtient en faisant la somme des quatre contributions, comme dans (12.23)

$$\frac{q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-d)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+d)^2 + z^2}} \right]$$

Avec un développement limité, on cherche le premier terme non nul quand $d \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xd + d^2}} = \frac{1}{r\sqrt{1 - 2(d/r)\sin\theta\cos\phi + (d/r)^2}} \\ &\cong \frac{1}{r} \left[1 + (d/r)\sin\theta\cos\phi - \frac{1}{2}(d/r)^2 + \frac{3}{2}(d/r)^2 \sin^2\theta\cos^2\phi + \dots \right] \end{aligned}$$

On garde les termes jusqu'à $1/r^2$, car les termes suivants disparaissent quand $d \rightarrow 0$. On développe les autres termes et on les somme, notant que plusieurs termes s'annulent

$$\begin{aligned} V(r, \theta, \phi) &\cong \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{d^2}{r^3} \left[3\sin^2\theta(\cos^2\phi - \sin^2\phi) \right] = \frac{3qd^2}{8\pi\epsilon r^3} [(1 - \cos 2\theta)\cos 2\phi] \\ &= \frac{qd^2}{4\pi\epsilon r^3} [P_2^2(\cos\theta)\cos 2\phi] \end{aligned}$$

Si le produit $\rho d^2 = \Psi$ reste fini quand on prend la limite $d \rightarrow 0$, on obtient le potentiel d'un quadripôle électrique. Les équipotentielles et les lignes de champ dans le plan $z = 0$ sont représentées dans la figure S.18.

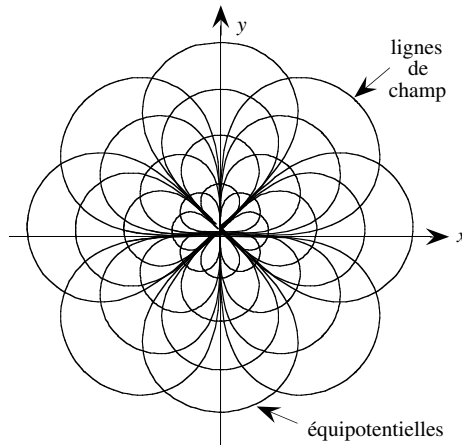


Fig. S.18 Équipotentielles et lignes de champ d'un quadripôle électrique.

12.8.3 Pour trouver le champ magnétique produit par deux conducteurs parallèles, on somme leurs contributions, après les avoir décalées, en faisant usage de la représentation en coordonnées cartésiennes (12.36)

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi} \left[\frac{-\mathbf{e}_x y + \mathbf{e}_y (x-d)}{(x-d)^2 + y^2} - \frac{-\mathbf{e}_x y + \mathbf{e}_y (x+d)}{(x+d)^2 + y^2} \right] = \frac{Id}{\pi} \frac{-\mathbf{e}_x 2xy + \mathbf{e}_y (x^2 + y^2 - d^2)}{(x^2 - d^2)^2 + 2(x^2 + d^2)y^2 + y^4}$$

12.8.4 Quand une charge se trouve entre deux parois métalliques (cep) parallèles, il faut une infinité d'images pour obtenir le potentiel. Lorsqu'il se trouve au centre d'un cube, il faut une triple infinité, et le potentiel est donné par la relation

$$V(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^{i+j+k} \frac{1}{\sqrt{(x-la)^2 + (y-ma)^2 + (z-na)^2}}$$

12.8.5 Le potentiel vecteur dans l'axe perpendiculaire au plan d'une spire carrée et passant par le centre de celle-ci est nul: la contribution de chacun des côtés est parallèle à ce côté, de sorte que les contributions des côtés opposés s'annulent.

Quant au champ magnétique, par suite de la symétrie il ne peut être dirigé que selon l'axe perpendiculaire, que l'on choisit comme axe des z . Les contributions des quatre côtés de la spire s'ajoutent alors, et on obtient à l'aide de (12.52)

$$H_z(0, z) = \frac{2a^2 I}{\pi(z^2 + a^2)\sqrt{z^2 + 2a^2}} \quad [\text{A/m}]$$

12.8.6 Pour trouver l'inductance mutuelle de deux fils rectilignes, infiniment longs, qui se croisent à une distance d en formant entre eux un angle ψ (fig. 12.22), on utilise la formule de Neumann (10.42). On sait que si $\psi = 0$, on a $M = \infty$ et que si $\psi = \pi/2$, alors $M = 0$. Il reste à déterminer les valeurs de $M(\psi)$ pour les angles entre les deux limites

$$M \equiv \frac{\mu \cos \psi}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_1 dx_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + x_1^2 \tan^2 \psi + d^2}} \quad [\text{Vs/A}]$$

Sans qu'on ait besoin de l'évaluer, on peut constater que, en dehors du cas $\psi = \pi/2$, la présence du terme en tangente au dénominateur ne modifie pas le comportement de l'intégrale, qui est le même qu'en l'absence de ce terme. L'intégrale a donc la même valeur que pour $\psi = 0$, et par conséquent $M(\psi \neq \pi/2) = \infty$.

12.8.7 On détermine l'inductance mutuelle avec la relation (12.70). Pour le cas $a = 8 \text{ mm}$, $b = 12 \text{ mm}$ et $h = 1 \text{ mm}$, on obtient $k = 0,9786$, et on trouve dans une table que $K(k) \cong 2,988$ et $E(k) \cong 1,053$, ce qui donne après calcul $M \cong 12,69 \mu\text{H}$.

L'inductance propre d'une spire de fil mince est donnée par (12.80), qui donne pour la première spire ($a = 8 \text{ mm}$, $R_1 = 0,2 \text{ mm}$): $L_1 \cong 40,3 \mu\text{H}$. Pour la seconde spire, avec $b = 12 \text{ mm}$, $R_2 = 0,1 \text{ mm}$, on obtient $L_2 \cong 77,16 \mu\text{H}$.

CHAPITRE 13

13.8.1 La ligne “coaxiale” à section carrée possède des axes de symétrie en $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi/2$, mais aussi en $\varphi = \pm\pi/4$. Le potentiel est donc maximal dans le premier cas, minimal dans l’autre, ce qui limite les solutions possibles comme suit

$$V(\rho, \varphi) = A \ln \rho + B + \sum_{m \text{ impair}} \left[C_m \rho^{4m} + \frac{D_m}{\rho^{4m}} \right] \cos(4m\varphi) \quad [V]$$

Les conditions à satisfaire sont, pour $0 \leq \varphi \leq \pi/4$,

en $\rho = a/\cos \varphi \quad V = 1 \text{ V}$
 en $\rho = b/\cos \varphi \quad V = 0 \text{ V}$

Les fonctions dans la somme s’annulent pour $\varphi = \pm\pi/8$, et on peut déterminer les constantes A et B , ce qui donne après quelques calculs

$$V(\rho, \varphi) = 1 + \frac{\ln(\rho/a) + 0,079}{\ln(a/b)} + \sum_{m \text{ impair}} \left[C_m \rho^{4m} + \frac{D_m}{\rho^{4m}} \right] \cos(4m\varphi) \quad [V]$$

Les conditions aux limites à satisfaire prennent alors la forme (avec m impair)

$$0 = \frac{-\ln(\cos \varphi) + 0,079}{\ln(a/b)} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[C_m (a/\cos \varphi)^{4m} + \frac{D_m}{(a/\cos \varphi)^{4m}} \right] \cos(4m\varphi)$$

$$0 = 1 + \frac{\ln(b/a \cos \varphi) + 0,079}{\ln(a/b)} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[C_m (b/\cos \varphi)^{4m} + \frac{D_m}{(b/\cos \varphi)^{4m}} \right] \cos(4m\varphi)$$

On ne peut pas satisfaire ces relations en tout point. On choisit donc un nombre discret d’angles dans la bande $0 \leq \varphi \leq \pi/4$ – mais avec $\varphi \neq \pi/8$ – et on détermine les premiers termes de la série – avec 10 angles, on obtient 20 équations pour déterminer 20 coefficients. Cela requiert beaucoup de calculs, et l’usage de l’ordinateur s’impose.

13.8.2 Du fait de la symétrie – comme dans le problème précédent – il suffit de considérer un huitième de la structure, avec 9 points (fig. S.19). On obtient un système de 9 équations à 9 inconnues, qu’on résout par relaxation avec un logiciel tableur, en prenant chaque fois la moyenne des 4 points voisins: $V_A = 2V_B/4$, $V_B = (V_A + V_C + V_D)/4$, etc.

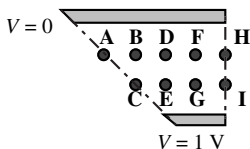


Fig. S.19 Les neuf points indépendants du secteur de ligne coaxiale carrée.

On obtient ainsi $V_A = 0,11545 \text{ V}$ $V_B = 0,23091 \text{ V}$ $V_C = 0,51876 \text{ V}$ $V_D = 0,28941 \text{ V}$
 $V_E = 0,61324 \text{ V}$ $V_F = 0,31351 \text{ V}$ $V_G = 0,64477 \text{ V}$ $V_H = 0,31984 \text{ V}$ $V_I = 0,65235 \text{ V}$.

13.8.3 Par suite de la symétrie du problème, à l'intérieur du cube les quatre points supérieurs sont au même potentiel V_{sup} et les quatre points inférieurs au potentiel V_{inf} . On n'a donc que deux inconnues et deux équations indépendantes

$$6V_{\text{sup}} = 1 + 2V_{\text{sup}} + V_{\text{inf}} \quad 6V_{\text{inf}} = 2V_{\text{inf}} + V_{\text{sup}} \quad [\text{V}]$$

d'où l'on tire

$$V_{\text{sup}} = 4/15 \text{ V} \quad V_{\text{inf}} = 1/15 \text{ V}$$

13.8.4 On découpe le carré de la figure 13.4 en triangles, dont les points A à D sont des sommets. On tire profit de la symétrie pour obtenir des triangles similaires (fig. S.20).

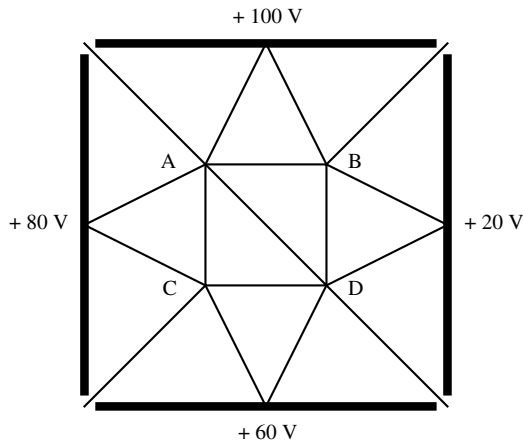


Fig. S.20 Découpage d'un carré pour la méthode des éléments finis.

La fonctionnelle est donnée par

$$F \sim 15(V_A^2 + V_B^2 + V_C^2 + V_D^2) - 14(V_A V_B + V_A V_C + V_B V_D + V_C V_D) - 8(180V_A + 140V_C + 120V_B + 80V_D) + 163200$$

En dérivant, on obtient quatre relations

$$\begin{aligned} 30V_A - 14V_B - 14V_C - 1440 &= 0 & 30V_B - 14V_A - 14V_D - 960 &= 0 \\ 30V_C - 14V_A - 14V_D - 1120 &= 0 & 30V_D - 14V_B - 14V_C - 640 &= 0 \end{aligned}$$

d'où l'on tire les potentiels aux quatre points

$$V_A = 78,33 \text{ V} \quad V_C = 62,33 \text{ V} \quad V_B = 67,67 \text{ V} \quad V_D = 51,67 \text{ V}.$$

GUIDES D'ONDES FIBRES OPTIQUES

8.6 GUIDES D'ONDES MÉTALLIQUES

par JEAN-JACQUES LAURIN

8.6.1 Introduction

Notre étude de la propagation électromagnétique a porté jusqu'à présent sur deux classes importantes de phénomènes, c'est-à-dire la propagation libre, comme les ondes planes dans un milieu homogène (sect. 8.1 et 8.2), et la propagation guidée, comme les signaux de tension et de courant se déplaçant sur une ligne de transmission (chap. 2 et 3). Dans ce dernier cas, l'étude a été limitée à des structures formées de deux conducteurs parallèles, comme des lignes bifilaires (§ 2.4.3) et des lignes coaxiales (§ 2.4.2).

Or, dans la nature on peut observer certains phénomènes de propagation guidée qui ne nécessitent la présence que d'une seule et parfois même d'aucune surface métallique. À titre d'exemple, mentionnons la propagation de signaux radio à basses fréquences le long de l'interface sol-air. Dans ce cas, le signal suit la trajectoire imposée par la courbure terrestre. Compte tenu de l'existence de tels phénomènes, il devient pertinent pour l'ingénieur de s'interroger sur la possibilité de les utiliser à bon escient dans des applications de communication ou de transport d'énergie micro-ondes. Dans cette optique, il est requis d'étudier ces phénomènes en détail afin d'en connaître les propriétés et les limites. C'est ce que nous nous proposons de faire pour deux classes principales de guides, c'est-à-dire les guides à parois métalliques fermées, principalement utilisés en micro-ondes (sect. 8.6), et les guides diélectriques, lesquels sont de géométrie plane dans le cas de dispositifs optiques intégrés, ou cylindriques dans le cas des fibres optiques (sect. 8.7).

8.6.2 Solution générale des équations de Maxwell pour les problèmes de guidage

Notre étude se limitera à des guides formés de matériaux linéaires, isotropes et homogènes par parties. Dans ce cas, les champs dans chaque région i formant le guide d'onde satisfont les équations de Maxwell (7.23), en plus de l'équation de continuité.

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{E}_i(\mathbf{r}) &= -j\omega \underline{\mu}_i \underline{H}_i(\mathbf{r}) & \nabla \cdot \underline{E}_i(\mathbf{r}) &= \underline{\rho}(\mathbf{r})/\underline{\epsilon}_i \\ \nabla \times \underline{H}_i(\mathbf{r}) &= j\omega \underline{\epsilon}_i \underline{E}_i(\mathbf{r}) + \underline{J}(\mathbf{r}) & \nabla \cdot \underline{H}_i(\mathbf{r}) &= 0 & \nabla \cdot \underline{J}(\mathbf{r}) &= -j\omega \underline{\rho}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (8.81)$$

Dans ces équations, on suppose que tous les champs ont une variation temporelle en notation complexe de type $e^{j\omega t}$ (sect. 7.1). Les constantes $\underline{\epsilon}_i$ et $\underline{\mu}_i$ caractérisent chaque milieu i et peuvent être complexes, pour tenir compte des pertes. Quant aux champs $\underline{J}(\mathbf{r})$ et $\underline{\rho}(\mathbf{r})$, ils sont distribués à l'extérieur ou aux frontières des domaines de solution.

Considérant en premier lieu une structure homogène, nous laissons de côté les indices i pour simplifier la notation. On peut réécrire les équations (8.81) en séparant les opérateurs vectoriels et les champs en composantes transversales à la direction de propagation choisie (indice t) et parallèle à cette direction (indice z). Comme convention dans cette section, nous choisissons arbitrairement la propagation vers la direction $+z$. En conséquence, tous les champs sont proportionnels à $e^{-\gamma z}$ (onde progressive, § 3.2.5). On obtient donc à l'extérieur des régions où $\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \neq 0$:

$$\begin{aligned} \nabla_t \times \underline{\mathbf{E}}_t(\mathbf{r}) + \nabla_t \times \mathbf{e}_z \underline{E}_z(\mathbf{r}) - \gamma \mathbf{e}_z \times \underline{\mathbf{E}}_t(\mathbf{r}) &= -j\omega \underline{\mu} [\underline{\mathbf{H}}_t(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_z \underline{H}_z(\mathbf{r})] \\ \nabla_t \times \underline{\mathbf{H}}_t(\mathbf{r}) + \nabla_t \times \mathbf{e}_z \underline{H}_z(\mathbf{r}) - \gamma \mathbf{e}_z \times \underline{\mathbf{H}}_t(\mathbf{r}) &= j\omega \underline{\epsilon} [\underline{\mathbf{E}}_t(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_z \underline{E}_z(\mathbf{r})] \end{aligned} \quad (8.82)$$

Si l'on sépare les termes de ces équations en composantes parallèles à la direction z et perpendiculaires à celle-ci, on obtient quatre équations indépendantes qui peuvent être combinées pour donner

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}_t(\mathbf{r}) &= \frac{j\omega \underline{\mu}}{\underline{k}^2 + \underline{\gamma}^2} \left\{ \mathbf{e}_z \times \nabla_t \underline{H}_z(\mathbf{r}) - \frac{\gamma}{j\omega \underline{\mu}} \nabla_t \underline{E}_z(\mathbf{r}) \right\} \\ \underline{\mathbf{H}}_t(\mathbf{r}) &= \frac{-j\omega \underline{\epsilon}}{\underline{k}^2 + \underline{\gamma}^2} \left\{ \mathbf{e}_z \times \nabla_t \underline{E}_z(\mathbf{r}) + \frac{\gamma}{j\omega \underline{\epsilon}} \nabla_t \underline{H}_z(\mathbf{r}) \right\} \end{aligned} \quad (8.83)$$

où $\underline{k}^2 = \omega^2 \underline{\mu} \underline{\epsilon}$ et ∇_t est, rappelons-le, la composante de l'opérateur gradient qui est perpendiculaire à \mathbf{e}_z . Les équations (8.83) indiquent que pour une onde se propageant en direction z , il est possible de déterminer les champs perpendiculaires à \mathbf{e}_z si on connaît les composantes scalaires \underline{E}_z et \underline{H}_z . Ainsi, toute composante de $\underline{\mathbf{E}}_t$ ou $\underline{\mathbf{H}}_t$ peut être décomposée en une contribution venant de \underline{E}_z et une contribution associée à \underline{H}_z . Les contributions associées à \underline{H}_z ainsi que la composante \underline{H}_z appartiennent à la solution transverse électrique (TE), ainsi nommée parce que le champ $\underline{\mathbf{E}}$ correspondant est perpendiculaire à la direction de propagation. Inversement, \underline{E}_z et les contributions aux autres composantes de champs qui lui sont associées découlant de (8.83) appartiennent à la solution transverse magnétique (TM).

L'intérêt de la formulation développée ci dessus est qu'il n'est nécessaire a priori de résoudre les équations de Maxwell que pour deux composantes scalaires. Par exemple, en combinant les équations (8.81), on obtient l'équation de Helmholtz, ou équation d'onde pour $\underline{\mathbf{E}}$ ou pour $\underline{\mathbf{H}}$ (§ 7.4.4)

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + \underline{k}^2 \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = 0 \quad (8.84)$$

Si l'on ne s'attarde qu'à \underline{E}_z et que l'on décompose le Laplacien en composantes perpendiculaires et parallèles à zz , on obtient

$$\nabla_t^2 \underline{E}_z(\mathbf{r}) + (\underline{k}^2 + \underline{\gamma}^2) \underline{E}_z(\mathbf{r}) = 0 \quad (8.85)$$

Si l'on procède par séparation des variables (sect. 11.3) en posant $\underline{E}_z(\mathbf{r}) = \underline{T}(\mathbf{r}_t) e^{-\gamma z}$, on peut déduire que

$$\frac{\nabla_t^2 \underline{T}(\mathbf{r}_t)}{\underline{T}(\mathbf{r}_t)} = -(\underline{k}^2 + \underline{\gamma}^2) \quad (8.86)$$

Le membre de droite étant une constante, il doit en être de même du membre de gauche. Définissant cette constante de séparation comme $\underline{p}^2 = -(\underline{k}^2 + \underline{\gamma}^2)$, on obtient

$$\nabla_t^2 \underline{T}(\underline{r}_t) + \underline{p}^2 \underline{T}(\underline{r}_t) = 0 \quad (8.87)$$

La suite de la résolution nécessite l'imposition de conditions frontières dans le plan transverse. Un développement identique peut être fait pour trouver la solution pour le mode TE (c'est-à-dire impliquant \underline{H}_z au lieu de \underline{E}_z). On peut aussi démontrer qu'en présence de parois parfaitement conductrices, \underline{p}^2 est réel positif (§ XIII.2.2.23)

8.6.3 Guides rectangulaires

Nous appliquerons maintenant les outils mathématiques développés à la section précédente à l'analyse du guide d'ondes rectangulaire, qui est de loin celui dont l'usage est le plus répandu dans les applications industrielles et commerciales des micro-ondes. Le guide représenté à la figure 8.13 est formé d'un tube à section rectangulaire dont les dimensions latérales de la région interne sont a et b . On considérera pour l'instant que les parois sont parfaitement conductrices et que le guide est infiniment long en direction z .

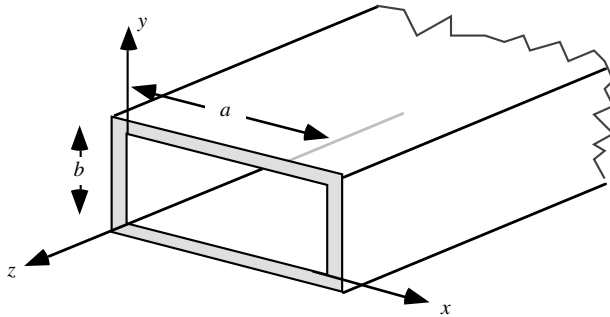


Fig. 8.12 Guide d'ondes rectangulaire de largeur a et de hauteur b (dimensions intérieures).

8.6.4 Modes TE

La solution de type TE à ce problème pour la région interne du guide débute par l'écriture de l'équation de Helmholtz en coordonnées cartésiennes pour \underline{H}_z . Suivant la démarche du paragraphe 8.6.2, nous obtenons

$$\underline{H}_z(\underline{r}) = \underline{T}(x, y) e^{-\underline{\gamma}z} = \underline{X}(x) \underline{Y}(y) e^{-\underline{\gamma}z} \quad (8.88)$$

$$\text{et } \nabla_t^2 \underline{T}(x, y) + \underline{p}^2 \underline{T}(x, y) = \frac{\partial^2 \underline{T}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{T}(x, y)}{\partial y^2} + \underline{p}^2 \underline{T}(x, y) = 0$$

Poursuivant le processus de séparation des variables en x et y , soit

$$\frac{1}{\underline{X}(x)} \frac{d^2 \underline{X}(x)}{dx^2} + \frac{1}{\underline{Y}(y)} \frac{d^2 \underline{Y}(y)}{dy^2} = -\underline{p}^2 \quad (8.89)$$

on doit poser que les termes du membre de gauche sont égaux à des constantes que nous appelons respectivement $-u^2$ et $-v^2$ de sorte que

$$\underline{X}(x) = \underline{A} \sin(ux) + \underline{B} \cos(ux) \quad \underline{Y}(y) = \underline{C} \sin(vy) + \underline{D} \cos(vy) \quad (8.90)$$

avec

$$p^2 = u^2 + v^2 = k^2 + \gamma^2 \quad (8.91)$$

Ceci complète la solution générale pour $\underline{H}_z(\mathbf{r})$. Les constantes A, B, C et D sont déterminées en imposant les conditions aux frontières métalliques, c'est-à-dire (1.29)

$$\mathbf{n} \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})|_{\text{surface}} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})|_{\text{surface}} = 0 \quad (8.92)$$

où \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal aux surfaces métalliques. Par convention, on choisira que \mathbf{n} pointe vers l'intérieur du guide. Afin d'appliquer les conditions énoncées ci-dessus, écrivons explicitement les expressions des champs. Ainsi, partant de la solution générale (8.90) et des expressions (8.83), on arrive à

$$\begin{aligned} \underline{E}_x(x, y) &= -\frac{j\omega\mu}{p^2} \underline{X}(x) v [\underline{C} \sin(vy) - \underline{D} \cos(vy)] e^{-\gamma z} \\ \underline{E}_y(x, y) &= \frac{j\omega\mu}{p^2} \underline{Y}(y) u [\underline{A} \sin(ux) - \underline{B} \cos(ux)] e^{-\gamma z} \end{aligned} \quad (8.93)$$

Le fait que \underline{E}_x doive être nul à $y = 0$ et $y = b$ impose que

$$C = 0 \quad \text{et} \quad v = n\pi/b \quad (8.94)$$

De même, puisque \underline{E}_y doit être nul à $x = 0$ et $x = a$, il faut avoir

$$A = 0 \quad \text{et} \quad u = m\pi/a \quad (8.95)$$

Dans ces expressions, m et n sont des entiers et peuvent être nuls. On voit donc que le choix de dimensions latérales finies à la structure du guide conduit à fixer les constantes de séparation u et v . On remarque cependant que plusieurs solutions sont possibles. En tenant compte de ces derniers résultats, la solution complète pour le mode TE_{mn} peut s'écrire

$$\begin{aligned} \underline{E}_x &= \frac{j\omega\mu}{p^2} \frac{K n \pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} & \underline{H}_x &= \frac{\gamma}{p^2} \frac{K m \pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \\ \underline{E}_y &= -\frac{j\omega\mu}{p^2} \frac{K m \pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} & \underline{H}_y &= \frac{\gamma}{p^2} \frac{K n \pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \\ \underline{E}_z &= 0 & \underline{H}_z &= \underline{K} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \end{aligned} \quad (8.96)$$

Dans ces expressions, \underline{K} est une constante complexe (en A/m) qui dépend de l'intensité de la source micro-ondes. On peut vérifier que toutes les conditions aux frontières sont satisfaites sur les parois du guide. En cas de propagation en direction $-z$ (onde rétrograde) il suffit de changer le signe de $\underline{\gamma}$.

8.6.5 Modes TM

Par une démarche semblable, on trouve aussi les expressions pour les champs du mode TM_{mn} , soit

$$\begin{aligned}
 \underline{E}_x &= -\frac{\gamma}{p^2} \frac{Lm\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} & \underline{H}_x &= \frac{j\omega \underline{\epsilon}}{p^2} \frac{Ln\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \\
 \underline{E}_y &= -\frac{\gamma}{p^2} \frac{Ln\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} & \underline{H}_y &= -\frac{j\omega \underline{\epsilon}}{p^2} \frac{Lm\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \\
 \underline{E}_z &= \underline{L} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} & \underline{H}_z &= 0
 \end{aligned}
 \tag{8.97}$$

8.6.6 Remarque sur l'existence des solutions

À la lumière de ces résultats, on voit donc que les solutions TE ou TM dépendent des constantes m et n . Ainsi, pour un couple (m, n) particulier, on parlera de mode TE_{mn} ou TM_{mn} . Étant donné qu'il est possible d'avoir plusieurs couples (m, n) différents, les champs dans le guide pourraient consister en une superposition de plusieurs modes. On verra plus tard que dans les applications on vise à ne propager qu'un seul mode à la fois.

Bien que m et n puissent paraître arbitraires, certaines valeurs ne sont pas permises. Ainsi, le fait de mettre égale à zéro au moins une de ces constantes conduit à l'annulation de toutes les composantes de la solution TM. En conséquence, les modes TM_{m0} TM_{0n} ou TM_{00} sont sans intérêt et il en va de même pour le mode TE_{00} . Les lignes de champ électrique et magnétique transverses sont présentés dans la figure 8.13 pour les trois modes TE_{10} , TE_{11} et TM_{11} .

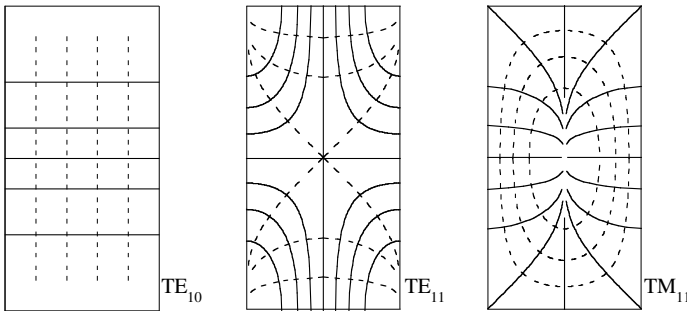


Fig. 8.13 Lignes de champ transverses pour trois modes dans un guide d'ondes rectangulaire. Les lignes pleines correspondent au champ électrique transverse, les lignes pointillées au champ magnétique (voir aussi fig. 11.15).

8.6.7 Autre développement pour les modes TE_{m0} en guide rectangulaire

Nous pouvons également aborder l'étude de la propagation dans un guide d'ondes rectangulaire en considérant une onde plane à polarisation perpendiculaire qui arrive sur un plan conducteur électrique parfait en $x = 0$, avec un angle d'incidence θ_{in} . Le milieu 1 est de l'air. Le facteur de réflexion, donné par (8.78), vaut alors -1 , de sorte que le champ électrique total dans l'air est obtenu en adaptant les relations (8.44) aux coordonnées de la fig. 8.12

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{E}}(x, z) &= \underline{\mathbf{E}}_i(x, z) + \underline{\mathbf{E}}_r(x, z) = \underline{\mathbf{E}}_i(0) \left[e^{\gamma_{x1}x} - e^{-\gamma_{x1}x} \right] e^{-\gamma_z z} \\
&= e_y \underline{E}_{yi}(0) \left[e^{j\beta_1 x \cos \theta_{in}} - e^{-j\beta_1 x \cos \theta_{in}} \right] e^{-j\beta_1 z \sin \theta_{in}} \quad [\text{V/m}] \quad (8.98) \\
&= 2j e_y \underline{E}_{yi}(0) \sin(\beta_1 x \cos \theta_{in}) e^{-j\beta_1 z \sin \theta_{in}}
\end{aligned}$$

On trouve de même le champ magnétique dans l'air

$$\underline{\mathbf{H}}(x, z) = 2 \underline{E}_{yi}(0) \frac{\beta}{\omega \mu_0} \left[j e_x \sin \theta_{in} \sin(\beta_1 x \cos \theta_{in}) + e_z \cos \theta_{in} \cos(\beta_1 x \cos \theta_{in}) \right] e^{-j\beta_1 z \sin \theta_{in}} \quad [\text{A/m}] \quad (8.99)$$

Nous vérifions que les conditions aux limites au bord du conducteur électrique parfait dans le plan $x = 0$ sont effectivement satisfaites: le champ électrique tangentiel s'annule sur cette surface, et il en va de même pour la composante normale du champ d'induction magnétique $\mu_0 \underline{\mathbf{H}}$.

Nous constatons par ailleurs que, comme les champs ont une dépendance périodique en z , ces conditions sont également satisfaites sur tous les plans parallèles situés à une distance x_m du premier

$$x_m = \frac{m\pi}{\beta_1 \cos \theta_{in}} \quad [\text{m}] \quad (8.100)$$

Nous pouvons donc placer une seconde surface métallique, aussi en conducteur électrique parfait, dans l'un de ces plans sans perturber les champs. La distance a entre ces deux plans étant alors fixée, ce qui entraîne que l'angle d'incidence est alors imposé par la relation (8.100)

$$\theta_{in} = \arccos \left(\frac{m\pi}{\beta_1 a} \right) \quad [\text{rad}] \quad (8.101)$$

Pour que cet angle puisse être défini, il faut que le terme entre parenthèses soit inférieur à 1, et la largeur a doit donc satisfaire la condition

$$a \geq \frac{m\pi}{\beta_1} = \frac{m\pi}{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{m\lambda_0}{2} \quad [\text{m}] \quad (8.102)$$

La distance entre les deux surfaces métalliques doit donc être supérieure à une demi-longueur d'onde pour que les conditions de propagation soient satisfaites. Si cette relation n'est pas satisfaite, les champs décroissent dans la direction longitudinale et le mode considéré ne peut pas se propager (coupure).

Comme le champ électrique est dirigé selon y , nous pouvons placer d'autres plans métalliques (cep) perpendiculaires à cette direction, dans des plans $y = \text{cste}$, sans modifier les champs électromagnétique. En plaçant ainsi deux plans conducteurs en $y = 0$ et en $y = b$, en plus des deux plans déjà placés en $x = 0$ et en $x = a$, nous formons le guide d'ondes rectangulaire de la figure 8.13.

Nous constatons que la distribution des champs obtenus dans (8.98 et 8.99), en remplaçant θ_{in} par sa valeur donnée par (8.101), est la même que celle des modes TE ayant $n = 0$, c'est-à-dire les modes TE_{m0} (pas de dépendance en y). Pour ces modes, les champs

correspondent à ceux fournis par la superposition de deux ondes planes avec des angles d'incidence θ_{in} et $-\theta_{in}$.

On peut similairement obtenir les champs des modes TE_{0n} en considérant une onde réfléchi par le plan $y = 0$, et en procédant ensuite de la même manière que ci-dessus. Pour obtenir les modes TE_{mn} et TM_{mn} avec $m \neq 0$ et $n \neq 0$, le développement est possible, mais nettement plus complexe: il faut dans ce cas superposer quatre ondes planes uniformes, qui atteignent les parois verticales et horizontales avec des incidences obliques (chap. XIII.2).

8.6.8 Guide cylindrique circulaire

Le guide cylindrique représenté à la figure 8.14 consiste simplement en un tube circulaire conducteur de rayon interne a .

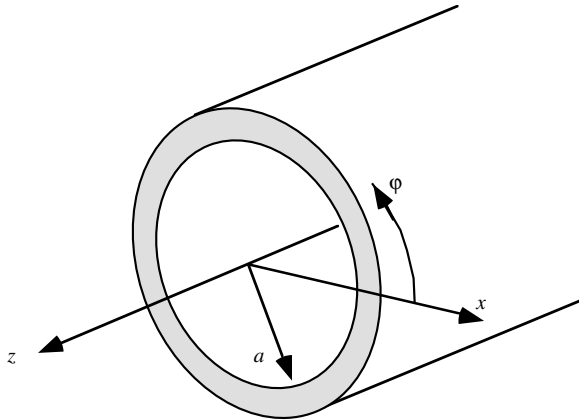


Fig. 8.14 Guide d'ondes métallique cylindrique circulaire de rayon interne a .

Ce guide est d'usage moins répandu que le guide rectangulaire. Par contre, à cause de sa forme circulaire, qui est la même que les antennes de type réflecteur parabolique (§ 9.5.4), il est souvent utilisé pour alimenter les cornets qui se trouvent au foyer de ces réflecteurs (fig. 8.15).

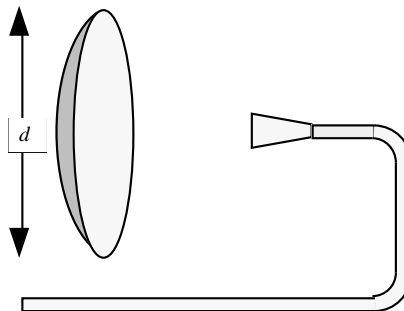


Fig. 8.15 Schéma d'une antenne parabolique montrant la section de guide d'ondes cylindrique alimentant l'antenne cornet.

8.6.9 Modes TE

Les expressions développées au paragraphe 8.6.2 s'appliquent tout aussi bien aux coordonnées rectangulaires qu'aux coordonnées cylindriques circulaires. Nous posons donc pour la solution TE que

$$\nabla_t^2 \underline{T}(\rho, \varphi) + p^2 \underline{T}(\rho, \varphi) = 0 \quad (8.103)$$

Le développement de ∇_t^2 en coordonnées cylindriques conduit à l'équation de Bessel dont la solution générale est

$$\underline{T}(\rho, \varphi) = \{ \underline{A} J_m(p\rho) + \underline{B} N_m(p\rho) \} \{ \underline{C} \cos(m\varphi) + \underline{D} \sin(m\varphi) \} \quad (8.104)$$

Les fonctions J_m et N_m sont respectivement les fonctions de Bessel et de Neumann d'ordre m , m étant un entier positif ou nul. La fonction de Neumann étant singulière pour $p\rho = 0$ (fig. 14.9), on pose que $B = 0$ pour éviter d'avoir des solutions non physiques dans le guide d'ondes (il n'y a pas de charges dans l'axe de celui-ci). Finalement, si on choisit une référence arbitraire φ_0 pour l'angle φ , \underline{H}_z s'exprime par

$$\underline{H}_z(\rho, \varphi, z) = \underline{K} J_m(p\rho) \cos[m(\varphi - \varphi_0)] e^{-\gamma z} \quad (8.105)$$

Il y a donc ici aussi plusieurs solutions (valeurs de m) possibles. Suite à l'application des équations (8.83), on trouve les expressions générales suivantes pour les composantes du champ électrique \underline{E}_ρ et \underline{E}_φ

$$\begin{aligned} \underline{E}_\rho(\rho, \varphi, z) &= \underline{K} \frac{j\omega\mu}{p^2} \frac{m}{\rho} J_m(p\rho) \sin[m(\varphi - \varphi_0)] e^{-\gamma z} \\ \underline{E}_\varphi(\rho, \varphi, z) &= \underline{K} \frac{j\omega\mu}{p} J'_m(p\rho) \cos[m(\varphi - \varphi_0)] e^{-\gamma z} \end{aligned} \quad (8.106)$$

où le prime (') signifie qu'on prend la dérivée de la fonction par rapport à son argument. Afin de respecter la condition frontière $\mathbf{n} \times \underline{E}(\mathbf{r}) = 0$ sur la paroi, il faut que \underline{E}_φ soit nul à $\rho = a$. Cette condition peut être satisfaite en imposant que l'argument pa soit un zéro de la fonction $J'_m(p\rho)$. Comme les dérivées des fonctions de Bessel ont un nombre infini de zéros, on choisit un p_{mn} qui fait en sorte que $p_{mn}a$ soit le n ème zéro de $J'_m(p\rho)$ c'est-à-dire $J'_m(p_{mn}a) = 0$.

Les premiers zéros des fonctions $J'_m(p\rho)$ sont donnés dans le tableau 14.11. Ainsi, pour un guide de rayon a et pour un mode TE_{mn} donné, la valeur de $p_{mn}a$ devra être égale à une des valeurs du tableau.

8.6.10 Solutions TM

Dans ce cas, $\underline{E}_z(\rho, \varphi, z) = \underline{T}(\rho, \varphi) e^{-\gamma z}$, et l'équation différentielle à résoudre pour $\underline{T}(\rho, \varphi)$ est exactement la même. En développant, on arrive à

$$\begin{aligned} \underline{E}_z(\rho, \varphi, z) &= \underline{L} J_m(p\rho) \cos[m(\varphi - \varphi_0)] e^{-\gamma z} \\ \underline{E}_\varphi(\rho, \varphi, z) &= \underline{L} \frac{\gamma}{p^2} \frac{m}{\rho} J_m(p\rho) \sin[m(\varphi - \varphi_0)] e^{-\gamma z} \end{aligned} \quad (8.107)$$

Puisque ces deux composantes de champ doivent être nulles à $\rho = a$, les valeurs de $p_{mn}a$ doivent donc correspondre à des zéros des fonctions de Bessel $J_m(p\rho)$. Les valeurs

de quelques premiers zéros sont données au tableau 14.10. La figure 8.16 illustre les topologies des champs \underline{E} et \underline{H} de quelques modes de guides circulaires.

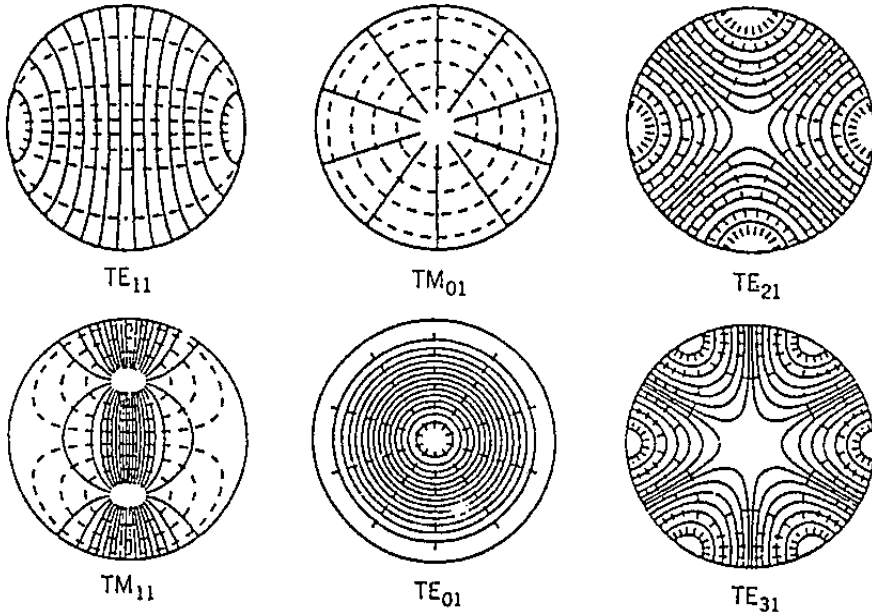


Fig. 8.16 Configuration des champs dans quelques modes de guides circulaires(E:— H:-----).

8.6.11 Solutions complètes

Afin de compléter notre traitement des modes de guides circulaires, nous donnons l'expression des autres composantes de champs obtenus en faisant les substitutions appropriées dans les équations (8.83). Ainsi pour les modes TE on trouve

$$\begin{aligned} \underline{H}_\rho(\rho, \varphi, z) &= -\underline{K} \frac{\gamma}{p} J'_m(p\rho) \cos[m(\varphi - \varphi_0)] e^{-\gamma z} \\ \underline{H}_\varphi(\rho, \varphi, z) &= \underline{K} \frac{\gamma}{p^2} \frac{m}{\rho} J_m(p\rho) \sin[m(\varphi - \varphi_0)] e^{-\gamma z} \end{aligned} \quad (8.108)$$

et pour les modes TM

$$\begin{aligned} \underline{E}_\rho(\rho, \varphi, z) &= -\underline{L} \frac{\gamma}{p} J'_m(p\rho) \cos[m(\varphi - \varphi_0)] e^{-\gamma z} \\ \underline{H}_\varphi(\rho, \varphi, z) &= -\underline{L} \frac{j\omega\epsilon}{p} J'_m(p\rho) \cos[m(\varphi - \varphi_0)] e^{-\gamma z} \\ \underline{H}_\rho(\rho, \varphi, z) &= -\underline{L} \frac{j\omega\epsilon}{p^2} \frac{m}{\rho} J_m(p\rho) \sin[m(\varphi - \varphi_0)] e^{-\gamma z} \end{aligned} \quad (8.109)$$

8.6.12 Modes TEM

Lorsque les champs électriques et magnétiques sont perpendiculaires à la direction de propagation ($\underline{E}_z(\mathbf{r})=0$ et $\underline{H}_z(\mathbf{r})=0$), la solution est dite transversale électrique et magnétique ou TEM. Les équations (8.83), bien qu'obtenues par une démarche assez générale, ne sont d'aucune utilité pour traiter ce type de mode. Reprenons donc du début les équations de Maxwell (8.81) en séparant les composantes transversales et longitudinales pour le cas où $\underline{E}_z(\mathbf{r})=0$ et $\underline{H}_z(\mathbf{r})=0$.

$$\begin{aligned} \nabla_t \times \underline{E}_t(\mathbf{r}) &= 0 & \underline{\gamma} e_z \times \underline{E}_t(\mathbf{r}) &= j\omega \underline{\mu} \underline{H}_t(\mathbf{r}) & \nabla_t \cdot \underline{E}_t(\mathbf{r}) &= 0 \\ \nabla_t \times \underline{H}_t(\mathbf{r}) &= 0 & \underline{\gamma} e_z \times \underline{H}_t(\mathbf{r}) &= -j\omega \underline{\epsilon} \underline{E}_t(\mathbf{r}) & \nabla_t \cdot \underline{H}_t(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned} \quad (8.110)$$

La dernière relation implique que le vecteur $\underline{H}_t(\mathbf{r})$ forme des boucles fermées dans le plan transverse. Si l'on intègre $\underline{H}_t(\mathbf{r})$ le long de l'une de ces boucles, l'équation $\nabla_t \times \underline{H}_t(\mathbf{r})=0$ indique que le résultat obtenu est nul. Puisque $\underline{H}_t(\mathbf{r})$ est toujours orienté dans la direction du parcours d'intégration, il doit être identiquement nul. Du coup, ceci annule $\underline{E}_t(\mathbf{r})$ par le biais de l'équation du milieu de la première ligne, et par conséquent tous les champs sont nuls. Il semble donc, d'après notre démarche, que l'existence de modes TEM ne soit pas possible dans un guide d'ondes métallique.

Nous n'avions pas rencontré cette situation lors de l'étude des modes TE et TM, car le terme $j\omega \underline{\epsilon} \underline{E}_z(\mathbf{r})$ apparaissait dans le membre de droite de l'expression correspondante dans (8.82). Dans ce cas, l'existence du mode TM était due à la présence d'un courant de déplacement $j\omega \underline{\epsilon} \underline{E}_z(\mathbf{r})$ dans la direction longitudinale. Cependant, si l'on remplaçait ce courant de déplacement manquant par une distribution de courant $\underline{J}_z(\mathbf{r})$, circulant sur un conducteur, le champ $\underline{H}_t(\mathbf{r})$ ne serait pas nul, si cette tige conductrice pouvait être circonscrite par un contour fermé dans le plan transverse. Suite à l'addition de la tige de courant $\underline{J}_z(\mathbf{r})$, on devrait remplacer deux des équations de (8.110) par

$$\nabla_t \times \underline{H}_t(\mathbf{r}) = \underline{e}_z \underline{J}_z(\mathbf{r}) \quad \nabla_t \cdot \underline{E}_t(\mathbf{r}) = \rho/\underline{\epsilon} \quad (8.111)$$

Pour qu'on ait propagation d'un mode TEM, il est nécessaire d'insérer un second conducteur dans le guide d'onde, et on obtient alors une ligne coaxiale. Les équations (8.110) se ramènent en fait à des équations de Laplace bidimensionnelles dans le plan transverse (sect. 10.7) et aux équations des lignes bifilaires (chap. 3).

8.6.13 Guide coaxial

Le guide coaxial est sans doute une des lignes de transmission les plus utilisées. En micro-ondes, on l'utilise jusqu'à des fréquences de 50 GHz environ, mais sur des longueurs très limitées, compte tenu des pertes relativement élevées qu'il présente. Cette situation s'explique par le fait qu'à toute fin pratique, le courant de déplacement $j\omega \underline{\epsilon} \underline{E}_z(\mathbf{r})$ du mode TM, qui circulait à l'intérieur du guide cylindrique sans dissiper d'énergie, a été remplacé par un courant de conduction $\underline{J}_z(\mathbf{r})$ circulant sur une tige conductrice pour former le mode TEM du guide coaxial. À mesure que la fréquence augmente, les pertes ohmiques dans ce conducteur augmentent à cause de l'effet de peau (11.2.4), ce qui peut conduire à une atténuation linéique inacceptable le long du guide.

L'analyse des champs électrique et magnétique dans un guide coaxial se trouve aux paragraphes 11.2.1 et 11.2.3, et son impédance caractéristique au paragraphe 2.4.2 .

8.6.14 Guide à plaques parallèles

Aux paragraphes 8.1.5 et 8.2.2, nous avons vu que les ondes planes uniformes étaient aussi de nature TEM. Prenons par exemple le cas d'une onde plane de polarisation linéaire se propageant en direction $+z$ (fig. 8.17(a)):

$$\underline{E}(\mathbf{r}) = e_y E_0 e^{-j\beta z} \quad \underline{H}(\mathbf{r}) = -e_x \frac{E_0}{Z_0} e^{-j\beta z} \quad (8.112)$$

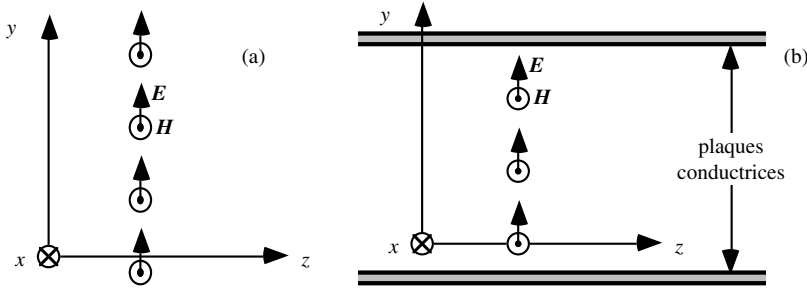


Fig. 8.17 Champs d'une onde plane uniforme: (a) dans l'espace libre, (b) entre deux plaques métalliques.

L'onde est en propagation libre dans un milieu infini. Modifions maintenant la situation en insérant deux plaques parfaitement conductrices et infinies, toutes deux parallèles au plan xz et séparées d'une distance d (fig. 8.17(b)).

Comme on peut le constater, les plaques ne sont ni parallèles au champ \underline{E} initial ni perpendiculaires au champ \underline{H} initial. Elles n'affectent donc aucunement les champs propagés. Par contre, puisque la région comprise entre les plaques se trouve isolée des deux régions extérieures, il est possible de mettre à zéro les champs dans ces dernières sans affecter les champs entre les plaques. Il en résulte donc une situation où notre onde plane TEM de départ se trouve guidée par les deux plaques conductrices. Notons en passant que l'onde guidée possède le même exposant de propagation ($j\beta$) et la même impédance (Z_c) que les ondes TEM de départ.

Compte tenu de sa dimension infinie en direction x , ce type de guide n'est jamais utilisé, du moins intentionnellement, dans la conception de circuits micro-ondes. Ceci n'empêche pas qu'il soit présent, excité de façon involontaire, dans les structures de circuits imprimés comprenant plusieurs niveaux de métallisation, c'est-à-dire formé de minces couches de métal séparées par des couches isolantes (§ 2.4.5). Ce mode constitue donc un chemin possible pour l'interférence électromagnétique dans de tels circuits.

8.6.15 Courants de surface

Jusqu'à présent, notre approche consistait à résoudre les équations de Maxwell en posant $\underline{J}(\mathbf{r}) = 0$ et $\rho(\mathbf{r}) = 0$ dans les régions d'intérêt. Cette approche est justifiable dans la mesure où ces courants et ces charges ne sont en fait libres de circuler que dans les parois qui entourent la région où l'onde est guidée. Mais il est en revanche tout à fait plausible que des courants de surface puissent exister sur les parois et qu'ils puissent même être essentiels à l'existence de la solution.

En pratique, les guides métalliques sont formés de parois métalliques épaisses et à conductivité finie. Donc, si des courants sont associés à un mode, il est important d'en connaître la distribution afin de pouvoir évaluer les pertes par effet Joule encourues dans les parois métalliques. Pour le moment, nous nous contenterons de supposer que la conductivité des parois est infinie et nous traiterons les pertes ohmiques dans une section ultérieure (§ 8.6.26). Ainsi, à la frontière métallique du guide (fig. 8.18), on obtient la condition suivante (§ 1.5.2)

$$\underline{J}_s(\mathbf{r}) = \mathbf{n} \times \left[\underline{H}_{\text{guide}}(\mathbf{r}) - \underline{H}_{\text{métal}}(\mathbf{r}) \right]_{\text{surface}} \quad (8.113)$$



Fig. 8.18 Interface entre l'intérieur du guide et la paroi métallique supportant un courant de surface.

où \mathbf{n} est un vecteur unitaire normal à la surface du guide et pointant vers son intérieur et $\underline{J}_s(\mathbf{r})$ est une densité linéique de courant de surface en A/m. Puisqu'on a pris pour hypothèse que les parois sont parfaitement conductrices, leurs champs internes $\underline{E}_{\text{métal}}(\mathbf{r})$ et $\underline{H}_{\text{métal}}(\mathbf{r})$ sont nuls et on arrive à

$$\underline{J}_s(\mathbf{r}) = \mathbf{n} \times \underline{H}(\mathbf{r})_{\text{surface}} \quad (8.114)$$

On applique ce résultat aux expressions obtenues précédemment pour les champs dans les guides métalliques, et on se rend compte que tous ces modes nécessitent la présence de courants de surface.

8.6.17 Fréquences de coupure

L'étude des champs des modes TE et TM nous conduit à l'équation de séparation

$$\underline{\gamma}^2 = -\underline{k}^2 + p^2 = -\omega^2 \underline{\mu}\underline{\epsilon} + p^2 \quad (8.115)$$

où p_{mn} , la constante de séparation, dépend des dimensions du guide. Remarquons que l'expression s'applique à toutes les formes de guides et non seulement aux guides rectangulaires. Si l'on s'en tient aux guides remplis d'un matériau sans pertes (k réel), on observe que $\underline{\gamma}$ peut être réel lorsque la fréquence est suffisamment faible, ce qui conduit à une décroissance exponentielle des champs rendant le guide inutilisable dans le mode considéré. La fréquence seuil où $\underline{\gamma}$ passe d'une valeur réelle à une valeur imaginaire est appelée fréquence de coupure

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{p}{2\pi\sqrt{\underline{\mu}\underline{\epsilon}}} = \frac{pc}{2\pi} \quad (8.116)$$

où $c = 1/\sqrt{\underline{\mu}\underline{\epsilon}}$ est la vitesse de la lumière dans le matériau remplissant le guide. on constate alors que

$$\underline{\gamma} = k\sqrt{(\omega_c/\omega)^2 - 1} = \begin{cases} \alpha & \text{si } f < f_c \text{ affaiblissement} \\ j\beta & \text{si } f > f_c \text{ propagation} \end{cases} \quad (8.117)$$

Comme on peut le voir à la figure 8.19, cette relation conduit à un comportement très dispersif (§ 8.6.17) à mesure que ω tend vers ω_c . Au contraire, lorsque ω devient beaucoup plus grand que ω_c , la vitesse de phase $v_\varphi = \omega/\beta$, (§ 3.2.11) et la vitesse de groupe $v_g = (\partial\beta/\partial\omega)^{-1}$ (§ 3.2.12) s'approchent de la constante $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$.

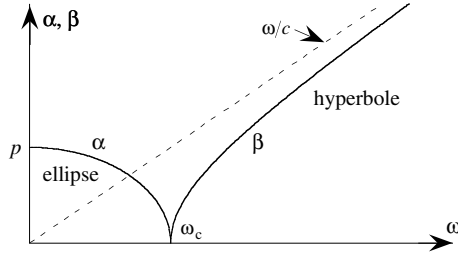


Fig. 8.19 Relation de dispersion des modes TE et TM dans les guides d'ondes à parois métalliques.

D'autres expressions couramment utilisées et dérivées de l'équation (8.117) lorsque $f > f_c$ sont

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} \quad v_g = \left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\right)^{-1} = c\sqrt{1-(f_c/f)^2} \quad \lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} \quad (8.118)$$

Cette expression définit λ_g qui est la *longueur d'onde guidée* alors que $\lambda = c/f$ est la longueur d'onde en propagation libre. Les vitesses de phase v_φ et de groupe v_g sont définies dans les paragraphes 3.2.11 et 3.2.12.

Nous pouvons définir un schéma équivalent pour un mode TE — correspondant à une section infinitésimale dz de guide d'ondes — en connectant une inductance en parallèle (fig. 3.10). Pour un mode TM, on procède de la même façon en connectant une capacité en série.

8.6.17 Dispersion dans les guides d'ondes

Lors de nos études de la propagation de signaux sur les lignes de transmission bifilaires sans pertes (chap. 2), nous avons déduit que la vitesse de déplacement des signaux était une constante, la célérité c . Ainsi, pour une onde progressive, l'évolution d'un signal arbitraire $f(t)$ appliqué à une extrémité ($z = 0$) de la ligne est donnée par $f(t - z/c)$. Décomposons maintenant l'excitation $f(t)$ en un spectre de fréquences à l'aide d'une transformée de Fourier [69]. Comme la ligne est un système linéaire, on peut considérer une à une les composantes spectrales formant le signal $f(t)$. Pour reproduire fidèlement $f(t)$ à l'autre bout de la ligne, une condition nécessaire est que chacune des composantes spectrales, qui sont en fait des ondes sinusoïdales, subissent le même délai de propagation (délai = longueur de ligne/vitesse de propagation). On peut voir que cette condition est remplie si la vitesse de propagation est indépendante de la fréquence.

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que la vitesse de déplacement des fronts d'onde des modes TE et TM dépend fortement de la fréquence (8.118), plus particulièrement près de la coupure. En conséquence, il ne sera pas possible de propager des

signaux à large bande de fréquence dans ces modes sans qu'il en résulte des distorsions du signal qui peuvent être importantes.

Pour mieux comprendre l'effet de la dispersion, nous considérons, à titre d'exemple, la propagation d'un signal modulé par une impulsion gaussienne (fig. 8.20).

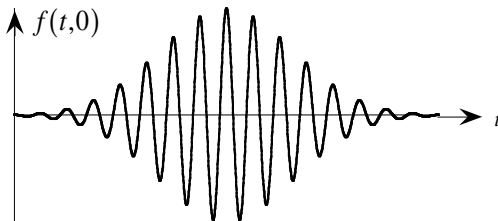


Fig. 8.20 Signal hyperfréquences modulé par une impulsion gaussienne.

À l'entrée du guide d'ondes, ce signal est défini par

$$f(t,0) = Ae^{j\omega_0 t} e^{-(t/\tau_{in})^2/2} \quad (8.119)$$

L'enveloppe passe par un maximum en $t = 0$ ($f(0,0) = A$) et sa durée, entre deux points au niveau A/\sqrt{e} , vaut $2\tau_{in}$. Cette forme particulière d'impulsion permet un traitement mathématique simple, dont les résultats resteront cependant largement applicables à d'autres formes d'impulsions. Le spectre d'une impulsion gaussienne est aussi une impulsion gaussienne et on le trouve en prenant sa transformée de Fourier

$$\underline{F}(\omega,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t,0) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{j\omega_0 t} e^{-(t/\tau_{in})^2/2} e^{-j\omega t} dt = \sqrt{2\pi} A \tau_{in} e^{-[(\omega - \omega_0)\tau_{in}]^2/2} \quad (8.120)$$

La largeur du spectre, définie entre deux points à F_{max}/\sqrt{e} , vaut $2/\tau_{in}$. Le signal se propage le long de la structure, de sorte qu'en une position z on obtient

$$\underline{F}(\omega, z) = \sqrt{2\pi} A \tau_{in} e^{-[(\omega - \omega_0)\tau_{in}]^2/2} e^{-j\beta z} \quad (8.121)$$

Nous constatons que la propagation modifie la phase, mais non l'amplitude des composantes spectrales: la largeur du spectre gaussien n'est pas changée. Pour un spectre étroit ($1/\tau_{in} \ll \omega_0$) nous pouvons simplifier l'expression en développant $\beta(\omega)$ en série de Taylor au voisinage de ω_0 et en ne conservant que les trois premiers termes de l'expansion

$$\begin{aligned} \beta(\omega) &\cong \beta(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \left. \frac{\partial \beta(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0} + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \beta(\omega)}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=\omega_0} \\ &= \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \beta_2 \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2} \Big|_{\omega=\omega_0} \end{aligned} \quad (8.122)$$

Les valeurs des coefficients β_i s'obtiennent facilement en identifiant les termes.

Nous introduisons ce développement dans (8.121) et obtenons

$$F(\omega, z) \cong \sqrt{2\pi} A \tau_{\text{in}} e^{-[(\omega - \omega_0)\tau_{\text{in}}]^2/2} e^{-j\beta_0 z} e^{-j\beta_1(\omega - \omega_0)z} e^{-j\beta_2(\omega - \omega_0)^2 z/2} \quad (8.123)$$

Le coefficient de ω contient le terme $-\beta_1 z$ qui, lorsque l'on prend la transformée de Fourier inverse pour obtenir la réponse temporelle, se combinera avec t pour donner $t' = t - \beta_1 z$. Ceci implique un décalage dans l'espace: l'enveloppe de l'impulsion se déplace à la vitesse de groupe $1/\beta_1 = v_g$. Quant au coefficient de $(\omega - \omega_0)^2$, il prend la forme

$$-\frac{1}{2}(\tau_{\text{in}}^2 + j\beta_2 z) \quad (8.124)$$

Revenant dans le domaine temporel en prenant la transformée de Fourier inverse, nous constatons que la demi-durée est donnée approximativement par [70]

$$\tau(z) \cong \sqrt{\tau_{\text{in}}^2 + \left(\frac{\beta_2 z}{\tau_{\text{in}}}\right)^2} \quad (8.125)$$

L'impulsion s'élargit en se propageant, de façon non linéaire en fonction de la distance. L'élargissement dépend de la largeur originale de l'impulsion $2\tau_{\text{in}}$ (une impulsion étroite s'élargit plus rapidement qu'une impulsion large), et de β_2 , dérivée seconde de β par rapport à ω . Cet élargissement est dû à une modulation de phase introduite par la propagation dispersive du signal dans le guide d'ondes.

8.6.18 Coupure dans les guides rectangulaires

Examinons en détail les phénomènes de coupure dans les guides rectangulaires. Puisque $f_c = p_{mn}c/2\pi$, le mode ayant la plus basse fréquence de coupure sera celui qui a les plus petits indices m et n , soit TE_{10} ou TE_{01} . Si nous choisissons $a > b$, nous avons

$$p_{10} = \pi/a < p_{01} = \pi/b \quad (8.126)$$

et le mode TE_{10} sera donc le mode qui peut se propager à la plus basse fréquence. Il est donc appelé *mode fondamental* ou *mode dominant* du guide. Dans la plupart des applications de guides rectangulaires, on visera à n'utiliser que le mode fondamental. Ainsi, on choisira une bande de fréquence de travail qui correspond à un $\underline{\gamma}$ imaginaire pour le mode TE_{10} et un $\underline{\gamma}$ réel pour tous les autres modes. La fréquence inférieure de cette bande et la longueur d'onde correspondante en propagation libre seront donc

$$f_{c,\text{TE}_{10}} = \frac{c}{2a} \quad \lambda_{c,\text{TE}_{10}} = 2a \quad (8.127)$$

Cette dernière relation, très utile, stipule simplement que pour permettre la propagation du mode fondamental, la largeur du guide doit être plus grande ou égale à la demi-longueur d'onde à la fréquence considérée. La limite supérieure de la bande utile du guide sera la plus petite fréquence de coupure de tous les autres modes. Tout dépendant du rapport de dimensions a/b , il peut s'agir du mode TE_{20} ou TE_{01} . Ainsi, on pourra démontrer que la bande utile est

$$\frac{c}{2a} < f < \frac{c}{a} \quad \text{si } b \leq a/2 \quad \frac{c}{2a} < f < \frac{c}{2b} \quad \text{si } b \geq a/2 \quad (8.128)$$

On constate donc qu'au mieux, la bande utile sera d'un octave pour les guides rectangulaires. En pratique cependant, on évite d'utiliser l'extrémité inférieure de la bande car la dispersion y est très importante. Aussi, comme nous le verrons (§ 8.6.26), les pertes par effet Joule dans les parois du guide deviennent considérables près de la fréquence de coupure. La dépendance entre la bande d'utilisation et c permet une certaine flexibilité sur l'ajustement de cette bande. Par exemple, un guide rempli d'un matériau de permittivité relative ϵ_r voit les fréquences limites de la bande utile réduites d'un facteur $\sqrt{\epsilon_r}$.

8.6.19 Coupure dans les guides circulaires

Puisque la fréquence de coupure correspond à $\underline{\gamma} = 0$, il en résulte que

$$(p_{mn}a)^2 = (ka)^2 + (\underline{\gamma}a)^2 = (k_c a)^2 = \left(\frac{\omega_c}{c} a\right)^2 \quad (8.129)$$

La fréquence de coupure est donc simplement

$$f_{c,mn} = \frac{p_{mn}c}{2\pi} \quad (8.130)$$

ce qui est la même chose que dans les guides rectangulaires sauf pour les valeurs de $p_{mn}a$, qui sont obtenues des tableaux 14.10 et 14.11. On constate donc que le mode fondamental d'un guide circulaire, c'est-à-dire le mode qui a la fréquence de coupure la plus basse, est le mode TE_{11} . Aussi, pour un guide donné, on peut voir que la bande de fréquences ne permettant la propagation que d'un seul mode est

$$\frac{1,8412c}{2\pi a} = f_c^{TE_{11}} < f < f_c^{TM_{01}} = \frac{2,4048c}{2\pi a} \quad (8.131)$$

D'après les tableaux 14.10 et 14.11, le quotient des fréquences limites est de $(2,4048/1,8412 = 1,306)$, ce qui est moindre que les possibilités du guide rectangulaire.

8.6.20 Modes TEM

Pour ces modes, on avait trouvé que

$$\underline{\gamma} = j\beta = jk = \frac{j\omega}{c} \quad (8.132)$$

La fréquence de coupure est donc nulle pour ce mode et la bande de fréquence utile n'est limitée que par l'apparition de modes d'ordre supérieur pouvant se propager dans la structure: à de très hautes fréquences on doit utiliser des câbles coaxiaux de petit diamètre.

8.6.21 Flux de puissance dans les guides

Le flux de puissance transportée par les ondes se propageant dans un guide est obtenu en intégrant la composante longitudinale du vecteur-phaseur de Poynting (§ 7.4.2) sur la section du guide soit

$$P_z = \operatorname{Re} \int_{\text{section du guide}} \underline{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_z \, dA = \operatorname{Re} \int_{\text{section du guide}} \{ \underline{E}(\mathbf{r}) \times \underline{H}^*(\mathbf{r}) \} \cdot \mathbf{e}_z \, dA \quad (8.133)$$

Les guides métalliques circulaires et rectangulaires que nous avons étudiés jusqu'à présent supportent plusieurs solutions (modes) indépendantes. En raison de l'orthogonalité de ces modes, il est possible de calculer séparément la puissance transportée par chacun d'eux, la puissance totale transportée étant la somme des puissances des modes.

À titre d'exemple, calculons la composante longitudinale du vecteur-phaseur de Poynting pour l'onde progressive d'un mode TE dans un guide rectangulaire

$$\begin{aligned} \underline{S}_z &= \{ \underline{E}(\mathbf{r}) \times \underline{H}^*(\mathbf{r}) \} \cdot \mathbf{e}_z = \underline{E}_x \underline{H}_y^* - \underline{E}_y \underline{H}_x^* \\ &= -\frac{|\underline{K}|^2 j \omega \mu \gamma}{p_{mn}^4} \left\{ \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin^2 \left(\frac{n\pi y}{b} \right) + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos^2 \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \right\} e^{-2\alpha z} \end{aligned} \quad (8.134)$$

Si le guide est rempli d'un matériau diélectrique sans pertes, ϵ , μ et k sont réels et γ peut être réel ou imaginaire selon que la fréquence soit inférieure ou supérieure à $f_{c,mn}$ du mode. Poursuivant le calcul en intégrant \underline{S}_z sur la section transversale pour un mode qui se propage dans un guide sans pertes, on arrive à

$$P_z(\text{TE}_{mn}) = \begin{cases} \frac{|\underline{K}|^2 \omega \mu \beta}{4 p_{mn}^2} ab & \text{si } m \neq 0 \text{ et } n \neq 0 \\ \frac{|\underline{K}|^2 \omega \mu \beta}{2 p_{mn}^2} ab & \text{si } m = 0 \text{ ou } n = 0 \end{cases} \quad (8.135)$$

Notons que le "ou" est exclusif dans cette dernière équation. La puissance maximum pouvant être propagée dans un guide est limitée par la valeur instantanée du champ électrique, celle-ci devant être en tout temps inférieure au champ de claquage du diélectrique. Puisque P_z augmente avec la section du guide (ab), on peut éviter le claquage, pour un niveau de puissance donné, en augmentant les dimensions du guide.

8.6.22 Impédance caractéristique

La notion d'impédance caractéristique s'était avérée fort utile dans le traitement des lignes de transmissions et des ondes planes. Par analogie, on peut assimiler la propagation d'un mode guidé à la propagation sur une ligne de transmission. Dans ce dernier cas, la définition de Z_c en fonction de la tension et du courant permet d'exprimer simplement la puissance transportée par une onde progressive sur la ligne (§ 3.3.3)

$$Z_c = \frac{\underline{I}_+(z)}{\underline{U}_+(z)} \quad P_{z+} = \text{Re} \{ \underline{U}_+(z) \underline{I}_+^*(z) \} = \frac{|\underline{U}_+(z)|^2}{Z_c} = Z_c |\underline{I}_+(z)|^2 \quad (8.136)$$

Ainsi, Z_c peut être défini de façon équivalente soit à partir du rapport tension/courant ou à partir du calcul de la puissance propagée. Dans le cas des modes TE et TM, la notion de tension est inexistante, ce qui peut rendre ambiguë la définition de l'impédance caractéristique. À titre d'exemple, la tension équivalente du mode TE_{10} peut être définie par

$$\underline{U}_+(z) = - \int_0^b \underline{E}_y(a/2, y, z) dy = b \underline{K} \frac{j \omega \mu}{p} e^{-\gamma z} \quad (8.137)$$

Dans cette définition, notons que nous avons arbitrairement choisi d'intégrer au centre du guide, en $x = a/2$, où le champ est le plus grand. À partir de ce résultat et de la puissance propagée (8.135), on peut obtenir

$$Z_g^{TE_{10}} = \frac{|U(z)|^2}{P_z} = \frac{2b}{a} \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{2b}{a} \frac{\sqrt{\mu/\epsilon}}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} = \frac{2b}{a} \frac{Z_c}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} \tag{8.138}$$

où $Z_c = \sqrt{\mu/\epsilon}$ est l'impédance d'une onde plane dans le milieu (8.15). Alternative-ment, si l'on définit l'impédance caractéristique du mode à partir des composantes transverses \underline{E}_t et \underline{H}_t , comme c'est le cas pour les ondes planes, on arrive à

$$Z_w^{TE_{10}} = \frac{-E_y(x, y, z)}{H_x(x, y, z)} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{\sqrt{\mu/\epsilon}}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} = \frac{Z_c}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} \tag{8.139}$$

Contrairement à la situation prévalant dans les lignes de transmission, les valeurs de l'impédance caractéristique basée sur le rapport des champs (impédance d'onde Z_w) et celle basée sur le calcul de P_z (impédance de guide Z_g) ne sont en général pas les mêmes (hormis le cas particulier où $a = 2b$). Nous pouvons encore définir un courant de guide en intégrant le courant de surface sur l'une des larges faces du guide, et obtenir ainsi deux autres impédances différentes (§ XIII.2.2.25). Pour cette raison, la notion d'impédance caractéristique doit être utilisée avec précaution dans l'analyse des modes non-TEM.

8.6.23 Excitation

Poursuivant notre analogie entre les lignes de transmission et les guides d'ondes, nous considérons maintenant l'ajout d'une source et d'une charge à chaque extrémité du guide d'ondes. Dans beaucoup d'applications, la charge consiste en une antenne cornet, conçue pour être adaptée au guide d'onde. La source peut se coupler au guide par le biais d'une ligne coaxiale. La transition entre la ligne coaxiale et le guide doit être conçue pour coupler le maximum de puissance dans le mode désiré du guide, qui est presque toujours le mode dominant. En pratique, le couplage est obtenu avec une sonde électrique, consistant en une courte tige métallique ou une sonde magnétique, laquelle consiste en une simple boucle de fil. Ces deux structures sont illustrées à la figure 8.21.

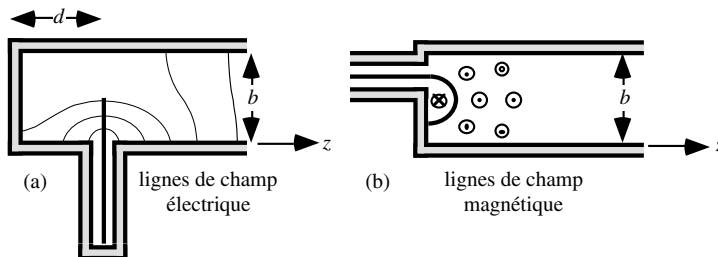


Fig. 8.21 Excitation d'un guide d'ondes (a) avec une sonde électrique (b) et une sonde magnétique.

Les sondes sont placées pour exciter le mode TE_{10} du guide, dont les champs sont

$$\underline{E}_y = -K \frac{j\omega\mu}{p} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-\gamma z} \quad \underline{H}_x = K \frac{\gamma}{p} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-\gamma z} \quad \underline{H}_z = K \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-\gamma z} \tag{8.140}$$

Comme la sonde électrique produit un fort champ \underline{E}_y , elle doit être placée à $x = a/2$, là où le champ \underline{E}_y du mode est maximum. La distance d entre la sonde et l'extrémité du guide est de $\lambda_g/4$, de façon à coïncider avec un maximum du champ électrique. En effet, le mur métallique dans le plan $z = 0$ produit une réflexion conduisant à des ondes stationnaires localement. Tel que cela est illustré à la figure 8.21(b), la sonde magnétique produit un champ \underline{H}_z de directions opposées de chaque côté du plan médian $x = a/2$, qui coïncide avec la distribution du champ \underline{H}_z du mode guidé. Les sondes doivent être dimensionnées pour minimiser les réflexions dans la ligne coaxiale qui alimente le guide.

8.6.24 Pertes dans les guides

Jusqu'à présent, nous avons considéré des modèles idéaux de guides où les pertes dans le diélectrique remplissant le guide et dans les parois métalliques entourant ce diélectrique étaient négligées. Voyons maintenant comment ces deux mécanismes de dissipation d'énergie affectent la propagation des modes guidés.

8.6.25 Pertes diélectriques

En premier lieu, nous considérons des parois métalliques sans pertes. Par contre, la permittivité dans le guide comporte une partie imaginaire non nulle

$$\underline{\epsilon} = \epsilon' - j\epsilon'' \quad (8.141)$$

considérant l'équation de séparation

$$\underline{\gamma}^2 = (\alpha + j\beta)^2 = p^2 - \underline{k}^2 = p^2 - \omega^2\mu(\epsilon' - j\epsilon'') \quad (8.142)$$

on constate que $\underline{\gamma}^2$ et $\underline{\gamma}$ sont maintenant complexes, p^2 étant réel. Et si l'on sépare $\underline{\gamma}$ en sa partie réelle et sa partie imaginaire, $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$, il résulte que toutes les composantes de champs sont proportionnelles à

$$e^{-(\alpha + j\beta)z} \quad (8.143)$$

Nous considérons ici une onde progressive, qui se propage en direction $+z$, il faut donc choisir une valeur positive pour α , car il est physiquement impossible que le mécanisme de pertes introduit conduise à une croissance exponentielle des champs. En résumé, l'introduction des pertes diélectrique conduit à un affaiblissement exponentiel des champs. Les expressions du champs demeurent exactement les mêmes que précédemment, sauf que la constante de propagation $\underline{\gamma}$ est maintenant complexe.

8.6.26 Pertes ohmiques

Les solutions aux équations de Maxwell obtenues jusqu'à présent supposaient des champs nuls dans les parois métalliques. En pratique, cependant, la conductivité des matériaux utilisés, quoique très élevée, n'est pas infinie et il y aura une légère pénétration des champs dans les parois. Dans ce cas, la solution rigoureuse des équations de Maxwell sort du cadre de cet ouvrage: dans le cas des guides rectangulaires, le problème ne possède même pas de solution analytique connue. Heureusement, le phénomène de pénétration peut être modélisé assez précisément à l'aide d'une approche perturbatrice. Celle-ci consiste à

utiliser la solution rigoureuse obtenue sans pertes métalliques et d'en déduire la distribution des courants sur les surfaces du guide. Cette distribution est ensuite utilisée pour évaluer les pertes encourues par effet de peau (§ 11.1.6). Rappelons que cet effet peut être représenté par une impédance de surface reliant le courant de surface au champ électrique tangentiel à la surface du métal

$$\underline{E}_{\text{tan}} = \underline{Z}_m \underline{J}_s \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_m = R_m + jX_m = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} \quad [\Omega/\text{carré}] \quad (8.144)$$

À titre d'exemple, nous calculerons les pertes dans un élément de longueur Δz de la paroi verticale placée à $x = 0$ d'un guide rectangulaire, lorsque le mode fondamental s'y propage. Le courant de surface est obtenu à partir du problème non perturbé

$$\underline{J}_s(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_n \times \underline{H}(\mathbf{r})|_{x=0} = \mathbf{e}_x \times \underline{H}(\mathbf{r})|_{x=0} = \mathbf{e}_y H_z(\mathbf{r})|_{x=0} = \mathbf{e}_y \underline{K} e^{-\gamma z} \quad (8.145)$$

La bande de largeur Δz ci-dessous est divisée en sous-éléments de hauteur Δy .

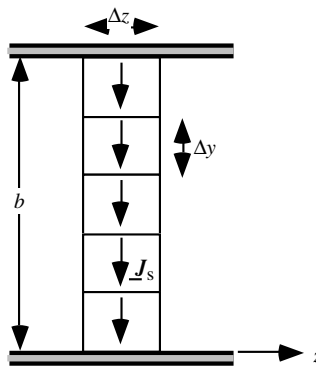


Fig. 8.22 Élément Δz du mur vertical à $x = 0$ supportant le courant de surface \underline{J}_s .

La résistance d'un sous-élément de surface de dimension $\Delta y \times \Delta z$ est, pour un courant circulant en direction y

$$R = R_m \Delta y / \Delta z \quad (8.146)$$

Le courant \underline{I} circulant dans cette résistance est donné par $\underline{I} = \underline{J}_s \Delta z$. La puissance P_z du mode guidé est donc affectée d'une perte

$$\Delta P_z = R |\underline{I}|^2 = R_m \Delta y \Delta z |J_s|^2 \quad (8.147)$$

ce qui devient, dans le cas d'éléments infinitésimaux,

$$-dP_z = R_m |J_s|^2 dy dz \quad (8.148)$$

En intégrant cette relation par rapport à y sur toute la hauteur du guide, on obtient

$$-\frac{dP_z}{dz} = \int_0^b R_m |J_s|^2 dy = R_m |\underline{K}|^2 b \quad (8.149)$$

Le membre de droite représente la perte de puissance par effet Joule dans un élément dz du mur. Si on répète le processus pour les quatre murs du guide et qu'on additionne les puissances dissipées, on obtient

$$\frac{dP_z}{dz} = -R_m |\underline{K}|^2 \left\{ 2b + a \left(1 + \frac{\beta^2}{p^2} \right) \right\} \quad (8.150)$$

Utilisant l'expression de $|\underline{K}|^2$ tirée de l'équation (8.135), il vient

$$\frac{dP_z}{dz} = -2\alpha P_z \quad (8.151)$$

où l'on a défini

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \frac{\pi^2}{\beta a^3 b} \left\{ b + \frac{a}{2} + \frac{a^3 \beta^2}{2\pi^2} \right\} \quad (8.152)$$

Notons que dans (8.152), β est la valeur obtenue pour le problème non perturbé (avec σ infini). La solution de l'équation (8.151) devient simplement

$$P_z(z) = P_z(0) e^{-2\alpha z} \quad (8.153)$$

et puisque $P_z(z)$ est proportionnel au carré du module des champs, nous en déduisons que

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{E} \\ \underline{H} \end{array} \right\}_{\text{perturbé}} = e^{-\alpha z} \left\{ \begin{array}{l} \underline{E} \\ \underline{H} \end{array} \right\}_{\text{non perturbé}} \quad (8.154)$$

On constate donc que, tout comme c'était le cas pour les pertes diélectriques, les pertes ohmiques conduisent à un affaiblissement exponentiel des champs. La présence de β au dénominateur dans (8.152) indique que lorsqu'on s'approche de la fréquence de coupure où β est nul, les pertes deviennent de plus en plus grandes (et la méthode de perturbation n'est en fait plus applicable). Pour cette raison, il est recommandé de laisser une bonne marge (env. 20%) entre la fréquence de coupure f_c et la fréquence d'opération f .

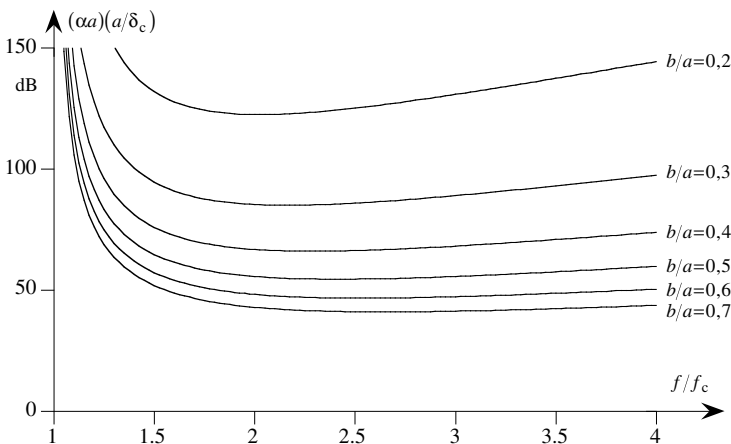


Fig. 8.23 Affaiblissement du mode dominant dans un guide d'ondes métallique rectangulaire, normalisé par rapport à la largeur du guide a et la profondeur de pénétration dans le métal à la fréquence de coupure $\delta_c = \sqrt{2/\omega_c \mu \sigma}$ (§ 8.2.7).

8.7 GUIDES D'ONDES DIÉLECTRIQUES, FIBRES OPTIQUES

par JEAN-JACQUES LAURIN

En plus des guides à parois métalliques, des structures composées uniquement de diélectriques peuvent guider les ondes électromagnétiques. L'exemple le plus courant est la fibre optique, abondamment utilisée pour les télécommunications. Dans les applications de communications ne nécessitant pas des niveaux élevés de puissance, les fibres offrent plusieurs avantages par rapport aux guides métalliques: elles sont légères et très petites, peu coûteuses et peu dissipatives, elles permettent de transporter plus d'information et ne sont pas victimes des interférences électromagnétiques. Les ondes guidées par les diélectriques apparaissent aussi, de façon parasite cette fois, dans les substrats utilisés pour la fabrication de circuits imprimés micro-ondes. Ce phénomène est particulièrement embarrassant dans le cas de conception d'antennes imprimées où ces modes contribuent à une perte d'efficacité et une détérioration des performances.

8.7.1 Phénomène de réflexion totale

Afin de visualiser physiquement le phénomène de guidage, nous étudierons la structure ci-dessous, formée de diélectriques sans pertes avec $\epsilon_2 > \epsilon_1$. En coordonnées cartésiennes (x, y, z) , il s'agit d'une lame à faces parallèles (§ 8.7.3), tandis qu'en coordonnées cylindriques, cette géométrie est celle d'une fibre optique (§ 8.7.11)

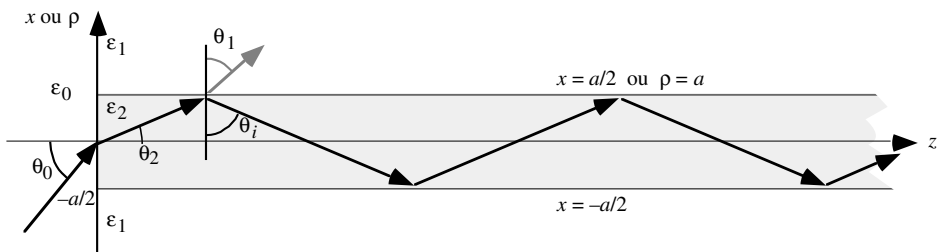


Fig. 8.24 Structure formée de diélectriques montrant le principe de réflexion totale.

Lorsqu'un rayon lumineux passe du milieu externe (ϵ_0) au milieu de permittivité élevée ϵ_2 avec un angle d'incidence θ_0 , il est réfracté avec un angle θ_2 , tel que prescrit par la loi de Snell (§ 8.3.6)

$$\sqrt{\epsilon_0} \sin \theta_0 = \sqrt{\epsilon_2} \sin \theta_2 \quad (8.155)$$

Poursuivant sa course, le rayon frappe l'interface entre les milieux 1 et 2 avec un angle d'incidence $\theta_i = 90^\circ - \theta_2$. Le passage du milieu 2 au milieu 1 est régi par

$$\sqrt{\epsilon_2} \sin \theta_i = \sqrt{\epsilon_1} \sin \theta_1 \quad (8.156)$$

Puisque $\epsilon_2 > \epsilon_1$, on obtiendra des valeurs de $\sin \theta_1$ supérieures à 1 pour de grands angles d'incidence θ_i . Comme nous l'avons vu précédemment (§ 8.4.2), ceci conduit à une

réflexion totale du rayon sur l'interface. Il en résulte donc que le rayon se trouve emprisonné entre les deux interfaces horizontales du milieu 2, ce qui donne lieu à un guidage le long de la direction z . La condition à remplir pour avoir ce guidage est donc

$$\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1} \sin \theta_i > 1 \quad (8.157)$$

Ainsi, pour qu'un rayon soit guidé dans la structure par le biais du phénomène de réflexion totale, il faut qu'il soit contenu dans un *secteur d'acceptance* dont l'angle d'ouverture est obtenu après quelques calculs simples

$$|\theta_0| < \theta_{0\max} = \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_0}} \right) \quad (8.158)$$

Nous constatons donc que dans le milieu 2 le rayon subit des réflexions multiples sur les interfaces. Considérant maintenant les champs qui correspondent à ce rayon, nous obtenons une situation similaire à celle rencontrée dans le cas du guide d'ondes métallique (§ 8.6.7), avec la superposition de deux ondes à propagation oblique. Il faut bien entendu que les champs des rayons successivement réfléchis par la surface supérieure (inférieure) s'additionnent en phase, ce qui n'est réalisé que pour certaines valeurs bien définies de l'angle d'incidence: comme pour les guides d'ondes métalliques, nous obtenons un ensemble de modes discrets.

8.7.3 Modes TEM

Les champs associés à un mode doivent évoluer selon le facteur $e^{-j\beta z}$ où β est le même dans les trois couches. Pour les modes TEM, il est requis que $\beta = k = \omega \sqrt{\varepsilon_i \mu_0}$. Étant donné que ε_i varie d'une couche à l'autre, il est impossible que β soit le même partout. En conséquence, les modes TEM ne peuvent exister dans cette structure.

8.7.4 Nombres d'ondes transverses

Dans le milieu 2, l'allure des champs des modes guidés est la même que dans un guide d'ondes à parois métalliques - nous avons seulement remplacé une situation de réflexion sur un conducteur par une réflexion totale sur une interface diélectrique. Le nombre d'onde transverse p est donc défini de la même façon qu'en (§ 8.6.2)

$$p = \sqrt{k_2^2 - \beta^2} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_2 \mu_0 - \beta^2} \quad (8.159)$$

Dans le milieu 1, en revanche, du fait de la condition de réflexion totale, nous avons une onde non-uniforme (§ 8.1.8), dont les champs décroissent lorsque l'on s'éloigne de l'interface. Cette situation correspondrait à un nombre d'onde transverse p_1 imaginaire, et on définit en fait le nombre d'onde q de la manière suivante

$$q = jp_1 = \sqrt{\beta^2 - k_1^2} = \sqrt{\beta^2 - \omega^2 \varepsilon_1 \mu_0} \quad (8.160)$$

Lorsque p et q sont connus, les autres paramètres s'obtiennent avec les relations

$$\omega = \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \mu_0}} \quad \text{et} \quad \beta = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 p^2 + \varepsilon_2 q^2}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}} \quad (8.161)$$

8.7.5 Propagation sur une lame à faces parallèles

Nous allons maintenant résoudre les équations de Maxwell dans la structure de la figure 8.24 en coordonnées cartésiennes. Afin de simplifier la discussion, nous supposons qu'il n'y a pas de variation des champs et de la géométrie le long de l'axe y perpendiculaire au plan de la figure. De plus, on supposera que les deux couches de permittivité ϵ_1 s'étendent sur $a/2 \leq x \leq \infty$ et sur $-\infty \leq x \leq -a/2$ respectivement [153].

8.7.6 Modes TE

Puisque $\partial/\partial y = 0$, il ne reste que trois composantes non nulles, soit \underline{H}_z , \underline{H}_x et \underline{E}_y . Dans la région 2, la solution générale s'écrit

$$\begin{aligned}\underline{H}_{z2} &= \{\underline{A} \cos(px) + \underline{B} \sin(px)\} e^{-j\beta z} \\ \underline{H}_{x2} &= \frac{-j\beta}{p} \{-\underline{A} \sin(px) + \underline{B} \cos(px)\} e^{-j\beta z} \\ \underline{E}_{y2} &= \frac{j\omega\mu_0}{p} \{-\underline{A} \sin(px) + \underline{B} \cos(px)\} e^{-j\beta z}\end{aligned}\quad (8.162)$$

avec p défini dans (8.159). Les solutions dans le milieu 1, du fait de la condition de réflexion totale, utiliseront un formalisme légèrement différent mais équivalent à celui que nous avons utilisé jusqu'ici. Partant de l'équation de Helmholtz (8.85) que nous avons obtenue au paragraphe 8.6.2 et prenant en considération que $\partial/\partial y = 0$, on arrive à

$$\frac{\partial^2 \underline{H}_{z1}}{\partial x^2} = \beta^2 \underline{H}_{z1} - \omega^2 \epsilon_1 \mu_0 \underline{H}_{z1} = q^2 \underline{H}_{z1} \quad (8.163)$$

avec q défini par (8.160). Tenant compte du fait qu'ils décroissent loin des interfaces, les champs qui satisfont cette équation dans les régions supérieure et inférieure sont

$$\begin{aligned}\underline{H}_{z1} &= \underline{C} e^{-qx} e^{-j\beta z} & \underline{H}_{z1} &= \underline{D} e^{qx} e^{-j\beta z} \\ \underline{H}_{x1} &= \frac{-j\beta}{q} \underline{C} e^{-qx} e^{-j\beta z} \quad \text{si } x > a/2, \text{ et} & \underline{H}_{x1} &= \frac{j\beta}{q} \underline{D} e^{qx} e^{-j\beta z} \quad \text{si } x < -a/2 \\ \underline{E}_{y1} &= \frac{j\omega\mu_0}{q} \underline{C} e^{-qx} e^{-j\beta z} & \underline{E}_{y1} &= \frac{-j\omega\mu_0}{q} \underline{D} e^{qx} e^{-j\beta z}\end{aligned}\quad (8.164)$$

Constatant que la structure est symétrique par rapport au plan $x = 0$, nous pouvons traiter indépendamment les solutions paires et impaires en \underline{H}_z , lesquelles correspondent aux deux termes de la solution de la région 2. Ainsi, pour la solution paire, nous avons $\underline{B} = 0$ et $\underline{C} = \underline{D}$. La solution impaire s'obtient en posant $\underline{A} = 0$ et $\underline{C} = -\underline{D}$. Il n'y a donc que deux constantes inconnues dans chaque solution (\underline{A} et \underline{C} ou \underline{B} et \underline{C}). En appliquant les conditions de continuité de \underline{H}_z et de \underline{E}_y à $x = \pm a/2$, on obtient les systèmes matriciels

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{pa}{2}\right) & -e^{-qa/2} \\ \frac{1}{p} \sin\left(\frac{pa}{2}\right) & \frac{1}{q} e^{-qa/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A} \\ \underline{C} \end{bmatrix} &= 0 & \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{pa}{2}\right) & -e^{-qa/2} \\ \frac{1}{p} \cos\left(\frac{pa}{2}\right) & -\frac{1}{q} e^{-qa/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{B} \\ \underline{C} \end{bmatrix} &= 0 \\ \text{solution paire} & & \text{solution impaire} & \end{aligned}\quad (8.165)$$

On obtient les solutions en annulant le déterminant des matrices, ce qui donne

$$-\frac{pa}{2} \cot\left(\frac{pa}{2}\right) = \frac{qa}{2} \quad \frac{pa}{2} \tan\left(\frac{pa}{2}\right) = \frac{qa}{2} \quad (8.166)$$

solution paire solution impaire

Par ailleurs, on sait que (8.161)

$$\left(\frac{pa}{2}\right)^2 + \left(\frac{qa}{2}\right)^2 = \left(\frac{\omega a}{2}\right)^2 (\epsilon_2 - \epsilon_1) \mu_0 \quad (8.167)$$

Les équations transcendentes (8.166) et (8.167) ne peuvent pas être résolues analytiquement pour trouver p et q . Par contre, une solution graphique est possible en représentant les deux expressions dans le plan $(pa/2, qa/2)$, dans lequel l'équation (8.167) définit des cercles dont le rayon dépend des constantes diélectriques et croît linéairement avec la fréquence. Les termes de gauche des équations (8.166) sont représentés par les lignes continues. Les solutions correspondent aux intersections de ces lignes avec le cercle qui correspond à la fréquence du signal. Nous remarquons qu'en basse fréquence (cercle de petit rayon), il n'y a qu'une intersection, et donc qu'un seul mode peut se propager puis, lorsque la fréquence augmente et le rayon du cercle croît, il y a une seconde intersection, puis une troisième, etc.

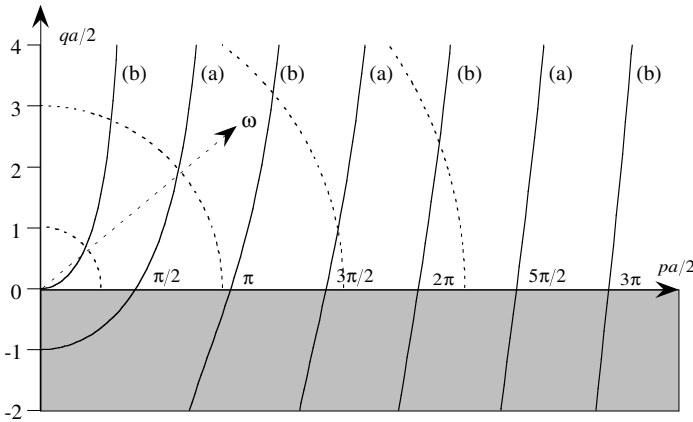


Fig. 8.25 Solution graphique de l'équation de dispersion des modes TE: (a) à symétrie paire, (b) à symétrie impaire.

La moitié inférieure ombragée de la figure correspond à des valeurs négatives de q et les solutions trouvées dans ces régions doivent être rejetées, car elles ne correspondent pas à des modes guidés. Cette région définit des zones de coupure. Aux fréquences de coupure, nous observons que $q = 0$ et donc, d'après l'équation (8.166), la première fréquence de coupure de la solution paire arrive lorsque $pa/2 = \pi/2$. Considérant l'équation (8.167), dans ces conditions et avec $q = 0$, on peut donc déduire toutes les fréquences de coupure

$$f_{c,n} = \frac{n-1}{2a} \frac{1}{\sqrt{\mu_0(\epsilon_2 - \epsilon_1)}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.168)$$

Les valeurs paires de n correspondent aux solutions paires, les valeurs impaires de n aux solutions impaires. Le fréquence de coupure du premier mode impair est nulle: ce mode peut donc, en principe, se propager sur toute la plage des fréquences. On remarque toutefois, en considérant la distribution des champs, que l'effet de guidage aux basses fréquences est très faible, les champs ne décroissant que très lentement dans la région 1.

Remarquons que dans les guides métalliques, la constante de séparation p était fixée par les dimensions du guide et était donc indépendante de la fréquence. Ceci n'est pas le cas pour p dans les guides diélectriques.

8.7.7 Modes TM

Dans le cas des modes TM, la solution générale pour la composante longitudinale du champ électrique dans la région 2 prend la forme

$$\begin{aligned} \underline{E}_z &= \underline{A} \cos(px)e^{-j\beta z} & \underline{E}_z &= \underline{B} \sin(px)e^{-j\beta z} \\ \text{solution paire en } \underline{E}_z & & \text{solution impaire en } \underline{E}_z \end{aligned} \tag{8.169}$$

On en déduit l'expression des composantes \underline{E}_x et \underline{H}_y , on définit les dépendances dans la région 1 et on applique les conditions aux limites en $x = \pm a/2$. Ces solutions conduisent aux équations de dispersion suivantes

$$\begin{aligned} -\frac{pa}{2} \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right) \cot\left(\frac{pa}{2}\right) &= \frac{qa}{2} & \frac{pa}{2} \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right) \tan\left(\frac{pa}{2}\right) &= \frac{qa}{2} \\ \text{solution paire} & & \text{solution impaire} \end{aligned} \tag{8.170}$$

La représentation graphique des équations (8.167) et (8.170) dans le même plan que précédemment est montrée en figure 8.26: les solutions sont données par les intersections des lignes continues avec les cercles. Les fréquences de coupure obtenues en posant $q = 0$ et $pa = (2n + 1)\pi$ dans (8.167) et (8.170) sont les mêmes que pour les modes TE (8.168).

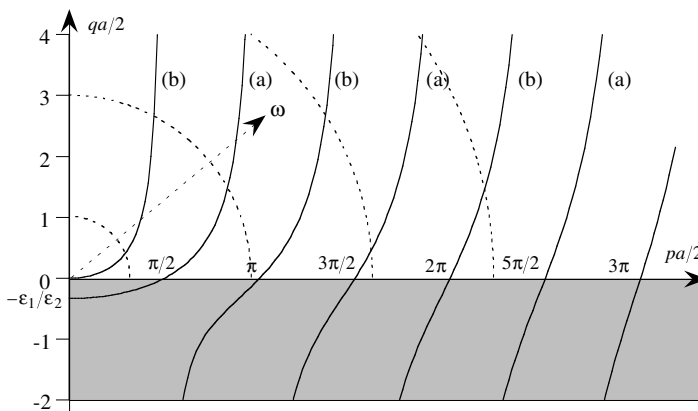


Fig. 8.26 Solution graphique de l'équation de dispersion des modes TM: (a) à symétrie paire, (b) à symétrie impaire.

8.7.8 Diagrammes de dispersion

Résolvant les équations transcendentes pour les modes TE et TM, on obtient le diagramme de dispersion qui représente l'allure des fonctions $\beta(\omega)$ pour les différents modes (fig. 8.27)

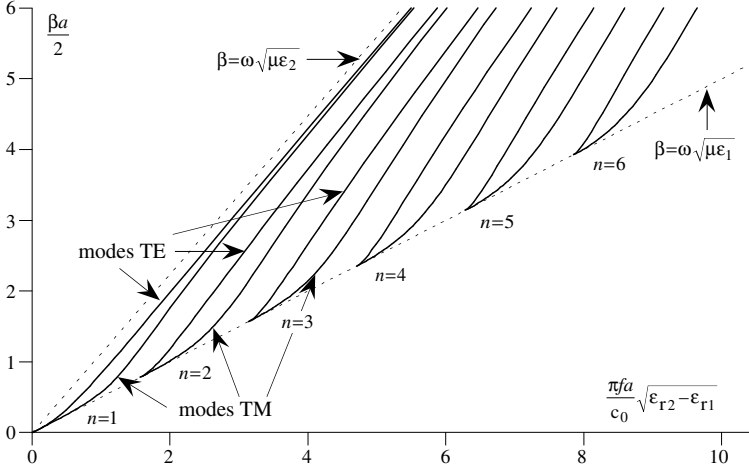


Fig. 8.27 Diagramme de dispersion normalisé pour le cas $\epsilon_2/\epsilon_1 = 5$.

Notons que pour des matériaux sans pertes, les constantes β^2 , p^2 et q^2 sont toutes positives lorsqu'il y a propagation. Les équations de séparation indiquent que

$$\omega^2 \epsilon_1 \mu_0 < \omega^2 \epsilon_1 \mu_0 + q^2 = \beta^2 = \omega^2 \epsilon_2 \mu_0 - p^2 < \omega^2 \epsilon_2 \mu_0 \tag{8.171}$$

d'où il découle que l'onde guidée selon z se propage plus rapidement qu'une onde plane uniforme dans le milieu 2, mais plus lentement qu'une onde plane uniforme dans le milieu 1. Nous constatons par ailleurs, dans la figure 8.27 que les caractéristiques $\beta(\omega)$ sont des courbes, et donc que le signal subit une distorsion liée à $\partial^2 \beta(\omega)/\partial \omega^2$ (8.125), sauf aux points d'inflexion des courbes.

8.7.9 Canaux optiques diffusés

On n'utilise pas directement des lames à faces parallèles pour guider des signaux dans des structures d'optique intégrée, mais leur analyse est très utile pour obtenir des solutions approchées pour la propagation dans des canaux diffusés (fig. 8.28) [70].

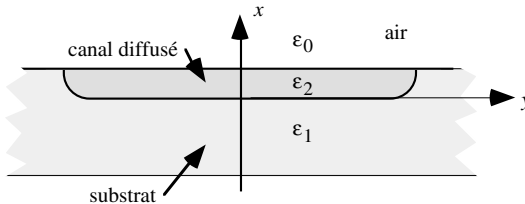


Fig. 8.28 Canal optique diffusé utilisé pour moduler des signaux en optique intégrée.

Il s'agit d'une structure plus complexe que la lame à faces parallèles, qui ne possède pas de symétrie, et qui a une dimension finie dans la direction y . La méthode développée aux paragraphes précédents, étendue à l'étude de la structure à 4 couches, permet d'obtenir une approximation de la propagation dans la région centrale de la structure. Une analyse rigoureuse de la propagation dans cette structure ne peut en revanche pas être effectuée par voie analytique, mais doit faire appel à des méthodes numériques approchées comme la collocation par points, les différences finies ou les éléments finis (chap. 13).

8.7.10 Ondes de surface sur des substrats de circuits imprimés

L'existence de ces modes de guides diélectriques, appelés aussi ondes de surface, joue un rôle important dans la performance de circuits et d'antennes imprimés sur des substrats diélectriques (§ 9.5.5). Afin de mieux saisir ce rôle, reprenons la structure illustrée en figure 8.24 et remplaçons la moitié de la structure située sous le plan yz par une plaque métallique. La structure résultante est communément utilisée pour la fabrication de circuits micro-ondes formés de microrubans [16].

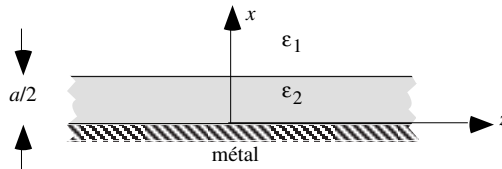


Fig. 8.29 Structure utilisée comme substrat pour des circuits micro-ondes imprimés.

Typiquement, le milieu 2 consiste en un isolant à faibles pertes dont la permittivité relative peut varier entre 2 et 10. Le milieu 1 est généralement de l'air et le métal utilisé est du cuivre ($\sigma = 5,8 \cdot 10^7$ S/m). Compte tenu de la présence d'un plan très conducteur à $x = 0$, les modes pouvant se propager dans cette structure devront avoir $\underline{E}_y = 0$ et $\underline{E}_z = 0$ à $x = 0$. Dans la région $x > 0$, cette structure est tout à fait identique à la structure étudiée à la figure 8.24. Nous pouvons donc nous permettre d'utiliser les mêmes solutions pour les champs, à condition qu'elles respectent les conditions que nous venons d'énoncer à la frontière $x = 0$. En examinant les solutions obtenues dans les paragraphes précédents, on voit que dans le cas TE, la solution paire ($\underline{B}_z = 0$) garantit que $\underline{E}_y = 0$ et $\underline{E}_z = 0$ à $x = 0$. Il en est de même pour les modes impairs ($\underline{A}_z = 0$) de type TM.

Les courants circulant sur les pistes des circuits imprimés dans le plan $x = a/2$ peuvent exciter ces modes, donnant lieu à une perte de puissance difficilement prévisible et pouvant conduire à des couplages électromagnétiques parasites entre les pistes d'un même circuit. Rappelons que pour le premier mode TE pair, la fréquence de coupure est

$$f_{c,1} = \frac{1}{2a \sqrt{\mu_0(\epsilon_2 - \epsilon_1)}} \quad (8.172)$$

alors que le premier mode TM impair a une fréquence de coupure nulle. Il sera donc possible pour une fréquence de travail donnée d'éviter les modes TE en choisissant un substrat mince et à faible permittivité [86]. En revanche, on ne peut pas empêcher la propagation du premier mode TM: des précautions particulières doivent donc être prises pour éviter de l'exciter.

8.7.11 Guide diélectrique à géométrie circulaire - fibre optique à saut d'indice

Les guides étudiés à la section précédente étaient infinis en direction y , ce qui nous avait permis de supposer que la dérivée par rapport à y de toutes les composantes de champ était nulle. Dans le cas de structures à symétrie cylindrique comme celle illustrée à la figure 8.30, le confinement des champs dans les deux directions transverses est inévitable. La solution des équations de Maxwell sera donc plus complexe [153].

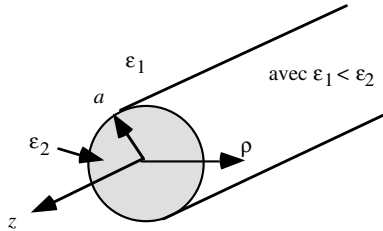


Fig. 8.30 Guide diélectrique à "saut d'indice" à géométrie circulaire.

Le processus de multiples réflexions totales des rayons illustré dans la figure 8.24 reste approximativement valable en coordonnées circulaires, la situation devenant toutefois plus complexe du fait qu'il peut y avoir des incidences obliques.

8.7.12 Solution rigoureuse

La démarche de solution sera la même que dans le cas des guides à géométrie plane, c'est-à-dire que nous développerons les solutions générales dans les régions 1 et 2, suite à quoi les équations de dispersion seront trouvées en appliquant les conditions frontières à l'interface $\rho = a$. La forme générale de solution trouvée aux paragraphes 8.6.9 et 8.6.10 pour les guides cylindriques est tout à fait indiquée pour la région 2. En effet, ces solutions satisfont aux équations de Maxwell et garantissent que les champs soient finis ou nuls à $\rho = 0$. Contrairement aux guides métalliques, il n'est plus nécessaire cette fois d'imposer que les champs électriques tangentiels à la surface $\rho = a$ soient nuls. Il en résulte que la constante p n'est plus fixée uniquement par le diamètre du guide mais aussi par la fréquence et les propriétés des matériaux.

La région 1 ne contient pas $\rho = 0$ et il serait donc possible d'utiliser une solution générale qui contiendrait à la fois des fonctions de Bessel de première et de deuxième (Neumann) espèces. Ces fonctions $J_m(p_1\rho)$ et $N_m(p_1\rho)$ peuvent être combinées pour donner deux autres solutions linéairement indépendantes, soit les fonctions de Hankel de première et de deuxième espèce

$$H_m^{(1)}(p_1\rho) = J_m(p_1\rho) + jN_m(p_1\rho) \quad H_m^{(2)}(p_1\rho) = J_m(p_1\rho) - jN_m(p_1\rho) \quad (8.173)$$

Dans le cas de régions ouvertes sur l'infini, l'utilisation de fonctions de Hankel est plus utile d'un point de vue physique que l'utilisation des fonctions $J_m(p_1\rho)$ et $N_m(p_1\rho)$. En effet, il est possible de démontrer que les solutions $H_m^{(1)}(p_1\rho)$ et $H_m^{(2)}(p_1\rho)$ correspondent à des ondes dont le flux de puissance en direction e_ρ est respectivement négatif et positif. Dans les problèmes de guides qui nous intéressent, nous considérerons que la puissance provient du guide d'onde et non de l'infini et, en conséquence, nous ne conserverons que la solution de type $H_m^{(2)}(p_1\rho)$. Par ailleurs, la propagation d'un mode

guidé le long de la direction z ne nécessite pas qu'il y ait une fuite de puissance en direction e_ρ . Comme nous l'avons vu dans les guides plans, les champs peuvent simplement être évanescents dans la direction transversale à e_z . Dans ce cas, il suffit d'utiliser un argument imaginaire dans la fonction de Hankel, c'est-à-dire

$$H_m^{(2)}(p_1\rho) = H_m^{(2)}(-jq\rho) \quad \text{avec } p_1 = -jq \quad (8.174)$$

où q est défini par (8.160). En vertu de l'identité

$$K_m(q\rho) = -j^{m+1} \frac{\pi}{2} H_m^{(2)}(-jq\rho) \quad (8.175)$$

on obtient alors que la solution dans la région 1 peut être écrite sous forme de la fonction de Bessel modifiée $K_m(q\rho)$ de l'argument réel $q\rho$. Lorsque ρ tend vers l'infini, $K_m(q\rho)$ tend exponentiellement vers zéro (fig. 14.12). Ceci garantit un confinement des champs au voisinage du guide.

8.7.13 Modes TE

En utilisant les équations (8.105), (8.106) et (8.108), on peut écrire les expressions des champs dans le milieu 2

$$\begin{aligned} \underline{E}_{\rho 2}(\rho, \varphi, z) &= \underline{A} \frac{j\omega\mu}{p^2} \frac{m}{\rho} J_m(p\rho) \sin(m\varphi) e^{-j\beta z} & \underline{H}_{\rho 2}(\rho, \varphi, z) &= -\underline{A} \frac{j\beta}{p} J'_m(p\rho) \cos(m\varphi) e^{-j\beta z} \\ \underline{E}_{\varphi 2}(\rho, \varphi, z) &= \underline{A} \frac{j\omega\mu}{p} J'_m(p\rho) \cos(m\varphi) e^{-j\beta z} & \underline{H}_{\varphi 2}(\rho, \varphi, z) &= \underline{A} \frac{j\beta}{p^2} \frac{m}{\rho} J_m(p\rho) \sin(m\varphi) e^{-j\beta z} \\ \underline{E}_{z 2}(\rho, \varphi, z) &= 0 & \underline{H}_{z 2}(\rho, \varphi, z) &= \underline{A} J_m(p\rho) \cos(m\varphi) e^{-j\beta z} \end{aligned} \quad (8.176)$$

où on a supposé que $\varphi_0 = 0$, et où p est donné par

$$p = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_2 \mu_0 - \beta^2} \quad (8.159)$$

Dans la région 1, la solution générale est de type

$$\begin{aligned} \underline{E}_{\rho 1}(\rho, \varphi, z) &= -\underline{B} \frac{j\omega\mu}{q^2} \frac{m}{\rho} K_m(q\rho) \sin(m\varphi) e^{-j\beta z} & \underline{H}_{\rho 1}(\rho, \varphi, z) &= \underline{B} \frac{j\beta}{q} K'_m(q\rho) \cos(m\varphi) e^{-j\beta z} \\ \underline{E}_{\varphi 1}(\rho, \varphi, z) &= -\underline{B} \frac{j\omega\mu}{q} K'_m(q\rho) \cos(m\varphi) e^{-j\beta z} & \underline{H}_{\varphi 1}(\rho, \varphi, z) &= -\underline{B} \frac{j\beta}{q^2} \frac{m}{\rho} K_m(q\rho) \sin(m\varphi) e^{-j\beta z} \\ \underline{E}_{z 1}(\rho, \varphi, z) &= 0 & \underline{H}_{z 1}(\rho, \varphi, z) &= \underline{B} K_m(q\rho) \cos(m\varphi) e^{-j\beta z} \end{aligned} \quad (8.177)$$

Dans ce cas, le nombre d'onde transverse est

$$q = \sqrt{\beta^2 - \omega^2 \varepsilon_1 \mu_0} \quad (8.160)$$

L'équation de dispersion des modes est obtenue en écrivant les conditions frontières à $\rho = a$.

$$\begin{aligned} \underline{E}_\varphi: \quad & \underline{A} \frac{j\omega\mu}{p} J'_m(pa) = -\underline{B} \frac{j\omega\mu}{q} K'_m(qa) \\ \underline{H}_\varphi: \quad & \underline{A} \frac{j\beta}{p^2} \frac{m}{a} J_m(pa) = -\underline{B} \frac{j\beta}{q^2} \frac{m}{a} K_m(qa) \end{aligned} \quad (8.178)$$

$$\underline{H}_z: \quad \underline{A} J_m(pa) = \underline{B} K_m(qa)$$

On remarque que les trois équations écrites en termes des deux inconnues \underline{A} et \underline{B} sont linéairement indépendantes. Il sera donc impossible en général de trouver des valeurs de \underline{A} et \underline{B} qui satisfassent simultanément les trois équations. Dans un cas particulier, si $m = 0$, la deuxième équation disparaît car $\underline{H}_\varphi = 0$ et l'équation de dispersion prend la forme

$$pJ_0(pa)K'_0(qa) + qK_0(qa)J'_0(pa) = 0 \quad (8.179)$$

Cette équation transcendante non linéaire doit être résolue numériquement, conjointement avec les équations de séparation dans les deux milieux. En général, il est possible de trouver plusieurs racines à l'équation de dispersion, chacune d'elle correspondant à un mode de propagation TE_{0n} . Puisque $m = 0$, chacun de ces modes aura une distribution de champ dotée de la symétrie azimutale.

8.7.14 Modes TM

Par une démarche analogue, il est possible de trouver l'équation de dispersion pour les modes TM. Cette recherche est laissée comme exercice au lecteur.

8.7.15 Modes hybrides

Comme nous l'avons vu dans les paragraphes précédents, les modes TE_{mn} et TM_{mn} qui n'ont pas la symétrie azimutale (i.e. $m \neq 0$) ne peuvent exister seuls dans le guide. Nous nous proposons maintenant d'étudier la possibilité de pouvoir former un mode hybride qui serait une combinaison d'un mode TE_{mn} et d'un mode TM_{mn} . L'expression complète des champs dans un tel mode serait donnée par les formules suivantes où les coefficients \underline{A} et \underline{B} sont associés à la contribution TE et les coefficients \underline{C} et \underline{D} le sont à la contribution TM. Ainsi, dans le milieu 2, on aurait

$$\begin{aligned} \underline{E}_{\rho 2}(\rho, \varphi, z) &= \frac{j}{p^2} \left(\underline{A} \frac{\omega\mu m}{\rho} J_m(p\rho) - \underline{C} \beta p J'_m(p\rho) \right) \sin(m\varphi) e^{-j\beta z} \\ \underline{E}_{\varphi 2}(\rho, \varphi, z) &= \frac{j}{p^2} \left(\underline{A} \omega\mu p J'_m(p\rho) - \underline{C} \beta \frac{m}{\rho} J_m(p\rho) \right) \cos(m\varphi) e^{-j\beta z} \\ \underline{E}_{z 2}(\rho, \varphi, z) &= \underline{C} J_m(p\rho) \sin(m\varphi) e^{-j\beta z} \\ \underline{H}_{\rho 2}(\rho, \varphi, z) &= \frac{j}{p^2} \left(-\underline{A} \beta p J'_m(p\rho) + \underline{C} \frac{\omega\epsilon_2 m}{\rho} J_m(p\rho) \right) \cos(m\varphi) e^{-j\beta z} \\ \underline{H}_{\varphi 2}(\rho, \varphi, z) &= \frac{j}{p^2} \left(\underline{A} \frac{\beta m}{\rho} J_m(p\rho) - \underline{C} \omega\epsilon_2 p J'_m(p\rho) \right) \sin(m\varphi) e^{-j\beta z} \\ \underline{H}_{z 2}(\rho, \varphi, z) &= \underline{A} J_m(p\rho) \cos(m\varphi) e^{-j\beta z} \end{aligned} \quad (8.180)$$

alors que dans le milieu 1, les formules prennent la forme

$$\begin{aligned}
 \underline{E}_{\rho 1}(\rho, \varphi, z) &= \frac{j}{q^2} \left(-\underline{B} \frac{\omega \mu m}{\rho} K_m(q\rho) + \underline{D} \beta q K'_m(q\rho) \right) \sin(m\varphi) e^{-j\beta z} \\
 \underline{E}_{\varphi 1}(\rho, \varphi, z) &= \frac{j}{q^2} \left(-\underline{B} \omega \mu q K'_m(q\rho) + \underline{D} \beta \frac{m}{\rho} K_m(q\rho) \right) \cos(m\varphi) e^{-j\beta z} \\
 \underline{E}_{z1}(\rho, \varphi, z) &= \underline{D} K_m(q\rho) \sin(m\varphi) e^{-j\beta z} \\
 \underline{H}_{\rho 1}(\rho, \varphi, z) &= \frac{j}{q^2} \left(\underline{B} \beta q K'_m(q\rho) - \underline{D} \frac{\omega \varepsilon_1 m}{\rho} K_m(q\rho) \right) \cos(m\varphi) e^{-j\beta z} \\
 \underline{H}_{\varphi 1}(\rho, \varphi, z) &= \frac{j}{q^2} \left(-\underline{B} \frac{\beta m}{\rho} K_m(q\rho) + \underline{D} \omega \varepsilon_1 q K'_m(q\rho) \right) \sin(m\varphi) e^{-j\beta z} \\
 \underline{H}_{z1}(\rho, \varphi, z) &= \underline{B} K_m(q\rho) \cos(m\varphi) e^{-j\beta z}
 \end{aligned} \tag{8.181}$$

En invoquant la continuité de \underline{E}_z , \underline{E}_φ , \underline{H}_z et \underline{H}_φ à $\rho = a$, on obtient quatre équations linéaires indépendantes en fonction des coefficients \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} et \underline{D} . Pour qu'il y ait une solution non triviale, il faut que le déterminant s'annule, ce qui conduit à l'équation de dispersion reliant k_1 et k_2 à β , p et q

$$\left\{ \frac{K'_m(qa)}{qaK_m(qa)} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{J'_m(pa)}{paJ_m(pa)} \right\} \left\{ \frac{K'_m(qa)}{qaK_m(qa)} + \frac{J'_m(pa)}{paJ_m(pa)} \right\} = \frac{m^2 \beta^2}{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_1} \left(\frac{1}{(pa)^2} + \frac{1}{(qa)^2} \right)^2 \tag{8.182}$$

Cette équation doit être résolue numériquement, en compagnie des équations de séparation.

$$p = \sqrt{k_2^2 - \beta^2} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_2 \mu_0 - \beta^2} \tag{8.159}$$

$$q = jp_1 = \sqrt{\beta^2 - k_1^2} = \sqrt{\beta^2 - \omega^2 \varepsilon_1 \mu_0} \tag{8.160}$$

Pour chaque valeur de m , plusieurs racines peuvent être trouvées à l'équation de dispersion. Par exemple, β_{mn} correspond à la n ème racine de la solution de type $\cos(m\varphi)$ ou $\sin(m\varphi)$. Le mode hybride fondamental ($m = 1$, $n = 1$), connu sous l'appellation HE_{11} , est le seul mode ayant une fréquence de coupure nulle. Il pourra donc se propager, peu importe la dimension du guide. Par contre, les autres modes hybrides, ainsi que les modes TE_{0n} et TM_{0n} ne se propagent qu'au-dessus de fréquences de coupures non nulles.

Nous n'avons considéré jusqu'ici que des modes guidés, pour lesquels la condition de réflexion totale sur le pourtour de la région 2 est respectée. Dans ce cas, $q^2 > 0$, les champs dans la région 1 sont confinés dans la direction radiale et il n'y a pas de flux net de puissance dans cette direction. Dans d'autres situations, la réflexion n'est pas totale, et dans ce cas la constante q^2 peut prendre une valeur négative ou complexe. Lorsque $q^2 < 0$, nous avons que q est imaginaire. Dans ce cas, en vertu de l'identité

$$K_m(q\rho) = -j^{m+1} \frac{\pi}{2} H_m^{(2)}(-jq\rho) \tag{8.175}$$

les champs dans la région 1 sont proportionnels à la fonction $H_m^{(2)}$ dont l'argument est alors réel. Ceci implique qu'il y a rayonnement dans la direction e_ρ (*ondes de fuite*, en anglais *leaky waves*). Cette transition du régime évanescent au régime rayonnant peut être exploitée dans la conception d'antennes formées de tiges diélectriques (ϵ_2) immergées dans l'air ($\epsilon_1 = \epsilon_0$).

8.7.16 Développement des fibres optiques

Suite à des progrès importants dans la technologie de fabrication des fibres au début des années 70, notamment la réduction de l'affaiblissement linéique α à quelques dixièmes de dB/km, la transmission de données par fibres optiques a connu une prolifération considérable. Parmi les multiples avantages des fibres sur les lignes de transmission métalliques conventionnelles, on peut identifier une excellente immunité à l'interférence électromagnétique, une largeur de bande considérable, des pertes par absorption très faibles, un poids et un encombrement moindre, le tout à un coût de fabrication minime.

Une fibre optique consiste en une superposition concentrique de deux régions, c'est-à-dire le cœur, dont l'indice de réfraction $n_2 = \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_0}$ est plus élevé et la gaine ou enveloppe d'indice de réfraction $n_1 = \sqrt{\epsilon_1/\epsilon_0}$ plus faible. Le matériau de base servant à fabriquer la fibre est la silice. Celle-ci est dopée d'impuretés (par exemple, oxyde de germanium) dans la région du cœur pour en augmenter localement l'indice n_2 . En pratique, la différence entre n_1 et n_2 n'est que de 1 à 2%. L'ensemble cœur-enveloppe forme une structure semblable au guide diélectrique étudié à la section précédente (fig. 8.30). Par conséquent, il y aura donc guidage de lumière par le cœur.

Il a été déterminé expérimentalement que les longueurs d'onde optiques de 1,3 μm et 1,55 μm correspondent à des minima d'absorption de l'énergie par le matériau même de la fibre. Ces longueurs d'onde, qui se situent dans la partie infrarouge du spectre, ont été adoptées comme standards par l'industrie des fibres. Pour un rayon donné a du cœur et à une longueur d'onde donnée, plusieurs modes peuvent potentiellement se propager dans une fibre: dans les premières fibres optiques, avec un cœur de rayon entre 20 et 150 μm , un grand nombre de modes peuvent se propager à la fréquence du signal (fonctionnement multimode). Les différences de vitesse de propagation entre les modes conduisent à un étalement des impulsions lumineuses, ce qui diminue la largeur de bande utile de la fibre. Dans le cas où n_2 ne dépend pas de ρ et que b est suffisamment grand pour pouvoir négliger les effets de l'interface extérieur de la fibre avec l'air, nous avons vu au paragraphe précédent que le mode dominant est de type HE_{11} . Une telle fibre ayant n_2 constant est appelée fibre à *saut d'indice*. Les fibres à saut d'indice possèdent des propriétés de dispersion non optimisées, avec un étalement de l'ordre de 25 ns/km.

Dans une deuxième phase, le cœur homogène de la fibre (à saut d'indice) a été remplacé par un cœur dont l'indice varie radialement, appelée fibre à *profil d'indice*. La structure typique d'une telle fibre est illustrée à la figure 8.31. En pratique, on module n_2 en fonction de ρ de façon à avoir un profil d'indice qui se rapproche d'une fonction parabolique ou gaussienne. La distribution des champs est alors légèrement différente de celle des modes trouvés à la section précédente et elle ne peut en général pas être obtenue sous forme analytique. On doit donc avoir recours à des techniques approchées telles que la méthode des éléments finis (sect. 13.5) ou la "Beam Propagation Method" [158].

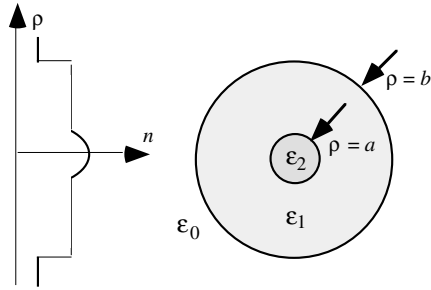


Fig. 8.31 Structure typique d'une fibre optique et son profil d'indice de réfraction.

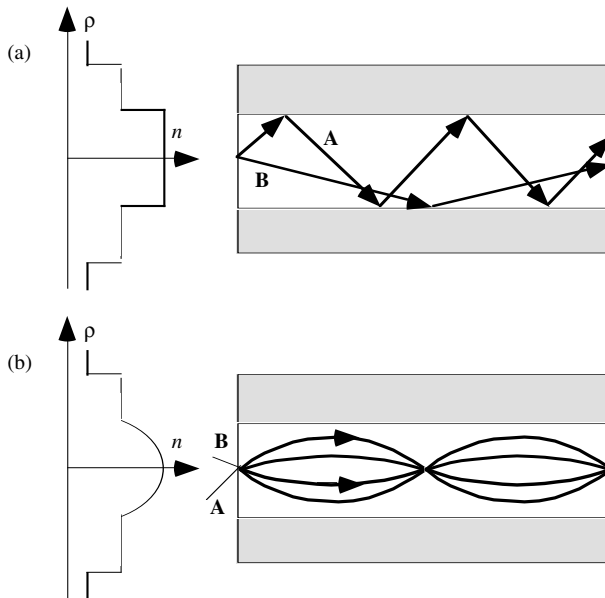


Fig. 8.32 Tracé des rayons dans une fibre à saut d'indice (a) et dans une fibre à profil d'indice modulé (b).

Le phénomène de dispersion dans une fibre multimode à saut d'indice peut être visualisé à la figure 8.32, où une approche d'optique géométrique est utilisée.

Imaginons une impulsion lumineuse couplée à l'entrée de la fibre du côté gauche de la figure et se répartissant en un faisceau de rayons. Dans la figure 8.32(a), on voit que les rayons **A** et **B** suivent des parcours de longueur différente, et mettent donc des temps différents pour parcourir à vitesse constante la même distance le long de la fibre. L'impulsion à la sortie de la fibre sera donc considérablement étalée. En adoptant un profil d'indice comme dans la figure 8.32(b), la différence du temps de parcours entre rayons **A** et **B** peut être réduite: lorsque le rayon **A** s'éloigne du centre de la fibre, l'indice de réfraction diminue et la vitesse de propagation augmente. Par conséquent, les différences de longueur de parcours sont compensées par des variations de vitesses, ce qui contribue à diminuer la dispersion dans la fibre. L'étalement du signal peut alors être ramené à environ 1 ns/km.

Toutefois, l'utilisation d'une fibre en régime multimode n'est pas souhaitable pour des applications de télécommunications, du fait de la dispersion qui en résulte. Il y a donc un avantage à choisir a et $(\epsilon_2 - \epsilon_1)$ petits pour faire en sorte qu'un seul mode, c'est-à-dire le mode dominant, puisse se propager. Ultiment, pour minimiser le phénomène de dispersion, on aura recours à une fibre monomode dont le cœur, de dimension plus petite, a un profil d'indice de réfraction à peu près constant. Typiquement, le rayon du cœur pour les fibres multimodes varie entre 20 et 150 μm alors qu'il est de l'ordre de 1,5 à 8 μm pour les fibres monomodes.

L'emploi de fibres monomodes permet d'éliminer la dispersion produite par la présence simultanée de plusieurs modes. Néanmoins, deux sources de dispersion subsistent, qui sont toutefois moins importantes: celle due à la variation non linéaire de $\beta(\omega)$ (§ 8.6.17), et le fait que la permittivité du matériau silice varie légèrement avec la fréquence.

Vu le rayon extrêmement réduit de leur cœur, les fibres monomodes ont donné lieu à d'intéressants problèmes d'alignement: il s'agit d'assurer que le signal infrarouge fourni par la source soit bien injecté dans le cœur de la fibre, qu'il traverse sans trop de pertes les connexions éventuelles entre plusieurs fibres en cascade, puis qu'il atteigne le récepteur avec un niveau suffisant pour être récupérable. Ces problèmes techniques ont retardé la mise en service des fibres monomodes, mais ils sont actuellement maîtrisés.

8.8 EXERCICES

8.8.10 Le mode TE_{10} est excité dans un guide rectangulaire de dimensions latérales a et b ($a > b$). Exprimer le courant de surface sur les quatre parois du guide, en fonction de a , b , μ , ϵ et ω .

8.8.11 (a) Un guide rectangulaire de dimensions latérales 2,3 cm \times 0,9 cm contient de l'air. Trouvez la valeur de la fréquence de coupure du mode fondamental.

(b) On désire utiliser ce guide pour un signal de 5 GHz. Quelle doit être la permittivité du matériau pour cette application ($\mu_r = 1$) ?

(c) Pour le guide vide (cas a), sur quelle bande de fréquence y a-t-il un seul mode de propagation possible?

(d) Pour le guide vide (cas a), le champ disruptif est de 300 kV/m. Quelle puissance maximum peut-on y propager à $f = 1,5 f_c$ dans le mode fondamental ?

8.8.12 Le diamètre interne d'un guide d'onde rempli d'un diélectrique de permittivité $\epsilon_r = 80$ est de 10 cm. Quelle bande de fréquence permet l'utilisation du guide en régime monomode ?

8.8.13 Sur la base des résultats du problème 8.8.10, calculez la puissance moyenne dissipée dans un élément de longueur Δz des parois larges d'un guide rectangulaire dans le mode fondamental. Servez-vous de ce résultat pour démontrer les équations (8.150) et (8.152) du texte.

8.8.14 Un guide rectangulaire est partiellement rempli d'un matériau diélectrique tel que montré à la figure 8.33.

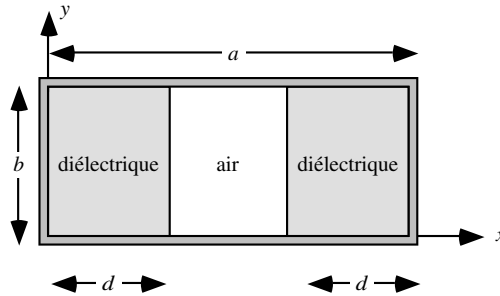


Fig. 8.33 Guide d'ondes rectangulaire partiellement chargé par un diélectrique, dans lequel $\mu_r=1$, $\epsilon'_r>1$ et $\epsilon''_r=0$.

(a) Trouvez la solution générale des équations de Maxwell pour les modes TE_{m0} dans la région diélectrique et dans la région d'air.

(b) À partir de la solution trouvée en (a), trouvez l'équation de dispersion du mode fondamental dans la structure.

(c) Obtenez l'expression pour le flux moyen de puissance en direction z et comparez le résultat, en prenant $d=0$, avec la formule donnée dans le cas d'un guide rempli d'air.

(d) Déterminer sous quelle condition le champ dans la région centrale (air) peut être indépendant de la coordonnée x .

8.8.15 Au paragraphe 8.6.22, nous avons calculé l'impédance caractéristique du mode TE_{10} d'un guide rectangulaire en nous basant sur la tension et la puissance. Faites usage du courant circulant sur la face supérieure du guide

$$\underline{I}^+ = \int_0^a \underline{J}_s(x, y=0, z=0) \cdot \underline{e}_z dx$$

et des définitions suivantes

$$P_z = \text{Re}\left\{Z_{PI}|\underline{I}^+|^2\right\} \quad \text{et} \quad Z_{VI} = \underline{U}^+ / \underline{I}^+$$

Trouvez les expressions de ces deux impédances et comparez-les avec celles données dans le texte.

8.8.16 À cause de la symétrie azimutale des guides circulaires, le champ électrique transversal peut être orienté dans n'importe quelle direction car ϕ_0 est arbitraire. À partir des distributions de champ trouvées dans le texte, proposez un dispositif simple qui, une fois inséré dans le guide circulaire, forcerait le champ électrique transversal \underline{E}_t à être polarisé verticalement au centre du guide.

8.8.17 Un guide circulaire est utilisé à 10 GHz. Le matériau remplissant le guide a pour propriétés $\underline{\epsilon} = \epsilon_0(2,6 - j0,01)$ et $\mu = \mu_0$. Quelles sont les parties réelle et imaginaire de l'exposant de propagation du mode TE_{01} lorsque $a = 5, 10$ et 15 cm?

8.8.18 Montrer que dans les modes TE_{m0} d'un guide rectangulaire les composantes de champs \underline{H}_x et \underline{H}_z décrivent une polarisation elliptique. À quelles positions cette polarisation est-elle circulaire?

8.8.19 On désire construire des circuits imprimés sur des substrats de permittivités relatives $\epsilon_r = 2,33$ et $\epsilon_r = 9,8$. Ces circuits seront utilisés à 1, 2, 5, 10 et 20 GHz. Dans chaque cas, déterminez l'épaisseur maximum que devrait avoir le substrat pour minimiser l'excitation d'ondes de surface.

8.8.20 Dans un mode de guide rectangulaire, l'équation de séparation s'écrit

$$\underline{\gamma}^2 = (\alpha + j\beta)^2 = -\underline{k}^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

Dans le cas où le diélectrique remplissant le guide comporte des pertes, démontrez que le choix d'une valeur positive pour la partie imaginaire β implique que la partie réelle α sera aussi positive.

Références

- [70] D.L. LEE, *Electromagnetic Principles of Integrated Optics*, New York, Wiley, 1986.
- [153] C. A. BALANIS, *Advanced Engineering in Electromagnetics*, Wiley, New York, 1989.
- [157] W. HUANG, C. XU, S.-T. CHU ET C. K. CHAUDURI, "The Finite-Difference Vector Beam Propagation Method: Analysis and Assessment, *Journal of Lightwave Technology*, vol. 10, No. 3, mars 1992, pp. 295-305.

INDEX ANALYTIQUE

Les références sont celles des pages

- Abaque de Smith, 81
 - admittances, 86
 - application, 85, 86
 - impédances, 83
- Absorbante (frontière), 300, 309
- Adaptateur E-H, 88
- Adaptation
 - à bruit minimal, 94
 - au sens des lignes, 41, 80, 94
 - conjuguée, 92, 93
 - réactive en parallèle, 95
 - réactive en série, 94
 - sans réflexion, 80, 93, 95, 125, 128
- Adaptée (terminaison), 41, 80
- Admittance
 - caractéristique, 34, 59, 90
 - d'entrée, 86
 - ligne périodique, 114
 - matrice, 66, 74, 154
 - parallèle, 54
 - terminaisons (lignes couplées), 128
 - vecteur-phaseur, 153
- Affaiblissement, 55
 - de propagation, 186
 - linéique, 56, 148
- Aimantation, 8, 15
- Ampère, 4
 - loi d', 5, 12
- Analytique (fonction), 248, 249
- Anéchoïque (chambre), 187
- Angle
 - conservation, 248
 - d'incidence, 158
 - d'ouverture, 182
 - de Brewster, 165
 - de réflexion, 158
 - redressement, 255
 - solide (puissance par), 183
 - transmission, 159
- Anisotrope (milieu), 15
- Antenne, 182
 - calculs, 195
 - cornet, 189
 - imprimée, 190
 - mesures, 187
 - parabolique, 190
 - rendement, 184
 - réseau, 191
 - Yagi-Uda, 194
- Approximation
 - conditions aux limites, 291
 - quasistatique, 212
- Aspects numériques, 315
- Assemblage en cascade, 115
- Asymétrique (ligne), 37
- Bande
 - bloquée, 111
 - passante, 112
- Bessel (fonction de), 181, 236, 327
- Bifilaire (ligne), 37, 60, 213, 252
- Bilan d'énergie, 35
- Biporte équivalent, 29
- Blindage métallique, 155, 167, 237
- Boucle de courant (rayonnement), 282
- Boucle élémentaire, 180
- Brewster (angle), 165
- Bruit minimal (adaptation), 94
- CAO, 97

- Capacité, 27, 205, 218
 - conservation, 250
 - linéique, 28, 214
- Captation (surface), 185
- Caractéristique
 - admittance, 34, 59, 90
 - impédance, 34, 59, 90, 214
 - méthode, 31
- Cascade, 67, 75, 115
- Cauchy (valeur principale), 140
- Cauchy-Riemann (conditions), 248
- Causal, 141
- Cavité résonnante, 102, 240
- Célérité des ondes, 17, 32
- Cellule de base, 105
- CEP, 16, 156, 166
- Chambre anéchoïque, 187
- Champ
 - angle de conducteur, 249
 - conducteurs coudés, 260
 - cylindre diélectrique, 238
 - cylindre métallique, 239
 - d'induction, 6
 - de déplacement, 8
 - de polarisation, 8
 - décroissance, 178
 - disruptif, 7, 225, 333
 - distribution de charges, 276
 - électrique (équation d'onde), 20
 - électrique (formulation intégrale), 312
 - ligne coaxiale, 224
 - lointain, 178, 179, 181, 187
 - magnétique, 8
 - conducteur filiforme, 273
 - distribution de courants, 279
 - équation d'onde, 20
 - ligne coaxiale, 268
 - pièces polaires parallèles, 220
 - sphère métallique avec courant, 246
 - proche, 178
 - sphère, 244
 - valeur efficace, 137
- Charge électrique, 6, 27
 - distribution de, 275
 - élémentaire, 175
 - libre, 5
 - ponctuelle, 6, 266, 270, 275
 - ponctuelle (angle de conducteur), 274
 - ponctuelle (plaques métalliques), 273, 274
- Choix (critères), 316
- Circuit équivalent, 89
 - en P, 68
 - en T, 68
- Circulaire (polarisation), 139
- CMP, 17
- Coaxiale (ligne), 36, 61, 227, 250
- Code électromagnétique numérique, 312
- Collocation par points, 292
- Communications
 - mobiles, 182
 - satellite, 182
- Complexe
 - nombre, 136, 247
 - notation, 52, 140
 - perméabilité, 140
 - plan, 65
 - puissance, 53, 90
- Conception assistée par ordinateur, 97, 125
- Condensateur
 - électrodes, 205
 - inhomogène plan, 219
 - plan, 217, 247
 - plan (extrémité), 257
 - tubulaire, 36
- Condition de Heaviside, 47, 59
- Conditions aux limites, 13, 19, 157, 202, 204
 - approximation, 291
 - composantes normales, 14
 - composantes tangentielles, 14
 - générateur, 89, 125
- Conditions initiales, 19
- Conductance, 206
- Conducteur
 - électrique parfait, 16, 166
 - filiforme, 267, 273
 - longueur finie, 280
 - magnétique parfait, 17
 - métallique, 16
- Conductivité, 7, 62, 333
- Conforme (transformation), 247
- Conjuguée (adaptation), 92, 93

- Connexions
 - en cascade, 67, 75
 - périodiques, 106
- Conservation
 - angles, 248
 - capacité, 250
 - flux, 12
- Constante
 - électrique, 15, 28
 - magnétique, 29
- Continuité (équation de), 10
- Convolution
 - intégrale de, 16, 135
 - produit de, 176
- Coordonnées
 - cylindriques circulaires, 235, 323
 - sphériques, 173, 242, 324
- Cornet (antenne), 189
- Couplage (résonateur), 101, 102
- Couplées (lignes), 121
- Coupleurs directifs, 119
- Coupure (fréquence de), 63, 169, 234
- Courant
 - dans conducteur, 225
 - dans plaque, 222, 223
 - de déplacement, 5, 8
 - de Foucault, 156
 - de fuite (pertes), 46
 - élémentaire, 174
 - filiforme, 279
 - induit, 156
 - infinitésimal, 269
 - phaseur, 52, 59
 - sur une ligne, 28, 34, 59, 89
 - translation, 272
- Court-circuit, 41, 80, 99, 166
- Critères de choix, 316
- Cube de Yee, 298
- Cylindre
 - diélectrique, 238
 - métallique, 228, 239
- Cylindriques circulaires (coordonnées), 235, 323
- D’Alembert, équation de, 20, 30
- Decibel, 56
- Del (opérateur différentiel), 10, 149, 320
- Densité
 - d’énergie électrique, 35, 150
 - d’énergie magnétique, 35, 150
 - de charge
 - à dépendance radiale, 265
 - linéique, 6, 275
 - surfacique, 6, 162, 275
 - volumique, 6, 175, 221, 275
 - de courant
 - à dépendance radiale, 266
 - de surface, 7, 279
 - volumique, 7, 175, 279
 - de puissance, 184
 - active, 142
 - rayonnée, 184
 - réactive, 142
- Dépendance
 - du temps, 136
 - longitudinale, 213
 - radiale, 266
 - transverse, 214
- Déphasage, 51
 - linéique, 55, 57, 148
- Déplacement
 - champ, 8
 - courant, 5, 8
- Dérivation par rapport au temps, 52, 137
- Détectabilité d’un signal, 186
- Deuxième grande unification, 5
- Développement
 - asymptotique, 109
 - limité, 271
- Diagramme
 - de Bergeron, 44
 - de dispersion, 58, 60
 - guide d’ondes, 63
 - de rayonnement, 184, 192
 - espace-temps, 31
- Diaphonie, 120
- Diélectrique
 - substrat, 38
 - interface, 151
- Différence
 - de potentiel, 201
 - finies, 294
 - dans le domaine temporel, 298
 - en électrostatique, 294

- Différentiel (opérateur), 10, 149, 21, 320
- Différentielle
 - méthode, 217
 - relation, 324
- Dipôle
 - de Hertz, 174, 269
 - demi-onde, 188
 - électrique, 270
 - électrostatique, 178
 - élémentaire, 177, 188
 - magnétique, 180, 281, 282
- Dipôles (réseau), 191
- Direction
 - de propagation, 152
 - des ondes, 159
- Directivité, 184
- Discontinuité, 15, 276
- Dispersif (milieu), 153
- Dispersion, diagramme (guide d'ondes), 63
- Distorsion, 153, 170
- Distribution
 - de charges, 275
 - de courants, 279
- Divergence, 10
 - du rotationnel, 321
 - théorème, 12, 326
- Domaine fréquentiel, 52, 135, 137
- Domaine temporel (différences finies), 298
- Doublet, 177, 188, 270
- Dyadique
 - de perméabilité, 15
 - de permittivité 15
- Effet
 - de peau, 223, 228
 - des pertes, 88
 - du générateur, 42, 89
 - Joule, 46, 156, 214
 - pelliculaire, 56, 223
- EFIE, 312
- Électrique, 6
 - charge, 6, 27
 - conducteur parfait, 16, 166
 - constante, 15, 28
 - dipôle, 270
 - énergie, 17
 - force, 6
 - longueur, 91
 - potentiel scalaire, 12, 175, 201, 322
 - vecteur-phaseur, 136, 148
- Électrodes (condensateur), 205
- Électrostatique, 201, 208
 - différences finies, 294
 - dipôle, 178
 - intégration, 275
- Élément
 - de circuit, 205
 - directeur, 194
 - réflecteur, 194
- Éléments finis, 306, 309
- Ellipse de polarisation, 138
- Elliptique
 - intégrale, 284, 331
 - polarisation, 138
- Énergie
 - bilan, 35
 - électrique, 18
 - densité, 35, 150
 - magnétique, 18
 - densité, 35, 150
 - vitesse de transport, 150
- Enveloppe, 58
- Équation
 - de continuité, 10
 - de d'Alembert, 20, 30
 - de Gauss, 12
 - de Laplace, 202, 204, 224, 229, 235, 242, 248, 292, 294
 - deux dimensions, 28, 29, 213
 - méthodes de résolution, 203
 - de Maxwell, 10, 15, 298
 - complexe, 142
 - forme différentielle, 10
 - forme globale, 11
 - forme intégrale, 11
 - forme locale, 10
 - de Neumann, 287
 - d'onde, 30, 54, 147, 151, 223, 233, 240
 - champ électrique, 20
 - champ magnétique, 20
 - potentiels, 21

- vecteurs-phaseurs, 143
- de Poisson, 208, 221, 269
 - méthodes de résolution, 208
 - vectorielle, 209
- des télégraphistes, 47
- Équations
 - de Kramers et Kronig, 140
 - des lignes, 29, 30, 54
 - couplées, 121
 - système, 295, 306
- Équiamplitude (plan), 151, 152
- Équiphasé (plan), 149, 152
- Équipotentielle, 13, 202, 271
- Équivalence (principe d'), 267
- Espace-temps (diagramme), 31
- Exponentielle matricielle, 122
- Exposant de propagation, 55, 90
 - périodique, 110
- Extrémité d'un condensateur plan, 257
- Facteur
 - de couplage (résonateur), 101
 - de qualité (non chargé), 101
 - de réflexion, 40, 65, 71, 75, 160, 161, 163, 165, 166
 - matriciel (lignes couplées), 124 128
 - générateur, 80, 90
 - terminaison, 79
 - de réseau, 192
 - de transfert, 116
 - de transmission, 75, 160, 161, 163, 166
- Faisceau
 - étroit, 182
 - hertzien, 182
- Faraday, 4
 - loi d'induction, 5, 12
- FDTD, 298
- FEM (*Finite Element Method*), 306
- Fibres optiques, 170
- Fil métallique, 226
- Filiforme
 - conducteur, 267
 - courant, 279
- Filtres, 108
- Floquet
 - mode, 112
 - théorème, 110
- Flux magnétique, 207
 - conservation, 12
- Focalisation (lentille), 9, 230
- Fonction
 - analytique, 248, 249
 - de base, 313
 - de Bessel, 181, 236, 327
 - d'argument complexe, 330
 - modifiée, 236, 329
 - de Green, 176, 312
 - de Hankel, 329
 - de transfert (lignes couplées), 122
 - objectif, 98
- Force
 - électrique, 6
 - magnétique, 6
- Formulation intégrale
 - champ électrique, 312
 - potentiels mixtes, 312
- Formule
 - de Friis, 186
 - de Neumann, 211
- Foucault (courants de), 156
- Fourier (série de), 233
- Four micro-ondes, 102
- Fraunhofer (région de), 178
- Fréquence 51
 - de coupure, 63, 169, 234
 - de résonance, 100, 101, 240
 - limitations, 97
- Fréquentiel (domaine), 52, 135, 137
- Friis (formule de), 186
- Frontière absorbante, 300, 309
- Fusible, 7, 156
- Gain en puissance, 183
- Gauss, 4
 - équation de, 12
- Générateur
 - conditions, 125
 - effet du, 42, 89
 - facteur de réflexion, 80, 90
 - impédance, 89, 90
 - tension, 90, 89
- Gradient (théorème), 325
- Graphes de fluence, 69, 163

- Green
 - fonction de, 176, 312
 - identités de, 326
- Groupe (vitesse de), 58, 148
- Guide d'ondes, 62, 168, 233
 - rectangulaire, 167, 233
 - optique, 164
- Hankel (fonction de), 329
- Haute fréquence (pertes), 62
- Heaviside, 5
 - condition 47, 59
- Hertz, 5
 - dipôle de, 174, 269
- Hertzien (faisceau), 182
- High-Frequency Structure Simulator*, 310
- Images (méthode), 273, 304
- Impédance
 - caractéristique, 34, 59, 90, 214
 - d'entrée (ligne), 81, 83, 84
 - de terminaison, 90
 - de rayonnement, 179
 - d'onde, 149, 153, 154
 - métal, 54, 156
 - du générateur, 89, 90
 - localisée, 66, 80
 - matrice, 66, 73
 - normalisée, 82
 - variations périodiques, 107
 - vide, 17
- Incidence
 - angle, 158
 - plan d', 158
- Incidente
 - onde, 157, 158
 - puissance, 101
- Indice de réfraction, 159, 164
 - complexe, 166
- Inductance
 - externe, 286, 287
 - globale, 28
 - interne, 286
 - ligne bifilaire, 288
 - linéique, 28, 214
 - mutuelle, 28, 211, 283, 285
 - bobines, 286
 - spires coaxiales, 284
 - propre, 28, 212, 286
 - spire circulaire, 287
- Induction
 - champ, 6
 - loi de Faraday, 5, 12
 - tube élémentaire, 207
- Induite (tension), 210
- Intégrale
 - de convolution, 16, 135
 - de superposition, 176
 - elliptique, 284, 285, 331
 - méthode, 196, 265
 - relation 325
- Intégration
 - électrostatique, 275
 - magnétostatique, 279
- Inverse (onde), 64
- Inverseur d'impédance, 96
- Isotrope (radiateur), 183
- Itérative (méthode), 295
- Jauge de Lorentz, 143, 173, 209, 269
- Jonction p-n, 221
- Joule (effet), 156, 214
- Kramers et Kronig (équations de), 140
- Lame métallique, 277, 310
- Laplace (équation de), 202, 204, 224, 229, 235, 242, 248, 292, 294
- Laplacien (vectoriel), 322
- Largeur
 - de bande (résonateur), 102
 - effective (microruban), 39
- Legendre (polynômes de), 243
- Lentille de focalisation, 9, 230
- Ligne
 - à haute tension, 61
 - à obstacles périodiques, 105
 - à plaques parallèles, 36
 - à ruban équilibré, 38
 - adaptation, 41, 80, 94
 - asymétrique, 37
 - avec pertes, 47
 - bifilaire, 37, 213, 252

- avec pertes, 60
- inductance, 288
- sans pertes, 60
- coaxiale, 36, 61, 227, 250
- connexion, 75
- couplée, 121
- courant, 28, 34, 59, 89
- de charge, 276
- de transmission, 27
- fendue, 73
- impédance d'entrée, 81, 83, 84
- inverse, 64
- microruban, 38
- ouverte, 41, 80
- périodique
 - admittance, 114
 - de longueur finie, 114
 - modèle simple, 105
- puissance, 35, 90
- sans pertes, 71
- section droite, 310
- téléphonique
 - abonnés, 61
 - pupinisée, 107
- tension, 89
- tubulaire desaxée, 25, 263
- Lignes couplées, 121
 - admittances des terminaisons, 128
 - deux, 126
 - équations des 121
 - facteur de réflexion matriciel, 124, 128
 - fonction de transfert, 122
 - matrice de propagation, 123
 - matrice des courants, 123
 - matrice des impédances, 122
 - matrice des tensions, 123
 - mode de propagation, 123
 - tension, 129
 - vecteur colonne, 122
- Lignes de champ, 8, 202, 271
 - magnétique, 169
- Lignes
 - de transmission, 27
 - équivalentes, 163
 - équations des, 29, 30, 54
- Limitations en fréquence, 97
- Limites (conditions), 13, 19, 157, 202, 204
- Linéaire (polarisation), 139
- Linéique
 - affaiblissement, 56, 148
 - capacité, 28, 214
 - conductance, 62
 - densité de charge, 6, 275
 - inductance, 28, 214
 - résistance, 62
- Lobe
 - principal, 185
 - secondaire, 185
- Log-périodique, 195
- Loi
 - d'Ampère, 5, 12
 - d'induction de Faraday, 5, 12
 - d'Ohm, 7, 46
 - de Snell, 159
- Lointain (champ), 178, 179, 181, 187
- Longitudinale (dépendance), 213
- Longueur
 - d'onde, 57, 58, 65, 90, 148, 155
 - électrique, 91
- Lorentz
 - jauge de, 143, 173, 209, 269
 - théorème de réciprocité de, 144, 186
- Lumière (vitesse dans le vide), 32, 57
- Magnétique
 - champ, 8
 - conducteur parfait, 17
 - constante, 29
 - dipôle, 180, 281, 282
 - énergie, 18
 - flux, 207
 - force, 6
 - lignes de champ, 169
 - potentiel scalaire, 203, 204
 - potentiel vecteur, 12, 173, 175, 279, 321
- Magnétostatique, 203, 209
 - intégration, 279
- Matériaux (propriétés), 15, 102, 140, 332
- Matrice(s), 65
 - ABCD, 67, 109

- d’admittance, 66, 74, 154
- d’impédance, 66, 73
 - terminaisons, 124
- de chaîne, 67, 74, 109, 115
- de ligne de transmission, 302
- de propagation (lignes couplées), 123
- de réflexion, 68, 75, 163
- de répartition, 70, 75, 163
- des courants (lignes couplées), 123
- des impédances (lignes couplées), 122
- des tensions (lignes couplées), 123
- Maxwell, 5
 - équation de, 10, 15, 298
- Mesure
 - d’antennes, 187
 - sonde de, 187
- Métal, 16
 - profondeur de pénétration, 155
- Métallique, 16
 - blindage, 155, 167, 237
 - fil, 226
 - surface, 166
- Méthode
 - approchée, 291
 - des images, 273, 304
 - des moments, 310
 - différentielle, 217
 - intégrale, 196, 265
 - itérative, 295
 - spectrale, 312
- Micro-ondes (fours), 102
- Microruban (ligne), 38
- Milieu
 - anisotrope, 15
 - dispersif, 153
 - infini avec pertes, 16, 151
 - non dispersif, 150
 - sans pertes, 15, 164
- MININEC*, 312
- MMP, 293
- Mobiles (communications), 182
- Mode
 - de Floquet, 112
 - de propagation, 63, 168
 - lignes couplées, 123
 - de résonance, 240
 - dominant, 170
 - transverse électrique, 169
 - transverse magnétique, 234
- Modèle de la ligne couplée, 121
- Modulation d’amplitude, 58
- Moindres carrés, 293, 311
- Moments (méthode), 310
- Monomode, 170
- Monte-Carlo (méthode de), 99
- MPIE*, 312
- Multipôles multiples, 293
- Mutuelle (inductance), 28, 211, 283, 285
- Nabla (opérateur différentiel), 10, 149, 320
- NEC*, 312
- Néper, 56
- Neumann, 4
 - équation de, 287
 - formule de, 211
- Nœud TLM, 302
- Nombre complexe, 136, 247
 - inverse d’un, 86
 - racine d’un, 60
- d’ondes transverse, 234
- Non uniforme (onde), 149, 151, 153, 164
- Normal (vecteur unité), 158, 325
- Notation complexe, 52, 140
- Objectif (fonction), 98
- Obstacle
 - épais, 113
 - mince (susceptance équivalente), 105
- Ohm, 4
 - loi d’, 7, 46
- Onde
 - célérité, 32
 - direction, 159
 - guide, 62, 168, 233
 - impédance d’, 149, 153, 154
 - incidente, 157, 158
 - inverse, 64
 - lente, 108
 - longueur d’, 57, 58, 65, 90, 148, 155
 - plane non uniforme, 149, 151, 153, 164
 - plane uniforme, 61, 149, 152, 214

- dans un métal, 154
- progressive, 32, 55, 72, 90, 123, 157
- réfléchie, 40, 157, 159
- rétrograde, 32, 55, 72, 90, 123, 157
- sinusoïdale amortie, 55
- stationnaire, 72, 93
 - rapport, 80, 73
- TEM, 149, 153
- transmise, 157, 159
- transverse électromagnétique, 149, 153
- Opérateur différentiel, 10, 149, 21, 320
- Optimisation, 98
 - stochastique, 99
- Optique
 - fibres 170
 - guidée, 164
- Ordinateur (conception assistée), 97, 125
- Orthogonalité, 232, 237
- Ouverture (angle), 182

- Parabolique
 - antenne, 190
 - réflecteur, 183, 190
- Paradoxe thermodynamique, 141
- Parallèle (polarisation), 158, 161
- Parasite (solution), 309
- Parcours (temps), 27, 33
- Parois, 168
 - parfaitement absorbantes, 300
- Pas temporel, 298
- Peau (effet de), 223, 228
- Pelliculaire (effet), 56, 223
- Période du signal, 33, 53, 137
- Périodique, 105, 111
 - exposant de propagation, 110
 - ligne, 105, 114
 - connexion, 106
- Perméabilité
 - absolue, 15, 29
 - complexe, 140
 - relative, 15, 29, 332
- Perméance, 207, 220
- Permittivité
 - absolue, 15
 - complexe, 140
- effective, 39
- relative, 15, 28, 332
- Perpendiculaire (polarisation), 158, 160
- Perte structurelle en retour, 107
- Pertes
 - courant de fuite, 46
 - effet des, 88
 - effet Joule, 46
 - haute fréquence, 62
 - ligne, 47, 60
 - milieu infini, 151
 - rayonnement, 46
- Perturbation (méthode), 62
- Phase, 51
 - composante du champ, 135
 - vitesse de, 57, 148
- Phaseur, 52
 - courant, 52, 59
 - réflexion, 71
 - tension, 52, 59
- Plan
 - complexe, 65
 - d'incidence, 158
 - du court-circuit désaccordé, 101
 - équi-amplitude, 151, 152
 - équiphase, 149, 152
- Plaques parallèles, 257
- Plasma simple, 63
- Point matching*, 292
- Poisson (équation de), 208, 221, 269
- Polarisation, 148
 - champ de, 15
 - circulaire, 139
 - d'un champ, 138
 - elliptique, 138
 - linéaire, 139
 - parallèle, 158, 161
 - perpendiculaire, 158, 160
- Polygone, 255
- Polynômes de Legendre, 243
- Porteuse, 58
- Potentiel
 - cylindre diélectrique, 238
 - cylindre métallique, 239
 - dans une sphère, 244
 - dépendance radiale, 266
 - différence, 201

- équation d’onde, 21
- ligne de charge, 276
- rectangle, 230, 231, 232
- scalaire électrique, 12, 175, 201, 322
- scalaire magnétique, 203, 204
- tube métallique, 237
- vecteur magnétique, 12, 173, 175, 279, 321
 - courant infinitésimal, 269
 - distribution de courants, 279
- Potentiels mixtes, 312
- Poynting, 5
 - théorème de, 18, 35, 142
 - vecteur de, 17, 150
 - vecteur-phaseur, 154, 179, 181, 184
- Principe
 - d’équivalence, 267
 - de Huygens, 302
 - variationnel, 305
- Problème unidimensionnel, 217, 224, 265
- Proche (champ), 178
- Produit
 - convolution, 176
 - scalaire, 319
 - vectoriel, 320
- Profondeur de pénétration, 56, 62, 155, 223
 - dans un métal, 155
- Progressive (onde), 32, 55, 72, 90, 123, 157
- Propagation, 55
 - affaiblissement, 186
 - exposant de, 55, 90
 - mode, 63, 168
 - vecteur-phaseur, 148, 152, 159, 164
 - vitesse, 32, 214, 234
- Propriétés des matériaux, 15, 102, 140, 332
- Puissance, 59
 - absorbée (terminaison), 91
 - active, 53, 59, 65, 91
 - densité, 142
 - complexe, 53, 90
 - d’échange, 91, 116
 - densité, 184
 - fournie, 183
 - gain, 183
 - incidente, 101
 - moyenne, 53
 - par angle solide, 183
 - rayonnée
 - totale, 179, 181
 - densité, 184
 - réactive, 65
 - densité, 142
 - réfléchie, 101
 - sur une ligne, 35, 90
 - transfert, 116, 186
 - transmise, 184
 - valeur moyenne, 53
- Pulsation, 51, 135
- Quadripôle équivalent, 66
- Quasistatique, 178, 210
 - approximation, 212
- Radian, 57
- Radiateur isotrope, 183
- Rapport d’onde stationnaire, 80, 73
- Rayleigh-Ritz (méthode de), 306
- Rayonnement, 173, 178
 - d’une boucle de courant, 282
 - diagramme, 184, 192
 - impédance, 179
 - pertes, 46
- Recherche du gradient, 98
- Réciprocité, 33, 67, 110, 144, 186
 - théorème de Lorentz, 144, 186
- Rectangle (potentiel), 230, 231, 232
- Redressement d’un angle, 255
- Réfléchie
 - onde, 40, 157, 159
 - puissance, 101
- Réflecteur parabolique, 183, 190
- Réfectométrie temporelle, 45
- Réflexion
 - facteur de, 40, 65, 71, 75, 160, 161, 163, 165, 166
 - inconvénients, 93
 - matrice, 68, 75, 163
 - phaseur, 71
 - totale
 - diélectrique, 151, 164, 166

- métal, 41, 80, 170
- Réflexions multiples, 42, 93
- Réfraction (indice), 159, 164, 166
- Régime sinusoïdal permanent, 51, 135
- Région de Fraunhofer, 178
- Relations
 - différentielles, 324
 - intégrales, 325
 - vectorielles, 319
- Relaxation, 295
 - transition, 141
- Réductance, 207, 220
- Rendement (antenne), 184
- Répartition (matrice), 70, 75, 163
- Réponse
 - au saut unité, 43
 - non causale, 62
- Réseau
 - antenne à, 183, 191
 - cristallin, 108
 - dipôles, 191
 - log-périodique, 195
 - facteur de, 192
 - Yagi-Uda, 194
- Résistance, 206
 - linéique, 62
- Résistivité, 333
- Résonance
 - fréquence de, 100, 101, 240
 - mode, 240
- Résonateur
 - avec réactances, 100
 - cavité, 102, 240
 - couplé à une ligne, 101
 - facteur de couplage, 101
 - fermé, 99
 - largeur de bande, 102
 - sous-couplé, 102
 - surcouplé, 102
- Résonnante (transition), 141
- Retard, 27
- Rétroaction, 70
- Rétrograde (onde), 32, 55, 72, 90, 123, 157
- ROS, 80
- Rotationnel, 10
 - d'un rotationnel, 322
 - théorème du, 326
- Ruban équilibré (ligne), 38
- Satellite (communications), 182
- Saut unité, 43
- Scalaire (produit), 319
- Scattering matrix*, 70
- Schéma équivalent, 29, 47, 54, 68, 74, 90
 - en P, 74
 - en T, 74
 - résonateur, 101
- Schwartz-Christoffel (transformation de), 254
- Section droite d'une ligne, 310
- Self inductance*, 286
- Sensibilité, 186
- Séparation
 - de variables, 147, 229, 235, 242
 - surface, 13, 157
- Série
 - de Fourier, 233
 - de Taylor, 294
- Seuil de sensibilité, 186
- Signal modulé en amplitude, 58
- Singularités, 176, 276
- Sinusoïde amortie, 55
- Smith (abaque), 81
- Snell (loi de), 159
- Solution
 - non unique, 143
 - parasite, 309
- Sonde de mesure, 187
- Source (dimensions limitées), 173
- Spectrale (méthode), 312
- Sphère
 - diélectrique, 244, 245
 - métallique, 246
- Spire, 210, 286
 - carrée, 283
 - circulaire, 281
- Standing wave ratio*, 73
- Stationnaire (onde), 72, 93
- Statique, 201
- Stochastique (optimisation), 99
- Stokes (théorème de), 11, 211, 326
- Stripline*, 38

- Structural return loss*, 107
- Structure
 - à onde lente, 108
 - périodique, 105, 111
- Substrat diélectrique, 38
- Superposition, 175, 270
 - intégrale de, 176
- Surface
 - de captation, 185
 - effective, 185
 - métallique, 166
- Surfacique
 - densité de charge, 6, 162, 275
 - densité de courant, 7, 279
- Surrelaxation, 297
- SWR*, 73
- Synchronisme, 130
- Système d'équations, 295, 306

- TDR*, 45
- Télégraphistes (équation des) 47
- TEM (onde), 149, 153
- Temps
 - de parcours, 27, 33
 - dépendance du, 136
- Tension, 27, 51, 201
 - générateur, 90, 89
 - induite, 210
 - le long de la ligne, 89
 - phaseur, 52, 59
 - sur deux lignes couplées, 129
- Terminaison
 - adaptée, 41
 - sans réflexion, 80
 - capacitive, 41
 - facteur de réflexion, 79
 - impédance, 90
 - inductive, 41
 - puissance absorbée, 91
 - réactive, 81
 - résistive, 40
- Théorème
 - d'unicité, 19, 143, 203, 208
 - de Floquet, 110
 - de la divergence, 12, 326
 - de Poynting, 18, 35, 142
 - de réciprocité de Lorentz, 144, 186
 - de Stokes, 11, 211, 326
 - du gradient, 325
 - du rotationnel, 326
- Time Domain Reflectometry*, 45
- TLM*, 302
- Transfert (facteur de), 116
- Transformation
 - conforme, 247
 - à deux pôles, 251
 - de Schwartz-Christoffel, 254
- Transition
 - de relaxation, 141
 - résonnante, 141
- Translation, 17, 270
 - d'un courant, 272
- Transmise (onde), 157, 159
- Transmission
 - facteur de, 75, 160, 161, 163, 166
 - ligne, 27
 - totale, 165
- Transverse
 - dépendance, 214
 - électrique (mode), 169
 - électromagnétique (onde), 149, 153
 - magnétique (mode), 234
 - nombre d'ondes, 234
- Tube
 - d'induction, 207
 - métallique, 237
- Unicité, 19, 143, 203, 208
- Unidimensionnel (problème), 217, 224, 265
- Uniforme (onde), 61, 149, 152, 214

- Valeur
 - efficace, 51, 53
 - du champ, 137
 - moyenne de la puissance, 53
 - principale de Cauchy, 140
- Valeurs propres, 114, 123, 127
- Variationnel (principe), 305
- Variations périodiques de l'impédance, 107
- Vecteur(s)
 - colonne (lignes couplées), 122
 - de Poynting, 17, 150

- normal, 158, 325
- propres, 114, 123, 127
- propriétés, 319
- unité (direction de propagation), 152
- Vecteur-phaseur, 136
 - d’admittance, 153
 - de Poynting, 154, 179, 181, 184
 - de propagation, 148, 152, 159, 164
 - électrique, 136, 148
 - équation d’onde, 143
- Vectorel (produit), 320
- Vectorelle (relation), 319
- Vitesse
 - de groupe, 58, 148
 - de la lumière dans le vide, 32, 57
 - de phase, 57, 148
 - de propagation, 32, 214, 234
 - de transport de l’énergie, 150
- Voltage standing wave ratio*, 73
- Volume d’intégration, 11, 325
- Volumique
 - densité de charge, 6, 175, 221, 275
 - densité de courant, 7, 175, 279
- VSWR, 73

- Yagi-Uda (antenne), 194
- Yee (cube de), 298

GLOSSAIRE

GRANDEURS SCALAIRES

Symbole	Unité	Description	Pages
a	m	Rayon d'un conducteur	62
a	m	Largeur (guide d'ondes)	62
a	–	Partie réelle de $\underline{\rho}$	82
A	m	Dimension (cornet)	189
A	V/m	Constante d'intégration	218
A_e	m ²	Surface effective, antenne	185
A_i	–	Constante d'intégration	229
b	m	Epaisseur (conducteur)	38
b	m	Hauteur (guide d'ondes)	169
b	–	Partie imaginaire de $\underline{\rho}$	82
B	S = A/V	Susceptance	95
B	m	Dimension (cornet)	189
B	V	Constante d'intégration	218
B_i	–	Constante d'intégration	229
$bei(x)$	–	Fonction de Bessel (complexe)	330
$ber(x)$	–	Fonction de Bessel (complexe)	330
c	m/s	Célérité des ondes	32
c_i	–	Coefficients d'expansion	306
c_0	m/s	Vitesse de la lumière dans le vide	17
C	F = As/V	Capacité	27
C	–	Constante d'intégration	9
C_i	–	Constante d'intégration	229
C_m	–	Coefficient d'expansion	292
C'	As/Vm	Capacité linéique	28
C'_m	As/Vm	Capacité de couplage	126
d	m	Longueur	28
d	m	Longueur de récurrence	103
D_m	–	Coefficient d'expansion	292
dA	m ²	Élément de surface	11
dV	m ³	Élément de volume	12
dx, dy, dz	m	Éléments infinitésimaux cartésiens	8
$D(\theta, \varphi)$	–	Directivité, antenne	184
E_m	–	Coefficient d'expansion	292

$E(k)$	–	Intégrale elliptique	331
$E_{0,x}(\mathbf{r})$	V/m	Composante du champ électrique	135
f	Hz = s ⁻¹	Fréquence	51
$f(\text{géom})$	–	Fonction géométrique	28
$f_i(\mathbf{r})$	–	Fonction de base (Rayleigh-Ritz)	306
f_{m0}	Hz = s ⁻¹	Fréquence de coupure	169
f_n	Hz = s ⁻¹	Fréquence de résonance	100
f_0	Hz = s ⁻¹	Fréquence d'adaptation	97
f_0	Hz = s ⁻¹	Fréquence de résonance	101
$F(V)$	–	Fonctionnelle	305
F_m	–	Coefficient d'expansion	292
g	–	Facteur de gain (réflecteur)	190
$g(\text{géom})$	–	Fonction géométrique	29
$G(\theta, \varphi)$	–	Gain en puissance, antenne	183
G'	A/Vm	Conductance linéique	47
G'_m	A/Vm	Couplage de fuite	126
h	m	Hauteur	36
h	m	Largeur de maille	294
$H_x(t, \mathbf{r})$	A/m	Composante selon x de \mathbf{H}	8
$i(t, z)$	A	Courant	34
$I_m(x)$	–	Fonction de Bessel modifiée	329
$J_m(x)$	–	Fonction de Bessel	181
k	–	Facteur de couplage	285
k_x, k_y, k_z	m ⁻¹	Constantes de séparation	229
K	–	Constante (transformation conforme)	251
$K(k)$	–	Intégrale elliptique	331
$K_m(x)$	–	Fonction de Bessel modifiée	329
l	–	Nombre entier	240
L	H = Vs/A	Inductance propre	28
L	m	Distance entre deux antennes	186
L	V/m	Coefficient, éléments finis	307
L'	Vs/Am	Inductance linéique	28,
L_e	Vs/A	Inductance, externe	286
L_i	Vs/A	Inductance, interne	286
L_t	Vs/A	Inductance, terminaison	41
m	–	Nombre entier	43
M	Vs/A	Inductance mutuelle	28
M	–	Constante (transformation conforme)	251
M	V/m	Coefficient, éléments finis	307

n	–	Indice de réfraction	164
n	–	Nombre entier	169
N	–	Nombre de cellules	110
N	V	Coefficient, éléments finis	307
$N + 1$	–	Ensemble de conducteurs	121
$N_m(x)$	–	Fonction de Bessel	327
p	m^{-1}	Nombre d'onde transverse	62
p	–	Partie réelle de \underline{t}	254
$p(z, t)$	$W = VA$	Puissance instantanée	35
$P(z)$	$W = VA$	Puissance active (moyenne)	53
P_e	$W = VA$	Puissance d'échange	91
P_f	$W = VA$	Puissance fournie	183
P_{in}	$W = VA$	Puissance incidente	101
P_r	$W = VA$	Puissance réfléchie	101
P_t	$W = VA$	Puissance transmise	91
P_T	$W = VA$	Puissance rayonnée totale	179
$P_\Omega(\theta, \varphi)$	$W = VA$	Puissance par angle solide	183
$P_m^n(\cos\theta)$	–	Polynôme de Legendre	243
q	$C = As$	Charge électrique ponctuelle	6
q	–	Partie imaginaire de \underline{t}	254
q_v	$C = As$	Charge contenue dans un volume	264
Q	$C = As$	Charge électrique	205
$Q(z)$	VA	Puissance réactive	65
Q_n, Q_0	–	Facteur de qualité non chargé	101
r	m	Coordonnée radiale	174
R	m	Rayon (conducteur)	37
R	$\Omega = V/A$	Résistance	206
R'	V/Am	Résistance linéique	47
R_A, R_B, R_D	m	Rayons (conducteurs)	36
R_c	$\Omega = V/A$	Partie réelle de l'impédance caractéristique	61
R_g	$\Omega = V/A$	Résistance du générateur	42
R_m	A/Vs	Réductance magnétique	207
R_0'	V/Am	Résistance linéique en continu	62
R_t	$\Omega = V/A$	Résistance de terminaison	40
s	–	Rapport d'ondes stationnaires	73
S	m^2	Surface	217
t	s	Temps	6
$T = 1/f = 2\pi/\omega$	s	Période du signal	33
T	m^{-1}	Facteur transverse	235

u	–	Partie réelle de \underline{w} (transformation conforme)	247
$u(t, z)$	V	Tension sur une ligne	27
$u_+(t - z/c)$	V	Tension, onde progressive	31
$u_-(t + z/c)$	V	Tension, onde rétrograde	31
$u_g(t)$	V	Tension, générateur	42
$u_0(t)$	V	Tension, entrée de la ligne	42
U	V	Potentiel (condition limite)	217
$U(z)$	V	Valeur efficace de la tension	51
v	m/s	Vitesse de propagation	32
v	–	Partie imaginaire de \underline{w} (transformation conforme)	247
v_e	m/s	Vitesse de transport d'énergie	150
v_g	m/s	Vitesse de groupe	58
v_ϕ	m/s	Vitesse de phase	57
$V(\mathbf{r})$	V	Potentiel scalaire électrostatique	201
$V(t, \mathbf{r})$	V	Potentiel scalaire électrique	12
w	m	Largeur (conducteur)	36
w_e	J/m	Densité d'énergie électrique (ligne)	35
$W_e(t, \mathbf{r})$	J/m ³	Densité d'énergie électrique	18
w_{eff}	m	Largeur effective	39
w_m	J/m	Densité d'énergie magnétique (ligne)	35
$W_m(t, \mathbf{r})$	J/m ³	Densité d'énergie magnétique	18
x	m	Coordonnée cartésienne	8
X	$\Omega = V/A$	Réactance	94
X_c	V/A	Réactance caractéristique	61
y	m	Coordonnée cartésienne	8
Y_c	$S = A/V$	Admittance caractéristique	34
z	m	Coordonnée cartésienne	8
Z_c	Ω	Impédance caractéristique	34
Z_o	Ω	Impédance du vide	17
Z_x	Ω	Impédance de transformateur	96
α	Np/m	Affaiblissement linéique	47
α	rad	Angle d'arête (Schwartz-Christoffel)	255
α_{dB}	dB/m	Affaiblissement linéique	56
$\alpha_p d$	Np	Affaiblissement d'une cellule	112
β	rad/m	Déphasage linéique	55
βd	rad	Longueur électrique	91
$\beta_p d$	rad	Déphasage d'une cellule	112
δ	m	Profondeur de pénétration	56

δ	m	Hauteur infinitésimale	13
$\Delta f_{1/2}$	s ⁻¹	Largeur de bande, résonateur	102
ΔD	m	Distance (conducteurs)	37
Δt	s	Pas temporel (FDTD)	298
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	m	Distances entre nœuds FDTD	298
$\Delta\beta$	rad/m	Déphasage différentiel	131
$\Delta\lambda$	m	Période spatiale différentielle	131
$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$	As/Vm	Constante électrique	8
ϵ	As/Vm	Permittivité absolue	15
ϵ'	As/Vm	Partie réelle de $\underline{\epsilon}$	140
$-\epsilon''$	As/Vm	Partie imaginaire de $\underline{\epsilon}$	140
ϵ_e	–	Permittivité effective	39
ϵ_r	–	Permittivité relative	15
ζ	–	Partie imaginaire de $\underline{Z}(z)/\underline{Z}_c$	82
ζ	rad	Angle entre $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$	151
η	–	Rendement, antenne	184
θ	rad	Coordonnée sphérique	242
θ_{in}	rad	Angle d'incidence	158
θ_r	rad	Angle de réflexion	158
θ_α	rad	Angle de transmission	159
θ_β	rad	Angle de transmission	159
$\Theta(\mathbf{r})$	A	Potentiel scalaire magnétique	203
κ	s ^{1/2} /m	Facteur de pertes	62
$\lambda = 2\pi/\beta$	m	Longueur d'onde	57
$\lambda_g = 2\pi/\beta$	m	Longueur d'onde de guide	169
Λ	Vs/A	Perméance	207
μ	Vs/Am	Perméabilité absolue	15
μ'	Vs/Am	Partie réelle de $\underline{\mu}$	140
$-\mu''$	Vs/Am	Partie imaginaire de $\underline{\mu}$	140
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am	Constante magnétique	8
μ_r	–	Perméabilité relative	15
ξ	s	Variable caractéristique	31
ξ	–	Partie réelle de $\underline{Z}(z)/\underline{Z}_c$	82
π	–	Pi (3,14159...)	245
ρ	m	Coordonnée radiale	224
ρ	As/m ³	Densité de charge volumique	6
ρ	–	Facteur de réflexion	40
ρ_g	–	Facteur de réflexion, générateur	42
ρ_l	As/m	Densité de charge linéique	6

ρ_s	As/m ²	Densité de charge surfacique	6
ρ_t	–	Facteur de réflexion, terminaison	40
σ	A/Vm	Conductivité	7
ζ	rad	Déphasage (réseau)	192
τ	s	Temps de propagation	33
φ	rad	Coordonnée azimutale	177
$\varphi(z)$	rad	Phase	51
$\varphi_x(\mathbf{r})$	rad	Phase d'une composante	135
Φ	Vs	Flux magnétique	207
$\Phi(t, \mathbf{r})$	–	Fonction arbitraire	12
χ	–	Facteur de couplage, résonateur	101
χ	rad	Angle, polarisation elliptique	138
ψ	rad	Angle d'ouverture, antenne	182
$\omega = 2\pi f$	s ⁻¹	Pulsation	51
Ω	s ⁻¹	Pulsation	140

GRANDEURS VECTORIELLES

$A(t, \mathbf{r})$	Vs/m	Potentiel vecteur magnétique	12
$B(t, \mathbf{r})$	T = Vs/m ²	Champ d'induction	6
$D(t, \mathbf{r})$	As/m ²	Champ de déplacement	8
$d\mathbf{l}$	m	Élément de contour	11
$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$	–	Vecteurs cartésiens unitaires	8
$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$	–	Vecteurs sphériques unitaires	177
\mathbf{e}_γ	–	Vecteur unité de propagation	152
$E(t, \mathbf{r})$	V/m	Champ électrique	6
$F_e(t, \mathbf{r})$	N = VAs/m	Force électrique	6
$F_m(t, \mathbf{r})$	N = VAs/m	Force magnétique	6
$H(t, \mathbf{r})$	A/m	Champ magnétique	8
$J(t, \mathbf{r})$	A/m ²	Densité de courant électrique	7
\underline{J}_δ	Am	Dipôle de Hertz	269
$J_s(t, \mathbf{r})$	A/m	Densité de courant de surface	7
\mathbf{m}	Am ²	Moment dipolaire magnétique	282
$M(t, \mathbf{r})$	A/m	Aimantation	8
\mathbf{n}	m	Vecteur normal unitaire	14
\mathbf{p}	Asm	Moment du dipôle électrique	271
$P(\mathbf{r})$	VA/m ²	Densité de puissance active	142
$P(t, \mathbf{r})$	As/m ²	Champ de polarisation	8
$Q(\mathbf{r})$	VA/m ²	Densité de puissance réactive	142

\mathbf{r}	m	Vecteur de position	6
\mathbf{r}'	m	Vecteur de position d'une source	175
$\mathbf{S}(t, \mathbf{r})$	VA/m ²	Vecteur de Poynting	17
$v(t, \mathbf{r})$	m/s	Vitesse d'une charge	6
\mathbf{a}	m ⁻¹	Affaiblissement linéique	148
β	m ⁻¹	Déphasage linéique	148

GRANDEURS COMPLEXES

$\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$	–	Termes de la matrice de chaîne	67
$\underline{A}_i, \underline{B}_i$	–	Constantes d'intégration	123
$e^{j\omega t}$	–	Dépendance du temps	136
$f(\underline{z})$	–	Fonction de projection	248
$\underline{F}(r)$	Vs	Fonction radiale	173
$\underline{G}_{AJ}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$	Vs/Am ²	Fonction de Green	175
$\underline{G}_{Vp}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$	V/As	Fonction de Green	175
$\underline{I}(z)$	A	Phaseur de courant	52
$j = \sqrt{-1}$	–	Nombre imaginaire unité	52
\underline{n}	–	Indice de réfraction complexe	166
$\underline{S}(z)$	VA	Puissance complexe	53
\underline{t}	–	Nombre complexe de position	254
$\underline{U}(z)$	V	Phaseur de tension	52
\underline{U}_g	V	Tension du générateur	90
$\underline{U}_+, \underline{U}_-$	V	Constantes d'intégration	55
$\underline{V}(\mathbf{r})$	V	Potentiel scalaire électrique	142
\underline{w}	–	Nombre complexe de position	247
$\underline{X}(x)$	–	Fonction complexe de x	147
$\underline{Y}(y)$	–	Fonction complexe de y	147
$\underline{Y}(z)$	S = A/V	Admittance localisée	86
\underline{Y}'	A/Vm	Admittance linéique	54
\underline{Y}_c	S = A/V	Admittance caractéristique	59
\underline{Y}_d	S = A/V	Admittance, obstacle	103
\underline{Y}_p	S = A/V	Admittance, périodique	114
\underline{z}	m	Nombre complexe de position	247
$\underline{Z}(z)$	$\Omega = V/A$	Impédance localisée	66
$\underline{Z}(z)$		Fonction complexe de z	147
\underline{Z}'	V/Am	Impédance linéique	54
\underline{Z}_c	$\Omega = V/A$	Impédance caractéristique	59
\underline{Z}_d	$\Omega = V/A$	Impédance, obstacle	108

\underline{Z}_t	$\Omega = V/A$	Impédance de la terminaison	90
\underline{Z}_g	$\Omega = V/A$	Impédance du générateur	89
\underline{Z}_p	$\Omega = V/A$	Impédance, périodique	114
\underline{Z}_r	$\Omega = V/A$	Impédance de rayonnement	179
$\underline{Z}(z)/\underline{Z}_c$	–	Impédance normalisée	82
$\underline{\gamma}$	m^{-1}	Exposant de propagation	55
$\underline{\gamma}_i$	m^{-1}	Valeur propre	123
$\underline{\gamma}_x, \underline{\gamma}_y, \underline{\gamma}_z$	m^{-1}	Composantes cartésiennes de $\underline{\gamma}$	147
$\underline{\gamma}_m$	m^{-1}	Exposant de propagation, valeur moyenne	129
$\underline{\gamma}_p d$	–	Exposant, périodique	110
$\Delta\underline{\gamma}$	m^{-1}	Différence des exposants de propagation	129
$\underline{\varepsilon}$	As/Vm	Permittivité complexe	140
$\underline{\Lambda}_{\pm}$	–	Valeur propre, périodique	114
$\underline{\mu}$	Vs/Am	Perméabilité complexe	140
$\underline{\rho}(z)$	–	Phaseur de réflexion	65
$\underline{\rho}(\mathbf{r})$	As/m ³	Phaseur de densité de charges	142
$\underline{\rho}_g$	–	Facteur de réflexion, générateur	80
$\underline{\rho}_t$	–	Facteur de réflexion, terminaison	79
$\underline{\rho}_{//}$	–	Facteur de réflexion	161
$\underline{\rho}_{\perp}$	–	Facteur de réflexion	160
$\underline{\tau}_{//}$	–	Facteur de transmission	161
$\underline{\tau}_{\perp}$	–	Facteur de transmission	160

VECTEURS-PHASEURS

$\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$	Vs/m	Potentiel vecteur-phaseur magnétique	142
$\underline{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$	Vs/m ²	Vecteur-phaseur d'induction	140
$\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{r})$	As/m ²	Vecteur-phaseur de déplacement	140
$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$	V/m	Vecteur-phaseur électrique	136
$\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})$	A/m	Vecteur-phaseur magnétique	140
$\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{r})$	VA/m ²	Vecteur-phaseur de Poynting	142
$\underline{\mathbf{Y}}_c$	S = A/V	Vecteur-phaseur d'admittance	153
$\underline{\mathbf{Z}}_c$	$\Omega = V/A$	Vecteur-phaseur d'impédance	153
$\underline{\gamma}$	m^{-1}	Vecteur-phaseur de propagation	148

MATRICES ET TENSEURS

$[\underline{\mathbf{A}}], [\underline{\mathbf{B}}]$	–	Vecteurs colonnes des constantes	123
$e^{[\underline{\mathbf{M}}]z}$	–	Exponentielle matricielle	122

$\bar{\epsilon}$	As/Vm	Dyadique de permittivité	16
$[\underline{\mathbf{G}}(z)]$	–	Matrice de propagation	123
$\bar{\underline{\mathbf{G}}}_{EJ}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$	V/Am ²	Fonction dyadique de Green	176
$\bar{\underline{\mathbf{G}}}_{HJ}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$	m ⁻²	Fonction dyadique de Green	176
$\bar{\mu}$	Vs/Am	Dyadique de perméabilité	16
$[\underline{\mathbf{M}}]$	–	Matrice des lignes couplées	122
$[\underline{\mathbf{P}}]$	V	Matrice des tensions	123
$[\underline{\mathbf{Q}}]$	A	Matrice des courants	123
$[\underline{\mathbf{R}}]$	–	Facteur de réflexion matriciel	124
$[\underline{\mathbf{S}}]$	–	Matrice de répartition	70
$[\underline{\mathbf{T}}(z)]$	–	Fonction de transfert	122
$[\underline{\mathbf{Y}}]$	S = A/V	Matrice d'admittance	67
$[\underline{\mathbf{U}}_g]$	V	Tensions des générateurs	125
$[\underline{\mathbf{V}}]$	V	Vecteur-colonne des sources (mom)	314
$[\underline{\mathbf{Y}}']$	A/Vm	Matrice d'admittances linéiques	122
$[\underline{\mathbf{Y}}_c]$	S = A/V	Matrice d'admittance	154
$[\underline{\mathbf{Y}}_t]$	S = A/V	Admittances des terminaisons	128
$[\underline{\mathbf{Z}}]$	$\Omega = V/A$	Matrice d'impédance	67
$[\underline{\mathbf{Z}}]$	V/Am	Matrice d'impédances linéiques	122
$[\underline{\mathbf{Z}}^{\text{mom}}]$	$\Omega = V/A$	Matrice, méthode des moments	314
$[\underline{\mathbf{Z}}_g]$	$\Omega = V/A$	Impédances des générateurs	125
$[\underline{\mathbf{Z}}_t]$	$\Omega = V/A$	Impédances des terminaisons	124
$[\underline{\alpha}]$	–	Matrice des coefficients (mom)	314
$[\underline{\Phi}(z)]$	–	Vecteur colonne	122
$[\underline{\Phi}_i^+]$ et $[\underline{\Phi}_i^-]$	–	Vecteurs propres	123

OPÉRATEURS ET ABRÉVIATIONS

∇	m ⁻¹	Del ou nabla, gradient	10
∇_t	m ⁻¹	Opérateur transverse	213
$\nabla \cdot = \text{div}$	m ⁻¹	Divergence	10
$\nabla \times = \text{rot}$	m ⁻¹	Rotationnel	10
∇^2	m ⁻²	Laplacien	20
$\partial/\partial n$	m ⁻¹	Dérivée dans la direction normale	203
$\partial/\partial t$	s ⁻¹	Dérivée par rapport au temps	8
$\text{Re}[\underline{z}]$	–	Partie réelle d'un nombre complexe	52
$\text{Im}[\underline{z}]$	–	Partie imaginaire d'un nombre complexe	59
$ \underline{z} $	–	Module d'un nombre complexe	53
$\langle x \rangle$	–	Valeur moyenne de la variable x	53

