

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

# Traité d'Électricité

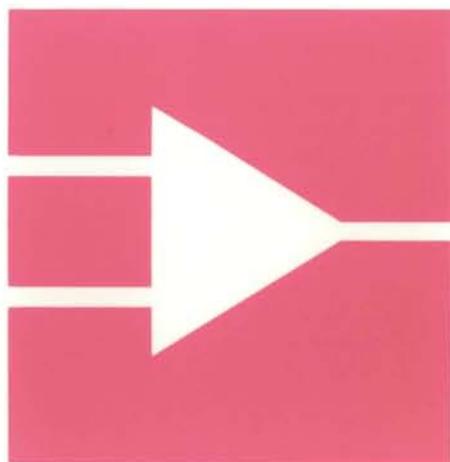
PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION DE JACQUES NEIRYNCK

VOLUME XIX

## FILTRES ÉLECTRIQUES

Hervé Dedieu  
Catherine Dehollain  
Martin Hasler  
et Jacques Neiryck

Nouvelle édition, revue et augmentée



PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

## TRAITÉ D'ÉLECTRICITÉ

Jusqu'à ce jour, les théories et les applications de l'électricité n'ont jamais fait l'objet d'un exposé systématique et unifié.

Les 22 volumes du Traité d'Electricité comblent cette lacune. Cet ouvrage rassemble de façon cohérente des connaissances jusqu'ici disparates et fragmentaires en fonction de la hiérarchie de modèles de plus en plus généraux, tels que les ingénieurs les ont conçus pour maîtriser des techniques de plus en plus complexes.

PRÉSENTATION DU VOLUME XIX

### FILTRES ÉLECTRIQUES

- Synthèse des bipôles LC et RC
- Matrice de répartition
- Méthode des paramètres-image
- Approximations analytiques et numériques
- Synthèse du biporte LC entre terminaisons résistives
- Sensibilité des filtres
- Filtres à résonateurs
- Gyrateurs
- FDNC et FDNR
- Filtres discrets
- Adaptation à large bande

Les méthodes de conception des filtres électriques ont traditionnellement fait appel à une foule de méthodes disparates, tenant plus de la recette que de la démarche scientifique, et elles aboutissent aujourd'hui à une floraison de technologies concurrentes. Le but de ce volume est d'ordonner ce foisonnement autour de quelques lignes de force. Les auteurs se sont efforcés de développer des perspectives centrales, propices à la concision des calculs et à l'économie des concepts. On explique certes comment on peut concevoir un filtre et de multiples exemples numériques le montrent mais aussi, et surtout, on discute pourquoi telle méthode s'est imposée de préférence aux autres.

Le concept central est celui du filtre classique, biporte non dissipatif entre terminaisons résistives, à structure en échelle et comportant le maximum de zéros d'affaiblissement. Que ce filtre soit directement réalisé par des bobines et des condensateurs ou qu'il soit simulé par un circuit RC actif ou un système discret, peu importe. A travers toutes ces technologies, le filtre classique jouit d'une propriété fondamentale : son insensibilité aux valeurs des composants, garante de la sélectivité de la caractéristique de filtrage.

Le volume passe en revue les méthodes classiques de synthèse des bipôles et des biportes : il contient en particulier la description de la méthode des paramètres-image injustement oubliée. Les procédés

TRAITÉ D'ÉLECTRICITÉ

**XIX  
FILTRES  
ÉLECTRIQUES**

PPUR  
Cité Universitaire EPFL  
Centre Midi  
CH - 1015 Lausanne

15. 11. 96

SFR HT: 87,5

TTC: 88,70



# TRAITÉ D'ÉLECTRICITÉ

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE  
PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION DE JACQUES NEIRYNCK

VOLUME XIX

## FILTRES ÉLECTRIQUES

Nouvelle édition, revue et augmentée

Hervé Dedieu  
Catherine Dehollain  
Martin Hasler  
et Jacques Neiryck



PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

Cet ouvrage fait partie d'une série de vingt-deux volumes  
dont les titres sont les suivants :

- I INTRODUCTION À L'ÉLECTROTECHNIQUE
- II MATÉRIAUX DE L'ÉLECTROTECHNIQUE
- III ÉLECTROMAGNÉTISME
- IV THÉORIE DES RÉSEAUX DE KIRCHHOFF
- V ANALYSE ET SYNTHÈSE DES SYSTÈMES LOGIQUES
- VI THÉORIE ET TRAITEMENT DES SIGNAUX
- VII DISPOSITIFS À SEMICONDUCTEUR
- VIII ÉLECTRONIQUE
- IX ÉLECTROMÉCANIQUE
- X MACHINES ÉLECTRIQUES
- XI MACHINES SÉQUENTIELLES
- XII ÉNERGIE ÉLECTRIQUE
- XIII HYPERFRÉQUENCES
- XIV CALCULATRICES
- XV ÉLECTRONIQUE DE PUISSANCE
- XVI ÉLECTRONIQUE DE RÉGLAGE ET DE COMMANDE
- XVII SYSTÈMES DE MESURE
- XVIII SYSTÈMES DE TÉLÉCOMMUNICATIONS
- XIX FILTRES ÉLECTRIQUES
- XX TRAITEMENT NUMÉRIQUE DES SIGNAUX
- XXI ÉLECTROACOUSTIQUE
- XXII HAUTE TENSION



Le Traité d'Electricité est une publication des  
**Presses polytechniques et universitaires romandes**,  
fondation scientifique dont le but est principalement la diffusion des travaux de  
l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne.

Le catalogue de ces publications peut être obtenu aux  
**Presses polytechniques et universitaires romandes, CH-1015 Lausanne.**

**Vous pouvez consulter notre catalogue général  
sur notre serveur Internet <http://sente.epfl.ch/webs/ppur/>**

---

Troisième édition  
ISBN 2-88074-315-X

© 1984, 1996 Presses polytechniques et universitaires romandes  
CH-1015 Lausanne  
Tous droits réservés.

Reproduction, même partielle, sous quelque forme ou sur quelque support que ce soit,  
interdite sans l'accord écrit de l'éditeur.

Imprimé en Suisse  
Imprimerie Corbaz S.A., Montreux

## INTRODUCTION

### Généralités

En 1915, pour la première fois, on développa des filtres électriques en relation avec la construction des répéteurs. Depuis, les filtres électriques ont trouvé maintes applications dans tous les domaines du traitement et de la transmission des signaux. La technologie a aussi évolué : les filtres, originellement construits au moyen de bobines et de condensateurs, font aujourd'hui intervenir une foule d'autres composants.

Malgré cette évolution, les méthodes et les circuits originels ont témoigné d'une remarquable permanence. De 1915 à 1965, la seule chose qui ait vraiment changé dans les filtres, a été le facteur de qualité des bobines. Depuis, l'élargissement du choix des composants et le raffinement des méthodes de calcul n'ont réussi que dans la mesure où certaines caractéristiques du filtre originel ont été respectées.

Un filtre peut être considéré comme une machine à calculer analogique résolvant, en temps réel, une équation intégral-différentielle d'ordre élevé. Cette machine à calculer est réalisée au moyen de composants peu précis, sujets à des variations de température et au vieillissement; néanmoins, elle fonctionne de façon fiable pendant deux à trois décennies. De surcroît, sa technologie simple est relativement peu coûteuse. En somme, le filtre électrique est la seule machine à calculer analogique qui ait si bien réussi. Elle est la seule qui, aujourd'hui encore, concurrence le microprocesseur.

Ces différentes considérations suggèrent une étude du filtre électrique, qui s'efforce d'en regrouper les innombrables caractéristiques autour de trois idées centrales : le biporte non dissipatif entre terminaisons résistives; la structure en échelle; le nombre maximal de zéros d'affaiblissement. C'est ce que l'on appellera le *filtre classique*.

Le présent ouvrage n'est donc pas une encyclopédie de tout ce qui a été publié, à tort ou à raison, sur le filtre électrique; un tel ouvrage dépasserait toutes les bornes raisonnables en matière de compétence, d'espace et de temps. Par contre, les auteurs se sont efforcés de développer des perspectives centrales, propices à la concision des calculs et à l'économie des concepts. Il s'agit certes d'exposer *comment* on peut concevoir un filtre, mais il est encore plus important de montrer *pourquoi* telle méthode s'est imposée de préférence aux autres.

Ce livre n'est donc pas un recueil de recettes, ni un assemblage de tables ou d'abaques. A l'usage des praticiens, il existe des ouvrages de références [1-4].

De même, il n'est pas possible de faire, dans l'espace imparti, une recension exhaustive de toutes les technologies neuves, sujettes à des engouements aussi unanimes que provisoires. Nul ne peut prédire l'avenir du filtre électrique. Il est donc vain de s'aligner sur la dernière mode. Tout le problème, ici comme ailleurs, est de discerner le permanent de l'éphémère, le fondamental de l'accessoire : c'est l'objet de ce livre.

### Organisation de l'ouvrage

Le volume XIX comporte douze chapitres. Normalement, ils doivent être lus consécutivement. Néanmoins, lors d'une première lecture, on peut se dispenser des chapitres 3, 4, 5 et 7.

Les deux premiers chapitres constituent une introduction générale au problème du filtrage. Ils contiennent une théorie complète de la synthèse des bipôles LC et RC, ainsi que l'étude de la forme canonique du biporte LC entre terminaisons résistives.

Le chapitre 3 est consacré à une présentation sommaire de la méthode des paramètres-image, qui reste utile chaque fois que l'on ne dispose pas d'un ordinateur, et qui ouvre des perspectives intéressantes sur tous les filtres.

Les chapitres 4 et 5 traitent des problèmes d'approximation, si souvent négligés dans la conception d'un filtre ou, plus souvent, confondus inextricablement avec le processus de synthèse.

Le chapitre 6 constitue le pivot autour duquel s'articule tout le volume : on y expose la méthode de synthèse des biportes, ainsi que les problèmes de calcul numérique qui surgissent à cette occasion.

Le chapitre 7 est consacré aux problèmes de sensibilité aux valeurs des composants, au calcul des tolérances acceptables, au centrage des filtres, à l'effet des pertes.

Les chapitres 8 et 9 constituent une généralisation des méthodes exposées plus haut au cas des composants différents de la bobine et du condensateur, en particulier les différentes versions de filtres RC-actifs.

Le chapitre 10 est consacré à l'adaptation d'impédance à large bande. On commence par montrer qu'il s'agit d'un problème de filtrage sous contraintes puis on propose plusieurs méthodes qui aboutissent à des solutions quasi optimales.

Les chapitres 11 et 12 sont consacrés aux filtres discrets, c'est-à-dire aux dispositifs qui traitent des échantillons du signal. Le chapitre 12 traite des propriétés et de la synthèse des filtres numériques à réponse impulsionnelle finie.

### Place du volume XIX dans le Traité

Le volume XIX utilise exclusivement le modèle de Kirchhoff, dont la théorie a été exposée au volume IV. Celui-ci traite de l'analyse des réseaux linéaires et le volume XIX est principalement consacré aux problèmes de synthèse. Ces problèmes de synthèse sont considérés ici dans toute leur rigueur théorique, mais avec le souci constant du but pratique : la conception de filtres. Historiquement, la synthèse des circuits linéaires n'a eu d'autre motif ou excuse que la réalisation de filtres : nous avons éliminé tous les développements qui étaient simplement excusables mais non motivés.

Le volume XIX ne traite pas du choix des composants passifs, qui fait l'objet du volume II, ni des composants actifs, qui sont discutés aux volumes VII et VIII.

L'utilisation des filtres en traitement du signal et leur insertion dans les réseaux de télécommunications font l'objet des volumes VI, XVIII et XX.

### Conventions

Le Traité d'Electricité est composé de volumes (vol.) repérés par un chiffre romain (vol. V). Chaque volume est partagé en chapitres (chap.) repérés par un nombre arabe (chap. 2). Chaque chapitre est divisé en sections (sect.) repérées par deux nombres arabes

séparés par un point (sect. 2.3). Chaque section est divisée en paragraphes (§) repérés par trois nombres arabes séparés par deux points (§ 2.3.11). Les références internes stipulent le volume, le chapitre, la section ou le paragraphe du *Traité* auquel on renvoie. Dans le cas de la référence à une partie du même volume, on omet le numéro de celui-ci.

Les références bibliographiques sont numérotées continûment par volume et repérées par un seul nombre arabe entre crochets; les pages concernées sont éventuellement précisées entre parenthèses : [33] (pp. 12-15).

Un terme apparaît en *italique maigre* la première fois qu'il est défini dans le texte. Un passage important est mis en évidence lorsqu'il est composé en *italique gras*.

Les équations hors texte sont numérotées continûment par chapitre et repérées par deux nombres arabes placés entre parenthèses et séparés par un point (3.14). Les figures et tableaux sont numérotés continûment par chapitre et repérés par deux nombres arabes précédés de Fig. (Fig. 4.12) ou Tableau (Tableau 4.13).

### **Présentation de la nouvelle édition**

Le volume XIX du *Traité d'Electricité* se présente sous la forme d'une nouvelle édition complètement revue et corrigée par rapport à l'édition originale datant de 1981. En quinze ans, les principes à la base du filtrage sont demeurés identiques, ce qui justifie que les six premiers chapitres soient demeurés dans leur forme antérieure.

Cependant, les technologies ont évolué notamment sous l'influence des perfectionnements des circuits intégrés. Les filtres à temps continus et les filtres numériques sont donc abordés ici dans leurs détails. Enfin, un chapitre original traite de l'adaptation à large bande. Cet ouvrage qui est ainsi considérablement enrichi et rénové constitue une référence dans le domaine.



## TABLE DES MATIÈRES

	INTRODUCTION . . . . .	v
CHAPITRE 1	NOTIONS FONDAMENTALES	
	1.1 Filtres . . . . .	1
	1.2 Classification et transformation des filtres . . . . .	9
CHAPITRE 2	PROPRIÉTÉS DES BIPÔLES ET BIPORTES	
	2.1 Propriétés des bipôles à deux types d'éléments . . . . .	19
	2.2 Synthèse des bipôles à deux types d'éléments . . . . .	30
	2.3 Caractérisation des biportes LC entre entre terminaisons résistives. . . . .	36
CHAPITRE 3	SYNTHÈSE DES FILTRES PAR LA MÉTHODE DES PARAMÈTRES-IMAGE	
	3.1 Paramètres-image. . . . .	51
	3.2 Cellules de filtre passe-bas . . . . .	56
	3.3 Conception d'une chaîne-image passe-bas. . . . .	62
	3.4 Théorie générale des paramètres-image. . . . .	69
	3.5 Cellules de filtre passe-bande . . . . .	72
CHAPITRE 4	APPROXIMATIONS ANALYTIQUES	
	4.1 Détermination de la transmittance . . . . .	85
	4.2 Filtre idéal . . . . .	91
	4.3 Approximation selon le critère méplat. . . . .	92
	4.4 Approximation selon la norme de Tchebycheff. . . . .	100
CHAPITRE 5	MÉTHODES NUMÉRIQUES D'APPROXIMATION	
	5.1 Approximation polynomiale de Tchebycheff . . . . .	107
	5.2 Approximation de Tchebycheff par une fonction non polynomiale. . . . .	117
	5.3 Calcul des pôles-image . . . . .	120
	5.4 Approximation de l'affaiblissement. . . . .	123
CHAPITRE 6	SYNTHÈSE DES BIPORTES LC EN ÉCHELLE ENTRE TERMINAISONS RÉSISTIVES	
	6.1 Factorisation de la matrice de transfert . . . . .	131
	6.2 Extraction des biportes élémentaires . . . . .	136

	6.3	Classification des filtres . . . . .	149
	6.4	Analyse numérique . . . . .	160
	6.5	Circuits auxiliaires . . . . .	163
<b>CHAPITRE 7</b>		<b>SENSIBILITÉ DES FILTRES LC</b>	
	7.1	Propriétés générales . . . . .	169
	7.2	Calcul de la sensibilité d'un filtre en échelle . . . . .	176
	7.3	Invariants de sensibilité. . . . .	180
	7.4	Centrage d'un filtre . . . . .	185
	7.5	Effet des éléments parasites. . . . .	188
<b>CHAPITRE 8</b>		<b>SIMULATION DIRECTE DU BIORTE NON DISSIPATIF ENTRE TERMINAISONS RÉSISTIVES</b>	
	8.1	Filtres à résonateurs . . . . .	193
	8.2	Filtres à gyrateurs et à capacités . . . . .	203
	8.3	Filtres avec FDNC et FDNR . . . . .	224
<b>CHAPITRE 9</b>		<b>FILTRES RC-ACTIFS</b>	
	9.1	Introduction . . . . .	245
	9.2	Cellules biquadratiques. . . . .	257
	9.3	Sous-circuits pour les filtres de simulation LC directe . . . . .	264
	9.4	Filtres cascade . . . . .	270
	9.5	Filtres à transfert de tension en connexion "Leapfrog" . . . . .	272
	9.6	Filtres à transfert de tension en connexion "Follow the Leader Feedback" . . . . .	280
	9.7	Sensibilité des filtres RC-actifs. . . . .	283
<b>CHAPITRE 10</b>		<b>ADAPTATION À LARGE BANDE</b>	
	10.1	Énoncé du problème . . . . .	301
	10.2	Contraintes intégrales. . . . .	304
	10.3	Gain idéal constant et minimum absolu . . . . .	313
	10.4	Contraintes non intégrales. . . . .	315
	10.5	Méthode de Tchebycheff . . . . .	320
	10.6	Méthode des paramètres-image. . . . .	324
	10.7	Méthode de Gauss-Newton stochastique. . . . .	334
	10.8	Mode d'emploi . . . . .	337
<b>CHAPITRE 11</b>		<b>FILTRES DISCRETS</b>	
	11.1	Analyse des signaux et systèmes discrets . . . . .	341
	11.2	Analyse d'une chaîne de filtrage analogique contenant un filtre discret. . . . .	347
	11.3	Approximation pour filtres discrets. . . . .	353
	11.4	Filtres à capacités commutées . . . . .	358
	11.5	Filtres numériques. . . . .	379

CHAPITRE 12	FILTRES À RÉPONSE IMPULSIONNELLE FINIE	
	12.1 Généralités . . . . .	399
	12.2 Filtres à phase linéaire . . . . .	402
	12.3 Calcul de R.I.F. par développement en série de Fourier . . . . .	407
	12.4 Approximation numérique des R.I.F. . . . .	416
	BIBLIOGRAPHIE . . . . .	425
	INDEX ANALYTIQUE . . . . .	429



## NOTIONS FONDAMENTALES

### 1.1 FILTRES

#### 1.1.1 Définitions

Le *filtrage* d'un signal est l'opération qui consiste à séparer les composantes de ce signal selon leurs fréquences. Le *filtre* est le circuit qui réalise cette opération. Les intervalles de fréquence où les composantes du signal sont transmises, sont appelés *bandes passantes*, et ceux où elles ne le sont pas, sont les *bandes coupées* (*bandes bloquées*). Ces définitions seront précisées au paragraphe 1.1.11.

#### 1.1.2 Commentaire

Le filtrage constitue une opération fondamentale dans les techniques de transmission d'information.

La fonction la plus typique est la séparation de différents signaux qui utilisent le même canal de transmission. Tel est le cas pour la téléphonie, la télégraphie, la télévision, la radio, le radar ou le sonar. Sans l'utilisation de filtres, un poste de radio, par exemple, ne parviendrait pas à capter une émission parmi toutes celles qui occupent les ondes. De même, la transmission simultanée de plusieurs conversations téléphoniques par le même câble est possible, parce qu'elles sont transposées par modulation dans des bandes de fréquence différentes, et qu'elles peuvent être séparées par filtrage à la réception.

Le filtrage permet aussi d'extraire le signal utile, en éliminant les signaux parasites ou accessoires : bruit, signalisation, fréquences pilotes.

Le filtrage est une opération indispensable dans la plupart des manipulations de signaux : la modulation à bande latérale unique, l'échantillonnage, etc.

#### 1.1.3 Historique

L'étude élémentaire des circuits résonants et antirésonants, isolés ou couplés (sect. IV.3.5), a montré très tôt qu'il était possible de sélectionner certaines fréquences d'un signal. En fait, pour de nombreuses applications, telle la radio, où les exigences normales de filtrage ne sont pas trop sévères et où de nombreux éléments actifs à transmission unilatérale sont forcément utilisés pour l'amplification, le filtrage s'opère par mise en cascade de plusieurs étages d'amplification, dont les charges sont des circuits résonants ou antirésonants. Dans cette situation, le problème du filtrage est trivial, parce que la fonction de transfert globale est simplement le produit des fonctions de réponse des circuits résonants ou antirésonants (chap. VIII.10).

Par contre, en téléphonie, il n'est pas nécessaire d'utiliser de nombreux éléments actifs dans chaque voie, et le besoin s'est fait sentir très tôt de séparer les diverses voies au moyen de biportes entièrement passifs. Dès 1915, Campbell et Wagner ont développé les premiers filtres construits au moyen de bobines et de condensateurs. La *théorie-image* de ces dispositifs est due à Zobel. Cette théorie a permis de mettre en exploitation systématique des systèmes de téléphonie à courants porteurs (chap. XVIII.10).

En 1939, Darlington présenta, parallèlement à Cauer et Piloty, un procédé de synthèse d'un quadripôle réactif entre terminaisons résistives. Cette méthode des *paramètres effectifs* pose de redoutables problèmes d'analyse numérique, qui n'ont été résolus que par l'arrivée sur le marché, dans les années 60, d'ordinateurs suffisamment puissants.

En parallèle avec cet approfondissement des connaissances théoriques s'est développé une tendance à élargir le choix des composants. Les pertes, l'encombrement et le coût des bobines poussent à leur élimination des filtres, surtout aux basses fréquences. Linvill a montré, en 1953, qu'il était possible, *en théorie*, de réaliser un filtre au moyen de résistances, de capacités et d'un élément actif. Ce schéma théorique s'est heurté à une difficulté pratique inattendue : la fonction de réponse de ce filtre présente une sensibilité trop élevée aux valeurs des éléments.

Par ricochet, cette déconvenue a fait prendre conscience du phénomène inverse dans les filtres à condensateurs et bobines : on peut montrer (§ 1.1.15) qu'ils sont anormalement insensibles aux valeurs de leurs composants. Dès lors, l'effort principal, de 1968 à 1978, a porté sur la simulation des filtres classiques en utilisant des composants nouveaux : de là viennent les solutions à base de gyrateurs, de FDNR et FDNC et de boucles de contre-réaction. Depuis 1978, la méthode la plus étudiée est celle des filtres à capacités commutées qui permet une réalisation sous forme de circuit intégré.

Fettweis a montré, en 1971, que même les filtres numériques étaient susceptibles de performances meilleures dans la mesure où ils simulent un filtre classique. C'est le *filtre numérique d'onde*.

Ce bref historique laisse apercevoir que le filtrage est généralement réalisé, soit par un biporte non dissipatif, soit par des circuits qui simulent ce biporte. Le but de cet ouvrage est d'étudier systématiquement cette solution, dans ses aspects les plus fondamentaux.

#### 1.1.4 Définition du problème

Le filtre développé par Zobel ou Darlington est un biporte réciproque non dissipatif placé entre terminaisons résistives, ainsi que cela est représenté à la figure 1.1. En principe, le biporte comporte donc des inductances et des capacités, ainsi que des transformateurs idéaux.

La conception d'un filtre s'efforcera de réaliser les objectifs de filtrage en utilisant le nombre minimum d'éléments. On peut concevoir intuitivement que, plus les exigences du filtrage sont sévères, plus le degré (§ IV. 2.3.19) est élevé, et plus le nombre d'éléments réactifs doit être grand.

Tous les éléments n'ont cependant pas la même importance. La synthèse des filtres LC implique une dissymétrie importante entre le nombre des capacités et



Fig. 1.1

celui des inductances. Les premières peuvent être réalisées par des condensateurs bon marché, avec de faibles pertes et un encombrement réduit. Par contre, les secondes sont mal réalisées par des bobines, coûteuses, affligées de pertes et encombrantes. Entre deux circuits duaux, on choisira donc toujours celui qui comporte le moins d'inductances.

De même, on s'efforcera d'éviter les transformateurs idéaux, dont une paire de bobines couplées ne constitue qu'une médiocre approximation. A cet égard, certaines solutions théoriques, comme la cellule de Brune (§ 6.2.21), très séduisantes sur le plan du principe sont en pratique peu utilisées. Dans ce cas particulier, on n'exige même pas un transformateur idéal, mais une paire de bobines à couplage parfait, ce qui reste cependant tout aussi irréalisable dans ce contexte. Par contre, l'utilisation d'autotransformateurs est courante pour obtenir des valeurs d'éléments convenables au point de vue de la réalisation des composants physiques.

De plus, le choix d'un composant est influencé par toute une série d'exigences : la gamme de fréquences où est située la bande passante, la largeur relative de cette bande passante, la gamme de températures auxquelles le filtre doit fonctionner, la durée de vie du filtre, ... Enfin, le coût d'un composant dépend évidemment de sa précision : il est donc intéressant d'imaginer des structures de biportes dont les fonctions de réponse soient peu sensibles aux valeurs des composants.

### 1.1.5 Commentaire

Cette conception du filtre classique, comme un biporte non dissipatif, fait totalement abstraction des pertes qui apparaîtront nécessairement dans les bobines. Le modèle de celles-ci comporte toujours une résistance et une inductance.

La conception d'un filtre s'opère donc en deux étapes. Dans la première, on synthétisera un biporte non dissipatif qui vérifie les exigences de filtrage avec une marge de sécurité, pour tenir compte aussi bien des pertes que des tolérances sur les éléments. Dans la seconde étape, on analysera le filtre en tenant compte de ces imperfections. Si les exigences ne sont pas satisfaites, on peut, soit recommencer la première étape en accroissant la marge, soit corriger l'effet des pertes au moyen d'un circuit particulier.

Compte tenu de cette réserve, la synthèse des filtres se ramène essentiellement à celle de biportes non dissipatifs. Les éléments utilisés sont localisés, linéaires et autonomes. La théorie linéaire des réseaux de Kirchhoff développée au volume IV est donc applicable.

### 1.1.6 Rappel

La fonction de réponse définie pour le circuit de la figure 1.1 est le coefficient de transmission

$$s_{21} = 2 U_2 \sqrt{R_1} / E \sqrt{R_2} \quad (1.1)$$

où  $U_2$  et  $E$  désignent, soit les transformées de Laplace des tensions  $u_2(t)$  et  $e(t)$ , dans le cas d'une réponse globale comportant les termes transitoires et de régime, soit les substituts complexes de ces tensions, dans le cas de la réponse de régime sinusoïdal. Les fonctions  $U_2$  et  $E$  dépendent respectivement, soit de la variable complexe  $p$ , soit de la variable imaginaire pure  $j\omega$ .

Pour traiter le cas le plus général,  $s_{21}$  sera considéré comme une fonction de  $p$ . Les concepts de puissance active, réactive et complexe ne sont définis que pour  $p = j\omega$ , c'est-à-dire le long de l'axe imaginaire du plan complexe. Pour  $p = j\omega$ ,  $|E|^2/4R_1$  et  $|U_2|^2/R_2$  représentent respectivement, la puissance active maximale qui peut être débitée par la source (§ IV. 6.3.9) et la puissance active dissipée dans la charge. Dès lors, on a l'inégalité

$$|s_{21}| \leq 1 \quad (1.2)$$

### 1.1.7 Définitions

On appelle *comportement* la grandeur

$$\ln [s_{21}(j\omega)]^{-1} = \alpha(\omega) + j\varphi(\omega) \quad (1.3)$$

où  $\alpha(\omega)$  est l'*affaiblissement* et  $\varphi(\omega)$  le *déphasage*. On peut encore écrire

$$\alpha(\omega) = -\ln |s_{21}(j\omega)| \quad (1.4)$$

et l'unité d'affaiblissement est le Néper (Np). Si l'on utilise la formule

$$\alpha(\omega) = -20 \log |s_{21}(j\omega)| \quad (1.5)$$

l'unité est le décibel (dB). On sait (§ IV. 3.2.13) que 1 Np = 8,686 dB.

Les concepts de comportement, d'affaiblissement et de déphasage peuvent également être définis pour une fonction de réponse quelconque. En particulier, si l'on utilise  $s_{11}$  ou  $s_{22}$ , coefficients de réflexion (§ IV.6.3.13), dans la formule (1.4) on définit les *affaiblissements de réflexion*.

### 1.1.8 Propriétés

Par (1.2), il vient

$$\alpha(\omega) \geq 0 \quad (1.6)$$

Comme  $\alpha$  et  $\varphi$  sont le module et l'argument d'une fonction réelle de  $j\omega$ , il vient

$$\alpha(-\omega) = \alpha(\omega) \quad (1.7)$$

$$\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega) \quad (1.8)$$

### 1.1.9 Rappels

La fonction  $s_{21}(p)$  est une fonction de réponse d'un réseau, à constantes localisées, linéaire, autonome et dissipatif. Dès lors, par les résultats de l'analyse de tels réseaux, qui font l'objet du volume IV,  $s_{21}(p)$  jouit d'une série de propriétés :

- $s_{21}(p)$  est une fraction rationnelle réelle, c'est-à-dire le rapport de deux polynômes à coefficients réels. Cette propriété est valable pour toutes les fonctions de réponse étudiées dans ce volume;
- en conséquence, les racines du numérateur et du dénominateur sont, soit réelles, soit des paires de valeurs complexes conjuguées;
- les racines de son dénominateur sont situées dans le demi-plan de gauche, frontière exclue par suite de la stabilité stricte du réseau;
- le degré du numérateur est inférieur ou égal à celui du dénominateur;
- les parties paire et impaire (§ 2.1.10) de  $s_{21}$  sont les transformées de Hilbert (§ IV. 7.3.33) l'une de l'autre, par suite du caractère causal et stable de  $s_{21}$ ;
- $s_{21}(p)$  est le rapport sans dimension de deux grandeurs réduites.

### 1.1.10 Corollaire

Par la première propriété de  $s_{21}(p)$ , rappelée au paragraphe 1.1.9, il est clair que  $\alpha(\omega)$  est une fonction continue de  $\omega$  en dehors de ses singularités. Dès lors, il n'est pas possible d'assurer une transition discontinue entre les bandes passantes, où  $|s_{21}(j\omega)|$  est proche de l'unité et  $\alpha(\omega)$  proche de zéro, et les bandes bloquées, où  $|s_{21}(j\omega)|$  est proche de zéro et  $\alpha(\omega)$  de l'infini. Le passage d'un type de bande à l'autre s'opère par un *intervalle de transition*, où  $\alpha(\omega)$  varie continûment entre des valeurs très faibles et d'autres très élevées.

### 1.1.11 Définitions

Compte tenu de la définition de l'affaiblissement, on peut préciser la définition des différentes bandes.

Une *bande passante* est un intervalle de fréquence dans lequel l'affaiblissement varie peu et est faible comparé à l'affaiblissement de la bande coupée. Pour des raisons qui apparaîtront plus loin (§ 1.1.15), il est souhaitable que l'affaiblissement minimal dans la bande atteigne la valeur nulle pour le plus grand nombre de fréquences possible compte tenu du degré. Les valeurs de  $\omega_i$  telles que  $\alpha(\omega_i) = 0$  ou, encore,  $|s_{21}(j\omega_i)| = 1$ , sont appelées *zéros d'affaiblissement*. La variation totale de  $\alpha(\omega)$  dans la bande passante, c'est-à-dire la différence entre sa valeur maximale et sa valeur minimale, est appelée *ondulation*.

Une *bande coupée* est un intervalle de fréquence dans lequel l'affaiblissement est grand. Les fréquences  $\omega_k$  pour lesquelles  $\alpha(\omega_k) = \infty$  ou, encore,  $|s_{21}(j\omega_k)| = 0$ , sont appelées *pôles d'affaiblissement*.

La différence entre le minimum de  $\alpha(\omega)$  dans une bande coupée et le maximum de  $\alpha(\omega)$  dans une bande passante, est appelée la *discrimination* entre ces bandes. Les exigences imposées à un filtre sont souvent exprimées en spécifiant une ondulation maximale et une discrimination minimale.

### 1.1.12 Définitions

Par le paragraphe 1.1.9, on peut écrire

$$s_{21}(p) = K \prod (p - z_k) / \prod (p - p_j) \quad (1.9)$$

Les grandeurs  $z_k$  sont les *zéros de transmission*, qui coïncident avec des pôles d'affaiblissement lorsqu'ils sont situés sur l'axe imaginaire. De plus, il y a autant de zéros de transmission à l'infini que d'unités dans la différence entre les degrés du dénominateur et du numérateur. Les valeurs  $p_j$  sont les *pôles de transmission*.

La grandeur réelle  $K$  est le *facteur d'échelle*. Si  $K$  varie, la courbe de  $\alpha(\omega)$  subit simplement une translation verticale, sans déformation, dans un diagramme  $\alpha$  en fonction de  $\omega$ .

Pour un ensemble donné de  $z_k$  et de  $p_j$ , il existe une valeur  $K_0$  telle que  $\alpha(\omega) \geq 0$  avec au moins un zéro d'affaiblissement. Pour  $K > K_0$ ,  $\alpha(\omega) < 0$  dans certains intervalles, et la caractéristique de filtrage n'est pas réalisable par le réseau passif de la figure 1.1. Pour  $K < K_0$ , il n'y a plus de zéro d'affaiblissement, et  $\alpha_0 = 20 \log(K_0/K)$  représente une *perte constante*. Celle-ci ne joue aucun rôle dans le processus de filtrage; cependant, cette perte constante augmente la sensibilité de  $\alpha(\omega)$  aux valeurs des composants (§ 1.1.15). En principe, on choisit donc toujours un facteur d'échelle égal à  $K_0$ .

### 1.1.13 Exemple

La figure 1.2 représente une caractéristique typique de filtrage. L'affaiblissement doit être inférieur à 0,5 dB dans la bande passante allant de 0 à 3,4 kHz, et supérieur à

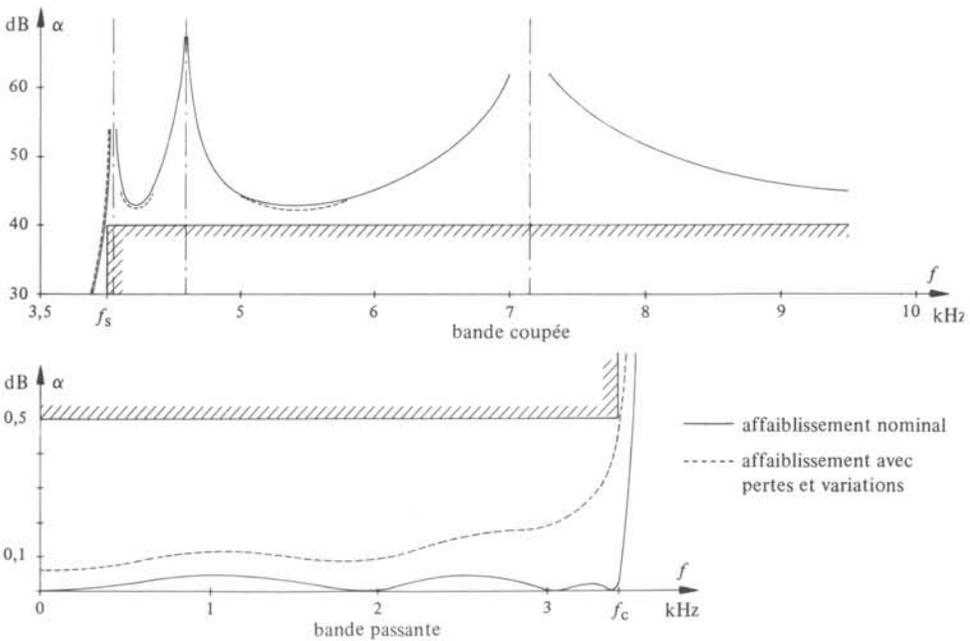


Fig. 1.2

40 dB dans la bande coupée. L'intervalle de transition s'étend donc de 3,4 kHz à 4 kHz.

La courbe  $\alpha(\omega)$  vérifie ces exigences. On constate qu'il y a une marge de sécurité de 0,45 dB et 3 dB respectivement dans la bande passante et la bande coupée.

Cette caractéristique est synthétisée par un filtre LC dans le paragraphe 6.3.16. Lorsque l'on analyse le circuit obtenu en tenant compte de ses pertes et de variations relatives identiques sur la valeur de chaque composant, on obtient la courbe représentée en trait interrompu, qui justifie a posteriori les marges de sécurité qui ont été prévues.

La figure 1.3 représente la configuration correspondante des zéros et des pôles dans le plan de la variable  $p$ .

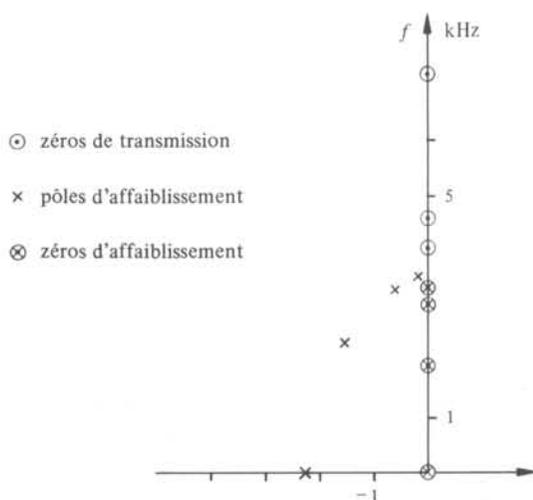


Fig. 1.3

#### 1.1.14 Commentaire

On aura observé que le déphasage n'intervient pas dans les définitions précédentes du filtrage. Bien évidemment, l'affaiblissement joue un rôle primordial en ce sens qu'il n'est pas possible d'éliminer certaines bandes de fréquence si l'affaiblissement n'y est pas élevé. Par ailleurs, dans de nombreux systèmes de transmission de signaux continus, telle la parole ou la musique, le déphasage n'a guère d'importance parce que l'oreille humaine, récepteur ultime, y est peu sensible.

Par contre, la transmission d'une impulsion rectangulaire, à titre d'exemple, souffrirait fortement d'un déphasage qui serait quelconque. Dans ce cas, la caractéristique de déphasage est importante. Mais il faut observer, compte tenu de l'avant-dernière propriété rappelée au paragraphe 1.1.9, que les caractéristiques d'affaiblissement et de déphasage ne peuvent pas être spécifiées indépendamment l'une de l'autre sans risquer de mettre en danger le caractère causal du filtre.

Le plus souvent, un filtre est conçu sur la base de sa seule caractéristique d'affaiblissement. A posteriori, la caractéristique de déphasage est corrigée par un biporte dont c'est la seule fonction (§ 6.5.1).

### 1.1.15 Théorème de Fettweis-Orchard

La dérivée partielle de l'affaiblissement d'un biporte non dissipatif entre résistances par rapport à la valeur de chacun de ses éléments, s'annule aux zéros d'affaiblissement.

Soit  $Z_i$  un élément quelconque du biporte et  $\partial\alpha/\partial Z_i$  la dérivée partielle de  $\alpha$  par rapport à cet élément. Supposons que  $Z_i$  n'ait pas sa valeur nominale et qu'il en diffère par une variation  $\Delta Z_i$  faible. En développant  $\alpha$  en série de Taylor, on obtient

$$\alpha(Z_i + \Delta Z_i) \cong \alpha(Z_i) + \Delta Z_i \frac{\partial \alpha}{\partial Z_i} \quad (1.10)$$

En un zéro d'affaiblissement,  $\alpha(Z_i) = 0$ . Par (1.6), il vient

$$\Delta Z_i \frac{\partial \alpha}{\partial Z_i} \geq 0 \quad (1.11)$$

Or, la variation  $\Delta Z_i$  est de signe quelconque. Dès lors, (1.11) ne peut être vérifié qu'avec le signe d'égalité qui implique  $\partial\alpha/\partial Z_i = 0$ .

### 1.1.16 Commentaire

Ce théorème explique beaucoup de choix et de résultats en théorie de filtres.

Il explique pourquoi l'on évite toute caractéristique de filtrage comportant une perte constante, et pourquoi l'on cherche des caractéristiques de filtrage qui comportent le nombre maximal de zéros d'affaiblissement, compte tenu du degré de  $s_{21}(p)$  et de quelques autres contraintes (§ 6.3.3).

Il explique aussi la difficulté de concevoir un filtre satisfaisant simultanément des exigences sur  $\alpha$  et  $\varphi$  : les degrés de liberté utilisés pour l'optimisation de  $\varphi$  ne sont plus disponibles pour réaliser le nombre maximal de zéros d'affaiblissement. Pour cette raison, on compense le déphasage d'un filtre classique par un biporte séparé (section 6.5).

Ce théorème explique enfin pourquoi la fonction de réponse choisie est le coefficient de transmission, et pourquoi le filtre est un *biporte non dissipatif entre terminaisons résistives*. Si l'accès 2 du biporte de la figure 1.1 était ouvert, par exemple, et si la fonction de réponse était  $U_2/E$ , cette fonction ne serait pas bornée et le théorème ne serait pas vérifié.

### 1.1.17 Conclusion

En guise de conclusion à cette section, on peut tracer un plan de travail. La théorie des filtres comporte deux volets.

L'un est consacré à la recherche de courbes d'affaiblissement qui vérifient certaines exigences de filtrage : ce travail constitue la phase d'*approximation*, celle où l'on choisira une certaine fonction  $s_{21}(p)$ , fraction rationnelle réelle déterminée par ses coefficients, ou ses pôles et ses zéros. Cette partie fait l'objet des chapitres 4 et 5.

Le second volet traite de la *synthèse* d'un circuit dont le coefficient de transmission vaut  $s_{21}(p)$ . Concrètement, il faut trouver les valeurs des inductances et des capacités qui constituent le biporte non dissipatif. Le chapitre 6 décrit cette synthèse.

En pratique, tant la structure du biporte que la valeur des éléments sont rarement acceptables, compte tenu des composants à disposition. Aussi faut-il souvent recourir à une *transformation* de circuit (voir sect. 6.5).

Enfin, le filtre proprement dit est entaché d'imperfections, dans sa réalisation pratique, dues aux pertes et aux tolérances des éléments. La caractéristique d'affaiblissement et éventuellement de phase peuvent être corrigées par la mise en cascade, avec le filtre, de biportes réalisant ces corrections (voir sect. 6.5).

Les chapitres 4 à 7 constituent de la sorte un ensemble qui couvre systématiquement les différentes phases de conception d'un filtre, réalisé selon la *méthode des paramètres effectifs*. Elle est ainsi nommée parce que l'on contrôle d'un bout à l'autre l'affaiblissement et le déphasage effectifs. Il existe peu de dispositifs techniques où l'adéquation est aussi bonne entre le modèle mathématique et la réalisation physique : on dispose d'une méthode rigoureuse et simple allant des exigences jusqu'à la spécification des éléments.

Néanmoins, on exposera au chapitre 3 une méthode approchée, la *théorie-image*, qui a le mérite de donner des résultats très satisfaisants, en ne recourant pas à des calculs aussi lourds que la méthode des paramètres effectifs.

Enfin, les chapitres 8 à 10 constituent une extension de la méthode des paramètres effectifs à des composants autres que l'ensemble inductances et capacités.

## 1.2 CLASSIFICATION ET TRANSFORMATION DES FILTRES

### 1.2.1 Définitions

Un filtre *passé-bas* comporte une bande passante dans l'intervalle de fréquence  $[0, \omega_c]$ , et une bande coupée définie par l'intervalle  $[\omega_s, \infty]$ , avec  $\omega_s > \omega_c$ .

Un filtre *passé-haut* comporte une bande coupée définie par l'intervalle  $[0, \omega_s]$ , et une bande passante  $[\omega_c, \infty]$ , avec  $\omega_c > \omega_s$ .

Un filtre *passé-bande* possède une bande passante  $[\omega_{-c}, \omega_{+c}]$ , encadrée par deux bandes coupées  $[0, \omega_{-s}]$  et  $[\omega_{+s}, \infty]$ , avec  $\omega_{-s} < \omega_{-c}$  et  $\omega_{+c} < \omega_{+s}$ .

Un filtre *coupe-bande* a une bande coupée définie par l'intervalle  $[\omega_{-s}, \omega_{+s}]$ , encadrée par deux bandes passantes  $[0, \omega_{-c}]$  et  $[\omega_{+c}, \infty]$ , avec  $\omega_{-c} < \omega_{-s}$  et  $\omega_{+s} < \omega_{+c}$ .

Il est possible de définir des filtres possédant davantage de bandes passantes et coupées [5].

### 1.2.2 Définitions

Un *atténuateur* est un biporte pour lequel  $\varphi \equiv 0$ . Un *déphaseur* ou *passé-tout* est un biporte pour lequel  $\alpha \equiv 0$ .

### 1.2.3 Transformation du passé-bas en passé-haut

Soit une fonction de réponse  $H(p)$  ayant une caractéristique de passé-bas, et soit un circuit réalisant cette fonction au moyen de résistances  $R_i$ , d'inductances  $L_i$ , de capacités  $C_i$ , de transformateurs de rapport  $n_i$  et de gyrateurs idéaux de résistance de gyration  $R_i$ . Si l'on explicite la dépendance de  $H$  par rapport aux éléments du circuit, on peut écrire

$$H(p) = \tilde{H}(R_i, n_i, L_i p, C_i p) \quad (1.12)$$

Soit une pulsation  $\omega_0$  arbitraire. Si l'on remplace chaque inductance  $L_i$  par une capacité de valeur  $1/L_i\omega_0^2$  et d'impédance  $L_i\omega_0^2/p'$ , que l'on remplace chaque capacité  $C_i$  par une inductance  $1/C_i\omega_0^2$  et d'admittance  $C_i\omega_0^2/p'$ , et que l'on ne modifie pas les résistances, ni les transformateurs, la fonction de réponse  $H(p)$  devient

$$\tilde{H}(R_i, n_i, L_i\omega_0^2/p', C_i\omega_0^2/p') = H(\omega_0^2/p') \quad (1.13)$$

Ainsi la transformation d'impédances, décrite plus haut, engendre une transformation de la variable complexe  $p$  en  $p'$ , avec la relation

$$p' = \omega_0^2/p \quad (1.14)$$

La relation (1.14) transforme l'axe  $j\omega$  du plan  $p$  en l'axe  $j\omega'$  du plan  $p'$ , avec les valeurs particulières 0,  $\omega_0$ ,  $\infty$  de l'axe  $j\omega$  devenant respectivement, au signe près,  $\infty$ ,  $\omega_0$ , 0. La bande passante  $[0, \omega_c]$  du passe-bas devient la bande passante  $[\omega_0^2/\omega_c, \infty]$  du passe-haut, et la bande coupée  $[\omega_s, \infty]$  devient la bande bloquée  $[0, \omega_0^2/\omega_s]$ .

Réciproquement, si une fonction de réponse  $H(p)$  est celle d'un circuit synthétisé au moyen d'inductances, de capacités, de résistances, de transformateurs et de gyrateurs, la fonction de réponse  $H(\omega_0^2/p)$  est réalisée par le même circuit où les inductances et capacités ont subi la transformation décrite tandis que les autres éléments ne sont pas modifiés.

En résumé, la transformation de réactances implique une transformation de fréquence et réciproquement, ainsi que cela est représenté à la figure 1.4. Un filtre passe-bas peut être transformé en filtre passe-haut et réciproquement. Dès lors, il suffit de faire la théorie de l'un d'entre eux, en l'occurrence celle du passe-bas, de transformer les exigences de passe-haut en celles de passe-bas par la transformation de fréquence, de synthétiser le passe-bas, et de transformer son circuit par la transformation d'impédances pour réaliser le passe-haut.

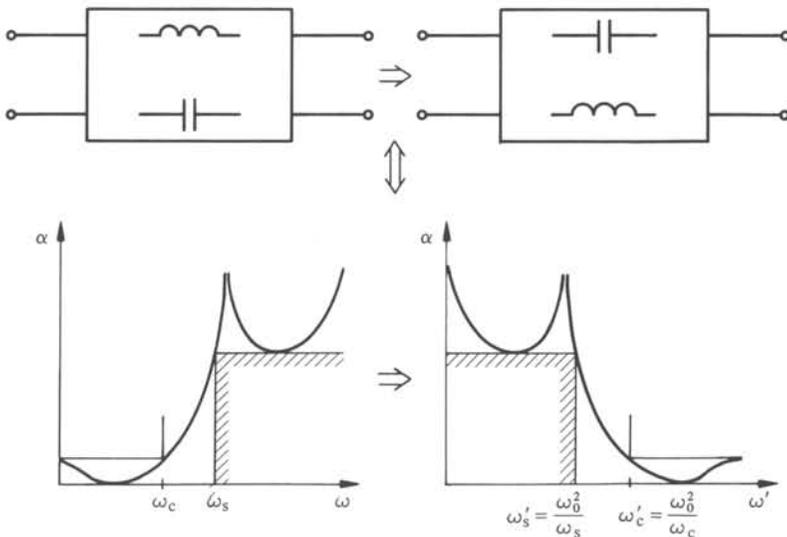


Fig. 1.4

### 1.2.4 Exemple

En utilisant les résultats obtenus dans l'exemple du filtre passe-bas, exposé au paragraphe 1.1.13, on peut engendrer un filtre passe-haut dont les exigences sont celles de la figure 1.5, avec  $\omega'_c = 2\pi \cdot 10^4$  rad/s et  $\omega'_s = 2\pi \cdot 8500$  rad/s. La transformation de fréquence  $\omega' = \omega_0^2/\omega$ , appliquée aux deux pulsations de coupure  $\omega_c$  et  $\omega'_c$  du passe-bas et du passe-haut, donne  $\omega_0^2 = 4\pi^2 \cdot 3,4 \cdot 10^7$  (rad/s)<sup>2</sup>.

Par les méthodes décrites plus loin (chap. 5), on détermine une fonction de réponse  $H(p)$  dont l'affaiblissement vérifie les exigences du passe-bas (fig. 1.2), puis on synthétise le passe-bas (chap. 6). Les valeurs résultantes des inductances  $L_i$  et des capacités  $C_i$  sont respectivement transformées en les valeurs de capacités  $1/L_i\omega_0^2$  et d'inductances  $1/C_i\omega_0^2$ . Le circuit résultant de cette transformation est un passe-haut. La courbe  $\alpha(\omega)$  vérifiant les exigences initiales est représentée à la figure 1.5.

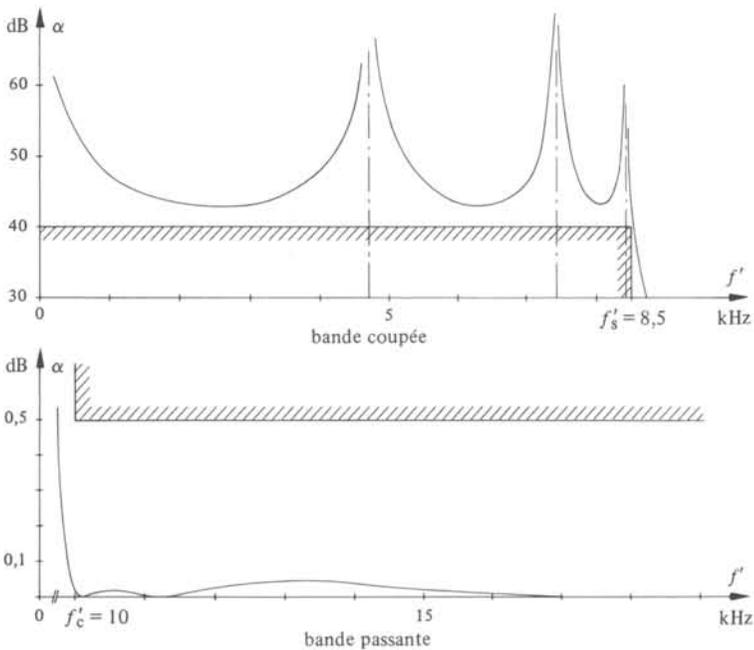


Fig. 1.5

### 1.2.5 Commentaire

La transformation de réactances décrite au paragraphe 1.2.3, n'a rien à voir avec une transformation par dualité. Elle consiste simplement à remplacer, dans un circuit, chaque inductance par une capacité et inversement. La transformation par dualité implique *en plus* une transformation du circuit, dont le graphe doit être changé en le graphe dual. D'ailleurs, une transformation par dualité *ne modifie pas* la fonction de réponse  $s_{21}(p)$ . A titre d'illustration, nous donnons à la figure 1.6, l'exemple d'un quadripôle passe-bas, subissant les transformations de dualité et de réactances. Dans le premier cas, les trois pôles d'affaiblissement à l'infini sont conservés; dans le second cas, ils deviennent trois pôles à l'origine.

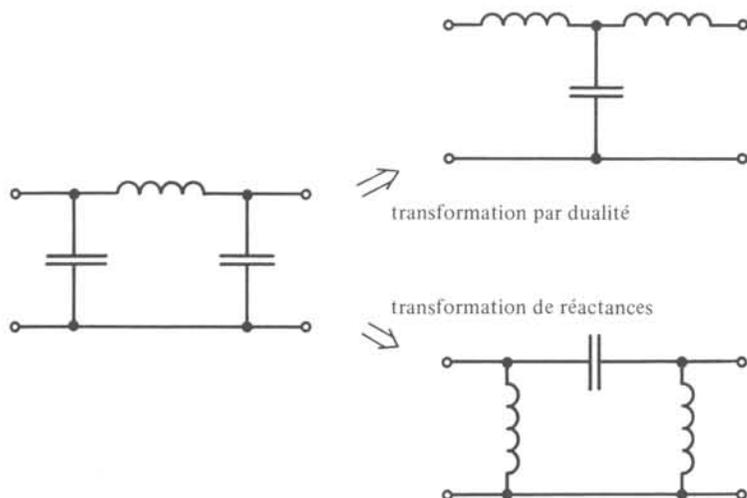


Fig. 1.6

### 1.2.6 Transformation de fréquence du passe-bas en passe-bande

Considérons la transformation de la variable complexe  $p$  en  $p'$ , définie par la relation

$$\frac{p}{\omega_0} = \frac{p'}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p'} \quad (1.15)$$

On va montrer qu'une caractéristique de filtre passe-bas dans le plan  $p$ , devient une caractéristique de filtre passe-bande dans le plan  $p'$ .

La figure 1.7 montre la relation qui existe entre les deux plans. L'axe des imaginaires  $j\omega$  de  $p$  se transforme en l'axe des imaginaires  $j\omega'$ . Le long de cet axe, la transformation inverse de (1.15) s'écrit

$$\omega' = \omega_0 \left[ \frac{\omega}{2\omega_0} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^2 + 1} \right] \quad (1.16)$$

Les points  $\omega = 0$  et  $\omega = \infty$  correspondent respectivement à  $\omega' = \pm\omega_0$  et  $\omega' = \infty$  ou  $\omega' = 0$ . La pulsation de coupure  $\omega_c$  du passe-bas se transforme en la pulsation de coupure supérieure du passe-bande

$$\omega'_{+c} = \omega_0 \left[ \frac{\omega_c}{2\omega_0} + \sqrt{\left(\frac{\omega_c}{2\omega_0}\right)^2 + 1} \right] \quad (1.17)$$

et en une fréquence négative,  $-\omega'_{-c}$ , correspondant au signe négatif dans la formule (1.16). De même, la pulsation  $-\omega_c$  engendre la pulsation de coupure inférieure du passe-bande

$$\omega'_{-c} = \omega_0 \left[ \frac{-\omega_c}{2\omega_0} + \sqrt{\left(\frac{\omega_c}{2\omega_0}\right)^2 + 1} \right] \quad (1.18)$$

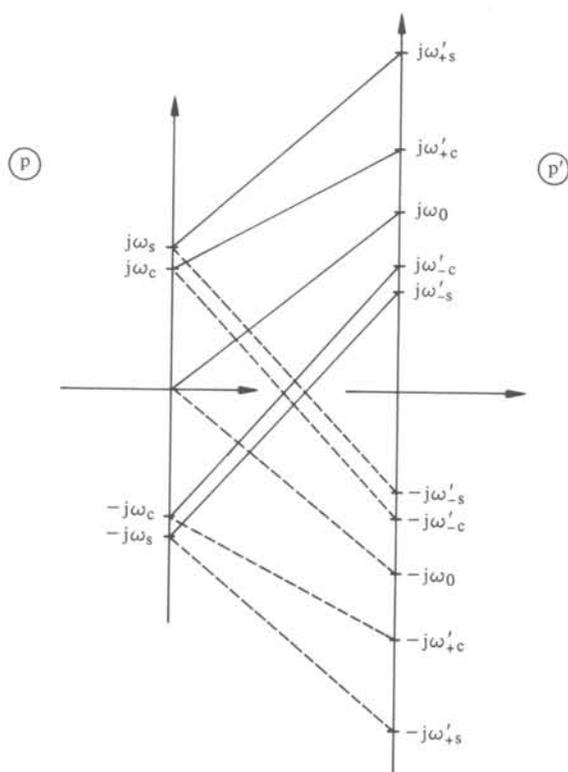


Fig. 1.7

et la pulsation  $-\omega'_{+c}$ . Des relations analogues lient les pulsations délimitant la bande bloquée :  $\omega_s$  se transforme en  $\omega'_{+s}$  et  $-\omega'_{-s}$ ;  $-\omega_s$  engendre  $\omega'_{-s}$  et  $-\omega'_{+s}$ .

En résumé, tout l'axe  $j\omega$  se transforme en l'axe positif de  $j\omega'$ ; la bande passante du filtre passe-bas, considérée sur l'ensemble de l'axe imaginaire de  $-\omega_c$  à  $\omega_c$ , est encadrée par deux bandes bloquées, qui deviennent celles d'un filtre passe-bande. La figure 1.8 montre le résultat de la transformation (1.15) opérée sur une fonction de réponse  $H(p)$  ayant une caractéristique d'affaiblissement de passe-bas.

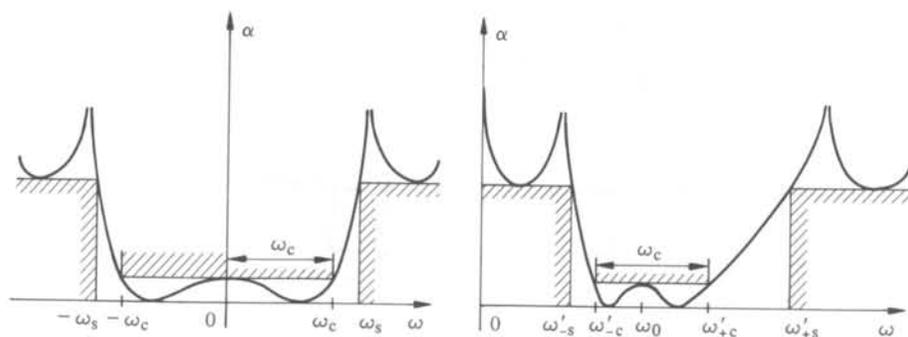


Fig. 1.8

### 1.2.7 Propriété

La transformation (1.15) transforme des points symétriques par rapport à  $\omega = 0$  en des points liés par une inversion centrée en  $\omega' = 0$  et de puissance  $\omega_0^2$ .

En effet, le produit membre à membre de (1.17) et (1.18) donne bien

$$\omega'_{+c} \omega'_{-c} = \omega_0^2 \quad (1.19)$$

et l'on trouverait une relation similaire pour les transformées de toute paire de points  $\pm\omega$  sur l'axe imaginaire du plan  $p$ .

La transformation (1.15) entraîne donc une distorsion de la caractéristique d'affaiblissement du passe-bas symétrique, par (1.7). La figure 1.8 montre la nature de cette distorsion. On constate, par exemple, que l'intervalle de transition supérieur, de  $\omega_{+c}$  à  $\omega_{+s}$ , est plus large que l'intervalle de transition inférieur, de  $\omega_{-s}$  à  $\omega_{-c}$ .

### 1.2.8 Propriété

La largeur de la bande passante est conservée par la transformation (fig. 1.8).

En effet, la soustraction membre à membre de (1.17) et (1.18) donne

$$\omega'_{+c} - \omega'_{-c} = \omega_c \quad (1.20)$$

De même si on écrit les relations (1.17) et (1.18) pour  $\omega = \omega_s$ , on trouve  $\omega'_{+s} - \omega'_{-s} = \omega_s$ .

### 1.2.9 Transformation de réactances

Soit une fonction de réponse  $H(p)$  dont la relation (1.12) explicite la dépendance par rapport aux inductances, aux capacités, aux résistances et aux transformateurs idéaux, qui constituent le circuit. La fonction  $H(p)$  devient la fonction  $H(p' + \omega_0^2/p')$  si l'impédance  $Lp$  de chaque inductance est remplacée par l'impédance  $(Lp' + L\omega_0^2/p')$ , qui est celle d'un circuit résonant constitué par l'inductance  $L$  et une capacité  $C = 1/L\omega_0^2$ .

De même, chaque capacité  $C$  est transformée en un circuit antirésonant, en lui adjoignant une inductance de valeur  $L = 1/C\omega_0^2$ .

Un filtre passe-bande obtenu par transformation d'un passe-bas, est donc constitué uniquement par des circuits résonants, ou antirésonants, tous accordés sur la pulsation  $\omega_0$  (fig. 1.9). Les 3 pôles d'affaiblissement à l'infini se transforment en 3 pôles à l'origine et 3 à l'infini.

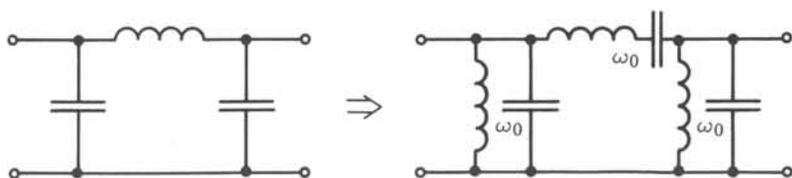


Fig. 1.9

### 1.2.10 Exemple

Considérons les exigences du filtre passe-bande représenté à la figure 1.10. Ces exigences sont dissymétriques en ce sens qu'elles sont plus sévères en bande coupée inférieure que supérieure.

Pour satisfaire ces exigences par la transformation d'une caractéristique de passe-bas, il faut, en premier lieu, les rendre symétriques par la relation (1.19). Pour cela, on conservera la bande passante de  $\omega'_{-c} = 2\pi 12 \cdot 10^3$  rad/s à  $\omega'_{+c} = 2\pi 15,4 \cdot 10^3$  rad/s, ainsi que la bande coupée inférieure de 0 à  $\omega'_{-s} = 2\pi 11,4 \cdot 10^3$  rad/s. Les nouvelles exigences en bande coupée supérieure seront plus sévères, et seront symétriques de celles de la bande coupée inférieure par rapport à  $\omega_0$ .

La relation (1.19) appliquée à  $\omega'_{-c}$  et  $\omega'_{+c}$  donne la pulsation de transformation  $\omega_0^2 = (2\pi 12 \cdot 10^3)(2\pi 15,4 \cdot 10^3)$  (rad/s)<sup>2</sup>. En explicitant (1.19) pour  $\omega'_{+s}$ , on trouve :

$$\omega'_{+s} = \frac{\omega_0^2}{\omega'_{-s}} = \frac{\omega_0^2}{2\pi 11,4 \cdot 10^3} = 2\pi 16,21 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$$

La bande coupée supérieure, représentée en trait interrompu à la figure 1.10, s'étend maintenant de  $\omega'_{+s} = 2\pi 16,21 \cdot 10^3$  (rad/s) à l'infini, et l'affaiblissement  $\alpha'(\omega)$  devra y être supérieur à 45 dB.

Il s'agit de déterminer les exigences du passe-bas correspondant. Les deux pulsations caractéristiques  $\omega_c$  et  $\omega_s$  sont obtenues par (1.20) et valent :

$$\omega_c = 2\pi(15,4 \cdot 10^3 - 12 \cdot 10^3) = 2\pi 3,4 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$$

$$\omega_s = 2\pi(16,21 \cdot 10^3 - 11,4 \cdot 10^3) = 2\pi 4,81 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$$

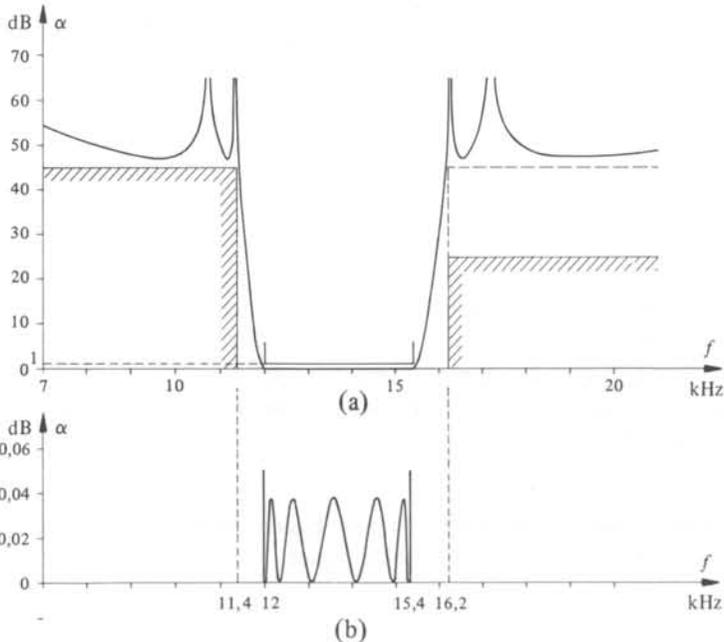


Fig. 1.10

Par les méthodes décrites au chapitre 5, on détermine une fonction de réponse  $H(p)$  d'un passe-bas, dont l'affaiblissement est inférieur (avec une certaine marge) à 0,5 dB pour les fréquences inférieures à 3,4 kHz, et supérieur à 45 dB à partir de 4,81 kHz.

La fonction de réponse  $H(p)$  du passe-bas, transformée par la relation (1.16), donne une courbe d'affaiblissement  $\alpha'(\omega)$  représentée à la figure 1.10. En raison de la dissymétrie des exigences et de la symétrie imposée par la méthode, l'affaiblissement est beaucoup trop élevé dans la bande coupée supérieure. La fonction de réponse  $H'(p)$  du passe-bande, obtenue du passe-bas, est de degré 12. On montrera qu'il est possible de remplir ces mêmes exigences directement par une fonction de réponse de passe-bande de degré 10, dont la synthèse exigera moins d'éléments (§ 5.4.16 et 6.3.17).

### 1.2.11 Commentaire

Cet exemple, ainsi que les remarques faites plus haut, montrent que la théorie du passe-bande ne se ramène pas à celle du passe-bas. On ne peut obtenir, par transformation de passe-bas, que des filtres passe-bande très particuliers.

- Un degré de liberté sur deux est sacrifié, ainsi qu'on le remarque par le fait que toutes les branches sont constituées par des circuits résonants ou anti-résonants, accordés sur la même pulsation.
- La discrimination des deux bandes coupées est identique. Or, les spécifications comportent souvent une différence significative entre ces deux discriminations. Dès lors, la plus exigeante des deux ne sera obtenue qu'en exagérant ce qui est requis pour l'autre.
- Aux fréquences liées par la relation (1.19) correspondent des affaiblissements identiques. La caractéristique obtenue jouit donc d'une symétrie qui n'est pas nécessairement incluse dans les exigences et qui ne les rencontre pas toujours de la façon la plus économique.

Ces diverses limitations montrent que la réalisation d'un passe-bande par transformation d'un passe-bas n'est satisfaisante que dans la mesure où soit les exigences sont symétriques, soit le degré du filtre n'est pas trop élevé, soit l'économie des composants n'est pas un impératif absolu.

A l'avantage de cette méthode, on peut citer la simplification des calculs. En effet, le passe-bas, sur lequel les opérations d'approximation et de synthèse sont réalisées, a un degré qui est la moitié de celui du passe-bande résultant. Les problèmes d'analyse numérique, très sensibles aux degrés des polynômes utilisés, sont largement simplifiés.

En résumé, la synthèse d'un filtre passe-bande à partir d'un filtre passe-bas est une méthode simplifiée mais sommaire, dont le prix est le plus souvent une dépense supplémentaire en éléments.

### 1.2.12 Transformation de fréquence du passe-bas en coupe-bande

Considérons la transformation de fréquence

$$\frac{p}{\omega_0} = \frac{1}{\frac{p'}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p'}} \quad (1.21)$$

L'axe des imaginaires  $j\omega$  dans son entièreté se transforme en l'axe positif  $j\omega'$ . La pulsation  $\omega = \infty$  devient  $\omega' = \pm\omega_0$ , et la pulsation  $\omega = 0$  correspond à  $\omega' = 0$  et  $\omega' = \infty$ . La bande passante d'un filtre passe-bas se transforme ainsi en deux bandes passantes encadrant une bande coupée centrée sur la pulsation  $\omega_0$ .

A cette transformation de fréquence correspond une transformation de réactances, qui consiste à placer en parallèle sur chaque inductance une capacité, et à placer en série avec chaque capacité une inductance, de façon que toutes les branches soient des circuits antirésonants ou résonants accordés sur  $\omega_0$ .

Le principe de la transformation de réactances est représenté à la figure 1.11. Les 3 pôles d'affaiblissement à l'infini se transforment en 3 pôles finis à la pulsation  $\omega_0$ .

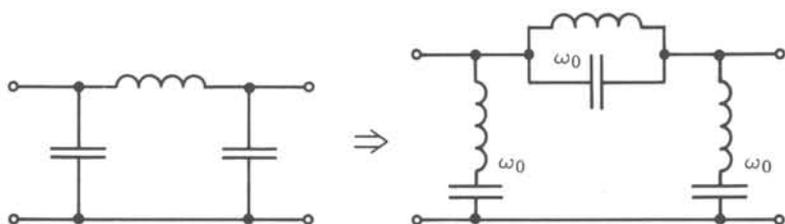


Fig. 1.11

### 1.2.13 Commentaire

Les avantages et les inconvénients mentionnés au paragraphe 1.2.11, pour le filtre passe-bande obtenu par transformation, sont également valables pour la transformation exposée au paragraphe 1.2.12.

Néanmoins, la synthèse des filtres coupe-bande s'opère le plus souvent par transformation du passe-bas. En effet, la définition 1.2.1 du coupe-bande indique bien qu'il n'y a de pôles d'affaiblissement ni à l'origine, ni à l'infini. Dès lors, si le filtre est réalisé par un quadripôle en échelle, il ne peut y avoir aucune branche composée, soit d'une capacité isolée, soit d'une inductance isolée. La structure normale d'un coupe-bande est donc une échelle composée de circuits résonants en parallèle, et de circuits antirésonants dans les branches série. Le chapitre 6 montrera qu'il n'est, en général, pas possible de synthétiser un tel quadripôle. Dès lors, celui-ci sera obtenu par transformation d'un passe-bas.

En résumé, la synthèse des filtres coupe-bande est un problème qui n'est pas résolu dans sa formulation la plus générale. La méthode du paragraphe 1.2.12 constitue donc un pis-aller qui a le mérite d'exister.

### 1.2.14 Normalisation en impédance

La formule (1.1) montre que le coefficient de transmission est une grandeur sans dimension. Si l'on multiplie par un coefficient  $k$  toutes les impédances d'un circuit, ce coefficient de transmission, ainsi que l'affaiblissement et le déphasage, ne sont pas modifiés.

Cette multiplication des impédances se traduit par la substitution aux inductances  $L_i$ , aux résistances  $R_i$ , aux capacités  $C_i$  et aux transformateurs de rapports  $n_i$ , d'élé-

ments dont les valeurs sont respectivement  $kL_i$ ,  $kR_i$ ,  $C_i/k$  et  $n_i$ . Les sources de tension ne sont pas modifiées, les tensions aux bornes des branches ne le sont pas davantage, et les courants sont divisés par  $k$ .

Cette propriété permet de réaliser un filtre à un niveau d'impédance quelconque, indépendant des spécifications d'affaiblissement ou de déphasage. Ce niveau peut être choisi librement pour répondre aux exigences posées par le choix des composants, ou encore pour se plier à la spécification de ce niveau en fonction de normes nationales ou internationales.

### 1.2.15 Normalisation en fréquence

La formule (1.12), qui explicite la dépendance d'une fonction de réponse par rapport aux différents composants, marque bien que la dépendance par rapport à la variable complexe  $p$ , s'opère grâce aux seuls éléments inductifs et capacitifs. Dès lors, si l'on multiplie toutes les inductances et toutes les capacités par le même facteur  $\beta$ , le coefficient de transmission  $s_{21}(p)$  devient  $s_{21}(\beta p)$ . Les composants dont le comportement est indépendant de la fréquence, c'est-à-dire les résistances et les transformateurs idéaux, ne doivent pas être modifiés.

Cette propriété permet de faire tout le calcul d'un filtre sans s'embarrasser de la valeur numérique de certaines fréquences spécifiées, par exemple la fréquence de coupure. Pour des raisons de facilité du calcul numérique, il est préférable d'opérer le calcul en supposant cette fréquence de coupure égale à l'unité. A la fin du calcul, il suffit de diviser les valeurs obtenues pour les inductances et les capacités par la fréquence de coupure  $f_c$ , pour obtenir à cette fréquence le même comportement que celui du filtre normalisé en  $f = 1$  Hz.

### 1.2.16 Exemple

Soit un filtre passe-bas calculé entre terminaisons résistives de  $1 \Omega$ , et avec une fréquence de coupure de 1 Hz. En réalité, les terminaisons doivent valoir  $600 \Omega$  et la fréquence de coupure vaut 3,4 kHz. Pour dénormaliser le filtre et lui donner le comportement souhaité, il faut multiplier toutes les inductances par  $600/3400 = 0,1765$  et diviser toutes les capacités par  $600 \times 3400 = 2040000$ .

## PROPRIÉTÉS DES BIPÔLES ET BIPORTES

### 2.1 PROPRIÉTÉS DES BIPÔLES À DEUX TYPES D'ÉLÉMENTS

#### 2.1.1 Introduction

Les deux premières sections de ce chapitre sont consacrées à la synthèse des bipôles à deux éléments différents; on considérera en pratique, soit les *bipôles LC* composés uniquement d'inductances et de capacités, soit les *bipôles RC* composés uniquement de résistances et de capacités. Bien que le but final soit la synthèse de biportes, ce détour apparent est justifié.

En effet, la synthèse des bipôles présente un intérêt en soi, parce que la synthèse de certains quadripôles, le treillis symétrique par exemple, se ramène à une synthèse de bipôle. Par ailleurs, la synthèse des bipôles permet d'acquérir, sur la base d'un exemple simple, certains concepts qui seront utiles dans la tâche nettement plus difficile de synthèse de biportes.

#### 2.1.2 Rappel. Propriétés générales d'une immittance passive

Rappelons que l'on appelle *immittance* une fonction de réponse ayant la dimension, soit d'une impédance, soit d'une admittance, et liant la tension et le courant *relatifs au seul accès* du bipôle. Dès lors, cette fonction de réponse est soumise à la contrainte importante que son inverse est aussi une fonction de réponse. Cette contrainte n'existe pas pour les fonctions de réponse qui caractérisent la transmission entre deux accès différents.

La fonction immittance d'un bipôle passif, c'est-à-dire comprenant exclusivement des inductances, des capacités, des résistances, des transformateurs et des gyrateurs idéaux, jouit des propriétés suivantes, démontrées au volume IV.

- Elle est une fraction rationnelle réelle, c'est-à-dire le rapport de deux polynômes à coefficients réels. Dans la suite, nous ne nous occuperons que de fonctions réelles.
- La stabilité exige que les pôles soient situés dans le demi-plan de gauche, frontière comprise; les pôles situés sur l'axe imaginaire doivent être simples.
- Comme l'inverse d'une immittance est une immittance, la même règle est valable pour les zéros.
- Les degrés du dénominateur et du numérateur ne diffèrent pas de plus d'une unité.

### 2.1.3 Commentaire

Les propriétés rappelées au paragraphe précédent sont un ensemble de conditions *nécessaires* pour que l'on puisse entreprendre une synthèse. Il est évidemment impossible de synthétiser, au moyen de résistances, d'inductances ou de capacités, des impédances qui auraient pour expressions  $\sinh p$ ,  $p^3$ ,  $1/(p-1)$ ,  $1/(p+1)^2$ .

La question qui se pose est de savoir si ces conditions sont *suffisantes*. Est-il possible de synthétiser, au moyen d'éléments passifs, n'importe quelle fonction obéissant aux conditions énoncées au paragraphe 2.1.2 ? La réponse est négative. Il faut adjoindre une condition supplémentaire, qui sera explicitée au paragraphe 2.1.4.

Ceci met en évidence une difficulté propre à tout problème de synthèse. Avant d'entreprendre le calcul des éléments qui réalisent une fonction de réponse donnée, il faut d'abord être sûr que cette fonction de réponse puisse être synthétisée au moyen des éléments choisis.

On appelle *caractérisation* d'une fonction de réponse un ensemble de conditions nécessaires et suffisantes permettant de toujours synthétiser cette fonction avec certains éléments bien déterminés. Ainsi cette section 2.1 a pour but de déterminer la caractérisation du bipôle LC, à savoir les conditions nécessaires et suffisantes déterminant une immittance, que l'on peut toujours synthétiser avec des inductances et des capacités, à valeurs positives.

### 2.1.4 Propriété

La partie réelle d'une immittance passive sur l'axe imaginaire est une fonction à valeurs positives ou nulles.

En effet, on prouve au paragraphe IV.1.3.13 que la puissance active absorbée par un bipôle passif est positive ou nulle. Soit  $Z(p)$  l'impédance du bipôle, et soit  $U$  et  $I$  les phaseurs relatifs à la tension et au courant, en régime sinusoïdal de pulsation  $\omega$ . On a (§ 1.8.5.10)

$$P = [\operatorname{Re} Z(j\omega)] |I|^2 \quad (2.1)$$

Comme  $P \geq 0$ , il vient

$$\operatorname{Re} [Z(j\omega)] \geq 0 \quad (2.2)$$

sur tout l'axe  $j\omega$ .

### 2.1.5 Rappel

Le théorème du maximum ([6] p. 610) énonce qu'une fonction analytique  $Z$  de la variable  $p$ , dans un certain domaine du plan complexe, atteint la valeur maximum de son module sur la frontière de ce domaine. Si l'inverse de cette fonction,  $1/Z$ , est aussi analytique, la valeur minimum du module est également atteinte sur la frontière. Dans ce cas,  $\exp [Z(p)]$  est également analytique et n'a pas de zéros dans le même domaine. Or,  $\operatorname{lexp} [Z(p)] = \exp [\operatorname{Re} Z(p)]$ . Dès lors,  $\operatorname{Re} [Z(p)]$  atteint aussi son maximum et son minimum sur la frontière.

Ces différents résultats sont représentés graphiquement à la figure 2.1. Le domaine  $D$  du plan complexe  $p$  devient le domaine  $D_z$  du plan complexe  $Z(p)$ . Ce domaine  $D_z$  est borné par une frontière  $C_z$ , qui n'encercle pas l'origine puisque  $Z(p)$  n'a

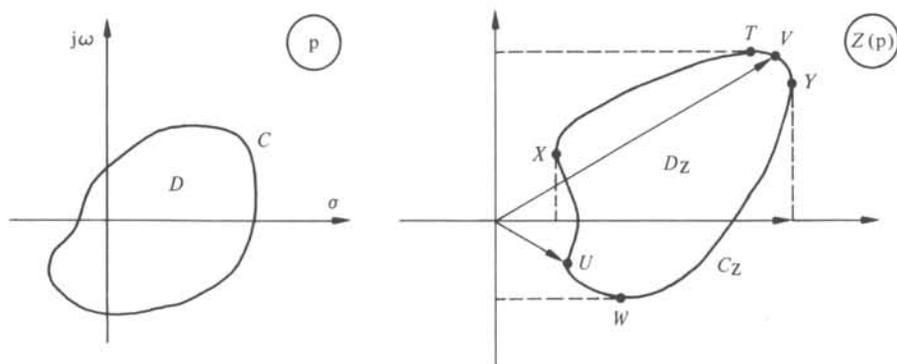


Fig. 2.1

pas de zéros dans le domaine  $D$ , et qui reste à distance finie puisque  $Z(p)$  est analytique dans  $D$ . Dès lors, il est clair que les minima et maxima, tant du module (points  $U$  et  $V$ ) que des parties réelles ( $X$  et  $Y$ ) et imaginaires ( $W$  et  $T$ ), correspondent à des points de la frontière  $C_Z$ , transformée d'une partie de  $C$ .

### 2.1.6 Définition

On appelle *fonction positive réelle* une fonction de la variable complexe  $p = \sigma + j\omega$ , qui soit réelle pour  $p = \sigma$ , et dont la partie réelle soit positive ou nulle pour  $\sigma \geq 0$ .

### 2.1.7 Théorème

L'immittance d'un bipôle passif est une fonction positive réelle.

Ce théorème résulte de l'application du théorème du maximum (§ 2.1.5) à la relation (2.2). Puisque  $Z(p)$  n'a ni pôles, ni zéros dans le demi-plan de droite, elle atteint le minimum de sa partie réelle sur l'axe  $j\omega$ , minimum qui est positif ou nul par (2.2).

### 2.1.8 Commentaire

La proposition inverse est également vraie, à savoir que toute fonction positive réelle peut être synthétisée comme immittance d'un bipôle passif. Le caractère positif réel d'une fonction constitue donc une caractérisation de l'immittance d'un bipôle passif. Pour le démontrer, il suffit de trouver une synthèse de toute fonction positive réelle par un bipôle composé d'inductances, de capacités et de résistances positives ainsi que de transformateurs idéaux.

La *synthèse de Brune* [7] est un algorithme qui permet de calculer la valeur des résistances, des inductances, des capacités et des transformateurs idéaux, qui réalisent une immittance donnée. Son intérêt est purement théorique et elle ne sera pas décrite ici. La suite de cette section est consacrée aux seuls cas pratiques : les bipôles LC et RC.

### 2.1.9 Propriété

Les résidus d'une fonction positive réelle, correspondant à des pôles sur l'axe imaginaire, sont réels et positifs.

Soit  $j\omega_0$  un pôle simple de  $Z(p)$ . Le développement en série de Laurent s'écrit

$$Z(p) = \frac{A_0}{p - j\omega_0} + B_0 + C_0(p - j\omega_0) + \dots \quad (2.3)$$

Dans le voisinage du pôle, on peut écrire

$$Z(p) \cong A_0(p - j\omega_0)^{-1} \quad (2.4)$$

Posons  $(p - j\omega_0) = \rho e^{j\varphi}$ . On s'intéresse aux valeurs prises par  $Z(p)$  sur un petit cercle, de rayon  $\rho$ , centré en  $j\omega_0$ . Le demi-cercle situé dans le demi-plan de droite correspond aux valeurs :  $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ .

En général,  $A_0$  est une grandeur complexe, que l'on peut représenter par  $A_0 = |A_0| e^{j\theta}$ . Dès lors, le long du cercle considéré, on a

$$\operatorname{Re}[Z(p)] = |A_0| \rho^{-1} \cos(\theta - \varphi) \quad (2.5)$$

Pour que  $\operatorname{Re}[Z(p)]$  soit positif dans le demi-plan de droite, il faut que

$$\cos(\theta - \varphi) > 0 \quad (2.6)$$

pour  $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ . Dès lors,  $\theta = 0$  et la propriété est démontrée.

### 2.1.10 Définitions

Une fonction paire  $F(p)$  est telle que  $F(-p) = F(p)$ . Une fonction impaire  $F(p)$  est telle que  $F(-p) = -F(p)$ .

### 2.1.11 Propriétés

Un polynôme est une fonction paire (impaire) dans la mesure où il ne contient que des puissances paires (impaires) de la variable. Un polynôme pair peut donc s'écrire :  $F(p) = U(p^2)$ .

Une fraction rationnelle est une fonction paire si elle est le rapport irréductible de deux polynômes de même parité, et une fonction impaire si les deux polynômes sont de parité différente.

Le produit de deux polynômes de même parité est une fonction paire, et le produit de deux polynômes de parité différente est une fonction impaire.

### 2.1.12 Propriétés

Tout polynôme impair  $F(p)$  possède au moins une racine à l'origine. En effet,  $F(p)$  ne possède pas de terme constant. Si la puissance la plus faible est  $p$ , il y a une racine à l'origine. Sinon, il y en a davantage.

Tout polynôme impair est le produit par  $p$  d'un polynôme pair. En mettant  $p$  en évidence, on a bien  $F(p) = p V(p^2)$  et  $F(-p) = -p V(p^2)$ .

Un polynôme quelconque est la somme d'un polynôme pair et d'un polynôme impair, obtenus en groupant dans son expression les puissances selon leur parité. On

peut donc écrire  $F(p) = U(p^2) + pV(p^2)$ . On utilisera aussi la notation  $F(p) = F_p(p) + F_i(p)$ .

Sur l'axe imaginaire, les parties paire et impaire d'une fonction réelle coïncident respectivement avec ses parties réelle et imaginaire.

### 2.1.13 Propriété

Tout polynôme réel pair a des racines qui jouissent de la symétrie quadrantale, c'est-à-dire que l'axe réel et l'axe imaginaire constituent des axes de symétrie pour l'ensemble des racines.

Puisque  $F(-p) = F(p)$ , si  $p_0$  est une racine, on a  $F(p_0) = F(-p_0) = 0$  et  $-p_0$  est également une racine. Puisque le polynôme a des coefficients réels, à toute racine complexe  $p_0$  correspond une racine complexe conjuguée  $p_0^*$ . Ainsi, les racines complexes ne peuvent exister qu'en quadruplets  $p_0, p_0^*, -p_0$  et  $-p_0^*$ , ainsi que cela est représenté à la figure 2.2. Si  $p_0 = \gamma + j\delta$ , la décomposition en facteurs simples du polynôme fournit les quatre facteurs, dont le produit

$$\begin{aligned} (p - \gamma - j\delta)(p - \gamma + j\delta)(p + \gamma - j\delta)(p + \gamma + j\delta) \\ = p^4 + 2p^2(\delta^2 - \gamma^2) + (\gamma^2 + \delta^2)^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

est bien un polynôme pair.

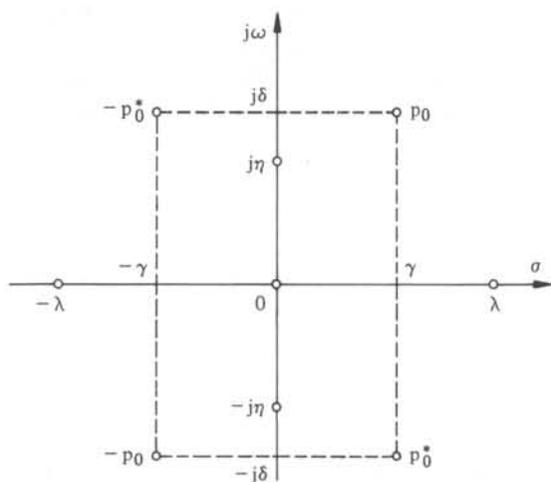


Fig. 2.2

Ce polynôme peut encore avoir des paires de racines réelles symétriques par rapport à l'origine ( $\pm \lambda$ ), des paires de racines imaginaires symétriques par rapport à l'origine ( $\pm j\eta$ ) et des paires de racines à l'origine. Ces paires de racines correspondent respectivement à des facteurs  $(p^2 - \lambda^2)$ ,  $(p^2 + \eta^2)$  et  $p^2$ .

### 2.1.14 Propriété

L'immittance d'un bipôle LC est une fonction impaire.

Si un bipôle ne contient pas de résistance, il ne consomme pas de puissance ac-

tive, et (2.2) s'écrit

$$\operatorname{Re}[Z(j\omega)] = 0 \quad (2.8)$$

Compte tenu de la dernière propriété 2.1.12, on a

$$Z(j\omega) + Z(-j\omega) = 0 \quad (2.9)$$

Dès lors la fraction rationnelle  $Z(p) + Z(-p)$  a une infinité de zéros, à savoir tous les points de l'axe imaginaire : par conséquent elle doit être identiquement nulle :

$$Z(p) + Z(-p) = 0 \quad (2.10)$$

ce qui prouve la propriété. La forme générale de  $Z(p)$  est donc

$$Z(p) = \frac{pV(p^2)}{W(p^2)} \quad (2.11)$$

### 2.1.15 Propriété

L'immittance d'un bipôle LC a un pôle ou un zéro à l'origine et à l'infini.

Considérons l'expression (2.11). Si  $W(0) \neq 0$ ,  $Z(0) = 0$ . Si  $W(0) = 0$ ,  $W(p)$  n'a pas de terme constant et la fraction (2.11) peut être simplifiée par un facteur  $p$ . Dès lors,  $Z(0) = \infty$ . A l'infini,  $Z$  sera nul ou infini, selon que le degré (pair) de  $W$  est plus grand ou plus petit d'une unité que le degré (impair) de  $pV$ . Par le paragraphe 2.1.2, la différence de degré ne peut pas dépasser une unité.

Le pôle ou le zéro, à l'origine et à l'infini, doit être simple par suite de la règle rappelée au paragraphe 2.1.2, selon laquelle les singularités sur l'axe  $j\omega$  doivent être simples.

### 2.1.16 Commentaire

Le résultat du paragraphe précédent n'a rien d'étonnant. Les inductances et les capacités ont des impédances qui sont respectivement identiques, pour  $p = 0$ , à des courts-circuits et à des circuits ouverts; à l'infini, la situation est inverse. De toute façon, si l'on dispose uniquement de courts-circuits ou de circuits ouverts, quelle que soit leur connexion, il est impossible de réaliser autre chose qu'un court-circuit ou un circuit ouvert.

Compte tenu du paragraphe 2.1.15, il apparaît qu'il y a quatre *classes de réactances*, définies par les différentes combinaisons du comportement à l'origine et à l'infini, à savoir :  $X(0) = 0$  et  $X(\infty) = 0$ ;  $X(0) = \infty$  et  $X(\infty) = \infty$ ;  $X(0) = 0$  et  $X(\infty) = \infty$ ;  $X(0) = \infty$  et  $X(\infty) = 0$  (fig. 2.3).

### 2.1.17 Propriété

Les zéros et les pôles d'une immittance LC sont tous situés sur l'axe imaginaire.

Ces zéros et ces pôles sont les racines des polynômes  $V(p^2)$  et  $W(p^2)$  de (2.11), plus les pôles et zéros situés à l'origine et à l'infini. Or, par le paragraphe 2.1.13, les racines de ces polynômes jouissent de la symétrie quadrantale. Par le paragraphe 2.1.2, aucune de ces racines ne peut être dans le demi-plan de droite. Dès lors, aucun quadruplet de racines complexes n'est acceptable, pas plus qu'une paire de racines réelles. Les racines ne peuvent être situées que sur l'axe  $j\omega$ .

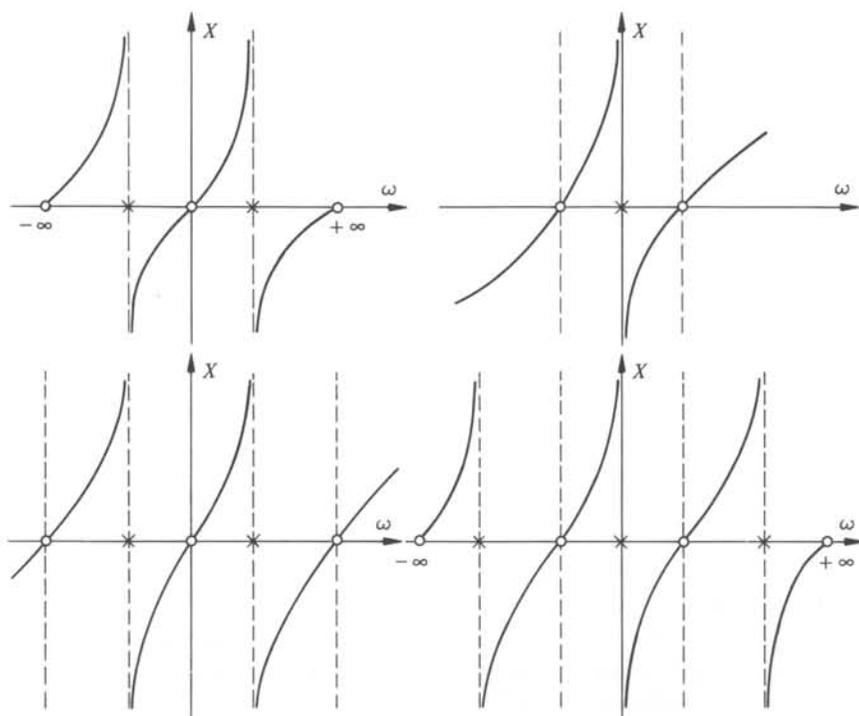


Fig. 2.3

### 2.1.18 Propriétés

La dérivée d'une réactance par rapport à la fréquence est une fonction positive. Elle est supérieure ou égale à la valeur absolue de la réactance divisée par la pulsation.

Compte tenu du fait que toutes les racines du dénominateur sont sur l'axe imaginaire, le développement en fractions simples de  $Z(p)$  s'écrit

$$Z(p) = \frac{A_0}{p} + \frac{A_1}{p - j\omega_1} + \frac{A_1^*}{p + j\omega_1} + \dots + A_\infty p \quad (2.12)$$

Les résidus  $A_0$  et  $A_\infty$  correspondent respectivement aux pôles à l'origine et à l'infini. Selon le comportement de  $Z(p)$  à ces fréquences, ils sont éventuellement nuls.

Par suite du paragraphe 2.1.9,  $A_1 = A_1^*$  et les fractions simples, relatives à deux pôles conjugués, peuvent être groupées sous la forme

$$Z(p) = \frac{A_0}{p} + \frac{2A_1 p}{p^2 + \omega_1^2} + \dots + A_\infty p \quad (2.13)$$

Pour  $p = j\omega$ ,  $Z(j\omega) = jX(\omega)$  et on a

$$\frac{dX}{d\omega} = \frac{A_0}{\omega^2} + \frac{2A_1(\omega_1^2 + \omega^2)}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2} + \dots + A_\infty \quad (2.14)$$

La première propriété annoncée résulte du fait que tous les résidus sont positifs d'après le paragraphe 2.1.9.

La deuxième propriété résulte de l'inégalité

$$\left| \frac{X}{\omega} \right| \leq \frac{A_0}{\omega^2} + \frac{2A_1}{|\omega_1^2 - \omega^2|} + \dots + A_\infty \quad (2.15)$$

La comparaison terme à terme de (2.15) et (2.14) montre bien que

$$dX/d\omega \geq |X/\omega|.$$

### 2.1.19 Propriété

Les pôles et les zéros d'une immittance LC alternent sur l'axe imaginaire.

Si deux zéros (pôles) se suivaient, la fonction serait continue sur l'intervalle qui les sépare et présenterait un maximum (minimum), ce qui contredirait la propriété précédente.

La figure 2.3 représente les quatre types possibles de diagramme de la réactance en fonction de la pulsation, selon la nature du comportement à l'origine et à l'infini.

### 2.1.20 Caractérisation du bipôle LC

Les propriétés énoncées plus haut peuvent se résumer en trois caractérisations équivalentes, qui permettent chacune de reconnaître si une immittance donnée peut être synthétisée comme un bipôle LC.

- L'impédance est une fraction rationnelle impaire qui est positive réelle.
- Les pôles de l'impédance sont tous situés sur l'axe imaginaire; ils sont simples, et les résidus sont positifs et réels.
- Les pôles et les zéros de l'impédance sont situés sur l'axe imaginaire; ils sont simples et entrelacés; il en existe toujours un à l'origine et à l'infini.

### 2.1.21 Définitions

On appelle *fonction de Foster* une fonction de la variable complexe vérifiant l'une des caractérisations énoncées au paragraphe 2.1.20.

Un polynôme réel est appelé (*strictement*) *hurwitzien* si ses racines appartiennent au demi-plan de gauche (frontière exclue).

On appelle *conjugué hurwitzien* d'un polynôme quelconque  $H(p)$ , le même polynôme dont la variable a été changée de signe, et l'on note  $H(-p) = H_*(p)$ . Le conjugué hurwitzien coïncide avec le conjugué complexe,  $H_* = H^*$ , lorsque  $p = j\omega$ .

### 2.1.22 Propriété

Le rapport des parties paire et impaire d'un polynôme hurwitzien, après simplification d'éventuels facteurs communs, est une fonction de Foster.

Soit

$$H(p) = U(p^2) + pV(p^2) \quad (2.16)$$

un polynôme réel strictement hurwitzien. Alors  $H(-p)/H(p)$  est analytique dans le

demi-plan de droite. On a

$$H(-j\omega) = [H(j\omega)]^* \quad (2.17)$$

et

$$|H(-j\omega) / H(j\omega)| = 1 \quad (2.18)$$

D'après le théorème du maximum, on a, pour  $\text{Re}(p) \geq 0$ ,

$$|H(-p) / H(p)| \leq 1 \quad (2.19)$$

Par (2.16)

$$\frac{H(-p)}{H(p)} = \frac{U - pV}{U + pV} = \frac{U/pV - 1}{U/pV + 1} \quad (2.20)$$

et

$$\frac{U}{pV} = \frac{1 + H(-p)/H(p)}{1 - H(-p)/H(p)} \quad (2.21)$$

Considérons la transformation complexe de  $z$  en  $w$

$$w = \frac{1+z}{1-z} \quad (2.22)$$

Elle transforme le cercle unité  $\{z \mid |z| \leq 1\}$  en le demi-plan de droite, caractérisé par  $\text{Re}(w) \geq 0$ . Par (2.21) et (2.19), on obtient, pour  $\text{Re}(p) \geq 0$ ,

$$\text{Re}(U/pV) \geq 0 \quad (2.23)$$

Ceci démontre que  $U(p^2)/pV(p^2)$  satisfait la première caractérisation du paragraphe 2.1.20 pour une fonction de Foster.

### 2.1.23 Commentaire

La réciproque de cette propriété n'est pas vraie. On ne peut pas dire qu'un polynôme est hurwitzien si le rapport de ses parties paire et impaire est une fonction de Foster. Il faut encore vérifier que le facteur pair, qui se simplifie éventuellement, ne contient que des racines sur l'axe imaginaire. En général, il peut en avoir dans le demi-plan de droite.

Il existe d'autres critères pour vérifier le caractère hurwitzien d'un polynôme : le plus connu de ceux-ci est le critère de Routh-Hurwitz, constitué par une série d'inégalités portant sur les coefficients du polynôme et des fonctions de ceux-ci.

On retiendra simplement, de la propriété 2.1.19, que  $U$  et  $V$  ont des coefficients qui sont tous positifs, puisque l'un et l'autre ont une décomposition en facteurs simples du type  $(p^2 + \omega_i^2)$ . Il en résulte que les coefficients d'un polynôme de Hurwitz sont tous de même signe. Cette condition sur les coefficients est nécessaire; elle n'est pas suffisante.

### 2.1.24 Propriété

Si l'on multiplie toutes les inductances d'un bipôle LC par un facteur  $a$ , et toutes les capacités par  $b$ , l'impédance  $Z(p)$  de celui-ci devient  $\sqrt{a/b} Z(p\sqrt{ab})$ .

En effet, les multiplications décrites plus haut reviennent à changer  $Lp$  en  $\sqrt{a/b} Lp\sqrt{ab}$  et  $(1/Cp)$  en  $\sqrt{a/b} / (Cp\sqrt{ab})$ . Cela revient à multiplier toutes les impédances par  $\sqrt{a/b}$  et la variable  $p$  par  $\sqrt{ab}$ .

### 2.1.25 Transformation d'immittances LC en RC

Si  $a = 1/p$  et  $b = 1$ , le bipôle LC est transformé en bipôle RC, puisque chaque inductance de valeur  $L$  est remplacée par une résistance de valeur  $L$ .

L'expression (2.13) d'une impédance LC devient

$$\tilde{Z}(p) = \frac{Z(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} = \frac{A_0}{p} + \frac{2A_1}{p + \omega_1^2} + \dots + A_\infty \quad (2.24)$$

et l'expression (2.11) devient

$$\tilde{Z}(p) = \frac{Z(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} = \frac{V(p)}{W(p)} \quad (2.25)$$

Les polynômes pairs  $V(p^2)$  et  $W(p^2)$  ont toutes leurs racines sur l'axe imaginaire; elles alternent. Ils sont de la forme  $K \Pi(p^2 + \omega_i^2)$ , qui devient  $K \Pi(p + \omega_i^2)$ . Les racines sont donc situées sur l'axe réel négatif, après transformation.

### 2.1.26 Propriété

Les propriétés du bipôle RC peuvent se déduire de celles du bipôle LC, compte tenu de la transformation décrite au paragraphe précédent.

Les pôles et les zéros sont situés sur l'axe réel négatif; ils sont simples et ils alternent.

Par opposition à ce qui se passe pour le bipôle LC, il n'y a pas nécessairement un pôle ou un zéro à l'origine et à l'infini. Si, dans (2.24),  $A_0$  est différent de zéro, il y a un pôle à l'origine. Sinon,  $\tilde{Z}(0)$  est fini et vaut  $A_\infty + 2 \sum A_i / \omega_i^2$ . A l'infini, si  $A_\infty$  est différent de zéro,  $\tilde{Z}(\infty) = A_\infty$ ; sinon,  $\tilde{Z}(\infty) = 0$ . On peut faire à ce sujet le même commentaire qu'au paragraphe 2.1.16. Un bipôle constitué de résistances et de capacités (c'est-à-dire de courts-circuits à l'infini et de circuits ouverts à l'origine) ne peut être équivalent qu'à une résistance ou à un court-circuit, à l'infini, et, à une résistance ou à un circuit ouvert, à l'origine.

### 2.1.27 Propriété

Le long de l'axe réel négatif,  $p = \sigma$ ,  $\tilde{Z}(\sigma)$  est une fonction décroissant de façon monotone.

A partir de (2.24), on calcule

$$\frac{d\tilde{Z}}{d\sigma} = \frac{-A_0}{\sigma^2} - \frac{2A_1}{(\sigma + \omega_1^2)^2} - \dots \quad (2.26)$$

qui est négative compte tenu de la positivité des résidus  $A_i$ . A la figure 2.4, on a représenté le comportement de  $\tilde{Z}$  en fonction de  $\sigma$ , dans le cas particulier où, à l'infini et à l'origine,  $\tilde{Z}$  se comporte comme une résistance finie ( $A_0 = 0$ ). On a mis en valeur le fait que la valeur à l'origine est plus élevée qu'à l'infini. On constate aussi que la

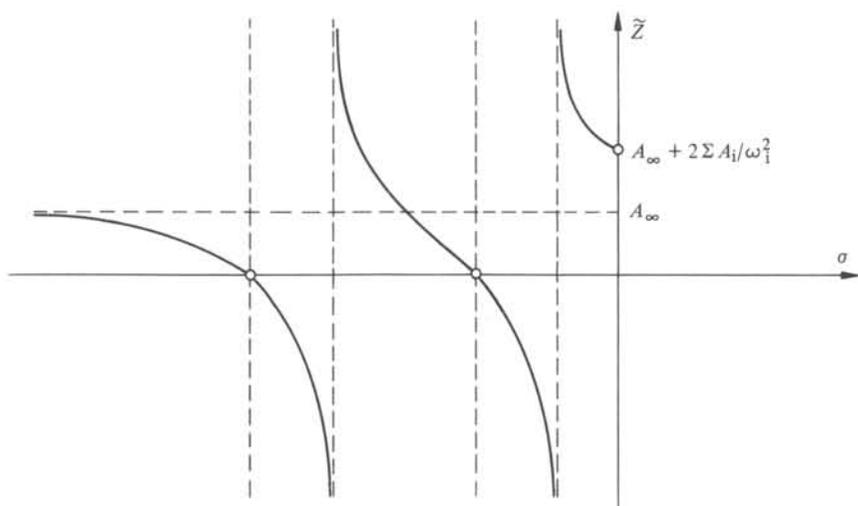


Fig. 2.4

première singularité à droite de l'infini sur l'axe réel négatif est un zéro, et que la première singularité à gauche de l'origine est un pôle.

L'ensemble des propriétés décrites aux paragraphes 2.1.26 et 2.1.27 constituent une caractérisation de l'impédance RC.

### 2.1.28 Commentaire

On remarquera que, du paragraphe 2.1.14 au paragraphe 2.1.20, on développe les propriétés de l'*immittance* LC. Ces propriétés sont en effet identiques pour l'impédance ou l'admittance. Les caractérisations de l'une et de l'autre ne diffèrent pas. En particulier, la réactance  $X(\omega)$  est une fonction croissante de la fréquence et la susceptance  $B(\omega) = -1/X(\omega)$ , qui est l'*inverse changé de signe* de  $X(\omega)$ , est évidemment aussi une fonction croissante de la fréquence.

Par contre, les paragraphes 2.1.26 et 2.1.27 donnent une caractérisation de l'*impédance* le long de l'axe des réels. Comme le long de cet axe, la conductance est l'*inverse* de la résistance, *sans changement de signe*, la caractérisation doit être transposée de façon adéquate. Par exemple, l'admittance RC est une fonction croissante de  $\sigma$ ; la première singularité à l'infini ou à droite de l'infini est un pôle; la singularité à l'origine ou à gauche de l'origine est un zéro. Nous laissons le lecteur développer, à titre d'exercice, une caractérisation complète de l'admittance RC.

De même, on pourra s'exercer à découvrir la caractérisation d'un bipôle RL, dont l'intérêt est purement académique.

En résumé, l'*immittance* LC jouit d'une remarquable symétrie dans sa caractérisation, parce que le bipôle est constitué au moyen de deux types d'éléments, qui sont duaux l'un de l'autre. Au contraire, le bipôle RC a pour dual le bipôle RL, et l'impédance du premier a les mêmes propriétés que l'admittance du second.

## 2.2 SYNTHÈSE DES BIPÔLES À DEUX TYPES D'ÉLÉMENTS

## 2.2.1 Synthèse de Foster en série

Cette synthèse d'un bipôle LC résulte d'une identification de la formule (2.13) avec l'expression d'une impédance  $Z(p)$ , obtenue par mise en série de plusieurs impédances partielles qui correspondent chacune à l'un des termes de la somme. Ainsi,  $A_0/p$  est évidemment l'impédance d'une capacité de valeur  $1/A_0$ ;  $A_\infty p$  est l'impédance d'une inductance de valeur  $A_\infty$ ;  $2A_1 p/(p^2 + \omega_1^2)$  est l'impédance d'un circuit antirésonant, dont la capacité vaut  $1/2A_1$  et l'inductance  $2A_1/\omega_1^2$ .

L'impédance  $Z(p)$  peut dès lors être réalisée par la mise en série de ces bipôles simples, ainsi que cela est représenté à la figure 2.5.

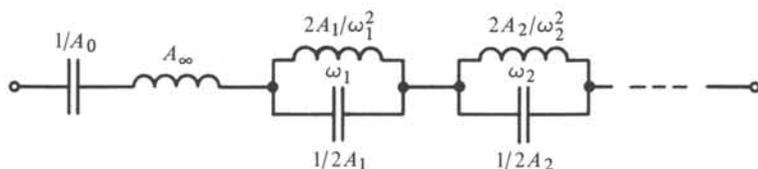


Fig. 2.5

## 2.2.2 Synthèse de Foster en parallèle

Ainsi que nous l'avons fait remarquer au paragraphe 2.1.28, la formule (2.13) constitue aussi une caractérisation d'une admittance LC. L'admittance  $Y(p)$  résulte alors de la mise en parallèle d'une capacité de valeur  $A_\infty$ , d'une inductance de valeur  $1/A_0$ , et d'autant de circuits résonants qu'il y a de termes du second degré, avec une inductance de valeur  $1/2A_i$  et une capacité de valeur  $2A_i/\omega_i^2$ . La structure de ce bipôle est représentée à la figure 2.6.

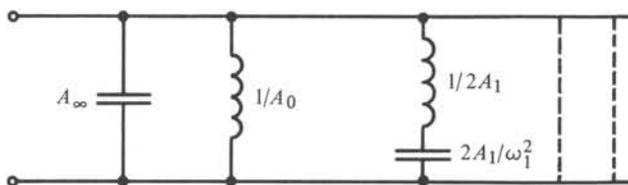


Fig. 2.6

## 2.2.3 Commentaire

La synthèse de Foster, dans ses deux versions, est une synthèse de type *canonique*. Cela veut dire qu'elle est toujours réalisable avec des éléments positifs et qu'elle met en œuvre le minimum d'éléments.

Elle est toujours réalisable, parce que les inductances et les capacités ont une valeur réelle et positive : elles sont en effet proportionnelles aux résidus, dont on a démontré au paragraphe 2.1.9 le caractère réel et positif.

Elle comporte le nombre minimum d'éléments, parce que la formule (2.13) met bien en évidence que le nombre d'éléments est identique au nombre de pôles. Par ailleurs, ce nombre de pôles est identique au degré de la réactance, c'est-à-dire au degré

le plus élevé en  $p$  des polynômes  $pV(p^2)$  ou  $W(p^2)$  de (2.11). Si  $A_\infty = 0$  dans (2.13), c'est le degré du dénominateur; si  $A_\infty \neq 0$ , c'est le degré du numérateur. Or, on a montré (sect. IV.4.7) que le degré d'une fonction de réponse ne pouvait excéder le nombre des inductances et des capacités.

#### 2.2.4 Commentaire

Les deux structures duales de Foster mettent bien en évidence les quatre classes différentes de réactances, définies au paragraphe 2.1.16.

A la figure 2.5, il est clair que le comportement à l'origine est celui d'un circuit ouvert si la capacité  $1/A_0$  est présente et, sinon, celui d'un court-circuit. De même, à l'infini, le comportement est celui d'un circuit ouvert si l'inductance  $A_\infty$  est présente; sinon, c'est celui d'un court-circuit.

#### 2.2.5 Synthèse de Cauer par développement à l'infini

Soit l'impédance  $Z(p)$  d'un bipôle LC. Par la formule (2.13), on peut l'écrire sous la forme

$$Z(p) = A_\infty p + Z_1(p) \quad (2.27)$$

où  $Z_1(p)$  est toujours une fonction de Foster, puisque son développement est celui de (2.13), avec  $A_\infty = 0$ . Ainsi que cela est représenté à la figure 2.7, on procède à l'extraction de l'inductance  $A_\infty$ .

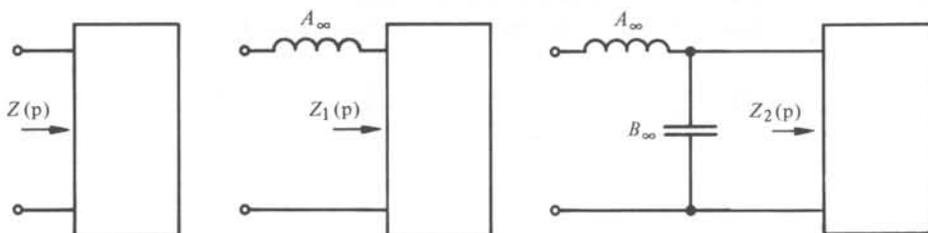


Fig. 2.7

L'impédance résiduelle  $Z_1(p)$  n'a plus de pôle à l'infini. Elle a donc un zéro par la propriété 2.1.15 et son inverse, l'admittance  $Y_1(p)$ , a un pôle à l'infini. On a le développement du même type que (2.13)

$$Y_1(p) = B_\infty p + Y_2(p) \quad (2.28)$$

où  $Y_2(p)$  regroupe tous les autres termes du développement. On peut donc considérer  $Y_1(p)$  comme résultant de la mise en parallèle d'une capacité  $B_\infty$  et de l'admittance résiduelle  $Y_2(p)$ .

La synthèse se poursuivra ainsi par extractions successives d'inductances série et de capacités parallèle. A chaque extraction, le degré de l'immittance résiduelle tombe d'une unité. Il y a donc autant d'éléments dans la structure finale de la figure 2.8 que le degré de la fonction. Les éléments sont tous réels et positifs puisqu'ils sont égaux à des résidus aux pôles à l'infini des différentes immittances. Cette synthèse est donc canonique.

Si  $A_\infty = 0$ , on peut entreprendre la même synthèse à la différence près que le premier élément extrait est une capacité parallèle.

De même, le dernier élément extrait est une inductance ou une capacité, selon le comportement à l'origine. La structure représentée à la figure 2.8 a une impédance infinie à l'origine. Si la dernière capacité est absente, l'impédance est nulle.

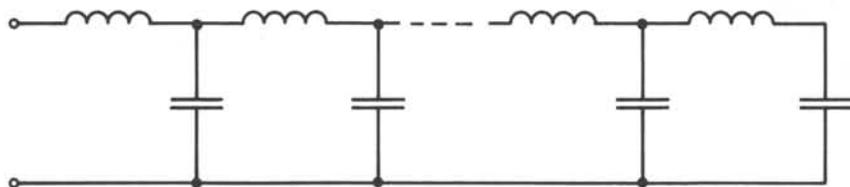


Fig. 2.8

### 2.2.6 Synthèse de Cauer par développement à l'origine

Dans la formule (2.13), on peut isoler l'impédance de la capacité et écrire

$$Z(p) = A_0/p + Z_1(p) \quad (2.29)$$

Après cette extraction, correspondant au pôle à l'origine, l'impédance  $Z_1(p)$  a un zéro à l'origine et son inverse  $Y_1(p)$  a donc un pôle qu'il est possible d'extraire sous forme d'une inductance parallèle. On poursuit la synthèse par extractions successives de capacités série et d'inductances parallèle, selon la figure 2.9.

Cette synthèse de Cauer est canonique, comme la précédente.

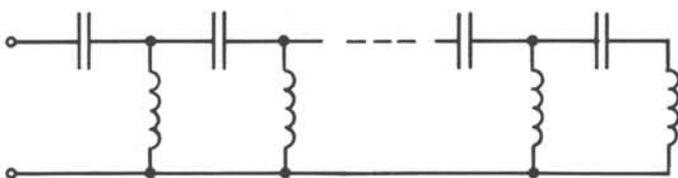


Fig. 2.9

### 2.2.7 Commentaire

Telles qu'elles ont été exposées, les synthèses de Foster et de Cauer mettent en relief certaines caractéristiques des problèmes de synthèse, que l'on retrouvera par ailleurs pour des problèmes plus compliqués.

Tout d'abord, il est possible de réaliser quatre synthèses différentes de la même immittance. Les problèmes de synthèse n'ont en général pas une solution unique et il faut choisir entre les différentes solutions, en fonction de critères d'ordre technologique ou économique. En fait, il y a un nombre très élevé de synthèses différentes, car rien n'empêche de les combiner entre elles. A titre d'exemple, on pourrait, après avoir réalisé une partie de la synthèse par des extractions selon Cauer, synthétiser l'immittance résiduelle en un bloc par la synthèse selon Foster. La synthèse d'un biporte LC entre terminaisons résistives, qui constitue l'objectif central de cet ouvrage, peut être envisagée comme une suite de synthèses partielles selon Cauer et Foster (chap. 6).

Les synthèses de Foster et de Cauer ne sont pas les seules synthèses canoniques de bipôles LC. On connaît de nombreuses autres cellules, de degré 4, 5 ou 6, qu'il est possible d'utiliser pour synthétiser ces bipôles [8].

### 2.2.8 Exemple

Considérons le filtre passe-bas proposé à titre d'exemple au paragraphe 1.1.13. On montrera, à la section 2.3, qu'il est possible de déduire du coefficient de transmission  $s_{21}(p)$  d'un biporte LC, l'impédance d'entrée à sortie ouverte  $Z_{11}(p)$ . On propose synthétiser  $Z_{11}(p)$  selon les deux structures de Foster et de Cauer décrites aux paragraphes 2.2.1, 2.2.2, 2.2.5 et 2.2.6. Il s'agit d'une synthèse de *bipôle*. La synthèse du biporte sera faite au paragraphe 6.3.16.

Le même exemple est traité deux fois de façon à souligner la différence existant entre la synthèse d'un bipôle, qui se résume au développement d'une seule fraction rationnelle, et la synthèse du biporte, qui entraîne la factorisation d'une matrice. L'impédance  $Z_{11}$  de la figure 6.24 est identique à celles des figures 2.10 à 2.13 mais,

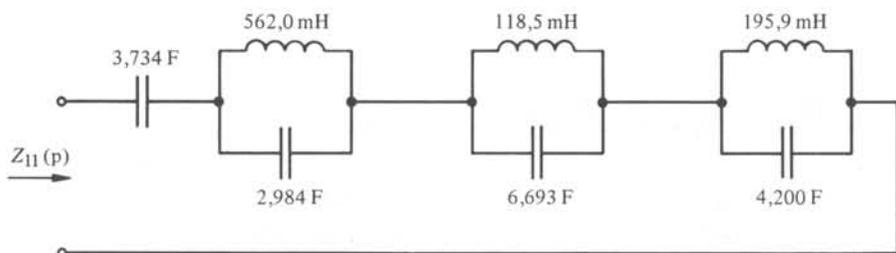


Fig. 2.10

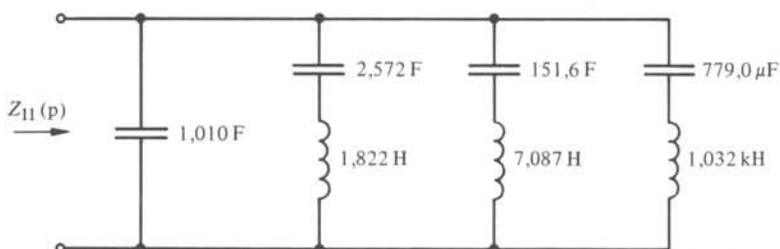


Fig. 2.11

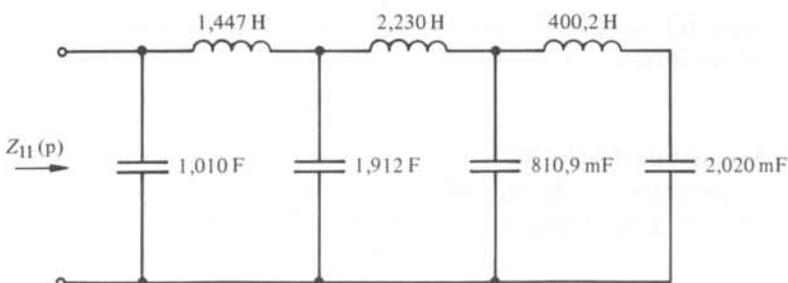


Fig. 2.12

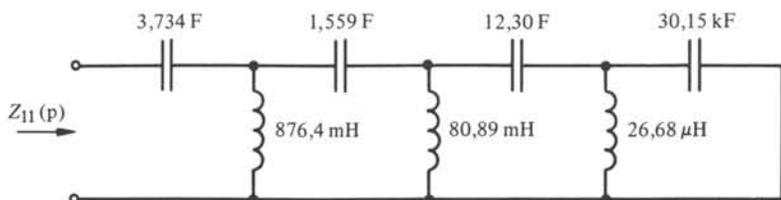


Fig. 2.13

en plus, le biporte de la figure 6.24 réalise la fonction  $s_{21}(p)$  définie au paragraphe 1.1.13.

Les expressions et les résultats ci-dessous sont relatifs à un filtre normalisé à  $1 \Omega$  de résistance de terminaison et à  $1 \text{ rad/s}$  de pulsation de coupure. Les polynômes du numérateur et du dénominateur de  $Z_{11}(p)$  peuvent être représentés sous deux formes : par leurs coefficients ou par leurs racines. Ainsi, nous avons :

$$Z_{11}(p) = \frac{n_6 p^6 + n_4 p^4 + n_2 p^2 + n_0}{d_7 p^7 + d_5 p^5 + d_3 p^3 + d_1 p}$$

ou

$$Z_{11}(p) = k_n \frac{(p^2 + z_1^2)(p^2 + z_2^2)(p^2 + z_3^2)}{p(p^2 + p_1^2)(p^2 + p_2^2)(p^2 + p_3^2)}$$

avec

$$\begin{array}{ll} n_6 = 4,04584211 & d_7 = 4,08490498 \\ n_4 = 9,66464522 & d_5 = 1,25530918 \cdot 10^{+1} \\ n_2 = 6,56512159 & d_3 = 1,22954278 \cdot 10^{+1} \\ n_0 = 1 & d_1 = 3,73442391 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ll} z_1 = 4,61883195 \cdot 10^{-1} & p_1 = 7,72240392 \cdot 10^{-1} \\ z_2 = 9,64884040 \cdot 10^{-1} & p_2 = 1,12296973 \\ z_3 = 1,11554797 & p_3 = 1,10255501 \\ k_n = 9,90437263 \cdot 10^{-1} & \end{array}$$

L'impédance  $Z_{11}(p)$  synthétisée selon la structure série de Foster est représenté à la figure 2.10, avec les valeurs des éléments. On effectue le même développement avec  $Z_{11}^{-1}(p)$  pour aboutir à la structure parallèle de Foster de la figure 2.11.

Le résultat de la synthèse de  $Z_{11}(p)$  par développement de Cauer à l'infini, est représenté à la figure 2.12. La synthèse de Cauer par développement à l'origine est représentée à la figure 2.13.

### 2.2.9 Synthèse des bipôles RC

Au paragraphe 2.1.25, on a introduit une transformation d'immittances, dans le but de déduire la caractérisation d'une impédance RC à partir de celle d'une impédance LC. Bien entendu, cette transformation peut être transposée sans plus pour le problème de synthèse. Il suffit de remplacer, dans les différentes structures des figures 2.5, 2.6, 2.8 et 2.9, les inductances par des résistances.

On obtient de la sorte les quatre structures représentées aux figures 2.14 (Foster) et 2.15 (Cauer). Le calcul des valeurs des éléments s'opère par les mêmes procédés que ceux développés pour les immittances LC.

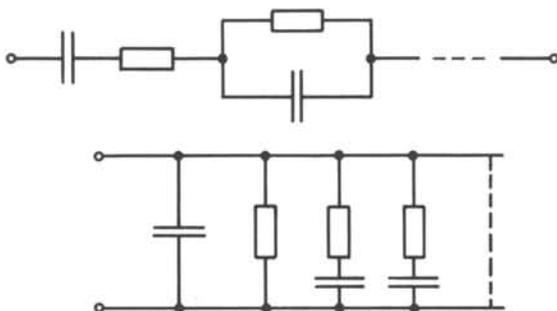


Fig. 2.14

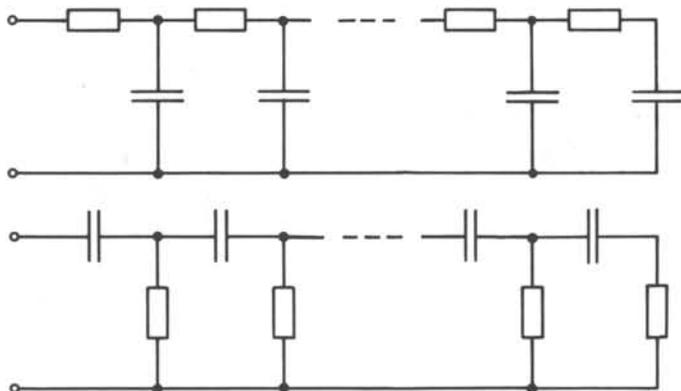


Fig. 2.15

### 2.2.10 Exemple

Soit à synthétiser l'impédance RC

$$Z_{11}(p) = \frac{n_6 p^3 + n_4 p^2 + n_2 p + n_0}{d_7 p^4 + d_5 p^3 + d_3 p^2 + d_1 p}$$

où les coefficients  $n_i$  et  $d_i$  ont les valeurs spécifiées au paragraphe 2.2.8. Si dans  $\tilde{Z}_{11}$

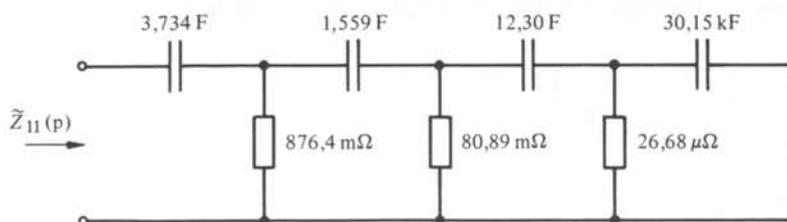


Fig. 2.16

on remplace  $p$  par  $p^2$  et qu'on multiplie par  $p$ , on trouve la fonction  $Z_{11}(p)$  du paragraphe 2.2.8. On la synthétise par exemple selon la figure 2.13. Par transformation de LC en RC, on trouve le bipôle de la figure 2.16 qui réalise l'impédance donnée.

## 2.3 CARACTÉRISATION DES BIORTES LC ENTRE TERMINAISONS RÉSISTIVES

### 2.3.1 Rappel

Soit le biporte non dissipatif de la figure 2.17, placé entre les terminaisons dissipatives  $R_1$  et  $R_2$ . Pour la simplicité de l'exposé, on supposera qu'il s'agit de simples résistances : aux sections 8.3 et 9.5, on utilisera en fait les résultats du présent paragraphe avec des terminaisons qui sont fonctions de la fréquence, mais il n'est pas nécessaire d'envisager cette complication dès le début.



Fig. 2.17

Au paragraphe IV.6.3.4, on a introduit la notion de matrice de répartition entre terminaisons égales. Nous rappelons ici ces résultats en les généralisant au cas du biporte, éventuellement non réciproque, entre terminaisons quelconques.

Soit les vecteurs  $U = (U_1 U_2)'$  et  $I = (I_1 I_2)'$ , où les grandeurs  $U_i$  et  $I_i$  sont, au choix, soit les substituts complexes des grandeurs alternatives  $u_i$  et  $i_i$ , soit les transformées de Laplace des fonctions quelconques du temps  $u_i(t)$  et  $i_i(t)$ .

Par (IV.5.28), on sait que ces vecteurs sont liés par une relation linéaire

$$AU = BI \quad (2.30)$$

où  $A$  et  $B$  sont des matrices carrées d'ordre deux dont les éléments sont soit des grandeurs complexes (analyse en régime sinusoïdal à une fréquence donnée), soit des fractions rationnelles réelles de la variable complexe  $p$ . Définissons la matrice

$$R^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{R_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{R_2} \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Les vecteurs de tension et de courant réduits s'écrivent  $u = R^{-1/2} U$  et  $i = R^{1/2} I$ . La relation (2.30) peut se récrire

$$au = bi \quad (2.32)$$

avec  $a = AR^{1/2}$  et  $b = BR^{-1/2}$ . Si  $A$  ou  $B$  sont inversibles, on peut écrire respectivement

$$U = A^{-1}BI = ZI \quad (2.33)$$

ou, en utilisant  $z = R^{-1/2}ZR^{-1/2}$ ,

$$u = zi \quad (2.34)$$

et

$$I = B^{-1}AU = YU \quad (2.35)$$

ou, en utilisant  $y = R^{1/2}YR^{1/2}$ ,

$$i = yu \quad (2.36)$$

en définissant de la sorte la matrice d'impédance  $Z$  à circuit ouvert et la matrice d'admittance  $Y$  en court-circuit.

Si l'on définit les ondes incidentes et réfléchies par

$$\xi = u + i \quad (2.37)$$

et

$$\eta = u - i \quad (2.38)$$

on peut en déduire la relation

$$\eta = s\xi \quad (2.39)$$

avec la matrice de répartition

$$s = (b + a)^{-1} (b - a) \quad (2.40)$$

A partir de ces définitions, on peut établir les relations entre  $s$ ,  $z$  et  $y$

$$s = (z - 1_2)(z + 1_2)^{-1} \quad (2.41)$$

$$z = (s + 1_2)(1_2 - s)^{-1} \quad (2.42)$$

$$s = (1_2 - y)(1_2 + y)^{-1} \quad (2.43)$$

$$y = (1_2 - s)(1_2 + s)^{-1} \quad (2.44)$$

où  $1_2$  représente la matrice unité d'ordre deux.

L'interprétation des éléments de la matrice de répartition est faite à la section IV.6.3. Rappelons simplement que le module au carré de  $s_{21}$  est le rapport de la puissance active dissipée dans la charge  $R_2$  au maximum de puissance active que peut produire la source. A ce titre, il s'agit d'une fonction de réponse essentielle dans la conception des filtres classiques. On rappelle que  $s_{12}$  et  $s_{21}$  sont les *coefficients de transmission*, et que  $s_{11}$  et  $s_{22}$  sont les *coefficients de réflexion*.

### 2.3.2 Propriété

Au paragraphe 2.1.14, nous avons établi la propriété fondamentale de l'immittance d'un bipôle LC, à partir de laquelle nous avons établi une caractérisation de cette immittance. Nous entreprenons à partir d'ici le même travail pour le biporte LC.

Chaque accès  $k$  du biporte absorbe une puissance complexe (§ I.8.5.9)

$$S_k = u_k i_k^* \quad (2.45)$$

et la puissance complexe absorbée par le biporte s'écrit donc

$$S = u_1 i_1^* + u_2 i_2^* = i^{*'} u \quad (2.46)$$

La puissance active s'écrit

$$2P = S + S^* = i^{*'} u + u^{*'} i \quad (2.47)$$

parce que (2.46) peut aussi s'écrire  $u' i^*$ , dont le conjugué est  $u^{*'} i$ . Par (2.37) et (2.38),  $2u = (\xi + \eta)$  et  $2i = (\xi - \eta)$ . On a donc

$$4P = \xi^{*'} \xi - \eta^{*'} \eta = \xi^{*'} (1_2 - s^{*'} s) \xi \quad (2.48)$$

Comme le biporte est non dissipatif,  $P = 0$  et donc

$$s^{*'} s = 1_2 \quad (2.49)$$

### 2.3.3 Propriété

La relation (2.49) est vérifiée pour tout régime alternatif, c'est-à-dire en n'importe quel point de l'axe imaginaire.

Les éléments de  $s$  sont des fractions rationnelles réelles de  $p$ , qui sont liées par la relation (2.49) qui peut être explicitée sous la forme

$$[s(-j\omega)]' [s(j\omega)] = 1_2 \quad (2.50)$$

Cette relation résume, sous forme matricielle, un certain nombre de relations développées au paragraphe 2.3.8 entre les polynômes constituant les éléments de  $s$ . Or, ces relations sont vérifiées en un nombre infini de points de l'axe  $j\omega$ : ce sont donc des identités dans tout le plan complexe et (2.50) devient

$$[s(-p)]' [s(p)] = 1_2 \quad (2.51)$$

ou encore avec la notation du paragraphe 2.1.21

$$s'_* s = 1_2 \quad (2.52)$$

### 2.3.4 Commentaire

La relation (2.52) exprime de façon résumée la propriété suivante: la matrice de répartition d'un biporte non dissipatif, prémultipliée par la même matrice transposée avec changement du signe de  $p$ , est égale à la matrice unité d'ordre deux. Cet énoncé est le pendant du paragraphe 2.1.14. Il reste à en tirer toutes les conséquences pour les polynômes qui constituent les fractions rationnelles. Manifestement, ils ne peuvent pas être indépendants: le but des paragraphes suivants est de les exprimer en fonction de deux polynômes indépendants, qui ont une signification fondamentale pour le filtrage.

### 2.3.5 Propriété

Une fonction passe-tout (§ 1.2.2) est de la forme  $\pm F_*/F$ .

En effet, soit  $N(p)/D(p)$  une fonction dont le module est égal à l'unité sur l'axe imaginaire. On suppose que la forme  $N/D$  est irréductible: il n'y a pas de racine com-

mune entre les polynômes  $N(p)$  et  $D(p)$ ; sinon, on simplifierait au préalable par les facteurs  $(p - p_i)$  correspondant à ces racines  $p_i$ . On a

$$\frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \frac{N(-j\omega)}{D(-j\omega)} = 1 \quad (2.53)$$

le long de l'axe imaginaire et donc

$$\frac{NN_*}{DD_*} = 1 \quad (2.54)$$

ou

$$NN_* = DD_* \quad (2.55)$$

Cette relation exprime une identité entre deux polynômes. Ceux-ci doivent donc avoir les mêmes racines. Puisque  $N$  et  $D$  n'en ont point en commun, il faut que celles de  $N_*$  et  $D$  soient identiques au signe près, autrement dit,  $N_* = \pm D$  ou  $N = \pm D_*$ .

Si la fonction passe-tout est la transmittance d'un biporte passif, il faut que  $F$  soit hurwitzien.

### 2.3.6 Propriété

Le déterminant de la matrice de répartition d'un biporte non dissipatif est une fonction passe-tout, dont le dénominateur est strictement hurwitzien.

En effet, on a  $\det s' = \det s$ . Comme le déterminant d'un produit est égal au produit des déterminants, (2.52) entraîne

$$\det s_* \det s = 1 \quad (2.56)$$

Comme les éléments de  $s$  sont des fractions rationnelles, il en sera de même pour  $\det s$ . La relation (2.56) est de la même forme que (2.54). On peut donc écrire

$$\det s = \mp g_*/g \quad (2.57)$$

où  $g(p)$  est un polynôme dont les racines appartiennent à l'ensemble des racines des dénominateurs des éléments de  $s$ . Ce ne sont pas nécessairement *toutes* les racines de ces dénominateurs, parce que certaines simplifications ont pu se produire lors du calcul de  $\det s$ . Ces racines sont toutes dans le demi-plan de gauche, frontière exclue, parce que ce sont les pôles de fonctions de réponse d'un circuit passif et strictement stable, par suite de la présence des résistances de terminaison.

### 2.3.7 Notations

La matrice  $s$  comporte quatre éléments qui peuvent s'écrire  $s_{ij} = N_{ij}/G$ , où  $G$  est le plus petit commun dénominateur : par le raisonnement du paragraphe précédent, il est strictement hurwitzien. La relation (2.52) peut encore s'écrire  $s^{-1} = s'_*$ . A partir de la notation choisie et de (2.57), on obtient l'identité

$$\mp \frac{g}{g_* G} \begin{pmatrix} N_{22} & -N_{12} \\ -N_{21} & N_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{G_*} \begin{pmatrix} N_{11*} & N_{21*} \\ N_{12*} & N_{22*} \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

Comme, après simplification, le dénominateur de la forme de gauche doit être un polynôme avec des racines dans le demi-plan de droite pour être identifiable avec  $G_*$ , cela signifie que  $G$  divise  $g$ .

On peut donc prendre  $g$  comme dénominateur commun des quatre éléments qui ne sont plus, en général, des fractions irréductibles et écrire  $s_{ij} = n_{ij}/g$ . Avec cette notation, on a

$$s^{-1} = \frac{1}{\det s} \begin{pmatrix} \frac{n_{22}}{g} & \frac{-n_{12}}{g} \\ \frac{-n_{21}}{g} & \frac{n_{11}}{g} \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

qui devient, en tenant compte de (2.57),

$$s^{-1} = \frac{1}{\mp g_*} \begin{pmatrix} n_{22} & -n_{12} \\ -n_{21} & n_{11} \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

### 2.3.8 Propriété

Dans la notation du paragraphe 2.3.7, les numérateurs des deux coefficients de transmission (de réflexion) sont les conjugués hurwitziens l'un de l'autre, éventuellement changés de signe.

Ainsi qu'on l'a vu au paragraphe précédent, on a

$$s'_* = s^{-1} \quad (2.61)$$

En explicitant les matrices et en simplifiant par le dénominateur  $g_*$ , on trouve

$$\begin{pmatrix} n_{11*} & n_{21*} \\ n_{12*} & n_{22*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp n_{22} & \pm n_{12} \\ \pm n_{21} & \mp n_{11} \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

qui entraîne les deux identités

$$n_{11*} = \mp n_{22} \quad (2.63)$$

$$n_{12*} = \pm n_{21} \quad (2.64)$$

### 2.3.9 Propriété

Sur l'axe imaginaire, les modules des coefficients de transmission (de réflexion) sont égaux.

En effet, les identités  $|s_{12}| = |s_{21}|$  et  $|s_{11}| = |s_{22}|$  résultent de (2.63) et de (2.64) où  $p = j\omega$ . Cette propriété signifie qu'il est impossible d'avoir un affaiblissement de l'accès 1 à l'accès 2 qui soit différent de l'affaiblissement de l'accès 2 à l'accès 1. Cette propriété est valable même si le biporte *n'est pas réciproque*.

Ceci n'est valable que pour la définition limitée aux terminaisons constantes. Cette propriété est modifiée pour la définition d'une matrice de répartition liant des ondes de tension (sect. 8.3).

### 2.3.10 Propriété

Dans la notation du paragraphe 2.3.7, le numérateur des coefficients de transmission est pair ou impair si le biporte est réciproque.

La réciprocity du biporte implique la symétrie de  $s$ . Dès lors,  $n_{12} = n_{21}$ ; par (2.64),  $n_{12*} = \pm n_{12}$ , donc  $n_{12}$  est pair ou impair.

### 2.3.11 Relation de Feldtkeller et relation d'unitarité

Dans la suite, on désignera le polynôme  $n_{11}$  par  $h$  et  $n_{12}$  par  $f$ . La matrice de répartition prend donc la forme générale

$$s = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} h & f \\ \pm f_* & \mp h_* \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

Si l'on calcule le déterminant de  $s$  avec cette expression et qu'on l'identifie avec sa valeur donnée par (2.57), on trouve

$$gg_* = hh_* + ff_* \quad (2.66)$$

Le long de l'axe imaginaire, cette relation peut encore s'écrire

$$|s_{11}|^2 + |s_{12}|^2 = |s_{22}|^2 + |s_{21}|^2 = 1 \quad (2.67)$$

Les relations (2.66) et (2.67) portent respectivement le nom de *relation d'unitarité* et de *Feldtkeller*.

### 2.3.12 Caractérisation de la matrice de répartition

La matrice de répartition d'un biporte non dissipatif s'écrit sous la forme générale

$$s = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} h & f \\ \pm f_* & \mp h_* \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

où  $g$  est un polynôme strictement hurwitzien, lié aux deux autres polynômes par la relation

$$gg_* = hh_* + ff_* \quad (2.69)$$

Si le biporte est en plus réciproque, l'expression (2.68) prend la forme

$$s = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} h & f \\ f & \mp h_* \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

où  $f$  est pair ou impair; le signe supérieur ou inférieur doit respectivement être pris dans (2.70). Sauf dans la section 8.2, qui traite des gyrateurs, on utilisera systématiquement la forme (2.70).

Il est évident que tout biporte composé exclusivement d'inductances, de capacités et de transformateurs, est non dissipatif et a donc une matrice de la forme (2.70). Dans le cas où des gyrateurs sont présents, elle prend la forme (2.68).

Nous justifierons par la synthèse expliquée au chapitre 6 que cette caractérisation permet de réaliser le biporte avec des inductances, des capacités et des transformateurs idéaux. Il faut y ajouter les gyrateurs dans le cas non réciproque.

### 2.3.13 Propriété. Définition

On appelle fonctions *bornées* celles dont le module est inférieur ou égal à l'unité dans le demi-plan de droite, frontière comprise.

Les éléments de la matrice de répartition sont des fonctions bornées. En effet, par (2.67), ces fonctions sont bornées le long de l'axe imaginaire. Par suite du théorème du maximum, rappelé au paragraphe 2.1.5, il en est de même dans le demi-plan de droite où ces fonctions sont analytiques.

### 2.3.14 Commentaires

Il faut souligner qu'*en général*  $g$  n'est pas le polynôme plus petit commun dénominateur des quatre fractions rationnelles. Il n'est pas exclu qu'un facteur commun appartienne à la fois à  $f$ ,  $g$  et  $h$ .

Cependant, dans le cadre de ce volume, on s'intéresse surtout aux quadripôles non dissipatifs qui exercent une fonction de filtrage. Les racines de  $f$  sont en général des zéros de transmission qu'il est judicieux de placer sur l'axe imaginaire, pour créer le maximum de pôles d'affaiblissement dans les bandes coupées. Dans ce cas, on a

$$f = p^k \prod_{i=1}^m (p^2 + \omega_i^2) \quad (2.71)$$

où  $k$  est la multiplicité (éventuellement nulle) du pôle d'affaiblissement à l'origine, et où  $m$  est le nombre de paires de pôles d'affaiblissement en dehors de l'origine et de l'infini. Dès lors,  $f$  est naturellement pair ( $k$  pair ou nul) ou impair. En plus, toutes les racines de  $f$  étant situées sur l'axe imaginaire, aucune ne peut appartenir à  $g$ , qui est strictement hurwitzien. Par (2.69), s'il n'y a pas de facteur commun entre  $f$  et  $g$ , il n'y en a pas davantage entre  $h$  et  $g$  ou  $h_*$  et  $g$ : cette relation implique en effet qu'un facteur commun entre deux des trois polynômes  $f$ ,  $g$  et  $h$ , divise forcément le troisième ou son conjugué hurwitzien. Un facteur  $(p^2 + \omega_i^2)$  ou  $p$ , qui divise un polynôme, divise aussi son conjugué hurwitzien.

En résumé, si le biporte est un filtre dont tous les zéros de transmission sont sur l'axe imaginaire, les polynômes  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont premiers entre eux.

Cette règle n'est pas une propriété générale des biportes non dissipatifs mais elle résulte d'une restriction parmi ceux-ci à une classe intéressante pour l'application technique du filtrage. Seuls font exception à cette règle les filtres qui seraient conçus pour approximer, à la fois, des exigences d'affaiblissement et de phase [9]. Nous n'en parlerons pas dans le cadre de cet ouvrage.

### 2.3.15 Commentaire

Avec les notations du paragraphe 2.3.12, l'affaiblissement en dB s'écrit

$$\alpha = 10 \log \left( \frac{gg_*}{ff_*} \right) = 10 \log \left( 1 + \frac{hh_*}{ff_*} \right) \quad (2.72)$$

compte tenu de (2.66), écrit pour  $p = j\omega$ . Il ressort de cette expression que les racines de  $f$  et  $h$ , situées sur l'axe imaginaire, sont respectivement les pôles et les zéros d'affaiblissement. Si le degré de  $f$  est inférieur à celui de  $g$ , il y a en plus autant de pôles d'affaiblissement à l'infini que d'unités dans la différence de ces degrés.

Pour des raisons similaires à celles discutées au paragraphe 2.3.14 pour  $f$ , il est judicieux de placer le maximum de racines de  $h$  sur l'axe imaginaire, afin de créer autant de zéros d'affaiblissement dans la ou les bandes passantes. Dans le cas où toutes les racines de  $h$  sont sur l'axe imaginaire,  $h$  est pair ou impair. Contrairement à ce qu'il en est pour  $f$ , il n'est pas toujours possible de se plier à cette règle de façon absolue. Dans le cas des filtres passe-bande LC, il est parfois intéressant de placer une ou deux racines de  $h$  sur l'axe réel. Les raisons en sont exposées au paragraphe 6.3.2.

### 2.3.16 Calcul de $g$

La relation (2.69) lie les trois polynômes  $f$ ,  $g$  et  $h$ . Si l'on connaît les polynômes  $h$  et  $f$ , on peut en déduire  $g$ , au signe près, de façon univoque. En effet, le second membre de (2.69) est un polynôme pair dont les racines jouissent de la symétrie quadrante. Il n'y en a point sur l'axe imaginaire, parce que, sur cet axe, le second membre de (2.69) s'écrit  $(|h|^2 + |f|^2)$ . Cette expression est différente de zéro sauf si  $h$  et  $f$  avaient une racine commune sur l'axe imaginaire : cette hypothèse doit être écartée, car cette racine serait aussi celle de  $g$  par (2.69), et l'on pourrait simplifier les trois polynômes.

Dès lors, les racines du second membre de (2.69) sont symétriques par rapport à l'axe imaginaire : celles du demi-plan de droite sont attribuées à  $g_*$  ; celles du demi-plan de gauche constituent le polynôme  $g$ .

Le paragraphe 2.3.12 et, en particulier, la relation (2.69) indiquent que le degré de  $g$  est égal à celui du plus élevé en degré des polynômes  $f$  et  $h$ , voire au degré des deux polynômes s'ils ont le même.

Désignons par  $g_k$  le coefficient de  $p^k$  dans  $g$  et par des notations analogues les coefficients des polynômes  $f$  et  $h$ . Soit  $n$  le degré de  $g$ . Si le degré de  $h$  est  $n$ , et que le degré de  $f$  est inférieur à  $n$ , on a

$$g_n^2 = h_n^2 \quad (2.73)$$

si le degré de  $f$  est  $n$ , et que le degré de  $h$  est inférieur à  $n$ , on a

$$g_n^2 = f_n^2 \quad (2.74)$$

Dans le premier cas,  $\alpha(\infty) = \infty$  et dans le second cas,  $\alpha(\infty) = 0$ . Le premier cas correspond à un filtre passe-bas ou passe-bande, qui comporte au moins un pôle d'affaiblissement à l'infini (à l'exception de certaines synthèses RC-actives exposées aux sections 8.3 et 9.5). Le second cas correspond à un filtre passe-haut ou coupe-bande, qui possède un zéro d'affaiblissement à l'infini.

Si  $f$  et  $h$  ont même degré  $n$ , il n'y a ni pôle, ni zéro d'affaiblissement à l'infini.

De même, pour  $p = 0$ , il faut que (2.69) soit respecté, ce qui implique

$$g_0^2 = h_0^2 \quad (2.75)$$

si  $f(0) = 0$ , et

$$g_0^2 = f_0^2 \quad (2.76)$$

si  $h(0) = 0$ . Dans le premier cas,  $\alpha(0) = \infty$  et dans le second cas,  $\alpha(0) = 0$ .

Le premier cas correspond à un filtre passe-haut ou passe-bande, qui comporte au moins un pôle d'affaiblissement à l'origine, (à l'exception des cas traités aux sections 8.3 et 9.5). Le second cas correspond à un filtre passe-bas ou coupe-bande, qui possède un zéro d'affaiblissement à l'origine. Si  $f$  et  $h$  sont différents de zéro à l'origine, il ne s'y trouve ni pôle ni zéro d'affaiblissement.

Cette discussion fait ressortir le caractère fondamental de la relation (2.69). Elle permet de distinguer sommairement le type de filtre auquel on a affaire. Dans le cas le plus fréquent, où toutes les racines de  $f$  et  $h$  sont sur l'axe imaginaire, elle montre que le biporte non dissipatif est entièrement déterminé dès lors que sont fixés les pôles et les zéros d'affaiblissement.

Ces considérations indiquent déjà que les chapitres 4 et 5 seront essentiellement consacrés au calcul des zéros et des pôles d'affaiblissement. Le calcul de  $g$  s'en déduit par (2.69), sans autres difficultés que celles d'ordre numérique. La factorisation du second membre de (2.69) porte sur un polynôme dont le degré est double de celui du filtre. Dans les cas les plus compliqués, cela signifie chercher avec précision les racines d'un polynôme dont le degré peut approcher la centaine !

### 2.3.17 Filtrés symétriques, définition, propriétés

Un *filtré symétrique* est un biporte réciproque tel que  $s_{11} = s_{22}$ .

Par (2.70), il en résulte que

$$h = \mp h_* \quad (2.77)$$

ce qui implique que  $h$  est impair si  $f$  est pair, ou que  $h$  est pair si  $f$  est impair. En résumé, un filtré est symétrique s'il est caractérisé par un polynôme  $h$  de parité opposée à celle de  $f$ .

Le calcul de  $g$  se simplifie dans ce cas. En effet, (2.69) prend la forme

$$gg_* = \pm (f^2 - h^2) \quad (2.78)$$

et le problème de factorisation se décompose en la factorisation séparée d'un des polynômes  $f-h$  ou  $f+h$ , de degré moitié du polynôme  $ff_* + hh_*$ . L'autre est le conjugué hurwitzien du premier.

### 2.3.18 Commentaire

Un biporte symétrique placé entre terminaisons égales est évidemment un filtré symétrique, puisque l'on a  $Z_{11} = Z_{22}$ ,  $z_{11} = z_{22}$  et donc, par (2.41),  $s_{11} = s_{22}$ .

Néanmoins, la classe des filtres symétriques est beaucoup plus large. Par (2.42),  $s_{11} = s_{22}$  implique simplement  $z_{11} = z_{22}$ . Cette dernière égalité peut être obtenue si  $Z_{11} = kZ_{22}$  et  $R_2 = kR_1$ , où  $k$  est une constante.

Ce dernier cas est identique à celui d'un biporte constitué par le biporte original, placé en cascade avec un transformateur idéal de rapport  $\sqrt{k}$  et inséré entre terminaisons identiques de valeur  $R_1$ . En pratique, on ne réalisera pas le circuit ainsi, parce que

cela revient à dépenser un transformateur idéal sans nécessité. Mais cette identité montre bien qu'un biporte non symétrique placé entre terminaisons différentes peut avoir le même comportement qu'un biporte symétrique entre terminaisons égales.

Cet exemple rappelle aussi qu'un filtre peut toujours être considéré comme placé entre terminaisons identiques à un transformateur idéal près.

### 2.3.19 Filtres antimétriques, définition, propriétés

Un filtre caractérisé par des polynômes  $f$  et  $h$  de même parité est appelé *antimétrique*. Ils ne peuvent être l'un et l'autre impairs, parce que cela signifierait qu'ils ont au moins un facteur  $p$  en commun qui apparaîtrait aussi dans  $g$ , par (2.69), et qui se simplifierait donc. Dès lors,  $f$  et  $h$  sont pairs, ce qui implique

$$s_{22} = -\frac{h}{g} = -s_{11} \quad (2.79)$$

Le concept d'antimétrie n'est pas aussi intuitif que celui de symétrie. Considérons un filtre de matrice

$$s = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & -s_{11} \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

Si nous le remplaçons par le filtre dual, cela revient à changer  $s$  en  $-s$  par la propriété IV.6.3.5. Si nous permutons les deux accès, cela revient à intervertir les éléments de la diagonale principale. Si nous croisons les deux bornes d'un accès, cela revient à changer le signe des éléments hors de la diagonale principale. Après ces trois opérations effectuées sur (2.80), on retrouve la même matrice.

Un filtre antimétrique est donc identique à son dual, dont les accès ont été permutés et dont les bornes d'un accès ont été interverties.

### 2.3.20 Propriété

Un filtre, dont tous les zéros d'affaiblissement sont situés sur l'axe imaginaire, est soit symétrique, soit antimétrique.

En effet, le polynôme  $h$  est, soit impair, soit pair. La réciproque n'est pas vraie. Le polynôme  $h$  peut être pair ou impair sans que toutes ses racines soient sur l'axe imaginaire.

### 2.3.21 Expression des immittances en fonctions de $f$ , $g$ et $h$

En utilisant la relation (2.42) sous la forme (2.70), on trouve

$$z_{11} = \frac{g+h \pm (g_*+h_*)}{g-h \mp (g_*-h_*)} \quad (2.81)$$

$$z_{22} = \frac{g-h \pm (g_*-h_*)}{g-h \mp (g_*-h_*)} \quad (2.82)$$

$$z_{12} = z_{21} = \frac{2f}{g-h \mp (g_*-h_*)} \quad (2.83)$$

La comparaison de (2.42) et (2.44) montre qu'il suffit de changer  $s$  en  $-s$  pour transformer  $z$  en  $y$ , ou encore de remplacer le filtre par son dual. Dès lors, les expressions de  $y_{11}$ ,  $y_{22}$  et  $y_{12}$  s'obtiennent respectivement à partir de (2.81), (2.82) et (2.83), en y remplaçant  $f$  et  $h$  par  $-f$  et  $-h$ .

On vérifiera, à titre d'exercice, que  $z_{11}$  vaut, soit  $(g_p + h_p)/(g_i - h_i)$ , soit  $(g_i + h_i)/(g_p - h_p)$ , en vertu de la notation du paragraphe 2.1.12.

### 2.3.22 Expression de la matrice de chaîne

A partir des expressions de  $z$  et du tableau IV.6.18, on trouve

$$\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} A = \frac{g+h \pm (g_*+h_*)}{2f} \quad (2.84)$$

$$\frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}} B = \frac{g+h \mp (g_*+h_*)}{2f} \quad (2.85)$$

$$\sqrt{R_1 R_2} C = \frac{g-h \mp (g_*-h_*)}{2f} \quad (2.86)$$

$$\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} D = \frac{g-h \pm (g_*-h_*)}{2f} \quad (2.87)$$

Par les formules (IV.6.35) et (IV.6.36), on peut déduire les impédances terminées du biporte

$$\frac{\zeta_1}{R_1} = \frac{g+h}{g-h} \quad (2.88)$$

$$\frac{\zeta_2}{R_2} = \frac{g \mp h_*}{g \pm h_*} \quad (2.89)$$

### 2.3.23 Rappel, théorème de Rouché

Soit  $D$  un domaine du plan complexe et  $C$  une courbe située dans ce domaine. Si les fonctions  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  sont analytiques dans ce domaine et si  $|F_1(p)| > |F_2(p)|$  sur  $C$ , la fonction  $F_1(p) + F_2(p)$  a autant de zéros, à l'intérieur de  $C$ , que  $F_1(p)$ .

### 2.3.24 Propriété

Les polynômes  $(g \pm h)$  et  $(g \pm h_*)$  sont hurwitziens.

En effet,  $g$  est strictement hurwitzien. Par ailleurs, selon le paragraphe 2.3.13,  $|s_{11}| \leq 1$  sur l'axe imaginaire. Par le théorème du maximum (§ 2.1.5),  $s_{11} = h/g$  a un module strictement inférieur à l'unité dans le demi-plan de droite ouvert et donc  $|g| > |h|$ . Si l'on considère une courbe  $C$  constituée par une parallèle à l'axe  $j\omega$ , située dans le demi-plan de droite, il suit du théorème de Rouché qu'il n'y a pas de racines de  $(g \pm h)$  à droite de  $C$ . Comme cette parallèle peut être aussi proche que l'on désire de l'axe  $j\omega$ , il n'y a pas de racines de  $(g \pm h)$  dans le demi-plan de droite ouvert.

Le même raisonnement, appliqué à  $s_{22}$ , démontre l'autre partie de la propriété.

Sur l'axe imaginaire,  $|s_{11}|$  et  $|s_{22}|$  sont égaux lorsque  $|s_{12}| = 0$ . A ces pulsations,  $|g| = |h|$  : les polynômes considérés *peuvent* avoir un zéro simple.

### 2.3.25 Commentaire

Grâce à cette propriété, on a vérifié que les pôles et les zéros des impédances passives  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  sont bien situés dans le demi-plan de gauche et qu'ils sont simples sur l'axe imaginaire. De même, les expressions (2.81) et (2.82) sont bien, par le paragraphe 2.1.22, des fonctions de Foster en tant que rapports des parties paire et impaire respectivement des polynômes  $(g \pm h_*)$  et  $(g - h)$ .

### 2.3.26 Propriété

Dans le cas d'un filtre, dont les zéros de transmission sont situés sur l'axe imaginaire, les polynômes  $(g + h)$  et  $(g - h)$  d'une part,  $(g + h_*)$  et  $(g - h_*)$  d'autre part sont premiers entre eux.

En effet, par la discussion du paragraphe 2.3.14,  $g$  et  $h$  d'une part,  $g$  et  $h_*$  d'autre part sont premiers entre eux. Il en est de même de leurs sommes et de leurs différences.

### 2.3.27 Commentaire

Il en résulte de cette dernière propriété que  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  ont le même degré que le polynôme  $g$ , parce que ces fractions sont irréductibles. Il s'agit en effet des impédances des bipôles obtenus en fermant un accès sur sa terminaison. Ces impédances tiennent compte de tous les éléments inclus dans le biporte.

Il n'en va pas de même pour les immittances  $z_{ii}$  ou  $y_{ii}$ . En effet,  $(g \pm h)$  et  $(g \pm h_*)$  ne sont pas toujours strictement hurwitziens : ils peuvent posséder plusieurs zéros sur l'axe imaginaire. Le facteur  $(p^2 + \omega_i^2)$  ou  $p$  correspondant se simplifie lorsque l'on fait le rapport des parties paire et impaire de l'un de ces polynômes, afin de créer la fonction de Foster correspondant à une de ces immittances non dissipatives.

Cette simplification algébrique a pour équivalent la disparition d'une branche, lorsque l'on crée le circuit ouvert ou le court-circuit à un accès qui détermine l'immittance  $z_{ii}$  ou  $y_{ii}$  à l'autre accès. A la figure 2.18, on a représenté, à titre d'exemple, les trois impédances d'entrée  $\zeta_1$ ,  $z_{11}$  et  $1/y_{11}$  d'un biporte respectivement fermé sur sa terminaison, sur un circuit ouvert et sur un court-circuit. Il est clair que le circuit anti-résonant, situé dans la branche série, n'intervient pas dans le calcul de  $z_{11}$  qui sera une fonction de degré 1. Par contre,  $y_{11}$  tient compte de tous les éléments du biporte.

D'une façon générale, selon que la première branche du biporte, à partir de l'accès 2 est série ou parallèle, l'expression de  $z_{11}$  ou de  $y_{11}$  est respectivement de degré inférieur à  $g$  par suite d'une simplification entre numérateur et dénominateur. Ceci met bien en évidence qu'il n'est pas possible de synthétiser un biporte par synthèse d'une seule de ses immittances en court-circuit ou à circuit ouvert. Cette hypothèse serait séduisante, parce qu'elle ramènerait le problème du biporte à celui du bipôle LC, traité à la section 2.2.

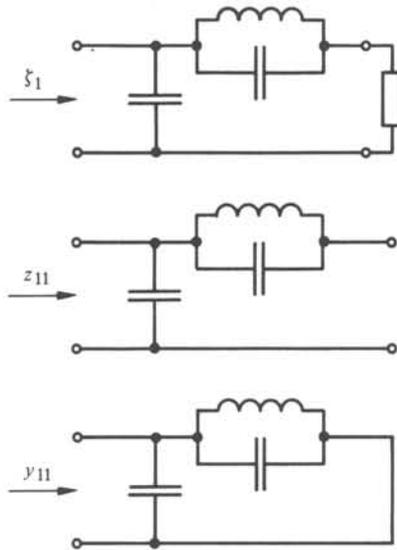


Fig. 2.18

En fait, le problème de la synthèse du biporte est plus complexe : il revient à la synthèse de l'impédance passive RLC  $\xi_1$ , sous la forme particulière d'un biporte LC fermé sur une seule résistance. C'est le principe de la méthode des paramètres effectifs qui sera exposée au chapitre 6.

### 2.3.28 Définition

On appelle *pôle de réflexion* par rapport à l'accès 1 ou 2, toute racine de  $(g \pm h)$  ou respectivement de  $(g \pm h_*)$  qui est située sur l'axe imaginaire.

En un pôle de réflexion par rapport à un accès, l'impédance terminée relative à cet accès est, soit nulle, soit infinie. Dans le premier cas, l'admittance en court-circuit, relative à l'autre accès, se simplifie par le facteur  $p$  ou  $(p^2 + \omega_j^2)$  correspondant. Dans le second cas, l'impédance à circuit ouvert, relative à l'autre accès, se simplifie par un tel facteur.

### 2.3.29 Propriété

Les pôles de réflexion sont des pôles d'affaiblissement.

En effet, l'annulation sur l'axe imaginaire d'un polynôme  $(g \pm h)$  ou  $(g \pm h_*)$  implique

$$|g| = |h|, \text{ d'où } |s_{11}|^2 = 1 \text{ et, par (2.67), } |s_{12}|^2 = 0.$$

Ce résultat mathématique peut être envisagé de façon plus intuitive en considérant l'exemple de  $\xi_1 = 0$  ou de  $\xi_1 = \infty$ . Il est clair qu'il y a une réflexion totale à l'accès 1 : aucune puissance active n'est fournie par la source au biporte, qui se comporte comme un court-circuit ou un circuit ouvert.

### 2.3.30 Propriété

Aux pôles d'affaiblissement, l'impédance terminée  $\xi_i$  est égale à  $z_{ii}$  et à  $y_{ii}^{-1}$ .

La démonstration sera faite pour  $i = 1$ . A un pôle d'affaiblissement, (2.69) se réduit à  $gg_* = hh_*$ . Cette expression peut se récrire sous la forme  $\xi_1 = z_{11}$  ou  $\xi_1 = y_{11}^{-1}$  en utilisant les expressions (2.81) et (2.88).

Ce résultat est logique. S'il n'y a pas transmission à travers le biporte, aucune puissance active n'est dissipée dans la terminaison résistive, et le biporte se comporte comme une réactance.

### 2.3.31 Propriété

Aux pôles d'affaiblissement qui ne sont pas des pôles de réflexion, on a

$$\frac{d\xi_i}{dp} = \frac{dz_{ii}}{dp} = \frac{dy_{ii}^{-1}}{dp} \quad (2.90)$$

En effet, les pôles d'affaiblissement sont des racines doubles de  $gg_* - hh_* = 0$ . Ils sont aussi racines de

$$\frac{d}{dp}(gg_* - hh_*) = 0 \quad (2.91)$$

qui est la forme prise par (2.90) lorsque l'on y substitue les valeurs de  $\xi_i$ ,  $y_{ii}$  et  $z_{ii}$ , données aux paragraphes 2.3.21 et 2.3.22.

### 2.3.32 Commentaire

Cette section a montré que le problème de la synthèse d'un biporte non dissipatif entre terminaisons résistives, peut être réduit à la synthèse d'un bipôle RLC, d'impédance  $\xi_1$ , sous la forme d'un biporte LC fermé sur une seule résistance  $R_2$ .

La section 2.2 a montré comment synthétiser une réactance pure. Les deux derniers paragraphes ont montré qu'aux fréquences des pôles d'affaiblissement, les valeurs de l'impédance terminée RLC et d'une impédance non terminée LC sont en coïncidence. Par ce biais, on entrevoit la possibilité de réaliser la synthèse du biporte à partir des techniques développées pour le bipôle. Ce procédé est couramment utilisé dans de nombreux programmes de synthèse de filtres: on réalise une première synthèse de gauche à droite, à partir de  $z_{11}$  qui donne tout le biporte à part la dernière branche série; on recommence une seconde synthèse de droite à gauche, à partir de  $z_{22}$ .

Dans le cadre de ce volume on présente une synthèse unique à partir de la matrice de transfert, qui est exposée au chapitre 6. A chaque étape de cette synthèse assez abstraite, on montrera comment elle réalise en fait la synthèse de  $z_{ii}$  ou de  $y_{ii}^{-1}$ .



## SYNTHÈSE DES FILTRES PAR LA MÉTHODE DES PARAMÈTRES-IMAGE

### 3.1 PARAMÈTRES-IMAGE

#### 3.1.1 Introduction

Les paramètres-image constituent une description du biporte, différente de celle de la matrice de répartition. Cette description est idéalisée, en ce sens qu'elle suppose l'existence de terminaisons en fait irréalisables, parce qu'elles ne sont pas des fractions rationnelles réelles. En pratique, le circuit réalisé s'écarte sensiblement du circuit idéalisé. La méthode des paramètres-image constitue donc une méthode approchée, très intéressante parce qu'elle permet de concevoir un filtre de degré élevé et de performances passables, sans recours à l'ordinateur.

La lecture de ce chapitre 3 n'est pas indispensable pour la compréhension des chapitres suivants. Néanmoins, elle permet de développer une certaine vue intuitive des problèmes développés plus loin. En effet, seuls les paramètres-image permettent d'établir une relation simple entre la valeur des éléments et les performances de filtrage.

#### 3.1.2 Définitions

L'*adaptation-image*, à un accès d'un biporte réciproque, est réalisée lorsque la terminaison, sur laquelle est refermée cet accès, est identique à l'impédance terminée du biporte refermé sur son autre terminaison. L'adaptation-image du biporte est réalisée lorsque l'adaptation-image est simultanément réalisée aux deux accès.

L'adaptation proprement dite est réalisée (§ IV.6.3.9) lorsque la terminaison est *complexe conjuguée* de l'impédance terminée. Les deux concepts coïncident si la terminaison est réelle.

Les *impédances-image* d'un biporte sont les terminaisons entre lesquelles le biporte réalise l'adaptation-image.

#### 3.1.3 Calcul des impédances-image

Notons  $W_1$  et  $W_2$  les impédances-image du biporte réciproque, de matrice d'impédance  $Z$  représenté à la figure 3.1. Compte tenu des relations du tableau IV.6.18 et de la formule (6.35), on peut écrire

$$W_1 = \frac{Z_{11} W_2 + Z_{11} Z_{22} - Z_{12}^2}{W_2 + Z_{22}} \quad (3.1)$$



Fig. 3.1

$$W_2 = \frac{Z_{22} W_1 + Z_{11} Z_{22} - Z_{12}^2}{W_1 + Z_{11}} \quad (3.2)$$

Cet ensemble de deux équations, non linéaires en les inconnues  $W_1$  et  $W_2$ , se ramène aux relations  $Z_{22} W_1 = Z_{11} W_2$  et  $W_1 W_2 = Z_{11} Z_{22} - Z_{12}^2$  qui donnent finalement

$$W_1 = \sqrt{\frac{Z_{11}}{Y_{11}}} \quad (3.3)$$

$$W_2 = \sqrt{\frac{Z_{22}}{Y_{22}}} \quad (3.4)$$

### 3.1.4 Commentaire

Les formules (3.3) et (3.4) donnent en général, pour  $W_1$  et  $W_2$ , des expressions qui ne sont pas des fractions rationnelles réelles, et qui ne correspondent donc pas à des impédances réalisables. Le concept d'impédance-image paraît donc à première vue dénué d'intérêt et la méthode de synthèse compromise. Néanmoins, le but véritable de la méthode n'est pas de réaliser ces impédances-image, mais de constituer un quadripôle de degré élevé par mise en cascade de cellules simples, entre lesquelles l'adaptation-image est réalisée. A ce titre, l'impédance-image est un outil purement mathématique. En pratique, après avoir été calculé par la méthode des paramètres-image, le biporte sera inséré entre des terminaisons purement résistives.

### 3.1.5 Définition: biportes à impédance constante

Les formules (3.3) et (3.4) définissent des impédances réalisables dans le cas particulier où les fractions situées sous les radicaux sont des constantes. Dans ce cas, les impédances-image sont des résistances.

On appelle *biporte à impédance constante* celui qui est caractérisé par des impédances terminées  $\zeta_i$  constantes, pourvu que les terminaisons aient une certaine valeur  $R_i$ . Placé entre ces terminaisons, le biporte ne présente de réflexion à aucun accès. Par la relation (2.67), il en résulte que  $|s_{12}| = 1$  pour toute fréquence si le biporte est non dissipatif. Il s'agit donc d'un passe-tout et non d'un filtre (§ 6.5.2).

On pourrait échapper à cette contrainte en adoptant d'emblée des biportes qui soient dissipatifs, mais la discussion du paragraphe 1.1.16 montre que ce n'est pas une solution prometteuse.

### 3.1.6 Définitions : chaîne-image

Une *chaîne-image* est une cascade de biportes dont les accès connectés deux à deux possèdent chaque fois une impédance-image commune.

Une telle chaîne est représentée à la figure 3.2. En appliquant récursivement la définition des impédances-image, on peut prouver que l'impédance terminée de l'accès de gauche vaut bien  $W_a$ , lorsque l'accès de droite est fermé sur  $W_e$ . En effet, l'impédance terminée du biporte 4 vaut alors  $W_d$ , celle du biporte 3 vaut en conséquence  $W_c$ , etc.

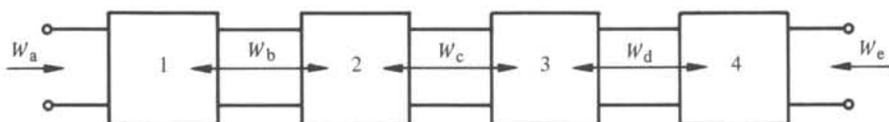


Fig. 3.2

En d'autres mots, une chaîne-image a pour impédances-image celles des biportes extrêmes. On peut réaliser de la sorte un biporte de degré élevé, dont les impédances-image peuvent être calculées à partir de biportes constituant une partie de la chaîne.

On appelle *cellules* les biportes entrant dans une chaîne-image.

Le procédé qui consiste à construire une chaîne-image est une application particulière de la théorie des paramètres-image, la seule qui sera traitée dans la suite de ce chapitre. En effet elle permet de synthétiser un filtre de degré élevé à partir de cellules simples sans rencontrer les problèmes d'analyse numérique décrits à la section 6.4. On trouvera un exposé plus général sur les paramètres-image en [4].

### 3.1.7 Définitions

On appelle *transmittance-image*  $s_1$  le coefficient de transmission d'un biporte entre ses terminaisons-image. Le *comportement-image*  $\gamma$  est le logarithme népérien de  $1/s_1$ , l'*affaiblissement-image*  $\delta$  et le *déphasage-image*  $\beta$ , respectivement ses parties réelle et imaginaire. Ces grandeurs sont donc liées par l'équation

$$\gamma = \delta + j\beta = -\ln s_1 \quad (3.5)$$

Pour distinguer clairement l'affaiblissement au sens du paragraphe 1.1.7, de l'affaiblissement-image, on précisera dans le courant de ce chapitre qu'il s'agit de l'*affaiblissement effectif*.

### 3.1.8 Propriété

La transmittance-image d'une chaîne-image est le produit des transmittances-image des cellules.

En effet, la matrice de transfert définie au paragraphe IV.6.3.7 s'exprime, à partir des éléments de la matrice de répartition, sous la forme

$$\theta = \frac{1}{s_{21}} \begin{pmatrix} -\det s & s_{11} \\ -s_{22} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Dans le cas d'une transmittance-image,  $s_i = s_{12} = s_{21} = e^{-\gamma}$  et  $s_{11} = s_{22} = 0$  puisque l'adaptation-image est réalisée aux deux accès. Dès lors,  $\theta$  prend la forme

$$\theta = \begin{pmatrix} s_i & 0 \\ 0 & 1/s_i \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Le produit de matrices diagonales s'opère en effectuant simplement le produit des éléments situés à la même position sur la diagonale principale.

La forme (3.7) correspond à une matrice de répartition définie pour un biporte qui est placé entre terminaisons généralisées, en ce sens que ce ne sont pas simplement des résistances. Le calcul est effectué de façon purement formelle, en remplaçant les symboles  $R_i$  du paragraphe 2.3.1 par les symboles  $W_i$ . Ces dernières ont une valeur *dépendant de la fréquence*, et seront tantôt réelles, tantôt imaginaires. Le cas particulier des terminaisons généralisées, fonctions rationnelles de la fréquence, à valeurs réelles, sera traité en détail à la section 8.3.

### 3.1.9 Propriété

Dans une chaîne-image, les affaiblissements-image, de même que les déphasages-image, s'additionnent.

C'est un corollaire de la propriété précédente. Cette propriété montre que l'on peut satisfaire des exigences d'affaiblissement, en plaçant successivement en cascade des cellules jusqu'au moment où leurs affaiblissements-image additionnés rencontrent les exigences. Ce procédé de synthèse permet littéralement de construire un filtre, ainsi que l'on construirait un mur, brique par brique.

Bien entendu, ce procédé reste, jusqu'à présent, du domaine de la fiction mathématique, puisque les impédances-image sont irréalisables et que l'on se promet de ne pas les réaliser.

### 3.1.10 Calcul du comportement-image

A partir de la matrice de répartition correspondant aux terminaisons-image

$$s = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\gamma} \\ e^{-\gamma} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

et de la relation (2.41), on trouve

$$z = \begin{pmatrix} \coth \gamma & 1/\sinh \gamma \\ 1/\sinh \gamma & \coth \gamma \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

compte tenu des formules

$$\coth \gamma = \frac{e^{\gamma} + e^{-\gamma}}{e^{\gamma} - e^{-\gamma}} = \frac{1 + e^{-2\gamma}}{1 - e^{-2\gamma}} \quad (3.10)$$

$$\sinh \gamma = \frac{e^{\gamma} - e^{-\gamma}}{2} = \frac{1 - e^{-2\gamma}}{2e^{-\gamma}} \quad (3.11)$$

En revenant aux grandeurs non réduites, on trouve

$$Z = \begin{pmatrix} W_1 \coth \gamma & \sqrt{W_1 W_2 / \sinh \gamma} \\ \sqrt{W_1 W_2 / \sinh \gamma} & W_2 \coth \gamma \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Par comparaison avec (3.3) et (3.4), il vient

$$\coth \gamma = \sqrt{Y_{11} Z_{11}} = \sqrt{Y_{22} Z_{22}} \quad (3.13)$$

et par (3.10)

$$e^{2\gamma} = \frac{\sqrt{Y_{11} Z_{11}} + 1}{\sqrt{Y_{11} Z_{11}} - 1} \quad (3.14)$$

### 3.1.11 Calcul des paramètres-image d'un treillis

Au paragraphe IV.6.2.8, on a montré que les impédances  $Z_1$ , des branches croisées, et  $Z_2$ , des branches droites, d'un treillis symétrique, représenté à la figure 3.3, valent

$$Z_1 = Z_{11} + Z_{12} \quad (3.15)$$

$$Z_2 = Z_{11} - Z_{12} \quad (3.16)$$

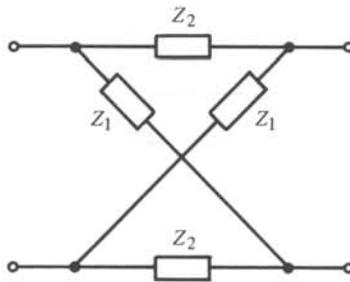


Fig. 3.3

Dès lors,  $\det Z = Z_1 Z_2$ ,  $Y_{11} = Z_{22} / \det Z = Z_{11} / \det Z$ . Les formules (3.3) et (3.4) se réécrivent

$$W_1 = W_2 = \sqrt{Z_1 Z_2} \quad (3.17)$$

et (3.13) devient

$$\coth \gamma = \frac{Z_1 + Z_2}{2\sqrt{Z_1 Z_2}} \quad (3.18)$$

En comparant avec la formule

$$\coth \gamma = \frac{1 + \tanh^2(\gamma/2)}{2 \tanh(\gamma/2)} \quad (3.19)$$

on trouve encore

$$\tanh(\gamma/2) = \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} \quad (3.20)$$

ou la valeur inverse du second membre. Le choix entre les deux doit être fait pour les bandes coupées, en tenant compte du fait que  $|\tanh(\gamma/2)| < 1$ .

### 3.2 CELLULES DE FILTRE PASSE-BAS

#### 3.2.1 Calcul de la cellule à $k$ -constant

Considérons le biporte de la figure 3.4. Par les formules (3.3) et (3.4), on trouve

$$W_1 = \sqrt{p^2 + 1} \quad (3.21)$$

$$W_2 = 1/\sqrt{p^2 + 1} = 1/W_1 \quad (3.22)$$

Par (3.14), il vient

$$e^\gamma = \sqrt{p^2 + 1} + p \quad (3.23)$$

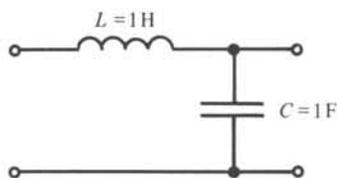


Fig. 3.4

Sur l'axe imaginaire, on a

$$W_1 = \sqrt{1 - \omega^2} \quad (3.24)$$

$$W_1 = j\sqrt{\omega^2 - 1} \quad (3.25)$$

respectivement pour  $\omega < 1$  et  $\omega > 1$ . Les impédances-image sont donc réelles dans l'intervalle  $[0, 1]$  et imaginaires ailleurs. Pour  $\omega < 1$ , (3.23) s'écrit

$$\gamma = j \arcsin \omega \quad (3.26)$$

qui se déduit des formules

$$e^\gamma = \sqrt{1 - \omega^2} + j\omega \quad (3.27)$$

et

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x \quad (3.28)$$

Dans cet intervalle,  $\delta = 0$  et

$$\beta = \arcsin \omega \quad (3.29)$$

Pour  $\omega > 1$ , (3.23) s'écrit

$$e^\gamma = j[\sqrt{\omega^2 - 1} + \omega] = [\sqrt{\omega^2 - 1} + \omega] e^{j\pi/2} \quad (3.30)$$

d'où

$$\delta = \ln(\sqrt{\omega^2 - 1} + \omega) = \operatorname{arcosh} \omega \quad (3.31)$$

$$\beta = \pi/2 \quad (3.32)$$

### 3.2.2 Commentaires

On constate donc qu'il existe deux bandes de fréquence. L'une, manifestement une bande passante, est caractérisée par un affaiblissement-image strictement nul et des terminaisons-image réelles. L'autre sera désignée comme la bande coupée où l'affaiblissement-image est positif et les terminaisons-image purement imaginaires. La limite entre ces deux bandes est appelée *pulsation de coupure*. L'ensemble de ces résultats est rassemblé à la figure 3.5.

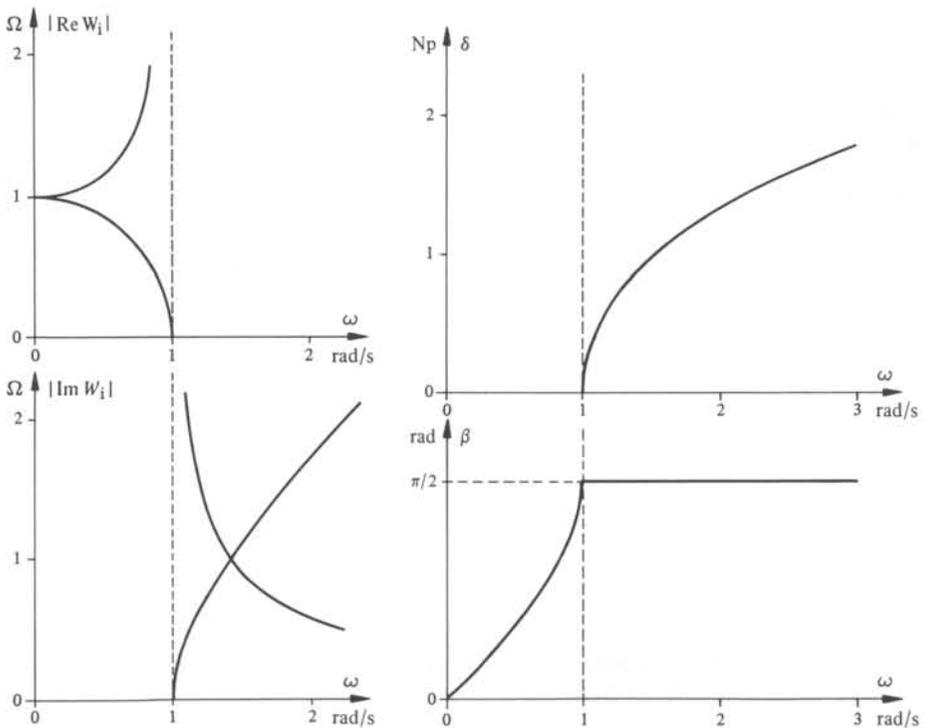


Fig. 3.5

Bien évidemment, la cellule étudiée a été normalisée dès le départ. On constate que la pulsation de coupure et l'impédance-image à l'origine ont, l'une et l'autre, la valeur unité. Pour tenir compte des exigences réelles, il faut dénormaliser selon le procédé des paragraphes 1.2.14 et 1.2.15. Si la pulsation de coupure et l'impédance à l'origine doivent valoir respectivement  $\omega_n$  et  $r_n$ , on aura une cellule avec  $L = r_n/\omega_n$  et  $C = 1/\omega_n r_n$ .

### 3.2.3 Chaîne-image de cellules à $k$ -constant

Comme  $W_1$  est différent de  $W_2$ , il faudra, pour constituer une chaîne-image, connecter alternativement une cellule selon la figure 3.4 et la cellule obtenue par permutation des accès. Bien entendu, toutes ces cellules doivent avoir des valeurs identiques de  $L$  et  $C$  pour que les impédances-image soient identiques tout au long de la chaîne.

A titre d'exemple, une chaîne de trois cellules est représentée à la figure 3.6. Le comportement-image est égal à trois fois la valeur de  $\gamma$  donnée par (3.23). En accroissant le nombre de cellules, on multiplie d'autant l'affaiblissement-image en bande coupée. On conçoit que, de la sorte, il soit possible de vérifier les exigences de discrimination entre la bande passante et la bande coupée : il suffit de créer une chaîne-image suffisamment longue.

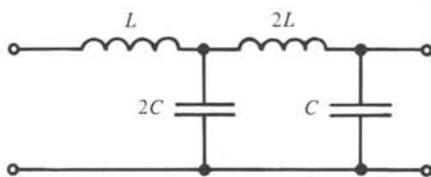


Fig. 3.6

Cette technique très simple permet apparemment de construire un passe-bas, vérifiant n'importe quelles exigences. Il s'agit néanmoins d'une technique très sommaire. En effet :

- rien ne permet pour l'instant de prévoir ce que sera l'affaiblissement effectif entre des terminaisons résistives; il ne sera manifestement pas nul dans la bande passante;
- l'exemple de la figure 3.6 montre que les degrés de liberté à disposition sont très mal exploités, puisque toutes les inductances, de même que toutes les capacités, doivent être identiques;
- l'affaiblissement-image en bande coupée est une fonction croissant de façon monotone. Pour rencontrer les exigences d'affaiblissement au voisinage de la coupure, on créera un affaiblissement inutilement élevé à des fréquences plus hautes.

En résumé, une chaîne-image à  $k$ -constant est une solution sommaire et peu économique.

L'appellation  $k$ -constant est d'origine historique. Elle signifie que pour une chaîne, le rapport  $L/C$  est constant.

### 3.2.4 Cellule en $m$ -dérivé

Considérons le biporte de la figure 3.7. Par un calcul analogue à celui du paragraphe 3.2.1, on trouve

$$W_1 = \frac{\sqrt{p^2 + 1}}{(1 - m^2)p^2 + 1} \quad (3.33)$$

$$W_2 = 1/\sqrt{p^2 + 1} \quad (3.34)$$

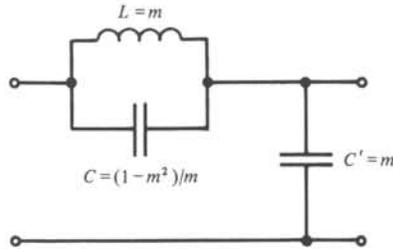


Fig. 3.7

$$e^{2\gamma} = \frac{\sqrt{p^2 + 1} + mp}{\sqrt{p^2 + 1} - mp} \quad (3.35)$$

Pour  $\omega < 1$ , on a le long de l'axe imaginaire

$$W_1 = \frac{\sqrt{1 - \omega^2}}{(m^2 - 1)\omega^2 + 1} \quad (3.36)$$

$$W_2 = 1/\sqrt{1 - \omega^2} \quad (3.37)$$

$$\delta = 0 \quad (3.38)$$

$$\beta = \arctan [m\omega/\sqrt{1 - \omega^2}] \quad (3.39)$$

Il s'agit, comme pour la cellule à  $k$ -constant, de la bande passante.

Dans la bande coupée,  $\omega > 1$ , les impédances-image sont imaginaires de valeurs

$$W_1 = \frac{j\sqrt{\omega^2 - 1}}{(m^2 - 1)\omega^2 + 1} \quad (3.40)$$

$$W_2 = -j/\sqrt{\omega^2 - 1} \quad (3.41)$$

Le comportement-image est donné par

$$e^{2\gamma} = \frac{\sqrt{\omega^2 - 1} + m\omega}{\sqrt{\omega^2 - 1} - m\omega} \quad (3.42)$$

Pour  $\omega = 1/\sqrt{1 - m^2}$ , le dénominateur de la fraction s'annule et  $\gamma$  devient infini. En désignant par  $\omega_\infty$  cette pulsation, on peut partager la bande coupée en deux zones. Dans la première, comprise entre 1 et  $\omega_\infty$ , on a

$$\delta = \frac{1}{2} \ln \frac{m\omega + \sqrt{\omega^2 - 1}}{m\omega - \sqrt{\omega^2 - 1}} \quad (3.43)$$

$$\beta = \pi/2 \quad (3.44)$$

et, de  $\omega_\infty$  à l'infini, on a

$$\delta = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{\omega^2 - 1} + m\omega}{\sqrt{\omega^2 - 1} - m\omega} \quad (3.45)$$

$$\beta = 0 \quad (3.46)$$

Ces différents résultats sont illustrés à la figure 3.8.

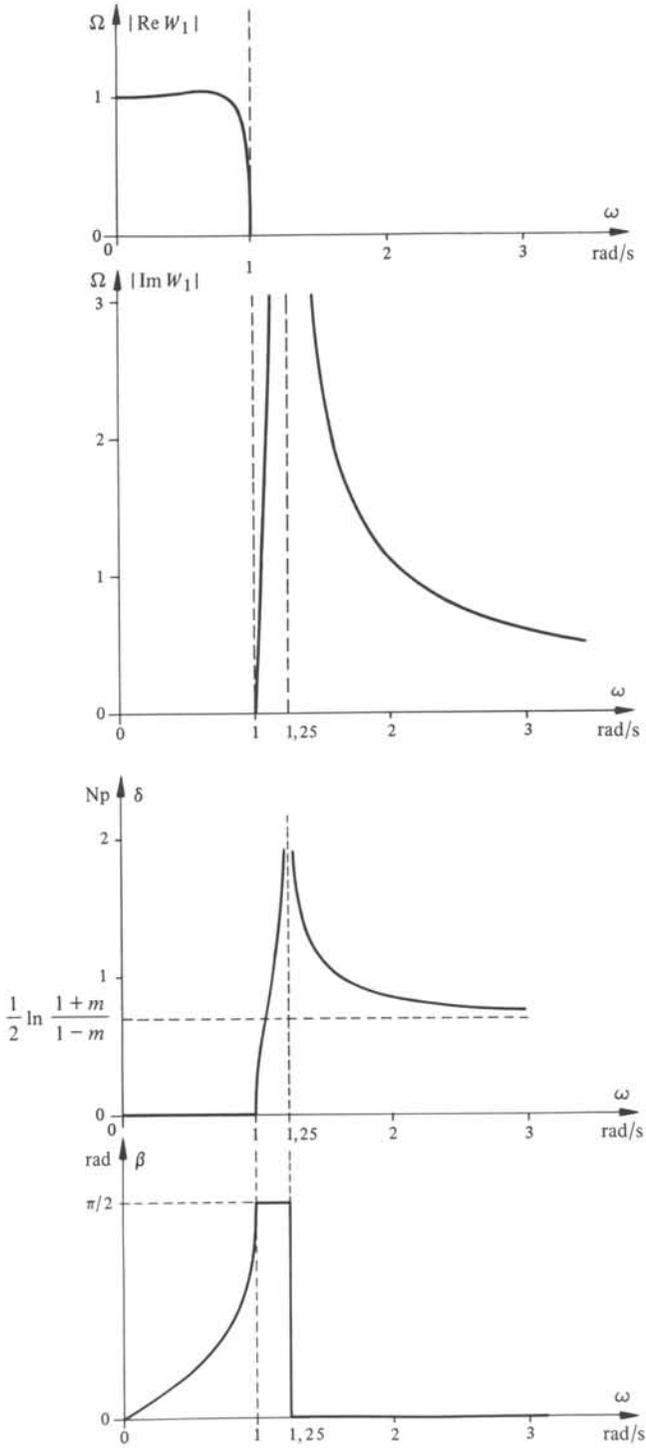


Fig. 3.8

### 3.2.5 Commentaires

La cellule en  $m$ -dérivé tire historiquement son nom de l'existence d'un paramètre  $m$ . En la comparant à la cellule à  $k$ -constant, on constate trois différences importantes.

- Il existe pour la cellule en  $m$ -dérivé un pôle d'affaiblissement-image à la pulsation finie  $\omega_\infty$ . On pourra de la sorte concevoir des courbes d'affaiblissement avec une transition rapide dès la fréquence de coupure.
- L'impédance-image  $W_1$  dépend d'un paramètre. Par un choix convenable de  $m$ , il est possible de réaliser, dans la bande passante, une courbe qui se rapproche davantage d'une constante que les courbes de la figure 3.5 pour  $W_1$  et  $W_2$  de la cellule à  $k$ -constant. Dès lors, on sera moins éloigné de l'adaptation-image lorsque le filtre sera placé entre des terminaisons résistives. La valeur optimale de  $m$  dans ce but est de l'ordre de 0.6 : bien entendu, cela fixe la position du pôle d'affaiblissement, qui se situe en  $\omega = 1.25$ . Avant de sacrifier deux cellules, afin de réaliser une meilleure adaptation aux accès au détriment de la discrimination, il faut peser les avantages de cette solution en fonction des exigences dans les deux bandes.
- Grâce au fait que  $W_2$  est indépendant de  $m$ , il est possible de placer dans la même chaîne-image des cellules caractérisées par des valeurs différentes de  $m$ . Bien entendu, pour assurer l'adaptation-image du côté de  $W_1$ , il faut raccorder deux cellules ayant même valeur de  $m$ , l'une selon la figure 3.7, l'autre obtenue par permutation des accès, de façon à constituer une chaîne de deux cellules, représentée à la figure 3.9, qui possède aux deux accès l'impédance-image  $W_2$ . Cette nouvelle cellule peut être connectée à une cellule de même structure mais caractérisée par un autre  $m$ . Il est même possible de la connecter

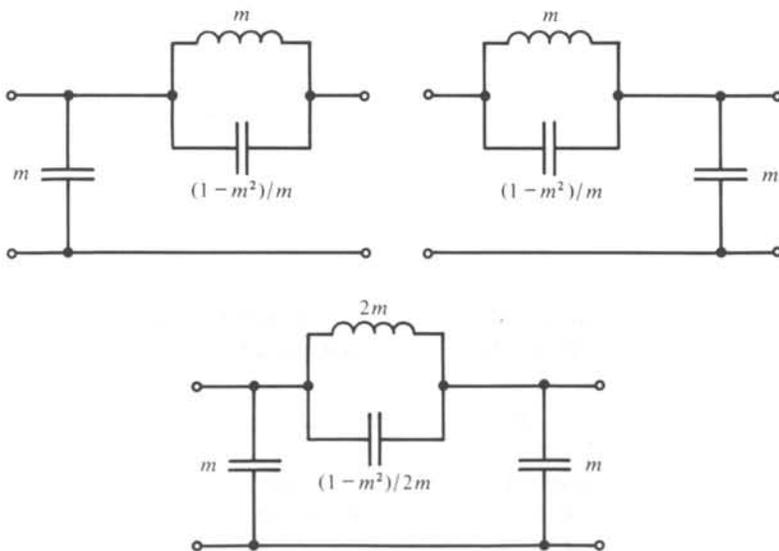


Fig. 3.9

ter à une cellule à  $k$ -constant. Cette propriété permet de réaliser une chaîne-image qui ait une série de pôles d'affaiblissement placés de façon optimale, pour vérifier les exigences d'affaiblissement en bande coupée de la façon la plus économique.

En résumé, grâce à la présence du paramètre  $m$ , on dispose d'une plus grande souplesse dans la réalisation du filtre.

### 3.3 CONCEPTION D'UNE CHAÎNE-IMAGE PASSE-BAS

#### 3.3.1 Introduction

Si l'on désire vérifier les exigences imposées à un filtre, la méthode des paramètres-image soulève deux problèmes :

- comment additionner de façon efficace les affaiblissements-image dans la bande bloquée, de façon à créer la discrimination exigée sans utiliser plus de cellules que le minimum;
- une fois que le biporte est placé entre ses terminaisons résistives, comment calculer l'affaiblissement effectif à partir de l'affaiblissement-image ?

Le premier problème fait l'objet des paragraphes 3.3.2 à 3.3.4; le second, du reste de la section 3.3.

Nous ne discuterons pas ici d'un autre problème traité lors de l'exemple du paragraphe 3.3.10. Les exigences de filtrage, comportent une bande passante et une bande coupée, *séparées par un intervalle de transition*. Au sens de la théorie-image, il y a seulement une bande passante et une bande coupée, *séparées par un seul point*, la pulsation de coupure. En pratique, celle-ci doit être placée dans l'intervalle de transition, de façon judicieuse.

#### 3.3.2 Méthode des gabarits d'affaiblissement

L'addition de plusieurs courbes de  $\delta$ , du type de la figure 3.8 pour différentes valeurs de  $m$ , est une opération pénible, parce que l'allure de la courbe dépend de  $m$ . Par un changement de variables, il est possible de bâtir une courbe universelle.

Posons, pour  $\omega \geq 1$ ,

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{\omega^2}{\omega^2 - 1} \quad (3.47)$$

Pour  $\omega = 1$ ,  $\eta = \infty$ , et pour  $\omega = \infty$ ,  $\eta = 0$ . La bande coupée  $[1, \infty]$  de l'axe  $j\omega$  est ainsi transformée en tout l'axe positif de  $\eta$ . La pulsation  $\omega_\infty$  a pour transformée

$$\eta_\infty = \frac{1}{2} \ln \frac{\omega_\infty^2}{\omega_\infty^2 - 1} = -\ln m \quad (3.48)$$

compte tenu de la relation de définition  $\omega_\infty^2 = 1/(1 - m^2)$ .

L'affaiblissement donné par (3.43) et (3.45) s'écrit

$$\delta = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + m\omega/\sqrt{\omega^2 - 1}}{1 - m\omega/\sqrt{\omega^2 - 1}} \right| \quad (3.49)$$

qui donne, par (3.47) et (3.48)

$$\delta = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \exp(\eta - \eta_\infty)}{1 - \exp(\eta - \eta_\infty)} \right| \quad (3.50)$$

Par (3.10), il vient

$$\delta = \frac{1}{2} \ln \left| \coth \frac{\eta - \eta_\infty}{2} \right| = \frac{1}{2} \ln \left[ \coth \left| \frac{\eta - \eta_\infty}{2} \right| \right] \quad (3.51)$$

Il en résulte que la courbe d'une cellule quelconque s'obtient par translation de la courbe universelle, représentée à la figure 3.10,

$$\delta = \frac{1}{2} \ln \left[ \coth \left| \frac{\eta}{2} \right| \right] \quad (3.52)$$

qui est utilisée pour fabriquer un gabarit.

En particulier pour  $m = 1$ ,  $\eta_\infty = 0$  ou  $\omega_\infty = \infty$ . La valeur de  $\delta$ , donnée par (3.43), est identique à (3.31). La capacité  $C$  de la figure 3.7 est nulle. La cellule à  $k$ -constant est donc un cas limite de la cellule en  $m$ -dérivé, et la formule (3.52) est aussi valable.

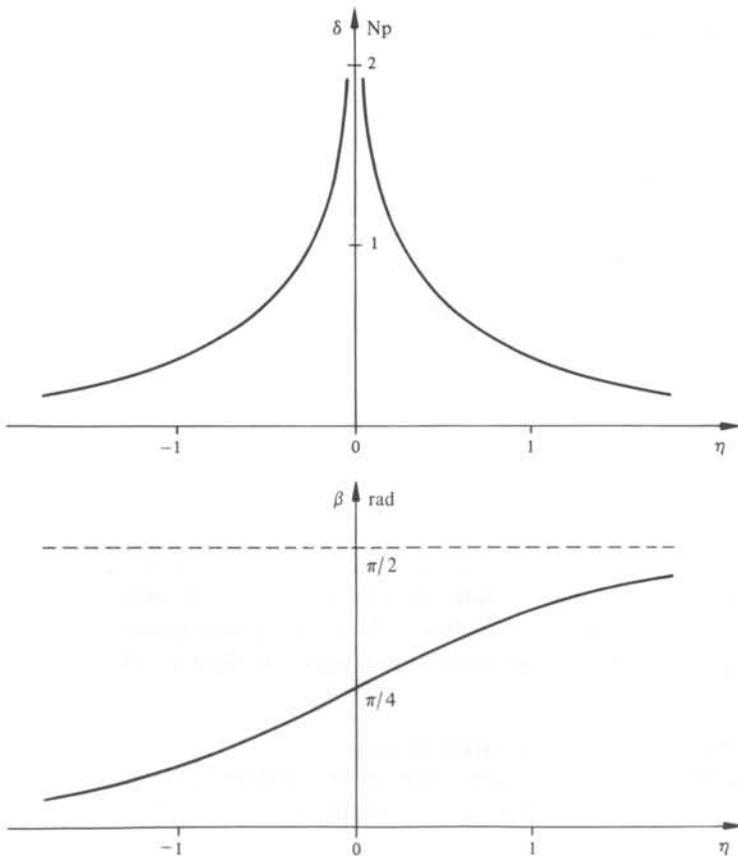


Fig. 3.10

### 3.3.3 Gabarits de déphasage

Par la transformation

$$\kappa = \frac{1}{2} \ln \frac{\omega^2}{1 - \omega^2} \quad (3.53)$$

l'intervalle  $[0, 1]$  de l'axe  $\omega$ , correspondant à la bande passante, devient l'axe réel entier de  $\kappa$ , avec une inversion de sens. La formule (3.39) s'écrit

$$\beta = \arctan [\exp (\kappa - \eta_{\infty})] \quad (3.54)$$

La courbe de déphasage d'une cellule quelconque s'obtient donc par translation de la courbe universelle correspondant à la cellule à  $k$ -constant ( $\eta_{\infty} = 0$ ), et représentée à la figure 3.10. Comme le déphasage-image est une courbe en escalier dans la bande coupée, sa construction est aisée.

### 3.3.4 Formule de décomposition de Zobel

Considérons l'expression, déduite de (2.41), du coefficient de transmission en fonction des éléments de  $Z$  et des terminaisons résistives d'un biporte,

$$s_{12} = \frac{2 Z_{12} \sqrt{R_1 R_2}}{(Z_{11} + R_1)(Z_{22} + R_2) - Z_{12}^2} \quad (3.55)$$

Par (3.12), nous pouvons exprimer  $Z$  en fonction des paramètres-image. Il vient

$$s_{12} = \frac{2 \sqrt{W_1 W_2 R_1 R_2}}{(R_1 R_2 + W_1 W_2) \sinh \gamma + (W_1 R_2 + W_2 R_1) \cosh \gamma} \quad (3.56)$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$s_{12} = \frac{e^{-\gamma} \cdot e^{-\lambda_1} \cdot e^{-\lambda_2}}{1 - e^{-2\gamma} \cdot \sigma_1 \sigma_2} \quad (3.57)$$

avec

$$e^{-\lambda_i} = \frac{2 \sqrt{W_i R_i}}{W_i + R_i} \quad (3.58)$$

$$\sigma_i = \frac{W_i - R_i}{W_i + R_i} \quad (3.59)$$

Le coefficient de transmission effectif entre terminaisons résistives équivaut à la transmittance-image  $s_i = \exp(-\gamma)$ , multipliée par trois facteurs correctifs. On constatera du reste que ces trois facteurs valent l'unité simultanément lorsque  $W_1 = R_1$  et  $W_2 = R_2$ . L'affaiblissement effectif vaut bien l'affaiblissement-image à toute fréquence pour laquelle l'adaptation-image est simultanément réalisée aux deux accès.

### 3.3.5 Définition : facteurs de désadaptation

On appelle *facteurs de désadaptation* les grandeurs définies par (3.58). La partie réelle de  $\lambda_i$  définit l'*affaiblissement de désadaptation*

$$\alpha_{di} = \ln \left| \frac{W_i + R_i}{2 \sqrt{W_i R_i}} \right| \quad (3.60)$$

L'influence défavorable des facteurs de désadaptation est double : ils engendrent un affaiblissement-effectif dans la bande passante; ils réduisent la discrimination entre les bandes.

Dans la bande passante,  $W_i$  est réel. La courbe  $\alpha_{di}$  en fonction de  $\ln(W_i/R_i)$  est représentée à la figure 3.11. Elle est symétrique par rapport à l'origine, où elle s'annule à cause de l'adaptation.

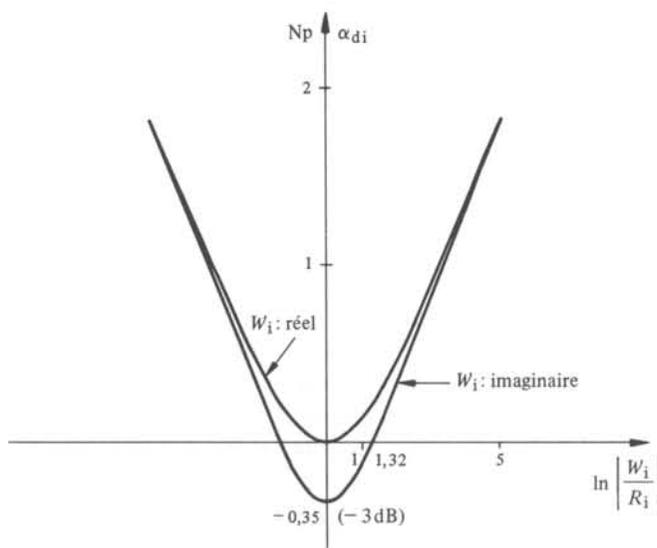


Fig. 3.11

Dans la bande coupée,  $W_i = j X_i$  et

$$\alpha_{di} = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{1 + (X_i/R_i)^2}{4 (X_i/R_i)} \right] \quad (3.61)$$

Pour  $X_i = R_i$ , le minimum de  $\alpha_{di}$ , calculé en dB, est atteint et vaut  $-3$  dB. Il est donc possible d'avoir un gain de désadaptation valant au maximum 6dB, si l'on tient compte des deux facteurs.

### 3.3.6 Calcul de l'affaiblissement effectif en bande coupée

Il n'est pas nécessaire de tenir compte du facteur situé au dénominateur de (3.57) que l'on appelle *terme d'interaction*. En effet, dans la bande coupée, l'affaiblissement est élevé et le facteur  $\exp(-2\gamma)$  réduit le terme d'interaction à une valeur proche de l'unité.

Puisque l'affaiblissement effectif en bande coupée peut être inférieur de 6dB à l'affaiblissement-image, on peut, de façon sommaire, ajouter 6dB aux exigences imposées au filtre, avant d'appliquer la méthode des gabarits, telle qu'elle est exposée au paragraphe 3.3.2.

De façon plus exacte, on peut calculer l'affaiblissement effectif par la formule de décomposition de Zobel, et le comparer aux exigences. Dans ce calcul, on tiendra compte uniquement des facteurs de désadaptation.

### 3.3.7 Calcul de l'affaiblissement effectif en bande passante

Dans la bande passante,  $\gamma = j\beta$ , et (3.56) s'écrit, en fonction des impédances-image réduites  $w_i = W_i/R_i$ , sous la forme

$$s_{12} = \frac{2\sqrt{w_1 w_2}}{(w_1 + w_2) \cos \beta + j(1 + w_1 w_2) \sin \beta} \quad (3.62)$$

Dès lors, on a

$$\alpha = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{(w_1 + w_2)^2}{4 w_1 w_2} \cos^2 \beta + \frac{(1 + w_1 w_2)^2}{4 w_1 w_2} \sin^2 \beta \right] \quad (3.63)$$

On constate que, selon la valeur de  $\beta$ ,  $\alpha$  oscillera entre deux enveloppes

$$\alpha' = \ln \left[ \frac{1 + w_1 w_2}{2\sqrt{w_1 w_2}} \right] \quad (3.64)$$

$$\alpha'' = \ln \left[ \frac{w_1 + w_2}{2\sqrt{w_1 w_2}} \right] \quad (3.65)$$

auxquelles  $\alpha$  sera tangent respectivement pour  $\beta = (k + 1/2)\pi$  et  $\beta = k\pi$ . La courbe  $\alpha'$  est identiquement nulle pour  $w_1 = 1/w_2$ , ce qui correspond à un filtre antimétrique, et la courbe  $\alpha''$  est identiquement nulle pour  $w_1 = w_2$ , ce qui correspond au cas du filtre symétrique. Ce dernier cas est représenté à la figure 3.12.

### 3.3.8 Définitions: zéros d'affaiblissement

Le calcul du paragraphe précédent montre qu'il existe deux types de zéros d'affaiblissement effectif.

Les *pulsations d'adaptation parfaite* sont les valeurs de  $\omega$  pour lesquelles  $w_1 = w_2 = 1$ . Comme l'adaptation est réalisée simultanément aux deux accès, l'affaiblissement effectif est identique à l'affaiblissement-image, qui est identiquement nul dans la bande passante.

Les *pulsations d'indifférence* sont les valeurs de  $\omega$  pour lesquelles le déphasage-image vaut  $k\pi$  dans le cas symétrique, et  $(k + 1/2)\pi$  dans le cas antimétrique. Quelles que soient les valeurs des terminaisons, l'affaiblissement effectif y est nul. Comme l'adaptation n'est pas réalisée, il y a évidemment une contribution positive des affaiblissements de désadaptation, mais elle est exactement compensée par le facteur d'interaction.

### 3.3.9 Commentaire

Il existe donc d'autres zéros d'affaiblissement que ceux qui résultent de l'adaptation simultanée aux deux accès. Ce résultat donne un bien meilleur pronostic pour l'utilisation des paramètres-image, dont la principale lacune est précisément l'inexistence de terminaisons-image, entre lesquelles l'adaptation aurait pu être réalisée.

L'apparition des pulsations d'indifférence peut être comprise de façon très intuitive pour les filtres symétriques. En effet, chaque fois que le déphasage-image vaut  $k\pi$ , cela signifie que le biporte est équivalent à une paire de connexions droites

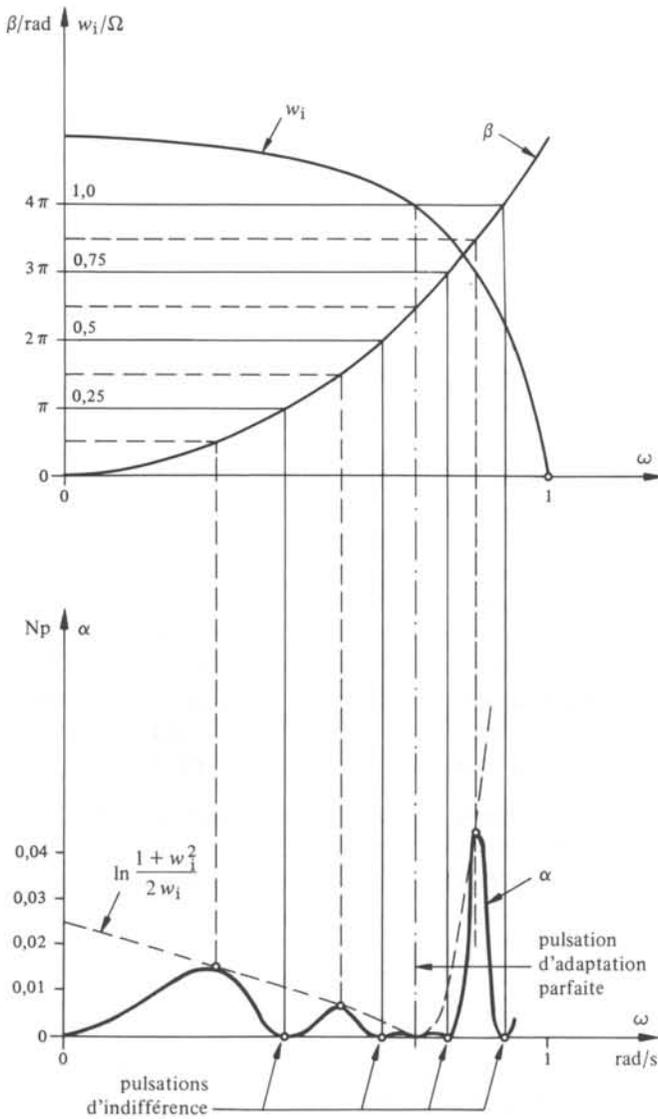


Fig. 3.12

( $\beta = \pi$ ) ou croisées ( $\beta = -\pi$ ). Un tel biporte placé entre terminaisons identiques donne évidemment un affaiblissement nul, quelles que soient ces terminaisons.

Un commentaire analogue peut être fait pour le cas du filtre antimétrique, qui est équivalent à un gyrateur aux pulsations d'indifférence.

Il est intéressant de remarquer que ces dernières seront d'autant plus nombreuses que  $\beta$  prendra une valeur multiple de  $\pi$  ou  $\pi/2$ , c'est-à-dire qu'ils dépendront de la variation de  $\beta$  dans la bande passante. Plus le nombre de cellules est grand, et plus les pulsations d'indifférence seront nombreuses.

### 3.3.10 Exemple

Les principes énoncés ci-dessus mènent à une méthode itérative pour le choix des paramètres  $m$ , ainsi que de  $R$ ,  $\omega_c$  et  $\omega_s$ .

- On identifie  $\omega_c$ , limite des exigences en bande passante, avec la pulsation normalisée  $\omega = 1$ .
- On détermine par (3.47) la variable transformée  $\eta$  et on en déduit la valeur de  $\eta_s$  correspondant à la pulsation  $\omega_s$  du début de bande coupée.
- Par la méthode des gabarits, utilisant le double de la valeur de  $\delta$  donnée par (3.52) pour tenir compte de la présence obligée de deux cellules possédant le même  $m$ , on détermine une couverture optimale des exigences en bande coupée après y avoir rajouté 6 dB pour se prémunir contre le gain de désadaptation. Par (3.48), il en résulte les valeurs de  $m$  et de  $\omega_\infty$ .
- On choisit parmi ceux-ci le plus petit  $\omega_\infty$ .
- On utilise la courbe d'impédance-image correspondante pour assurer l'adaptation la meilleure en bande passante : ceci signifie que les deux cellules terminales de la chaîne-image posséderont cette valeur de  $\omega_\infty$ .
- A la valeur de l'ondulation effective imposée par les exigences en bande passante correspond un choix de  $R$  et d'une nouvelle valeur de  $\omega_c$ . En utilisant (3.64), on s'arrange pour que le maximum de l'enveloppe soit atteint simultanément à la fréquence correspondant au maximum de  $W$  et à  $\omega_c$ . Il en résulte que  $R$  vaut la moyenne géométrique de  $W_{\max}$  et  $W(\omega_c)$ .
- On calcule une nouvelle valeur de  $\omega_s$  normalisé qui tient compte que la bande passante effective est bornée par  $\omega_c < 1$  qui vient d'être calculé.
- On itère le processus à partir de la deuxième étape.

On prendra pour cet exemple les mêmes exigences que celles du filtre passe-bas décrit dans l'exemple 1.1.13. Bien que les exigences soient de 0,5 dB dans la bande passante, on imposera lors du processus d'approximation une limite à la courbe enveloppe  $\alpha'$  de 0,025 dB de façon à disposer d'une marge pour se prémunir contre les effets des pertes et des variations des valeurs des composants.

On ne présentera que le résultat final des différentes boucles d'approche de la solution. La valeur du paramètre  $m_1$  choisi pour les cellules des extrémités est de 0,5066. On trouve la valeur de la résistance de terminaison  $R = 1,0610 \Omega$  et la limite de bande passante effective  $\omega_c = 0,9426 \text{ rad/s}$ . La pulsation du début de la bande bloquée vaudra  $\omega_s = 1,1089$ . Cette dernière, transformée par (3.47), donne  $\eta_s = 0,8388$ .

L'approximation se fait au moyen de 3 gabarits d'amplitude double de celui de la figure 3.10. Chacun d'eux représente alors une paire de cellules. Le résultat est présenté à la figure 3.13, où l'on a complété la somme résultante par l'affaiblissement de désadaptation.

Les positions sur l'axe  $\eta$  des gabarits représentant les paires de cellules centrales du filtre, donnent des paramètres  $m_2 = 0,7483$  et  $m_3 = 0,9048$ . Les paramètres  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_3$  sont directement liés aux valeurs des inductances et capacités qui composent les cellules, comme cela est indiqué sur les figures 3.7 et 3.9. Les exigences précisent que ce filtre doit fonctionner avec une limite de bande passante de 3400 Hz entre des résistances de terminaison de  $600 \Omega$ .

Chaque inductance sera multipliée par  $600 \times 0,9426 / (1,0610 \times 2\pi 3400)$  et chaque capacité par  $1,0610 \times 0,9426 / (600 \times 2\pi 3400)$ . La structure du filtre avec les valeurs des

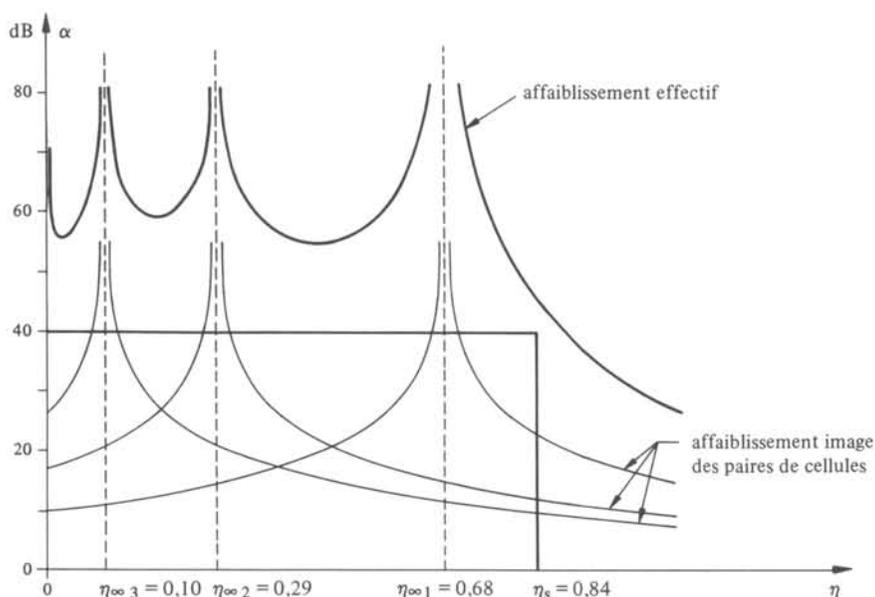


Fig. 3.13

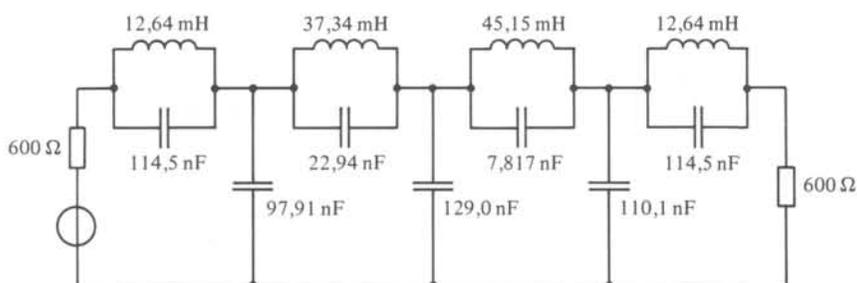


Fig. 3.14

éléments prévues pour le fonctionnement est dessinée à la figure 3.14. On a représenté à la figure 3.15 une analyse de ce filtre en fonction de la fréquence avec les valeurs nominales des éléments successivement considérés sans, puis avec pertes estimées avec un facteur de qualité de 2000 à 3 kHz pour les condensateurs et de 200 à 3 kHz pour les bobines.

### 3.4 THÉORIE GÉNÉRALE DES PARAMÈTRES-IMAGE

#### 3.4.1 Introduction

L'exemple des filtres passe-bas, conçus selon la méthode des paramètres-image, nous a fait découvrir des propriétés très générales, qu'il vaut la peine d'approfondir et de discuter. D'une part, la méthode des paramètres-image apparaît nettement moins sommaire qu'il ne semblait à première vue. D'autre part, les résultats trouvés ont une signification en dehors du contexte de la méthode de conception des filtres.

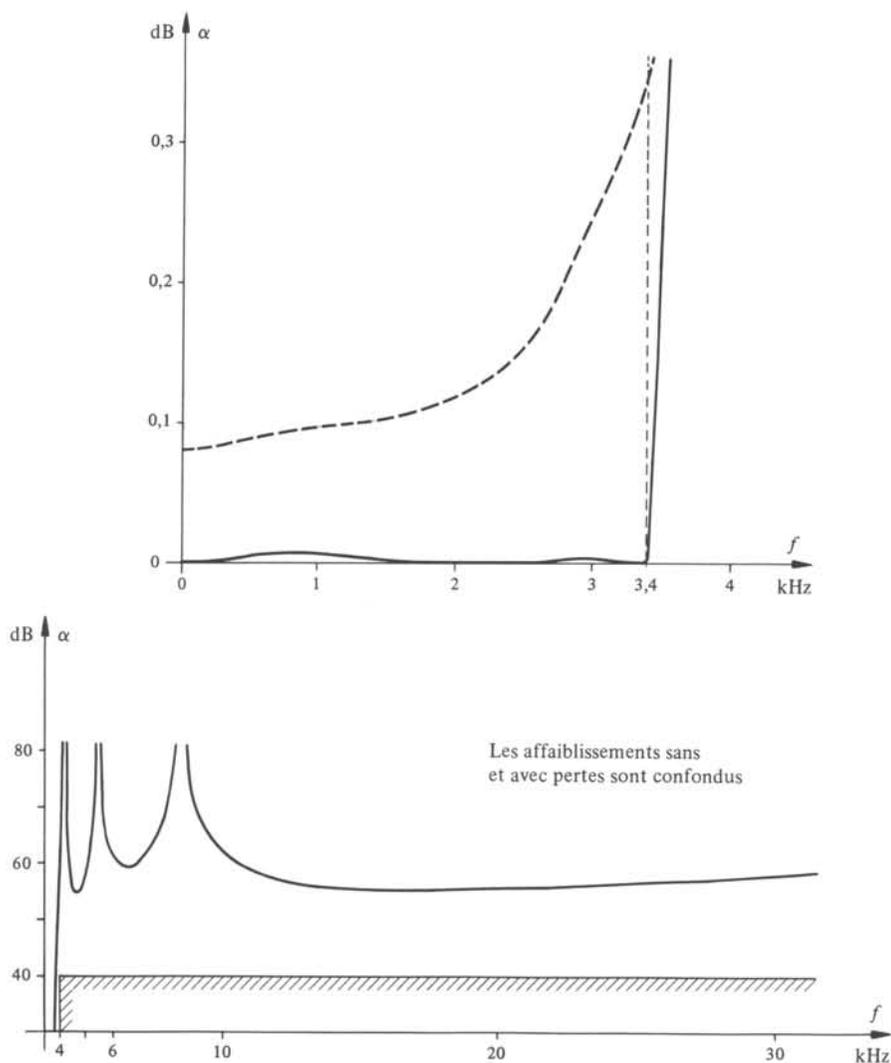


Fig. 3.15

### 3.4.2 Expression des paramètres-image en fonction des réactances

Pour un biporte non dissipatif, les immittances non terminées sont des réactances. Posons  $Z_{ii} = jX_{ii}$  et  $Y_{ii} = jB_{ii}$ , le long de l'axe imaginaire. Les formules (3.3), (3.4) et (3.13) deviennent

$$W_1 = \sqrt{X_{11}/B_{11}} \quad (3.66)$$

$$W_2 = \sqrt{X_{22}/B_{22}} \quad (3.67)$$

$$\coth \gamma = \sqrt{-X_{11}B_{11}} = \sqrt{-X_{22}B_{22}} \quad (3.68)$$

Dans le cas particulier d'un treillis,  $Z_1$  et  $Z_2$  sont aussi des réactances de valeurs

respectives  $jX_1$  et  $jX_2$ . Les formules (3.17) et (3.20) donnent

$$W_1 = W_2 = \sqrt{-X_1/X_2} \quad (3.69)$$

$$\tanh(\gamma/2) = \sqrt{X_1/X_2} \quad \text{ou} \quad \sqrt{X_2/X_1} \quad (3.70)$$

### 3.4.3 Origine des pulsations de coupure

On constate par la formule (3.68) que les produits  $X_{11}B_{11}$  et  $X_{22}B_{22}$  sont égaux et changent donc de signes aux mêmes pulsations. Il en est de même pour les rapports  $X_{11}/B_{11}$  et  $X_{22}/B_{22}$ . Ceci explique pourquoi les terminaisons-image et le comportement-image changent aux mêmes pulsations d'une valeur réelle à une valeur imaginaire et inversement.

Dans les bandes passantes,  $X_{ii}$  et  $B_{ii}$  sont de même signe, les  $W_i$  sont réels et  $\coth \gamma$  est purement imaginaire, d'où  $\gamma = j\beta$ . Dans les bandes coupées,  $X_{ii}$  et  $B_{ii}$  sont de signe opposé, les  $W_i$  sont imaginaires et  $\gamma$  réel. Les pulsations de coupure sont les valeurs de  $\omega$  pour lesquelles, à chaque accès, une seule des immittances change de signe. Pour des cellules de degré élevé, il existe plusieurs pulsations où  $X_{ii}$  et  $B_{ii}$  changent simultanément de signe en sens opposé : ce ne sont pas des pulsations de coupure.

Une interprétation analogue peut être donnée aux formules (3.69) et (3.70).

### 3.4.4 Origine des pôles d'affaiblissement

Il existe deux sortes de pôles d'affaiblissement effectif.

Si  $X_{11}B_{11} = -1$ ,  $\coth \gamma = 1$  et  $\delta = \infty$ . Il s'agit d'un pôle d'affaiblissement-image. Par suite de la formule de décomposition de Zobel, c'est aussi un pôle d'affaiblissement effectif.

Si, à une pulsation, on a simultanément  $X_{ii} = 0$  et  $B_{ii} = \infty$  ou le contraire,  $W_i = 0$  ou  $W_i = \infty$ ;  $\coth \gamma$  prend une valeur finie dépendant des résidus, qui n'est pas nécessairement égale à l'unité. Par (3.60), l'affaiblissement de désadaptation est infini et il y a, par (3.57), un pôle d'affaiblissement effectif. Il s'agit d'un pôle de réflexion. Par définition, les pôles de réflexion sont relatifs à un accès déterminé. Si en plus  $\coth \gamma = 1$ , il y a *confluence* entre un pôle de réflexion et un pôle d'affaiblissement-image.

### 3.4.5 Exercice

Sur l'exemple de la cellule en  $m$ -dérivé, établir à quelles pulsations sont situés les deux types de zéros et de pôles d'affaiblissement effectif.

### 3.4.6 Expression des paramètres-image en fonction des polynômes $f$ , $g$ et $h$

Au paragraphe 2.3.21, les immittances non terminées sont exprimées en fonction des polynômes  $f$ ,  $g$  et  $h$ . Dès lors, les formules (3.3), (3.4) et (3.13) donnent

$$w_1^2 = \frac{(g_p + h_p)(g_i + h_i)}{(g_p - h_p)(g_i - h_i)} \quad (3.71)$$

quelle que soit la parité de  $f$ . On a, pour  $f$  pair ou impair, respectivement

$$w_2^2 = \frac{(g_p - h_p)(g_i + h_i)}{(g_p + h_p)(g_i - h_i)} \quad (3.72)$$

ou l'inverse. De même, pour  $f$  pair,

$$\coth^2 \gamma = \frac{g_p^2 - h_p^2}{g_i^2 - h_i^2} \quad (3.73)$$

ou l'inverse pour  $f$  impair.

### 3.4.7 Discussion des facteurs

Comme  $(g \pm h)$  et  $(g \pm h_*)$  sont des polynômes hurwitziens, les parties paires et impaires, le long de l'axe imaginaire, sont des produits de facteurs  $(\omega^2 - \omega_i^2)$ . Ceux-ci sont de trois types :

- un facteur  $(\omega^2 - \omega_a^2)$ , présent à la fois dans le numérateur (le dénominateur) de  $X_{ii}$  et le dénominateur (le numérateur) de  $B_{ii}$ , disparaît dans l'expression de  $\coth \gamma$ , tout en subsistant au carré dans celle de  $W_i^2$ . C'est donc un facteur rationnel de  $W_i$ . Ce facteur produit un pôle de réflexion. Il divise nécessairement un des polynômes  $(g \pm h)$  et  $(g \pm h_*)$ , ce qui coïncide avec la propriété 2.3.28.
- un facteur  $(\omega^2 - \omega_b^2)$ , présent à la fois dans les numérateurs (les dénominateurs) de  $X_{ii}$  et de  $B_{ii}$ , disparaît dans l'expression de  $W_i$  et apparaît rationnellement dans l'expression de  $\coth \gamma$ . Il correspond à une pulsation d'indifférence.
- un facteur  $(\omega^2 - \omega_c^2)$ , qui ne se simplifie pas dans l'expression d'un paramètre-image, apparaît simultanément sous forme irrationnelle dans les expressions de  $W_i$  et  $\coth \gamma$ . C'est une pulsation de coupure.

Les pôles d'affaiblissement-image et les pulsations d'adaptation parfaite ne correspondent pas à des pôles ou à des zéros des immittances non terminées, et ne font donc pas partie de ces pulsations  $\omega_i$ .

Un biporte non dissipatif, conçu selon les méthodes des chapitres 4 à 6, peut aussi être analysé par les formules (3.71) à (3.73). Il apparaît souvent beaucoup de facteurs du type  $(\omega^2 - \omega_c^2)$  et donc un grand nombre de pulsations de coupure *au sens image*. Par contre, un filtre conçu selon la méthode des paramètres-image n'a qu'une ou deux pulsations de coupure, selon qu'il s'agit d'un passe-bas ou d'un passe-bande. Ceci montre une fois de plus que la conception d'une chaîne-image, où les pulsations de coupure de toutes les cellules sont identiques, constitue un sacrifice d'un certain nombre de degrés de liberté.

## 3.5 CELLULES DE FILTRE PASSE-BANDE

### 3.5.1 Cellules symétriques en fréquence

La méthode du paragraphe 1.2.6 permet d'engendrer des cellules passe-bande à partir des cellules passe-bas de la section 3.2.

La cellule à  $k$ -constant engendre la cellule de la figure 3.16, qui comporte deux pôles d'affaiblissement effectif, tant à l'origine qu'à l'infini.

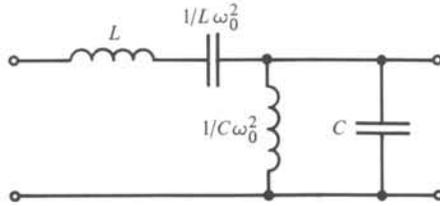


Fig. 3.16

La cellule en  $m$ -dérivé engendre la cellule de la figure 3.17. Le bras série peut être transformé par synthèse de Foster, de façon à disposer de deux circuits antirésonants, que l'on peut individuellement accorder afin de fixer exactement les pôles finis d'affaiblissement. Il y a en plus un pôle d'affaiblissement effectif, tant à l'origine qu'à l'infini.

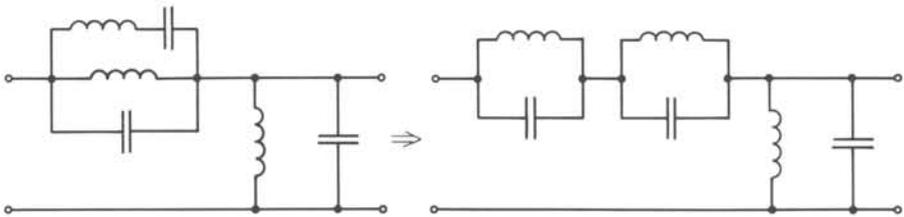


Fig. 3.17

Ces cellules souffrent des limitations expliquées au paragraphe 1.2.1.1. De plus, les bobines sont assez mal utilisées, car on crée un nombre élevé de pôles à l'infini ou à l'origine, qui ne sont pas des positions optimales pour rencontrer les contraintes usuelles de discrimination.

### 3.5.2 Cellules du premier type

On décrira au paragraphe suivant les cellules utilisées en pratique pour construire un filtre passe-bande économique. Ces cellules souffrent néanmoins d'une limitation gênante : leurs impédances-image sont loin d'être constantes dans la bande passante. Le but des cellules décrites dans le présent paragraphe est d'éliminer cette limitation.

Considérons les deux cellules de la figure 3.18 liées par une transformation de dualité suivie d'une transformation passe-bas en passe-haut.

Les paramètres-image de la cellule de gauche sont :

$$\frac{W_1}{W_0} = \frac{\omega_{+c}}{\omega_{+c}^2 - \omega_{-c}^2} \sqrt{(\omega_{+c}^2 - \omega^2)(\omega^2 - \omega_{-c}^2)} \quad (3.74)$$

$$\frac{W_2}{W_0} = \frac{\omega_{+c}}{\omega} \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_{-c}^2}{\omega_{+c}^2 - \omega^2}} \quad (3.75)$$

$$\coth \gamma = \sqrt{\frac{\omega_{+c}^2 - \omega^2}{\omega_{-c}^2 - \omega^2}} \quad (3.76)$$

avec  $\omega_{+c}^2 = 1/LC + 1/LC_1$ ,  $\omega_{-c}^2 = 1/LC$ ,  $\omega_0^2 = \omega_{+c}\omega_{-c}$  et  $W_0 = W_2(\omega_0) = 1/C\omega_{+c}$ .

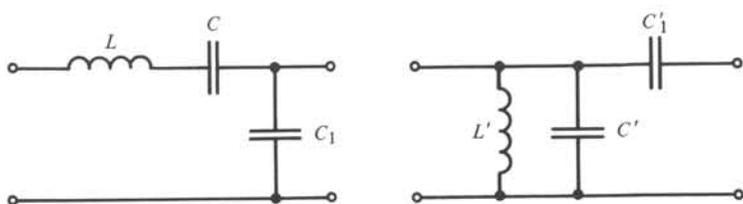


Fig. 3.18

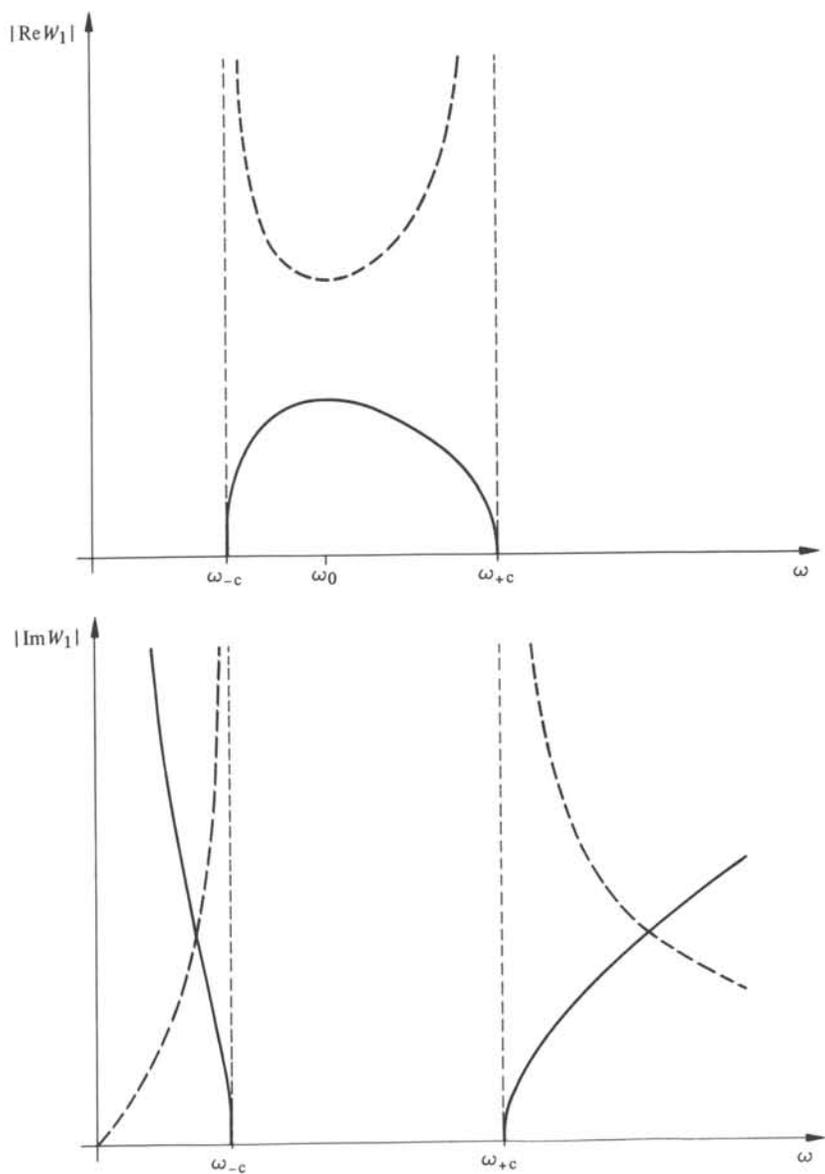


Fig. 3.19

Les paramètres-image de la cellule de droite s'obtiennent à partir des mêmes formules par quelques modifications. On a  $\omega_{+c}^2 = 1/L'C'$ ,  $\omega_{-c}^2 = 1/L'(C' + C_1)$ ,  $\omega_0^2 = \omega_{+c}\omega_{-c}$  et  $W_0 = W_2(\omega_0) = \sqrt{(C'_1/C') + 1}/\omega_{+c}C'_1$ . La formule (3.75) donne toujours  $W_2/W_0$ . La formule (3.74) donne  $W_1/W_0$ , en inversant le second membre. La formule (3.76) donne  $\coth \gamma$  en y remplaçant  $\omega$  par  $\omega_0/\omega$ .

L'allure des impédances  $W_1$ , données par (3.74) et son inverse, est représentée à la figure 3.19. Si l'on place des cellules du type étudié aux deux extrémités de la chaîne-image, on pourra réaliser deux fréquences d'adaptation si la résistance de terminaison est, selon le cas, inférieure ou supérieure à  $W_1(\omega_0)$ .

Par (3.76), ces cellules présentent respectivement un pôle d'affaiblissement-image en  $\omega = \infty$  et  $\omega = 0$ . La figure 3.20 représente les courbes de  $\delta$  et  $\beta$ .

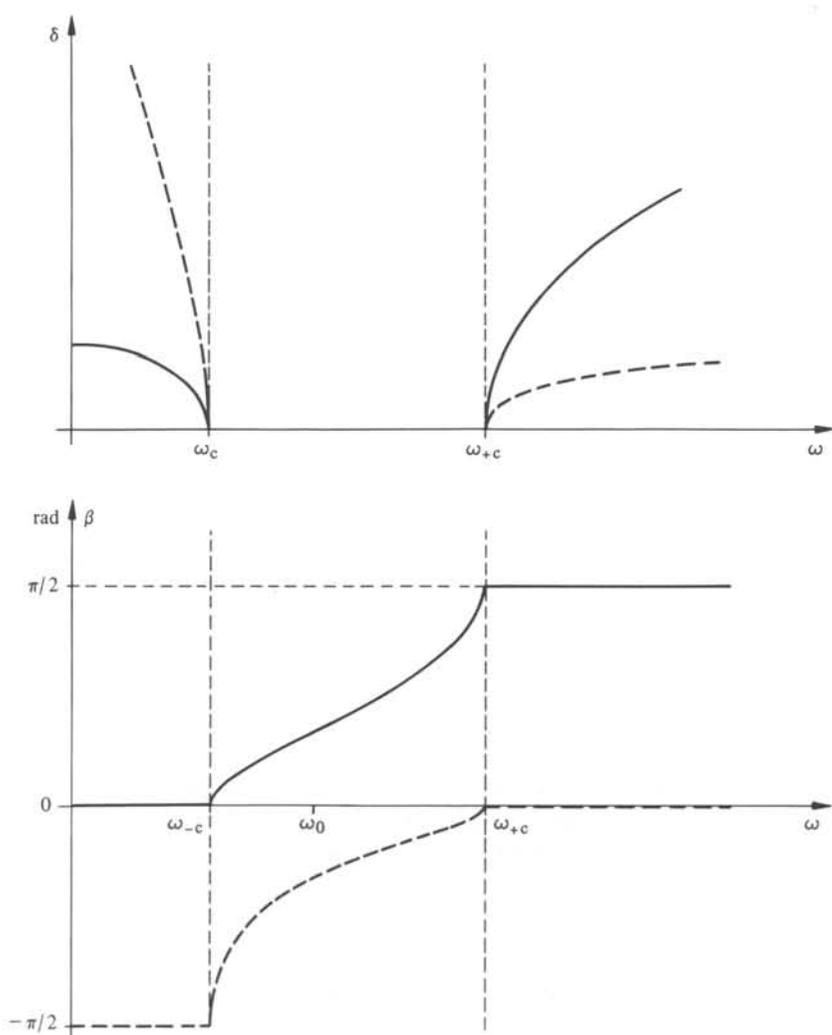


Fig. 3.20

### 3.5.3 Cellules à pôle unique du second type

Considérons le treillis de la figure 3.21, où nous supposons d'abord  $C'_1 > C_2$ . Les impédances  $Z_1$  et  $Z_2$  valent respectivement

$$Z_1 = 1/C_2 p \quad (3.77)$$

$$Z_2 = \frac{p^2 + \omega_{-c}^2}{C'_1 p (p^2 + \omega_{+c}^2)} \quad (3.78)$$

où les pulsations  $\omega_{-c}$  et  $\omega_{+c}$  sont données respectivement par

$$\omega_{-c}^2 = 1/L'C' \quad (3.79)$$

$$\omega_{+c}^2 = (C' + C'_1)/C'C'_1L' \quad (3.80)$$

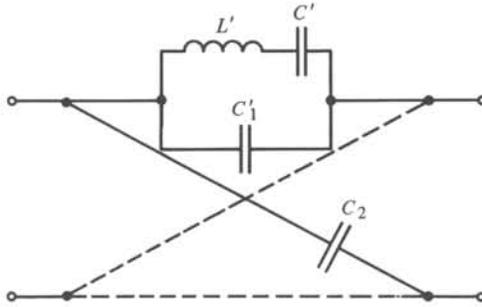


Fig. 3.21

La formule (3.17) donne

$$W_1 = W_2 = \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{C_2 C'_1}} \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_{-c}^2}{\omega_{+c}^2 - \omega^2}} \quad (3.81)$$

et l'allure de cette fonction de  $\omega$  est donnée à la figure 3.22. La forme de cette courbe est différente de celle de la figure 3.19. Il n'est donc pas possible de réaliser ici deux fréquences d'adaptation parfaite. Par contre (3.81) et (3.75) coïncident et l'on peut réaliser une chaîne-image composée de cellules du second type encadrées par deux cellules du premier type. Par (3.20), on trouve

$$\tanh \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{C'_1}{C_2} \frac{\omega_{+c}^2 - \omega^2}{\omega_{-c}^2 - \omega^2}} \quad (3.82)$$

Cette formule est analogue à (3.76), si l'on désigne par  $\gamma$  le comportement de deux cellules du type de la figure 3.18, accolées de façon à constituer une cellule symétrique.

Le pôle d'affaiblissement-image  $\omega_\infty$  est déterminé par  $\tanh(\gamma/2) = 1$  et, par (3.82), il vient

$$C'_1(\omega_{+c}^2 - \omega_\infty^2) = C_2(\omega_{-c}^2 - \omega_\infty^2) \quad (3.83)$$

On a supposé  $C'_1 > C_2$ . On a donc  $|\omega_{+c}^2 - \omega_\infty^2| < |\omega_{-c}^2 - \omega_\infty^2|$  et  $\omega_\infty$  est situé dans la bande coupée supérieure.

Si l'on choisit l'hypothèse  $C'_1 < C_2$ , on a une cellule dont le pôle d'affaiblissement-image est situé dans la bande coupée inférieure.

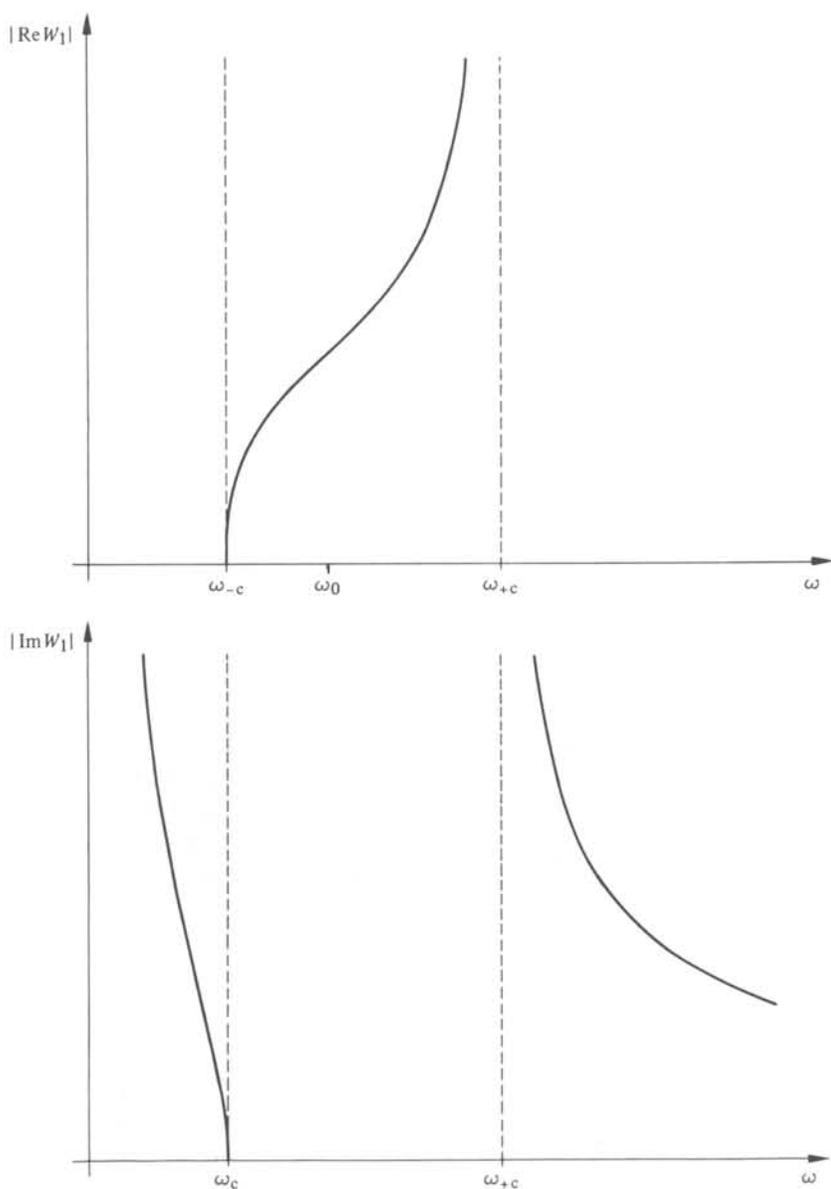


Fig. 3.22

### 3.5.4 Transformation des treillis en échelles

Dans l'hypothèse où  $C'_1 > C_2$ , on peut établir l'équivalence de la figure 3.23. Dès lors, la capacité  $C_2$ , qui constitue les branches croisées du treillis, se retrouve en parallèle dans les branches droites. Par l'équivalence de Mason du paragraphe IV.6.2.10, on peut l'extraire sous forme de deux bras parallèles aux deux accès. Les deux branches droites résiduelles, composées des capacités  $2C$  et  $2C_1$  et de l'inductance  $L/2$ , peuvent

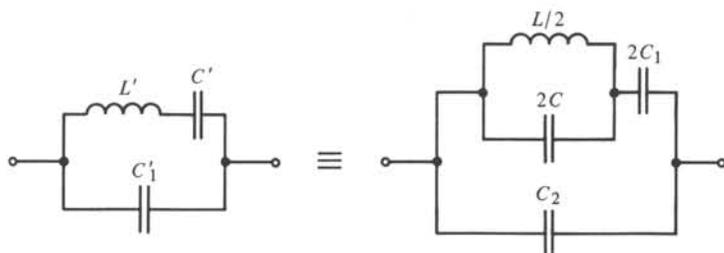


Fig. 3.23

être remplacées par une seule branche série d'impédance double. Ceci ne change rien à l'impédance propre de la maille interne, ni à ses impédances de couplage avec les mailles externes. Les *quadripôles* 3.21 et 3.24 ne sont pas équivalents, mais les *biportes* le sont.

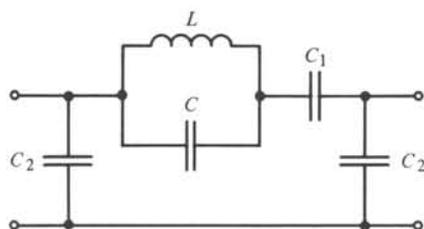


Fig. 3.24

De façon identique, si  $C_1' < C_2$ , on remplace le treillis de la figure 3.21 par le même treillis, où les branches droites et croisées sont interverties. Ce changement, qui correspond à un croisement des bornes à un accès, n'affecte pas le module de  $s_{21}$ . On utilise l'équivalence de la figure 3.25 pour modifier les branches croisées. On extrait, par l'équivalence de Mason en série, deux capacités  $C_2$ . Les deux branches croisées résiduelles fournissent une seule branche parallèle et l'on obtient la cellule de la figure 3.26.

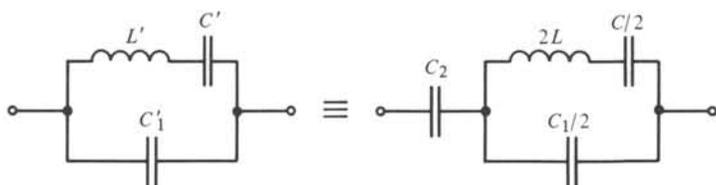


Fig. 3.25

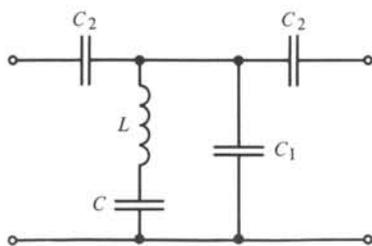


Fig. 3.26

Ces deux cellules en échelle ont mêmes impédances-image. On peut donc les mélanger dans une chaîne-image. L'une fournit les pôles d'affaiblissement au-dessus de la bande passante, l'autre en dessous. Chaque cellule ne contient qu'une seule inductance utilisée à créer le pôle d'affaiblissement fini.

Les impédances-image  $W_1$  et  $W_2$  restent inchangées par rapport à l'expression (3.75) si, pour la cellule 3.24, on pose  $W_0 = 1/\omega_{-c}(\sqrt{C_2(2C_1 + C_2)})^{-1}$ ,

$$\omega_{+c}^2 = (2C_1 + C_2)/L(2CC_1 + CC_2 + C_1C_2) \text{ et}$$

$$\omega_{-c}^2 = [L(C + C_1)]^{-1} \text{ et pour la cellule 3.26 } W_0 = \frac{1}{\omega_{+c}C_2} \sqrt{\frac{C_1 + 2C_2}{C_1}}$$

$$\omega_{+c}^2 = (C + C_1)(LCC_1)^{-1} \text{ et } \omega_{-c}^2 = (C + C_1 + 2C_2)[L(CC_1 + 2CC_2)]^{-1}.$$

### 3.5.5 Définitions: filtres zig-zag

On appelle *filtre zig-zag* une chaîne-image de cellules qui sont alternativement des types 3.24 et 3.26. Bien entendu, on simplifie la structure résultante par l'équivalence de la figure 3.27, qui fait intervenir la transformation de Norton afin de remplacer quatre capacités par deux.

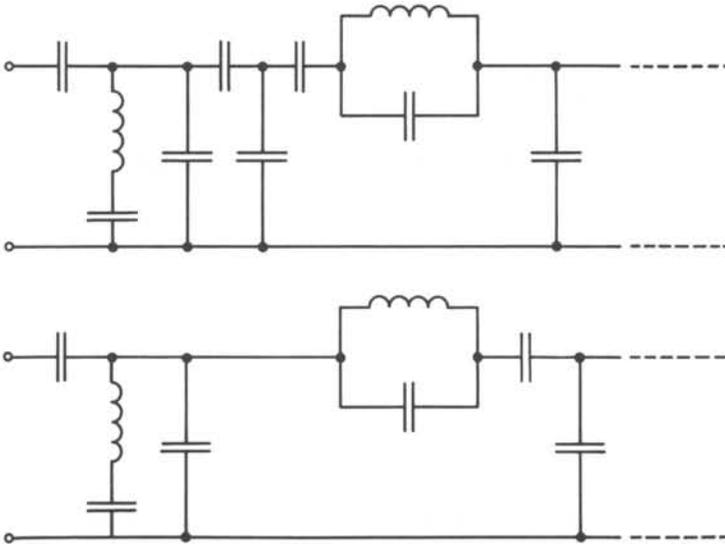


Fig. 3.27

Ce filtre est aussi connu sous le nom de *filtre économique* parce que les inductances sont uniquement utilisées pour créer des pôles finis qui peuvent être librement disposés pour couvrir les exigences de discrimination de façon optimale. Cette appellation est douteuse pour une raison qui apparaîtra au paragraphe 6.3.3, où le filtre zig-zag sera identifié à un *filtre paramétrique*.

En plus des pôles d'affaiblissement créés par les circuits résonants, le filtre zig-zag possède un seul pôle d'affaiblissement effectif à l'infini et à l'origine, créés respectivement par l'ensemble des capacités parallèle ou série.

Le filtre zig-zag placé entre terminaisons résistives présentera une seule pulsation d'adaptation. On peut améliorer cette situation en ajoutant à chaque extrémité de la chaîne-image une des cellules de la figure 3.18. Si l'on met la même cellule aux deux extrémités, on obtient un filtre symétrique: selon le type de cellule utilisée, on aura soit trois pôles d'affaiblissement effectif à l'infini et un seul à l'origine (cellule de gauche à la figure 3.18), soit l'inverse pour la cellule de droite. Cette dissymétrie du nombre de pôles peut être utilisée avantageusement si les exigences d'affaiblissement sont dissymétriques.

Si l'on met deux cellules différentes, on engendre un filtre antimétrique qui possède deux pôles d'affaiblissement à l'origine et à l'infini.

### 3.5.6 Formules des éléments pour le filtre zig-zag

Les trois paramètres  $\omega_{+c}$ ,  $\omega_{-c}$  et  $W_0$  doivent être identiques pour toutes les cellules 3.18, 3.24 et 3.26 qui constituent une chaîne-image zig-zag. Un quatrième paramètre  $\omega_\infty$  fixe la position du pôle d'affaiblissement de chaque cellule 3.24 ou 3.26.

Notons que le paramètre  $W_0$  peut être choisi arbitrairement; il ne s'agit que d'une normalisation en impédance de la chaîne-image qui n'affecte en rien  $s_{21}$ .

Les quatre paramètres  $\omega_{+c}$ ,  $\omega_{-c}$ ,  $W_0$  et  $\omega_\infty$  déterminent entièrement les éléments  $L$ ,  $C$ ,  $C_1$  et  $C_2$  des cellules 3.24 et 3.26. Définissons le paramètre

$$m = \sqrt{\frac{\omega_{-c}(\omega_\infty^2 - \omega_{+c}^2)}{\omega_{+c}(\omega_\infty^2 - \omega_{-c}^2)}} \quad (3.84)$$

A l'aide des paramètres définis au paragraphe 3.5.4, pour la cellule 3.24, on a :

$$C_2 = m/W_0\omega_0 \quad (3.85)$$

$$C = \frac{(\omega_{+c} - m^2\omega_{-c})(\omega_{-c} - m^2\omega_{+c})}{2W_0m\omega_0(\omega_{+c}^2 - \omega_{-c}^2)} \quad (3.86)$$

$$C_1 = \frac{\omega_{+c} - m^2\omega_{-c}}{2W_0m\omega_{-c}\omega_0} \quad (3.87)$$

$$L = 1/C\omega_\infty^2 \quad (3.88)$$

Pour la cellule 3.26, on a  $C_2$  et  $L$  donnés par (3.85) et (3.88). Les deux autres éléments sont donnés par :

$$C = \frac{2m^3(\omega_{+c}^2 - \omega_{-c}^2)}{W_0\omega_0(m^2\omega_{+c} - \omega_{-c})(m^2\omega_{-c} - \omega_{+c})} \quad (3.89)$$

$$C_1 = \frac{2m\omega_{-c}}{W_0\omega_0(m^2\omega_{+c} - \omega_{-c})} \quad (3.90)$$

Les éléments des cellules 3.18 sont donnés par

$$C_1 = \frac{1}{W_0\omega_{+c}} \quad (3.91)$$

$$L = \frac{W_0 \omega_{+c}}{\omega_{+c}^2 - \omega_{-c}^2} \quad (3.92)$$

$$C = \frac{\omega_{+c}^2 - \omega_{-c}^2}{W_0 \omega_0^2 \omega_{-c}} \quad (3.93)$$

$$C'_1 = \frac{1}{W_0 \omega_{-c}} \quad (3.94)$$

$$C' = \frac{\omega_{-c}}{W_0 (\omega_{+c}^2 - \omega_{-c}^2)} \quad (3.95)$$

$$L' = \frac{W_0 (\omega_{+c}^2 - \omega_{-c}^2)}{\omega_0^2 \omega_{+c}} \quad (3.96)$$

### 3.5.7 Gabarits d'affaiblissement

Introduisons la transformation de fréquence

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\omega_{+c} (\omega_{-c}^2 - \omega^2)}{\omega_{-c} (\omega_{+c}^2 - \omega^2)} \right] \quad (3.97)$$

Les points  $\omega_{+c}$  et  $\omega_{-c}$  sont respectivement transformés en  $\eta = +\infty$  et  $\eta = -\infty$ . Les points  $\omega = \infty$  et  $\omega = 0$  deviennent respectivement  $\eta_0 = 1/2 \ln(\omega_{+c}/\omega_{-c}) > 0$  et  $-\eta_0$ . Les bandes coupées sont transposées sur l'axe des  $\eta$  selon la figure 3.28. L'intervalle  $[-\eta_0, \eta_0]$  ne correspond pas à un intervalle de l'axe des fréquences.

Pour les cellules 3.24 et 3.26, issues du treillis symétrique de la figure 3.21, le pôle d'affaiblissement situé en  $\omega = \omega_\infty$  est transformé en

$$\eta_\infty = -\ln m \quad (3.98)$$

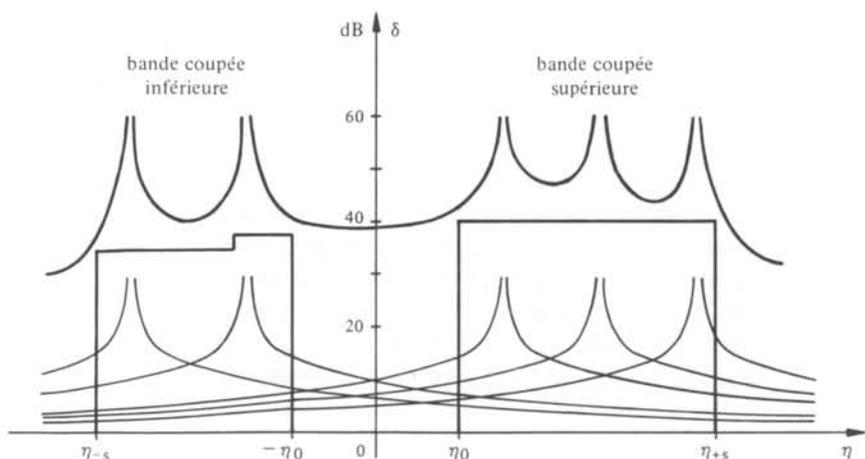


Fig. 3.28

Par (3.82) et (3.83), on a :

$$\tanh \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\omega_{\infty}^2 - \omega_{-c}^2}{\omega_{\infty}^2 - \omega_{+c}^2} \frac{\omega_{+c}^2 - \omega^2}{\omega_{-c}^2 - \omega^2}} \quad (3.99)$$

et à l'aide de (3.84), (3.97) et (3.98), on obtient :

$$\tanh \frac{\gamma}{2} = e^{(\eta_{\infty} - \eta)} \quad (3.100)$$

et donc

$$\gamma = \ln \left| \frac{1 + e^{(\eta - \eta_{\infty})}}{e^{(\eta - \eta_{\infty})} - 1} \right| \quad (3.101)$$

Comparée à (3.50), l'expression (3.101) montre que l'affaiblissement-image des cellules 3.24 et 3.26 peut être obtenu au moyen d'une double courbe universelle représentée à la figure 3.10.

Les cellules 3.18 ont un affaiblissement-image qui est la moitié de celui du treillis symétrique. Leur affaiblissement-image pourra être obtenu au moyen de la courbe 3.10, en plaçant le pôle d'affaiblissement respectivement en  $\eta = +\eta_0$  pour la première, et  $\eta = -\eta_0$  pour la deuxième, ce qui correspond à un pôle à l'infini et à l'origine.

### 3.5.8 Exemple

On choisit pour cet exemple de synthèse d'un filtre passe-bande les exigences du paragraphe 1.2.10.

Contrairement à l'exemple traité au paragraphe 3.3.10 pour le filtre passe-bas, il n'est pas besoin ici d'une méthode itérative. En effet, la courbe d'impédance-image (3.74) diffère de celle de la formule (3.36) par le fait qu'elle ne dépend pas d'un paramètre  $m$ , c'est-à-dire de la position d'un pôle d'affaiblissement-image. Dans le cas présent, comme dans celui du filtre passe-bas à cellules à  $k$ -constant, le choix des pulsations de coupure est indépendant du choix des pôles d'affaiblissement-image.

Compte tenu de l'affaiblissement effectif donné, soit par (3.64), soit par (3.65), dans la bande passante, il faut déterminer les pulsations de coupure  $\omega_{+c}$  et  $\omega_{-c}$  de façon que les exigences soient satisfaites dans la bande passante effective  $[\omega_-, \omega_+]$ . On s'arrange dans ce but pour que le maximum de l'enveloppe soit atteint simultanément à  $\omega_0 = \sqrt{\omega_+ \omega_-}$ , en  $\omega_+$  et  $\omega_-$ .

On transforme les exigences en bande coupée dans le plan de la variable  $\eta$  et on rencontre ces exigences de façon optimale par la méthode des gabarits. On tient compte des contributions apportées par les cellules de première espèce choisies à la fois pour réaliser l'adaptation et pour tenir compte de l'éventuelle symétrie ou dissymétrie des exigences. On tient compte du gain de désadaptation, soit en ajoutant 6 dB aux exigences, soit en utilisant la formule exacte (3.56).

Dans l'exemple traité, on choisit comme normalisation  $\omega_0 = 1$  et  $W_0 = 1$ .

On impose une limite à l'enveloppe de l'affaiblissement de  $\alpha = 0,18$  dB en  $\omega = \omega_0$  et  $\alpha = 0,15$  dB en  $\omega = \omega_- = 0,8827$  et  $\omega = \omega_+ = 1,133$ , afin de disposer d'une marge qui tienne compte des pertes. On détermine les pulsations de coupure image.  $\omega_{+c} = 1,184$  et  $\omega_{-c} = 0,8445$ , ainsi que la résistance de terminaison.

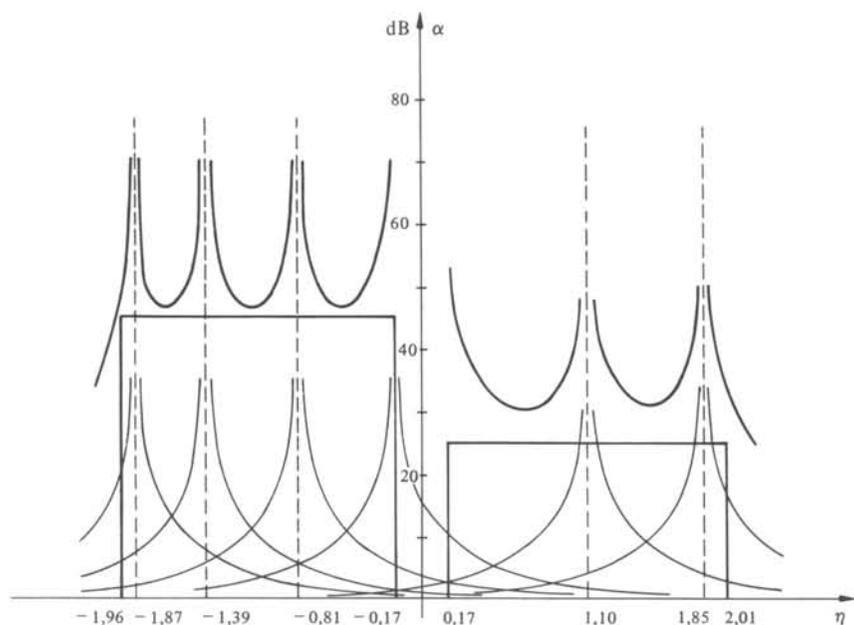


Fig. 3.29

Le résultat de l'approximation, exprimé dans le plan de la variable  $\eta$ , est donné à la figure 3.29, où l'on a disposé cinq gabarits doubles dans les bandes coupées et un en  $\eta = -\eta_0$ . La structure sera alors composée de deux cellules de type 3.24, trois de type 3.26 et d'une paire de type 3.18 pour les extrémités. En appliquant la transformation de Norton, on peut réduire le nombre de capacités; la structure finale réduite, avec les valeurs des éléments prévues pour un fonctionnement à  $\omega_0 = 2\pi \sqrt{12 \cdot 10^3 \cdot 15,4 \cdot 10^3}$  rad/s sur une résistance de source de  $600 \Omega$ , est représentée à la figure 3.30.

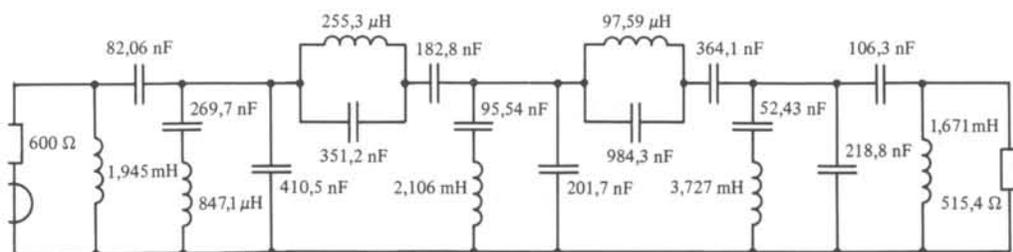


Fig. 3.30

On a représenté à la figure 3.31 une analyse de l'affaiblissement effectif de ce filtre, en fonction de la fréquence avec les valeurs nominales des éléments successivement considérés sans, puis avec pertes estimées avec un facteur de qualité de 5 000 à 15 kHz pour les condensateurs et de 800 à 15 kHz pour les bobines.

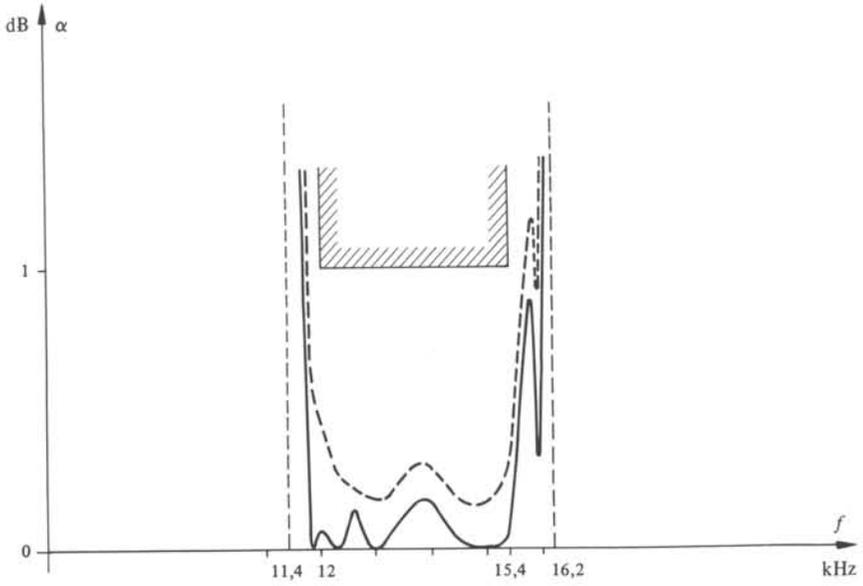
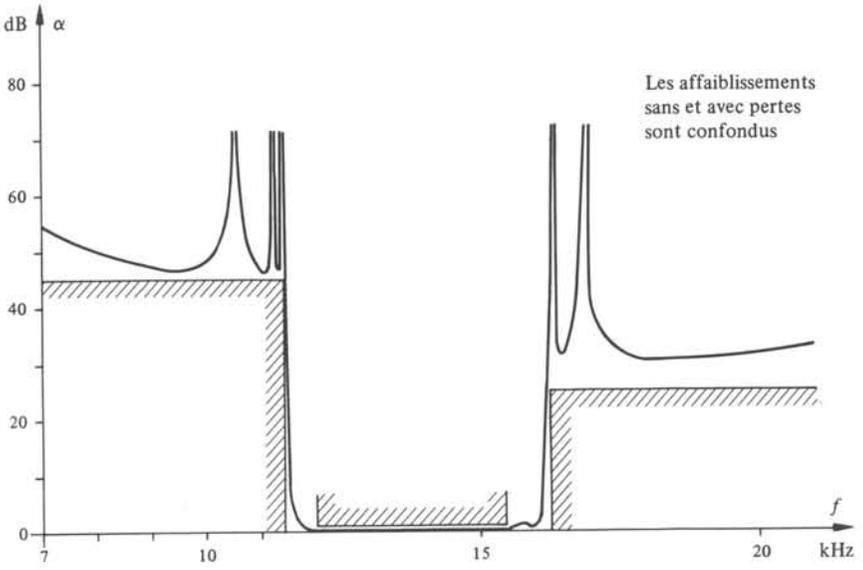


Fig. 3.31

## APPROXIMATIONS ANALYTIQUES

## 4.1. DÉTERMINATION DE LA TRANSMITTANCE

## 4.1.1 Introduction

Le problème, traité dans ce chapitre et le suivant, est placé, dans la conception d'un filtre, avant la synthèse dont il sera question au chapitre 6. Celle-ci suppose qu'une transmittance  $s_{21} = f(p) / g(p)$  est donnée, ou qu'une matrice de répartition est spécifiée par les polynômes  $f$ ,  $g$  et  $h$ .

Or, les exigences imposées sur un filtre, qu'il s'agisse de son affaiblissement, de son déphasage ou de sa réponse transitoire, ne sont pas directement transposables en une spécification de  $s_{21}$ . L'opération d'approximation a précisément pour but d'opérer ce lien.

Le thème de ce chapitre, en particulier des sections 4.2 à 4.4, est restreint au cas du filtre passe-bas. Il est clair que les transformations de fréquences des paragraphes 1.2.3 et 1.2.6 permettent de transposer ces résultats aux cas du passe-haut et du passe-bande.

## 4.1.2 Définitions

On parle d'une *approximation analytique* lorsque la transmittance a une expression calculable au moyen de formules simples; les polynômes  $f$ ,  $g$  ou  $h$  sont définis par leurs coefficients ou leurs racines, qui sont spécifiées par des formules explicites ou des relations de récurrence.

On parle d'une *approximation numérique* lorsque la transmittance résulte d'un algorithme relativement compliqué, pour lequel l'usage d'un ordinateur est pratiquement indispensable.

Ce chapitre 4 est consacré exclusivement à l'approximation analytique. Celle-ci doit être utilisée de préférence à une approximation numérique, dans trois cas :

- lorsque les exigences imposées au filtre sont tellement simples qu'une solution analytique est effectivement optimale;
- lorsque le degré du filtre est tellement faible qu'il n'y a pas grand-chose à gagner en utilisant des méthodes d'approximation numérique plus raffinées et plus coûteuses;
- lorsque l'on ne dispose pas d'un programme capable de calculer une approximation numérique.

### 4.1.3 Commentaire

C'est le lieu d'insister sur le soin et la réflexion qui doivent caractériser l'étape du calcul d'approximation. Le but de l'approximation est de rencontrer les exigences imposées au filtre au moyen de la transmittance la plus économique, c'est-à-dire, à quelques nuances près, celle de degré le plus faible. En principe, si l'on utilise la méthode d'approximation la plus adéquate, suivie d'une synthèse appropriée, la conception d'un filtre aboutit à une solution optimale, en ce sens qu'il est impossible de rencontrer les exigences avec moins de composants, compte tenu de la qualité et de la précision de ceux-ci.

Maintes études de filtres, théoriques ou pratiques, sont viciées par une étape d'approximation bâclée. Il y a autant à gagner à choisir la meilleure transmittance qu'à la synthétiser correctement. A ce titre, les approximations analytiques ne doivent pas être utilisées en dehors des cas mentionnés au paragraphe précédent. Elles sont certes plus satisfaisantes pour l'esprit; elles ne constituent pas pour autant une panacée.

### 4.1.4 Spécification partielle

Les exigences imposées à un filtre ne portent jamais que sur certaines caractéristiques du biporte. Le plus souvent, on impose seulement des exigences sur l'affaiblissement de la transmittance, parfois aussi sur son déphasage, plus rarement sur la réponse indicielle ou impulsionnelle. Cette spécification partielle est intéressante parce qu'il faut, en plus des exigences, tenir compte des propriétés de  $s_{21}(p)$ , telles qu'elles ont été énoncées à la section 2.3 et au paragraphe 1.1.9. Une spécification complète d'un biporte est plus gênante qu'utile : par suite des relations de Bayard-Bode (§ IV.7.3.32), appliquées à  $(-\ln s_{21})$ , l'affaiblissement et le déphasage, dont tous les zéros de transmission sont sur l'axe imaginaire, ne peuvent pas être choisis indépendamment, car cela risque d'engendrer un système non causal; de même, les coefficients de transmission et de réflexion sont strictement liés par (2.67), et la spécification de l'un détermine sans ambiguïté l'autre.

Le but de cette section est de montrer comment on peut déterminer  $s_{21}(p)$ , soit à partir du module de  $s_{21}(j\omega)$ , soit à partir de son argument.

### 4.1.5 Détermination d'une transmittance à partir de son module

Soit une fonction  $F(\omega^2)$  donnée, qui spécifie le carré du module de  $s_{21}(j\omega)$ . On a donc

$$F(\omega^2) = |s_{21}(j\omega)|^2 = s_{21}(j\omega) s_{21}(-j\omega) \quad (4.1)$$

Cette fonction doit être manifestement le rapport de deux polynômes réels pairs en  $\omega$ ; le degré du numérateur doit être inférieur ou égal à celui du dénominateur; enfin, la fonction a les bornes

$$0 \leq F(\omega^2) \leq 1 \quad (4.2)$$

où la borne inférieure est atteinte aux pôles d'affaiblissement, et la borne supérieure aux zéros d'affaiblissement.

Si ces conditions sont vérifiées, il est toujours possible de trouver au moins une fonction  $s_{21}(p)$  correspondant à un biporte réciproque et vérifiant (4.1).

En remplaçant  $\omega^2$  par  $-p^2$  dans (4.1), on trouve

$$F(-p^2) = s_{21}(p) s_{21}(-p) = ff_* / gg_* \quad (4.3)$$

où  $f$  et  $g$  ont la même signification qu'à la section 2.3. Rappelons que  $f$  et  $g$  peuvent avoir des facteurs communs. Le problème consiste simplement à répartir les zéros (pôles) de  $F(-p^2)$  entre  $f$  et  $f_*$  ( $g$  et  $g_*$ ), et éventuellement à introduire des facteurs communs à  $f$  et  $g$ . Comme  $F(-p^2)$  est une fraction paire, ses zéros et pôles jouissent de la symétrie quadrantale.

La répartition des pôles ne pose aucun problème. Par suite de (4.2), il n'y en a point sur l'axe imaginaire. Il suffit, dès lors, d'attribuer à  $g(p)$  tous les pôles de  $F(-p^2)$  situés dans le demi-plan de gauche.

La répartition des zéros de  $F(-p^2)$  est également univoque dans la mesure où ils sont tous situés sur l'axe imaginaire. Par suite de la première inégalité (4.2), ces zéros sont en nombres pairs. On les attribue par moitié à  $f$  et à  $f_*$ . Ce cas correspond à une caractéristique de filtrage optimale au point de vue de l'affaiblissement, c'est-à-dire que tous les zéros de transmission sont des pôles d'affaiblissement. Comme  $f$  est spontanément pair ou impair, il s'agit bien du numérateur de la transmittance d'un biporte réciproque.

Dans les cas très rares où l'on essaierait d'optimiser simultanément l'affaiblissement et le déphasage,  $F(-p^2)$  peut avoir des zéros en dehors de l'axe imaginaire, groupés par quadruplets. Comme ces zéros sont symétriques par rapport à cet axe, à chaque racine ou paire de racines attribuée à  $f(p)$ , correspond automatiquement la racine ou la paire de racines attribuée à  $f(-p)$ . Si l'on n'exige pas que le biporte soit réciproque, il n'y a aucune propriété de  $f$  qui exige d'attribuer à  $f$  les racines du demi-plan de gauche plutôt que celle du demi-plan de droite. Il n'y a donc pas de répartition unique. Si, par contre, on exige que  $s_{21}$  corresponde à un biporte réciproque, il faut obtenir un polynôme  $f$  pair ou impair. Considérons le cas d'un quadruplet de multiplicité simple. On attribue à  $f$  le facteur  $P(p)$  groupant les deux racines du demi-plan de droite. Dès lors, pour rendre  $f$  pair ou impair, il faut introduire simultanément le facteur  $P_*$  dans  $f$  et  $g$ . Dans le cas de quadruplets de multiplicité supérieure, on a de nouveau le choix entre plusieurs solutions.

#### 4.1.6 Définition

Une fonction de réponse est à *déphasage minimal* si tous les zéros de transmission sont situés, soit sur l'axe imaginaire, soit dans le demi-plan de gauche.

Cette dénomination correspond au fait que la contribution au déphasage d'une paire de zéros ( $a \pm jb$ ) située dans le demi-plan de droite vaut  $\arctan [2a\omega/(a^2 + b^2 - \omega^2)]$ , tandis que la paire de zéros, symétriques par rapport à l'axe imaginaire, apporte la même contribution changée de signe. Pour  $0 < \omega < \sqrt{a^2 + b^2}$ , la première est positive et la seconde négative, avec  $\arctan 0 = 0$ .

#### 4.1.7 Corollaire

La spécification du module détermine sans ambiguïté  $s_{21}(p)$ , si tous les zéros de transmission sont sur l'axe imaginaire, ou si la transmittance est à déphasage mi-

nimal. Dans ces deux cas, on constate bien que la spécification de l'affaiblissement détermine entièrement le déphasage, ainsi que le prédit la relation de Bayard-Bode.

#### 4.1.8 Décomposition de la fonction déphasage

Sur l'axe imaginaire, on a

$$s_{21}(j\omega) = A(\omega) e^{-j\varphi(\omega)} = f(j\omega)/g(j\omega) \quad (4.4)$$

Le retard de groupe s'écrit

$$\tau(\omega) = \frac{d\varphi}{d\omega} \quad (4.5)$$

Si l'on considère le cas général, où le biporte n'est pas nécessairement réciproque, on peut décomposer  $f$  de façon unique en le produit de trois polynômes

$$f = f_a f_{b*} f_q \quad (4.6)$$

où  $f_q$  contient toutes les racines jouissant de la symétrie quadrantale, où  $f_a$  contient les autres racines du demi-plan de gauche, et où  $f_{b*}$  contient les autres racines du demi-plan de droite. On a donc

$$f_q = \pm f_{q*} \quad (4.7)$$

Avec cette décomposition, on peut écrire par (4.4)

$$\exp[-j2\varphi(\omega)] = \frac{s_{21}(j\omega)}{s_{21}(-j\omega)} = \frac{f(j\omega)g(-j\omega)}{f(-j\omega)g(j\omega)} \quad (4.8)$$

qui devient, en remplaçant  $j\omega$  par  $p$ ,

$$\frac{fg_*}{f_*g} = \pm \frac{f_a}{f_{a*}} \frac{f_{b*}g_*}{f_b g} \quad (4.9)$$

La simplification par le facteur  $f_q$  n'est strictement valable que si ce facteur est différent de zéro. Aux racines de  $f_q$  situées sur l'axe imaginaire, le déphasage est affecté d'une discontinuité, dont la signification sera discutée au paragraphe 4.1.17.

Les deux fractions composant (4.9) ont un module égal à l'unité le long de l'axe imaginaire. Sur l'axe imaginaire, on a

$$f_{b*} g_* / f_b g = \exp[-2j\varphi_1(\omega)] \quad (4.10)$$

$$f_{a*} / f_a = \exp[-2j\varphi_2(\omega)] \quad (4.11)$$

qui sont des fonctions de réponse de passe-tout. On trouve, par (4.8) et (4.9),

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega) \quad (4.12)$$

si le signe de (4.9) est positif. Sinon, il faut ajouter  $\pi$  au second membre de (4.12).

La formule (4.12) constitue la démonstration du

#### 4.1.9 Théorème

Le déphasage d'une transmittance quelconque est la demi-différence des déphasages de deux passe-tout, à un déphasage constant  $\pi$  près.

Si le biporte est réciproque,  $f$  est pair ou impair, et le déphasage de la transmittance est la moitié de celui de la fonction passe-tout  $g_*/g$ .

#### 4.1.10 Propriété du déphasage d'un passe-tout

Le prolongement analytique de la tangente du déphasage d'un passe-tout est une fonction de Foster.

En effet, soit  $\exp[-j 2 \varphi(\omega)] = g(-j\omega)/g(j\omega)$  et  $g(j\omega) = r(\omega) + jx(\omega)$ . On a  $\tan \varphi(\omega) = x(\omega)/r(\omega)$ . Par prolongement analytique de cette dernière fonction, on obtient une fonction de Foster grâce au paragraphe 2.1.22.

#### 4.1.11 Expression du retard de groupe

La propriété 4.1.10 est malaisée à exploiter. On peut opérer une décomposition plus simple sur le retard de groupe.

Soit la fonction passe-tout  $g_*/g$ . Les  $n$  racines de  $g$  sont désignées par  $p_i$ . On peut écrire

$$2j\varphi(\omega) = \ln g(j\omega) - \ln g(-j\omega) \quad (4.13)$$

En prenant la dérivée des deux membres, il vient

$$2j\tau(\omega) = \frac{1}{g(j\omega)} \frac{dg(j\omega)}{d\omega} - \frac{1}{g(-j\omega)} \frac{dg(-j\omega)}{d\omega} \quad (4.14)$$

Le prolongement analytique de (4.14) peut s'écrire en utilisant la formule

$$\frac{1}{g(p)} \frac{dg}{dp} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p-p_i} \quad (4.15)$$

sous la forme

$$2\tau(p) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p-p_i} - \frac{1}{p+p_i} \quad (4.16)$$

#### 4.1.12 Propriété

Le prolongement analytique du retard de groupe, correspondant à une fonction passe-tout ou à une transmittance d'un biporte réciproque, est une fraction rationnelle dont les pôles sont en symétrie quadrantale et en dehors de l'axe imaginaire. Le développement en fractions simples donne les résidus  $1/2$  ou  $-1/2$ , selon que les pôles sont situés dans le demi-plan de gauche ou de droite.

#### 4.1.13 Propriétés

Le retard de groupe d'une transmittance quelconque est la différence de deux retards de groupe correspondant à des fonctions passe-tout. Le retard de groupe affecté d'un signe négatif dans la différence est de degré inférieur ou égal au premier.

Dès lors, ce retard de groupe est une fraction rationnelle dont les pôles sont situés hors de l'axe imaginaire et jouissent de la symétrie quadrantale. La moitié des résidus du développement en fractions simples valent  $1/2$  et l'autre moitié  $-1/2$ . Le

nombre de résidus positifs correspondant à des pôles du demi-plan de gauche est supérieur ou égal au nombre de résidus positifs correspondant à des pôles du demi-plan de droite.

#### 4.1.14 Détermination d'une transmittance à partir du retard de groupe

Soit un retard de groupe donné par une fonction possédant les propriétés du paragraphe 4.1.13.

Considérons d'abord le cas où tous les résidus positifs (négatifs) correspondent à des pôles situés dans le demi-plan de gauche (de droite).

L'ensemble de ces pôles peuvent constituer les racines de  $g(p)$ . Le retard de groupe correspond, dans ce choix, soit à la fonction passe-tout  $g_*/g$  (à un facteur 2 près), soit à la transmittance  $1/g$ , ou soit à n'importe quelle transmittance  $f_q/g$ , où  $f_q$  ne contient que des racines en symétrie quadrantale. Ce dernier cas est le plus fréquent : les filtres ont en général des racines de  $f$  restreintes à l'axe imaginaire. On constate que la spécification du retard de groupe détermine entièrement  $g(p)$  et laisse le choix libre de  $f(p)$ .

On peut également choisir certains de ces pôles à résidus positifs comme racines de  $f_b$  et déterminer de la sorte une transmittance  $f_q f_{b^*}/g$  possédant le retard de groupe prescrit. Cette transmittance peut encore s'écrire  $f_q f_b f_{b^*}/f_b g$ ; son numérateur est bien pair ou impair et son dénominateur est hurwitzien; dès lors, elle peut être la transmittance d'un biporte non dissipatif réciproque, selon le paragraphe 2.3.12. On remarquera que, sous cette forme, les racines du numérateur jouissent à nouveau de la symétrie quadrantale.

Une telle transmittance n'est cependant pas réalisable par un quadripôle en échelle selon la section 6.2.

Considérons ensuite le cas où certains résidus négatifs du développement en fractions simples correspondent à des pôles situés dans le demi-plan de gauche. Ces pôles doivent être attribués au polynôme  $f_a$ , et le retard de groupe détermine une transmittance  $f_a/g$ . On peut également identifier ce retard avec une transmittance du type  $f_a f_{b^*} f_q/g$ , en ajoutant un facteur  $f_q$  arbitraire et en répartissant les pôles à résidus positifs du demi-plan de gauche entre  $g$  et  $f_b$ . De toute façon, la transmittance obtenue n'est pas celle d'un biporte non dissipatif réciproque, parce que le numérateur n'est ni pair, ni impair, et qu'il n'est pas permis de multiplier haut et bas par un polynôme  $f_{a^*}$  non hurwitzien.

#### 4.1.15 Propriété

Le retard de groupe correspondant à la transmittance d'un biporte non dissipatif réciproque est une fonction de  $\omega$  à valeurs positives.

Posons  $p_i = a_i + j b_i$  dans (4.16), avec  $a_i < 0$  et  $p = j\omega$ . En groupant les racines  $p_i$  et  $p_i^*$ , on trouve l'expression

$$\tau(\omega) = - \sum_i \frac{a_i}{a_i^2 + (\omega - b_i)^2} + \frac{a_i}{a_i^2 + (\omega + b_i)^2} \quad (4.17)$$

qui est une fonction strictement positive.

#### 4.1.16 Corollaire

Il en résulte que la spécification d'un retard de groupe négatif dans certains intervalles entraîne par (4.12),  $\tau(\omega) = \tau_1(\omega) - \tau_2(\omega)$ , avec  $\tau_2(\omega) > \tau_1(\omega)$ . Il faut donc que le biporte soit non réciproque.

#### 4.1.17 Commentaire

Ce qui précède montre que la spécification d'un retard de groupe, selon la formule (4.16), détermine sans ambiguïté le dénominateur d'une transmittance à déphasage minimal. Le numérateur  $f_q$  peut être choisi librement avec ses racines sur l'axe imaginaire. Si l'on attribue certains pôles de (4.16) comme racines d'un polynôme  $f_b$ , la forme canonique  $f_q f_b f_{b^*} / f_b g$  de la transmittance n'est plus à déphasage minimal puisque les racines de  $f_{b^*}$  sont dans le demi-plan de droite.

La spécification du déphasage  $\varphi(\omega)$  constitue, toujours dans le même cas, une spécification complète de la transmittance. Considérons en effet une transmittance  $f/g$  pour laquelle toutes les racines de  $f$  sont sur l'axe imaginaire. A une racine de  $f$ , les parties réelle et imaginaire de la transmittance changent simultanément de signe. Par (4.4), cela signifie que  $\cos \varphi(\omega)$  et  $\sin \varphi(\omega)$  changent simultanément de signe, ce qui correspond à une discontinuité avec un saut de  $\pi$  dans la courbe de  $\varphi$ . Il en résulte que si  $\varphi(\omega)$  est spécifié, y compris ses discontinuités, cela revient à spécifier  $g$  et  $f$ .

## 4.2 FILTRE IDÉAL

### 4.2.1 Définition

Le *filtre passe-bas idéal* est défini par les conditions suivantes :

- l'affaiblissement est nul dans la bande passante;
- l'affaiblissement est infini dans la bande coupée;
- le déphasage est linéaire dans la bande passante.

Sa transmittance s'écrit donc :

$$s_{21}(j\omega) = \exp(-j\omega t_0) \quad , \quad |\omega| < \omega_c \quad (4.18)$$

$$s_{21}(j\omega) = 0 \quad , \quad |\omega| > \omega_c \quad (4.19)$$

### 4.2.2 Propriété

Le filtre passe-bas idéal transmet, avec un certain retard et sans autre déformation, tout signal dont le spectre est nul en dehors de sa bande passante.

Soit  $s(t)$  et  $r(t)$  respectivement le signal et la réponse. Si l'on a les transformées de Fourier  $S(j\omega) \leftrightarrow s(t)$  et  $R(j\omega) \leftrightarrow r(t)$ , on peut écrire

$$R(j\omega) = S(j\omega) \exp(-j\omega t_0) \quad (4.20)$$

d'où, par (IV.7.89),

$$r(t) = s(t - t_0) \quad (4.21)$$

### 4.2.3 Commentaire

Le filtre passe-bas idéal ne peut pas être réalisé pour deux raisons.

En premier lieu, il n'est pas possible de réaliser un affaiblissement discontinu, ni même une fonction de transfert exponentielle du type (4.18). La transmittance définie au paragraphe 4.2.1 n'est pas celle d'un système construit au moyen d'éléments linéaires localisés et, en particulier, d'un biporte non dissipatif réciproque.

En second lieu, la transmittance du filtre passe-bas est entièrement spécifiée, affaiblissement et déphasage ou, encore, parties réelle et imaginaire. Aucune précaution n'a été prise pour vérifier que celles-ci sont liées par les relations de Bayard-Bode : en fait, elles ne le sont pas et la réponse impulsionnelle n'est pas causale, ainsi qu'on l'a montré au paragraphe IV.7.3.32, dans le cas où  $t_0 = 0$ . Même si  $t_0$  est différent de zéro, cette réponse reste non causale.

Dès lors, le filtre passe-bas idéal constitue un idéal au sens propre du terme : il n'est pas possible de l'atteindre; il serait désastreux de l'atteindre.

### 4.2.4 Définition du problème d'approximation

Le problème d'approximation, traité dans ce chapitre, consiste à trouver, pour un degré déterminé, la fraction rationnelle dont l'affaiblissement *ou* le déphasage soit le plus proche de celui du filtre passe-bas idéal. Le qualificatif de proche est du reste imprécis pour l'instant et sera défini de cas en cas.

On appelle *fonction approximante* la fraction rationnelle à trouver. La caractéristique du filtre idéal est, dans le cas présent, la *fonction objectif*.

## 4.3 APPROXIMATION SELON LE CRITÈRE MÉPLAT

### 4.3.1 Définition

L'approximation optimale selon le *critère méplat* jouit de la propriété suivante : le développement de Taylor autour de l'origine de la fonction approximante coïncide avec celui de la fonction objectif, jusqu'à l'ordre le plus élevé compatible avec le degré de la fonction approximante.

### 4.3.2 Caractéristique de Butterworth

Soit à trouver la meilleure approximation de l'affaiblissement du filtre idéal, selon le critère méplat, au moyen d'une transmittance pour laquelle  $f$  est une constante. Il suffit donc de déterminer un polynôme  $g(p)$ , hurwitzien, dont le module approche, au sens du critère méplat, la constante 1.

Si  $m$  est le degré de  $g(p)$ , le module au carré, qui constitue l'approximation optimale, s'écrit

$$g(j\omega)g(-j\omega) = 1 + \omega^{2m} \quad (4.22)$$

Par suite de la formule, où  $|x| < 1$ ,

$$\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 \dots \quad (4.23)$$

on trouve

$$2\alpha(\omega) = \omega^{2m} - \omega^{4m}/2 + \dots \quad (4.24)$$

Les dérivées de  $\alpha$ , d'ordre 1 à  $(2m - 1)$ , sont nulles. Il n'est pas possible d'en annuler davantage, puisque  $|g|^2$  doit avoir au moins un terme en  $\omega^{2m}$ , faute de quoi ce serait une constante. De même, toute puissance de  $\omega$  inférieure à  $2m$ , dans (4.22), engendrera forcément par (4.23) une puissance inférieure à  $2m$  dans (4.24). On aurait pu multiplier  $\omega^{2m}$ , dans (4.22), par une constante positive quelconque : cela aurait simplement modifié la normalisation en fréquence.

### 4.3.3 Racines des polynômes de Butterworth

La détermination de  $g(p)$  à partir de  $|g|^2$  s'opère par la méthode générale du paragraphe 4.1.5. La relation (4.22) donne par la substitution de  $p$  à  $j\omega$

$$g(p)g(-p) = 1 + (-1)^m p^{2m} \quad (4.25)$$

Les racines du second membre sont situées sur la circonférence unité. Pour  $m$  pair, elles sont données par

$$P_k = \exp [j(2k - 1)\pi/2m] \quad (4.26)$$

et, pour  $m$  impair, par

$$P_k = \exp [jk\pi/m] \quad (4.27)$$

On attribue à  $g(p)$  les racines situées dans le demi-plan de gauche. Les polynômes possédant ces racines sont les *polynômes de Butterworth*.

### 4.3.4 Exemple

Pour  $m = 3$ , on attribue à  $g(p)$  les racines situées sur la circonférence unité, dont les arguments valent  $2\pi/3$ ,  $\pi$  et  $4\pi/3$ . Le polynôme s'écrit

$$g(p) = p^3 + 2p^2 + 2p + 1 \quad (4.28)$$

### 4.3.5 Propriétés

L'affaiblissement d'une caractéristique de Butterworth vaut 3 dB en  $\omega = 1$ . En effet, par (2.72),  $|s_{21}(1)|^2 = 1/2$ .

Pour  $\omega \gg 1$ ,  $|s_{21}|^2 \cong \omega^{-2m}$  et

$$\alpha(\omega) = 20m \log \omega \text{ dB} \quad (4.29)$$

Dans un diagramme rapporté aux axes  $\log \omega$  et  $\alpha$ , la courbe d'affaiblissement tend vers une asymptote, dont l'abscisse à l'origine est  $\omega = 1$  et dont la pente vaut  $20m$  dB/décade. Plus le degré est élevé, plus la pente est forte, et plus le filtre est sélectif.

### 4.3.6 Caractéristique de Thomson

Soit à trouver la meilleure approximation, au sens de critère méplat, du déphasage du filtre idéal, au moyen d'une transmittance  $1/g(p)$ . La fonction objectif est une phase

linéaire ou encore un retard constant. On choisit une normalisation en fréquence telle que  $\tau(0) = 1$  et le degré de  $g(p)$  est noté  $n$ .

Si l'on pose  $g(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$ , on a

$$\varphi(\omega) = \arctan [V(\omega)/U(\omega)] \quad (4.30)$$

et

$$\tau(\omega) = \frac{V'U - U'V}{U^2 + V^2} \quad (4.31)$$

où la notation prime en exposant dénote ici la dérivée par rapport à  $\omega$ .

L'exigence d'une approximation optimale impose

$$\tau(\omega) = 1 - k\omega^{2n}/(U^2 + V^2) \quad (4.32)$$

En identifiant (4.31) et (4.32), il vient

$$V'U - U'V = U^2 + V^2 - k\omega^{2n} \quad (4.33)$$

et, en dérivant les deux membres, on a

$$V''U - U''V = 2UU' + 2VV' - 2nk\omega^{2n-1} \quad (4.34)$$

Si l'on élimine  $k$  entre (4.33) et (4.34), on trouve

$$V(-\omega U'' - 2\omega V' + 2nU' + 2nV) = U(-\omega V'' + 2\omega U' + 2nV' - 2nU) \quad (4.35)$$

Comme  $g(p)$  est strictement hurwitzien, les polynômes  $U(\omega)$  et  $V(\omega)$  ont des racines entrelacées et distinctes: une racine commune constituerait une racine de  $g$  sur l'axe imaginaire. Il en résulte que les racines de  $V$  devraient coïncider avec celles de l'expression entre parenthèses dans le membre de droite de (4.35). Si  $n$  est impair,  $V$  est de degré  $n$  et a  $n$  racines, tandis que l'expression entre parenthèses est de degré  $(n-1)$ : l'identification des polynômes n'est pas possible. Si  $n$  est pair, on aboutit à la même conclusion. Dès lors, (4.35) ne peut être vérifié que dans la mesure où les deux expressions entre parenthèses sont identiquement nulles. On a donc

$$-\omega V'' + 2\omega U' + 2nV' - 2nU = 0 \quad (4.36)$$

$$-\omega U'' - 2\omega V' + 2nU' + 2nV = 0 \quad (4.37)$$

Si l'on multiplie (4.37) par  $(-j)$ , que l'on additionne (4.36) et (4.37) et que l'on remplace  $j\omega$  par  $p$ , on trouve

$$p \frac{d^2g}{dp^2} - 2(p+n) \frac{dg}{dp} + 2ng = 0 \quad (4.38)$$

Le polynôme  $g$  est donc solution d'une équation différentielle du second ordre. A un changement de variable près, cette équation hypergéométrique est dite de *Bessel*.

Pour  $n=0$ ,  $g(p)=1$  et pour  $n=1$ ,  $g(p)=p+1$ . Les polynômes de degré supérieur se calculent par la formule de récurrence

$$g_n = (2n-1)g_{n-1} + p^2g_{n-2} \quad (4.39)$$

### 4.3.7 Comparaison des affaiblissements

Les figures 4.1 et 4.2 représentent les affaiblissements de la caractéristique du cinquième degré respectivement dans les cas Butterworth et Thomson. La normalisation de fréquence choisie pour l'un et l'autre fait coïncider les fréquences de coupure placées arbitrairement en  $\omega = 1$ , où  $\alpha(1) = 3$  dB.

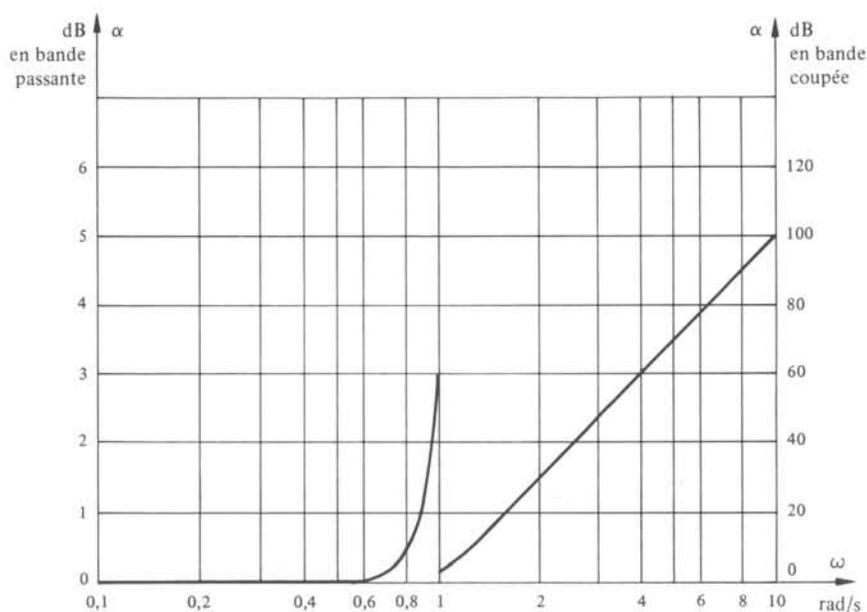


Fig. 4.1

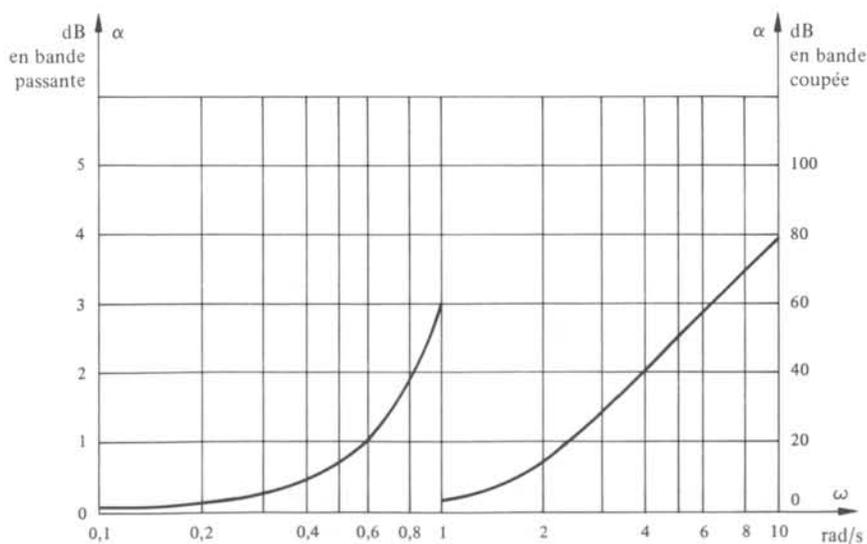


Fig. 4.2

Dans la bande passante, la caractéristique Butterworth est manifestement plus plate : l'affaiblissement n'atteint 1 dB que pour  $\omega = 0,9$ , tandis que cet affaiblissement est atteint par la caractéristique Thomson dès  $\omega = 0,6$ .

Dans la bande coupée, l'affaiblissement du filtre Butterworth croît beaucoup plus vite que celui du filtre Thomson : en  $\omega = 2$ , l'affaiblissement du premier vaut 30dB, alors que celui du second vaut 15dB.

En résumé, le filtre Butterworth préserve mieux l'amplitude des fréquences situées dans la bande passante, tout en éliminant mieux celles situées dans la bande coupée.

#### 4.3.8 Comparaison des retards de groupe

Les figures 4.3 et 4.4 représentent respectivement les retards de groupe  $\tau(\omega) = d\varphi/d\omega$  des filtres Butterworth et Thomson. La comparaison n'a d'intérêt ici que dans la bande passante, puisque seules comptent les distorsions de phase des composantes transmises.

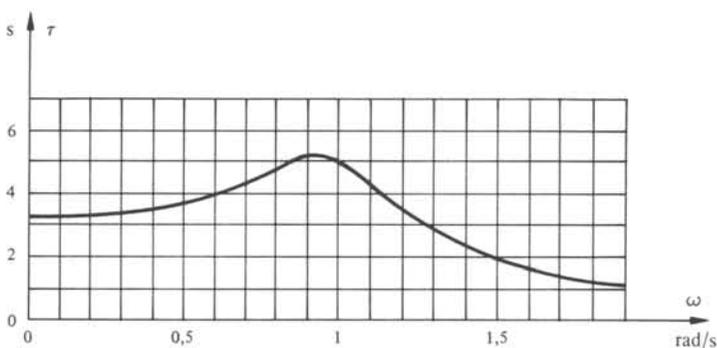


Fig. 4.3

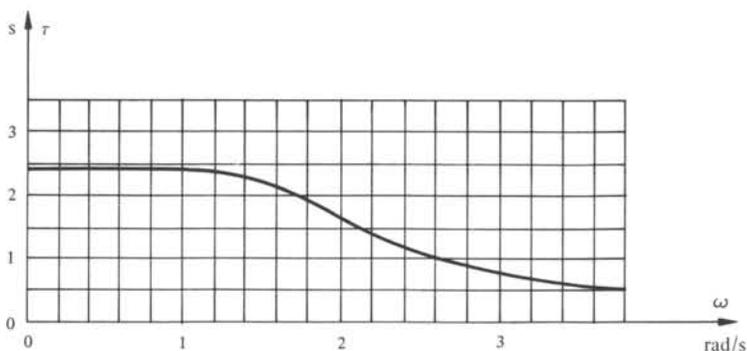


Fig. 4.4

On constate que le retard est pratiquement constant jusqu'à  $\omega = 1$  dans le cas Thomson, tandis qu'il présente un maximum très accentué pour  $\omega = 0,9$  dans le cas Butterworth. La variation totale du retard dans la bande passante est de l'ordre de 60% pour le filtre Butterworth, alors qu'elle est de l'ordre du pour cent pour le filtre Thomson.

### 4.3.9 Comparaison des réponses indicielles

La réponse indicielle constitue un bon critère pour tenir compte à la fois de l'affaiblissement et du déphasage. Pour transmettre correctement un échelon unité, il faut préserver à la fois l'amplitude et le déphasage relatif des composantes de son spectre. Les paragraphes 4.3.7 et 4.3.8 ont montré combien chacun des filtres excellait dans l'approximation, soit d'un affaiblissement, soit d'un retard constant : l'approximation optimale de l'un se paie par une approximation médiocre de l'autre. Quel est l'objectif le plus important ?

Les figures 4.5 et 4.6 représentent respectivement les réponses indicielles  $\gamma(t)$  des filtres Butterworth et Thomson. On constate que le dépassement par le filtre Thomson de la valeur finale de la réponse est imperceptible, alors que le filtre Butterworth présente un dépassement important de l'ordre de 12%. Par contre, le temps de montée, estimé arbitrairement comme l'intervalle compris entre les points où la réponse indicielle vaut 0,1 et 0,9, s'élève à 2,5 s pour le filtre Butterworth, tandis qu'il atteint 2,3 s pour le filtre Thomson.

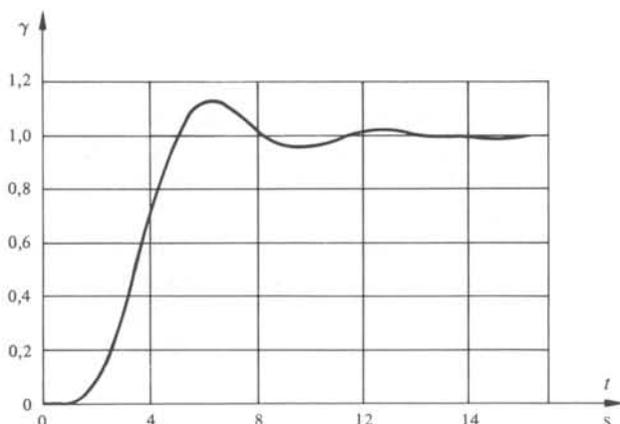


Fig. 4.5

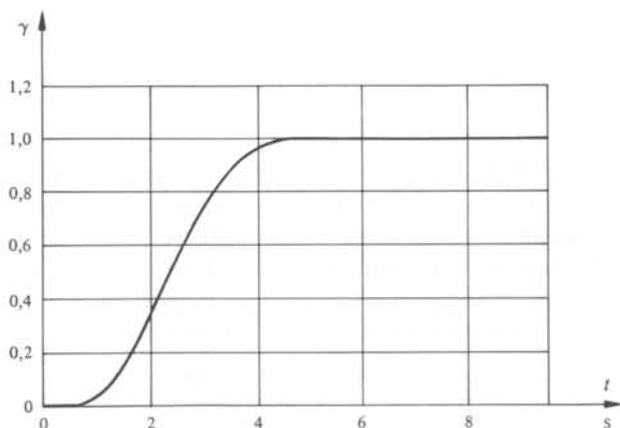


Fig. 4.6

En apparence, le filtre Thomson est meilleur que le filtre Butterworth parce qu'il ne présente pas de dépassement et un temps de montée plus court. Cette comparaison est cependant très partielle et très partielle. Tout dépend de la normalisation en fréquence. Au lieu de normaliser la fréquence de coupure, définie arbitrairement à 3 dB ici, on peut être contraint de tenir compte par exemple de la discrimination. Supposons qu'il faille atteindre  $\alpha = 60$  dB en  $\omega = 4$ . La normalisation du Butterworth est correcte. Par contre, le filtre Thomson dans la normalisation choisie n'atteint 60 dB que pour  $\omega = 6,5$ . Il faut donc réduire la bande passante par un facteur  $4/6,5 = 0,62$  ce qui entraîne une augmentation correspondante du temps de montée qui passe à 3,74 s.

En résumé, à bande passante identique, le filtre Thomson est plus rapide que le filtre Butterworth; à discrimination identique, c'est l'inverse.

#### 4.3.10 Commentaire

La triple comparaison, à laquelle on a soumis les filtres Butterworth et Thomson, met en évidence les caractères propres à une approximation, selon qu'elle s'efforce d'optimiser l'affaiblissement ou le déphasage.

- Même à un degré aussi faible que le cinquième, les différences entre les deux caractéristiques sont frappantes. Cela montre à quel point la phase d'approximation dans la conception d'un filtre est importante;
- Dans les deux cas, l'approximation porte, soit sur l'affaiblissement, soit sur le déphasage. Cela suffit à déterminer entièrement la transmittance, selon la discussion des paragraphes 4.1.7 et 4.1.17;
- Sur un critère global, comme la réponse indicielle, il est impossible de décréter de façon absolue quelle est la meilleure caractéristique. Cela dépend des exigences imposées sur la réponse indicielle: en règle générale, on préfère un compromis entre un certain dépassement tolérable et un temps de montée aussi court que possible.

#### 4.3.11 Compromis entre l'affaiblissement et le déphasage

Selon une légende couramment admise, un déphasage approximativement linéaire produit une réponse indicielle optimale. La comparaison précédente a pour but de détruire cette légende, et d'éviter que des filtres soient conçus *en fonction de leur seul déphasage*.

Par contre, il est exact qu'en améliorant *le déphasage et l'affaiblissement*, on améliore aussi la réponse indicielle. Il est possible par exemple de placer, en cascade avec un filtre Butterworth, un passe-tout dont la fonction est de compenser le maximum du retard au voisinage de la pulsation de coupure. Bien entendu, cette solution entraîne une élévation du degré de la transmittance globale des deux biportes en cascade: il n'est pas évident que l'utilisation des degrés de liberté soit optimale.

Pour pallier cet inconvénient, plusieurs solutions ont été proposées:

- les filtres de Golay approximent, selon le critère méplat, simultanément l'affaiblissement et le retard. On peut répartir arbitrairement les degrés de liberté, de façon à approximer plus ou moins bien l'affaiblissement nul ou le retard constant. Cette approche est l'extension naturelle de ce qui précède: elle échoue

cependant, parce que la plupart des filtres de Golay, et en tous cas ceux de degré élevé, sont instables en ce sens que  $g(p)$  n'est pas hurwitzien. Ce résultat n'a rien d'étonnant, puisqu'une bonne approximation de la caractéristique du paragraphe 4.2.1 est impossible, selon la discussion du paragraphe 4.2.3 [10];

- une autre approche, résultant logiquement de ce qui précède, consiste à chercher un polynôme qui soit un compromis entre les polynômes de Butterworth et de Thomson. On peut, par exemple, réaliser une interpolation entre les racines de l'un et de l'autre. Cette caractéristique porte le nom de TBT (Transitional Butterworth Thomson). Compte tenu de l'utilisation d'un paramètre, on peut réaliser un compromis variant continûment entre dépassement et temps de montée de la réponse indicielle [11]. Bien entendu, cette solution est empirique par nature et ne peut en rien prétendre être optimale. Comme, par sa méthode d'interpolation, la méthode garantit le caractère hurwitzien de  $g(p)$ , elle ne constitue évidemment pas une approximation du filtre idéal.

#### 4.3.12 Filtres à réponse indicielle optimale

On peut aussi abandonner ces compromis stériles entre l'affaiblissement et le déphasage, qui influencent chacun la réponse indicielle de façon indirecte et compliquée, et qui s'influencent mutuellement de façon encore plus compliquée. D'ailleurs, l'objectif proposé, le filtre idéal, est tout à fait illusoire.

En fait, les exigences imposées sur une réponse indicielle peuvent être directement exprimées dans le domaine temporel. Quel est le filtre, de degré déterminé, qui possède le temps de montée le plus court pour un dépassement donné ?

On ne possède pas de réponse théorique à cette question. Cependant, il existe une famille de filtres, développés par Schüssler, qui répond de façon empirique à cette question. Les comparaisons, systématiquement entreprises entre cette famille et toutes les autres, montrent que c'est la meilleure famille connue.

La réponse indicielle de ce filtre est caractérisée par le fait que le dépassement  $\epsilon$  autorisé est atteint  $m$  fois pour un filtre de degré  $m$ , selon la figure 4.7 pour le cas  $m = 6$ .

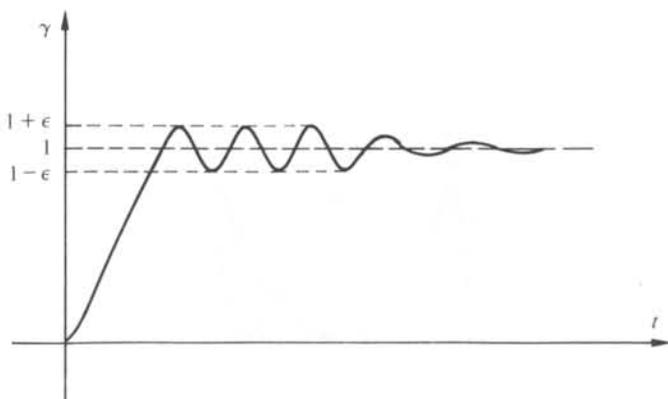


Fig. 4.7

## 4.4 APPROXIMATION SELON LA NORME DE TCHEBYCHEFF

## 4.4.1 Introduction

La section 4.3 a présenté deux approximations optimales selon le critère méplat. L'intérêt de ces solutions réside surtout dans la simplicité des formules qui résultent du critère. Par contre, ces solutions ne sont pas optimales si l'on se rapporte aux exigences concrètes imposées aux filtres. On demande en général à l'affaiblissement, ou au retard, de ne pas dépasser une certaine ondulation dans la bande passante.

Or, les filtres Butterworth et Thomson utilisent tous les degrés de liberté du polynôme  $g$  afin d'optimiser le comportement au voisinage de l'origine, alors que c'est l'ensemble de la bande qui fixe des exigences. Une approximation optimale, au sens du critère méplat, n'est pas nécessairement une approximation optimale au point de vue des exigences réelles.

On présentera, à la section 5.1, une définition générale de la norme de Tchebycheff, qui vise précisément à obtenir une approximation optimale dans un intervalle. Cette section est simplement consacrée à la présentation d'un cas particulier, où il existe une solution analytique à l'approximation optimale selon cette norme.

## 4.4.2 Définition

Le polynôme de Tchebycheff  $T_n$  d'ordre  $n$  est défini par les formules

$$T_n(x) = \cos [n(\arccos x)], \quad |x| \leq 1 \quad (4.40)$$

$$T_n(x) = \cosh [n(\operatorname{arcosh} x)], \quad |x| > 1 \quad (4.41)$$

En utilisant les formules classiques des fonctions trigonométriques et hyperboliques, on obtient pour les premiers ordres

$$T_0(x) = 1 \quad (4.42)$$

$$T_1(x) = x \quad (4.43)$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1 \quad (4.44)$$

Les courbes correspondant à  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  sont représentées à la figure 4.8.

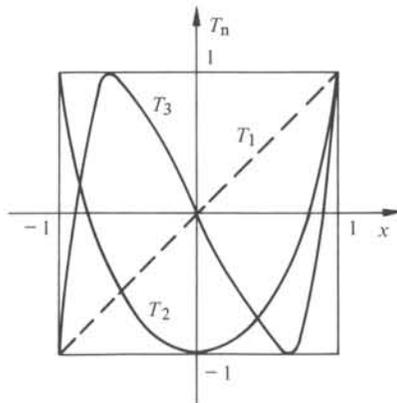


Fig. 4.8

#### 4.4.3 Propriété

Les polynômes de Tchebycheff obéissent à la relation de récurrence

$$T_n(x) = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad (4.45)$$

Celle-ci résulte directement de la formule (4.40), où l'on pose  $x = \cos y$ , et de la relation trigonométrique

$$\cos ny + \cos(n-2)y = 2 \cos y \cos(n-1)y \quad (4.46)$$

#### 4.4.4 Propriétés

Les polynômes de Tchebycheff sont bornés, dans l'intervalle  $|x| \leq 1$ , par l'inégalité

$$|T_n(x)| \leq 1 \quad (4.47)$$

L'égalité est réalisée en  $(n+1)$  points qui comprennent toujours les bornes  $|x|=1$  de l'intervalle. Comme les valeurs 1 et  $(-1)$  sont atteintes alternativement, le polynôme s'annule  $n$  fois, et toutes les racines sont réelles dans l'intervalle  $|x| \leq 1$ .

Ces propriétés résultent directement de la définition du paragraphe 4.4.2. Pour  $-1 \leq x \leq 1$ , on a  $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$  et  $-n\pi/2 \leq ny \leq n\pi/2$ .

#### 4.4.5 Filtres de Tchebycheff

Si l'on définit le module de  $g$  sur l'axe imaginaire par

$$|g(j\omega)|^2 = 1 + \epsilon^2 T_n^2(\omega) \quad (4.48)$$

on trouve

$$|s_{21}|^2 = 1/|g|^2 = 1/(1 + \epsilon^2 T_n^2) \quad (4.49)$$

Dès lors, on a, pour  $\omega \leq 1$ ,

$$1/(1 + \epsilon^2) \leq |s_{21}|^2 \leq 1 \quad (4.50)$$

et

$$0 \leq \alpha \leq 10 \log(1 + \epsilon^2) \quad \text{dB} \quad (4.51)$$

Dans la bande passante, l'affaiblissement oscille donc entre zéro et une valeur maximale,  $M$ , liée à  $\epsilon$  par la relation

$$\epsilon^2 = 10^{M/10} - 1 \quad (4.52)$$

Chaque zéro d'affaiblissement correspond à un zéro de  $T_n(\omega)$ : on a démontré que ce polynôme a le nombre maximum de zéros dans cet intervalle. Les maxima de l'affaiblissement dans la bande passante correspondent aux extrema de  $T_n(\omega)$  et ils sont tous égaux à  $M$ .

#### 4.4.6 Pôles de transmission

Les racines  $p_k$  de  $g(p)$  se déduisent de (4.48), récrit avec  $j\omega$  remplacé par  $p$ :

$$gg_* = 1 + \epsilon^2 T_n^2(p/j) \quad (4.53)$$

On a donc

$$1 + \epsilon^2 T_n^2(p_k/j) = 0 \quad (4.54)$$

ou encore

$$\cos [n \arccos(p_k/j)] = \pm j/\epsilon \quad (4.55)$$

Soit  $x_k = u_k + jv_k = \arccos(p_k/j)$ , on trouve alors

$$\cos(n x_k) = \cos(n u_k) \cosh(n v_k) - j \sin(n u_k) \sinh(n v_k) = \pm j/\epsilon \quad (4.56)$$

En égalant séparément les parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\cos(n u_k) \cosh(n v_k) = 0 \quad (4.57)$$

$$\sin(n u_k) \sinh(n v_k) = \pm 1/\epsilon \quad (4.58)$$

Comme  $\cosh(n v_k) \neq 0$ , (4.57) entraîne  $\cos(n u_k) = 0$ , d'où

$$u_k = \pi(2k-1)/2n, \quad k = 1, \dots, 2n \quad (4.59)$$

et par (4.58), il vient

$$v_k = \frac{1}{n} \operatorname{arc} \sinh(1/\epsilon) \quad (4.60)$$

qui prend une valeur unique,  $v$ , quel que soit  $k$ .

Dès lors, on peut calculer les racines de  $g g_*$  par la formule

$$p_k = j \cos(x_k) = j \cos(u_k + jv) = \sigma_k + j\omega_k \quad (4.61)$$

avec

$$\sigma_k = \sin(u_k) \sinh(v) \quad (4.62)$$

$$\omega_k = \cos(u_k) \cosh(v) \quad (4.63)$$

En éliminant  $u_k$  entre (4.62) et (4.63), on trouve

$$\frac{\sigma_k^2}{\sinh^2(v)} + \frac{\omega_k^2}{\cosh^2(v)} = 1 \quad (4.64)$$

Les racines sont donc situées sur une ellipse dont les demi-axes valent respectivement  $\cosh(v)$  et  $\sinh(v)$ .

#### 4.4.7 Relation entre les filtres Butterworth et Tchebycheff

Les racines de  $g$  sont respectivement disposées sur une circonférence et sur une ellipse pour ces deux filtres. Comme la circonférence est un cas particulier de l'ellipse, il doit être possible de trouver un changement de variable complexe mettant en valeur le fait que le filtre Butterworth est un cas particulier du filtre Tchebycheff.

Posons  $\tilde{p} = p/\cosh v$ . Dès lors, (4.62) et (4.63) deviennent

$$\tilde{\sigma}_k = \sin(u_k) \tanh(v) \quad (4.65)$$

$$\tilde{\omega}_k = \cos(u_k) \quad (4.66)$$

En comparant (4.66) et (4.59) à (4.26), on constate qu'avec cette normalisation les parties imaginaires des pôles correspondants sont identiques, tandis que les parties réelles

sont multipliées encore par un facteur  $\tanh \nu$  dans (4.65). Pour  $\epsilon = 0$ ,  $\nu$  tend vers l'infini et  $\tanh \nu$  vers 1: les deux filtres coïncident.

Le filtre Butterworth est donc le cas limite du filtre Tchebycheff, lorsque simultanément l'ondulation et la bande passante tendent vers zéro.

#### 4.4.8 Comparaison entre les filtres Butterworth et Tchebycheff

Les figures 4.9, 4.10 et 4.11 représentent respectivement les courbes d'affaiblissement, de retard de groupe et de réponse indicielle du filtre Tchebycheff de degré cinq, dont l'ondulation a été choisie égale à 0.5 dB. Pour permettre la comparaison avec le filtre Butterworth des figures 4.1, 4.3 et 4.5, la même normalisation de fréquence a été choisie de façon que les points à 3 dB coïncident avec la pulsation  $\omega = 1$ .

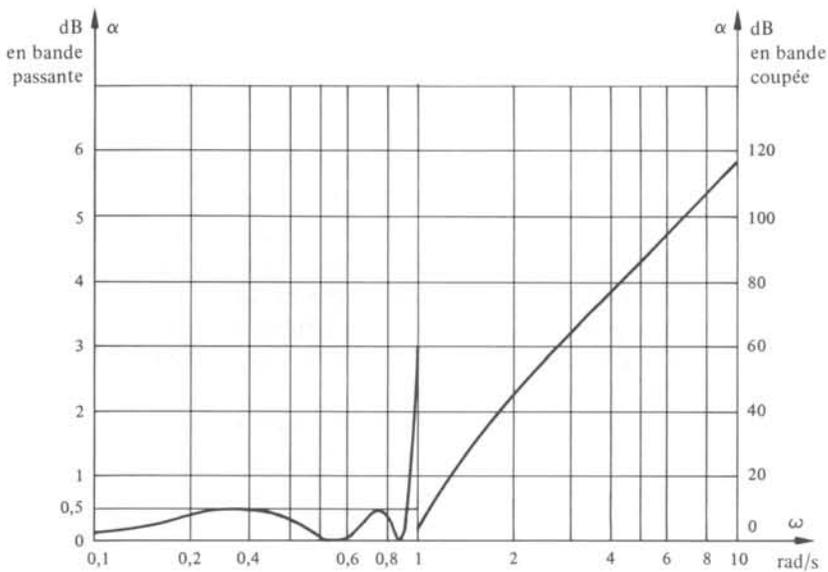


Fig. 4.9

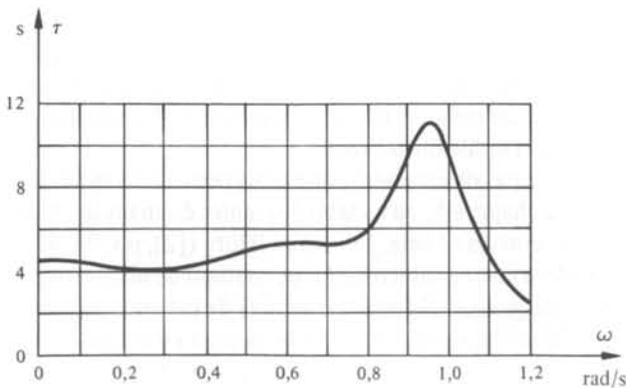


Fig. 4.10

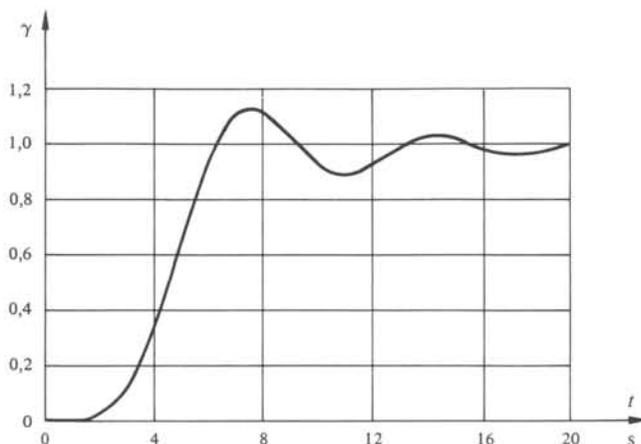


Fig. 4.11

On constate, en comparant les figures 4.9 et 4.1, que le filtre Tchebycheff possède un affaiblissement croissant plus rapidement en bande bloquée : pour  $\omega = 2$ , son affaiblissement vaut 43 dB, contre 30 dB pour le filtre Butterworth.

En comparant les courbes de retard des figures 4.3 et 4.10, on constate que le filtre Tchebycheff possède un maximum encore plus accentué au voisinage de la pulsation  $\omega = 0,95$ . La variation totale du retard approche ici 200%.

Les courbes de réponse indicielle ne sont pas différentes de façon significative. Le dépassement est le même, et le temps de montée du filtre Butterworth est légèrement meilleur dans la normalisation choisie.

Il ressort de cette comparaison que le filtre Tchebycheff est le meilleur si l'on s'attache uniquement à la courbe d'affaiblissement. Pour une ondulation donnée, la bande passante et le degré étant les mêmes, c'est le filtre qui permet la meilleure discrimination.

#### 4.4.9 Filtrés Abele-Ulbrich-Piloty

On observera que l'on a trouvé, jusqu'à présent, deux familles optimales selon le critère méplat au point de vue respectivement de l'affaiblissement et du déphasage, et une famille optimale selon la norme de Tchebycheff. On s'attend, par raison de symétrie, à trouver une famille de filtres approchant un retard constant sur tout un intervalle avec une ondulation déterminée : elle serait à la famille Thomson, ce que la famille Tchebycheff est à la famille Butterworth.

On ne connaît pas de caractéristique analytique de ce type. En utilisant les procédés numériques du chapitre 5, on a établi des tables donnant de tels filtres. Ils portent le nom de leurs inventeurs : Abele, Ulbrich et Piloty ([2], pp. 94-97).

L'usage ne les a guère consacrés. S'ils permettent de réaliser une excellente approximation du retard de groupe allant même au delà de la bande passante, par contre la caractéristique d'affaiblissement croît très lentement en bande coupée. Quant à la réponse indicielle, elle est aberrante : sa courbe a une allure en escalier [12]. D'ailleurs ils ne constituent même pas une approximation optimale du retard de groupe selon la norme de Tchebycheff [14].

#### 4.4.10 Exemple

A la figure 1.2, on a représenté des exigences typiques imposées à l'affaiblissement d'un filtre passe-bas. On va déterminer le degré  $n$  au minimum nécessaire du polynôme  $g$ , pour une approximation analytique de ces exigences, successivement au moyen de polynômes de Butterworth, puis de Tchebycheff.

Pour une raison déjà exposée au paragraphe 1.1.13, ce sont des exigences plus sévères que celles de la figure 1.2 que l'on va s'imposer, de façon à conserver une marge entre le module de la fonction approximante et les exigences réelles. Les pulsations de fin de bande passante  $\omega_c$  et de début de bande coupée  $\omega_s$ , sont dans un rapport  $\omega_s/\omega_c = 4/3, 4$ . On imposera respectivement  $\alpha < 0,017$  dB pour  $\omega < \omega_c$  et  $\alpha > 43$  dB pour  $\omega > \omega_s$ .

En introduisant (4.22) dans (2.72), on exprime l'affaiblissement du filtre de Butterworth. On résout cette expression pour les deux pulsations  $\omega_c$  et  $\omega_s$  en fonction des affaiblissements correspondants. Ces deux pulsations sont dans un rapport  $\omega_s/\omega_c$ , imposé par les exigences. On en déduit le degré  $n$  du polynôme de Butterworth approximant les exigences choisies. On prendra pour  $n$  la valeur entière immédiatement supérieure à la valeur calculée.

Appliqué à l'exemple choisi, le calcul nous donne un degré  $n = 34$  pour le filtre de Butterworth.

De même, en introduisant (4.41) et (4.52) dans (4.49), on résout l'expression par rapport au degré  $n$  en prenant pour  $|s_{12}|$  une valeur correspondant à l'affaiblissement en  $\omega_s$ . Il ne faut pas oublier que les expressions (4.41) et (4.52) sont normalisées pour une valeur  $\omega_c = 1$ . On prendra pour  $n$  la valeur entière immédiatement supérieure à la valeur calculée. On détermine ainsi le degré  $n$  du polynôme de Tchebycheff approximant les exigences choisies. Dans le cadre de cet exemple, le calcul nous donne un degré  $n = 15$ .



## MÉTHODES NUMÉRIQUES D'APPROXIMATION

### 5.1 APPROXIMATION POLYNOMIALE DE TCHEBYCHEFF

#### 5.1.1 Introduction

Le chapitre 4 traite de quelques problèmes simples d'approximation, qui possèdent des solutions analytiques. L'écriture de la fonction de réponse se résume à un calcul algébrique. Aussi longtemps que les exigences de filtrage sont simples, ou qu'elles peuvent être remplacées par des exigences simples, ces solutions analytiques suffisent.

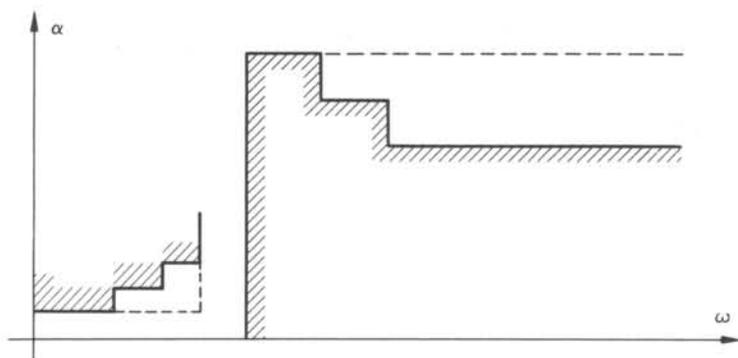


Fig. 5.1

Si l'on a des exigences plus compliquées, comme celles représentées à la figure 5.1, on peut encore les rencontrer en remplaçant les exigences réelles par celles représentées en pointillé. Cependant, il est clair qu'en exagérant les exigences, pour les rendre conformes à un problème plus simple admettant une solution analytique, on risque de définir un filtre de degré plus élevé que ce qui serait strictement nécessaire. Comme la dépense en éléments est proportionnelle au degré, on ne tire vraiment tout l'avantage d'une méthode de synthèse exacte, telle qu'elle est définie au chapitre 6, que si l'on résout au préalable le problème d'approximation, sans simplification abusive. Le but du présent chapitre est de présenter des méthodes qui permettent de vérifier des exigences quelconques de façon optimale.

Ce problème d'approximation numérique sera d'abord traité dans le cas du polynôme, et il sera ensuite étendu à des fonctions plus générales.

### 5.1.2 Définitions

Le *problème d'approximation* consiste à trouver une fonction d'une classe déterminée, qui soit la plus proche d'une fonction idéale. La fonction recherchée sera appelée *fonction approximante*, et la fonction que l'on désire approximer sera appelée la *fonction objectif*. On appelle *erreur* la différence entre la fonction approximante et la fonction objectif.

### 5.1.3 Exemple

Le module de la transmittance du filtre idéal défini au paragraphe 4.2.1 est une fonction objectif. La fonction approximante est le module d'une fraction rationnelle réelle le long de l'axe imaginaire. La fonction approximante ne peut pas coïncider avec la fonction objectif qui présente une discontinuité à la pulsation de coupure. La fonction objectif n'appartient pas à l'ensemble des fonctions approximantes, et il faut chercher, parmi celles-ci, laquelle s'en rapproche le plus selon un critère à définir.

### 5.1.4 Définition : critère de Tchebycheff

Une fonction approximante  $F(x)$  constitue une *approximation optimale au sens de Tchebycheff* d'une fonction objectif  $f(x)$ , sur un intervalle  $[a, b]$ , lorsque

$$E = \max |F(x) - f(x)|, \quad x \in [a, b] \quad (5.1)$$

est minimum par rapport à l'ensemble de fonctions  $F(x)$  admises. On dit encore qu'il s'agit d'un problème d'approximation *minimax*. La variable  $x$  est réelle.

### 5.1.5 Commentaire

Le choix du critère de Tchebycheff est typique des problèmes d'approximation posés en filtrage des signaux de télécommunication. Qu'il s'agisse d'exigences portant sur l'affaiblissement, la phase ou la réponse indicielle, on exige généralement que la caractéristique réelle ne s'écarte pas d'une fonction objectif de plus qu'une déviation maximale, sur un certain intervalle de temps ou de fréquence. Une approximation au sens des moindres carrés, qui est le critère traditionnel, ne rencontre pas les exigences de filtrage telles qu'elles sont formulées; il en est de même de l'interpolation qui est une solution encore plus simple : aucune de ces méthodes traditionnelles ne permet de contrôler l'écart maximum qui, en définitive, est le seul qui compte.

### 5.1.6 Définition

On appelle *approximation polynomiale* le problème où la fonction approximante est un polynôme. On notera par la suite  $P_n(x)$  un polynôme de degré  $n$ . La suite de la section 5.1 est exclusivement consacrée au problème d'approximation polynomiale.

### 5.1.7 Interpolation par un polynôme

Si l'on choisit un ensemble de  $(n + 1)$  abscisses distinctes  $x_k$ , et un ensemble correspondant de  $(n + 1)$  ordonnées  $y_k$ , il existe un seul polynôme  $P_n(x)$  tel que

$$P_n(x_k) = y_k, \quad k = 1, \dots, n + 1 \quad (5.2)$$

Si l'on explicite les coefficients inconnus de ce polynôme écrit sous la forme

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j \quad (5.3)$$

les conditions (5.2) reviennent à écrire le système linéaire de  $(n+1)$  équations aux  $(n+1)$  inconnues  $a_j$

$$\sum a_j x_k^j = y_k, \quad k = 1, \dots, n+1 \quad (5.4)$$

En considérant les  $x_k^j$  comme coefficients de ce système linéaire, la matrice  $M$  d'éléments  $m_{kj} = x_k^j$ , où  $j$  varie de 0 à  $n$  et  $k$  de 1 à  $(n+1)$ , a un déterminant de Vandermonde dont on démontre, en algèbre, qu'il vaut

$$\det M = \prod_{r>s} (x_r - x_s) \quad (5.5)$$

Il est différent de zéro, puisque les abscisses  $x_k$  sont supposées distinctes, et le système (5.4) admet donc une seule solution.

### 5.1.8 Formule d'interpolation

A partir des données  $x_k$  et  $y_k$ , on peut directement écrire le polynôme d'interpolation par la *formule de Lagrange*

$$P_n(x) = \sum_{r=1}^{n+1} y_r \left[ \prod_{k \neq r} \frac{x - x_k}{x_r - x_k} \right] \quad (5.6)$$

où le coefficient de chaque ordonnée  $y_r$  est une fraction rationnelle qui vaut 1 pour  $x = x_r$ , et 0 pour toute autre abscisse  $x_k$ . A chaque valeur des abscisses  $x_r$ , il prend donc bien la valeur  $y_r$ .

### 5.1.9 Définition

On appelle *référence*, pour le problème d'approximation polynomiale par  $P_n(x)$ , un ensemble quelconque de  $(n+2)$  abscisses distinctes. On notera, par la suite, ces abscisses  $x_j$ , avec  $j = 1, \dots, (n+2)$ , et  $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2}$ .

### 5.1.10 Commentaire

Le but final étant de contrôler l'erreur maximale commise sur un intervalle, l'idée consiste à s'occuper de l'erreur en  $(n+2)$  points. En effet, on sait que l'erreur peut être annulée en  $(n+1)$  points, mais cela ne nous intéresse pas vraiment, puisque l'annulation de l'erreur en ces points ne nous dit rien sur les maxima de l'erreur entre ces points. Ceci explique intuitivement pourquoi nous définissons une référence comme un ensemble de  $(n+2)$  points.

A titre d'exemple, la figure 5.2 montre l'erreur en fonction de  $x$  dans l'intervalle  $[a, b]$ . Le polynôme approximant de degré 3 permet d'annuler l'erreur en  $3+1=4$  points. L'ensemble de 5 points  $(a, c, d, e, b)$ , où l'erreur est maximale, constitue une référence possible qu'il est plus intéressant de considérer que l'ensemble des quatre points d'interpolation.

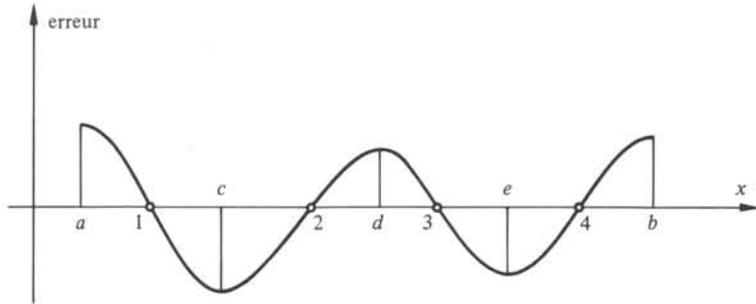


Fig. 5.2

### 5.1.11 Propriété : relation caractéristique

Les valeurs prises par un polynôme sur une référence sont liées par une relation linéaire, dont les coefficients ne dépendent que de la référence.

En effet, si  $P_n(x)$  prend les valeurs  $P_n(x_j)$  aux  $(n+1)$  premières abscisses de la référence, on pourra calculer la valeur prise en  $x_{n+2}$ , par (5.6), comme

$$P_n(x_{n+2}) = \sum_{j=1}^{n+1} P_n(x_j) \prod_{k \neq j}^{n+1} \frac{x_{n+2} - x_k}{x_j - x_k} \quad (5.7)$$

Si l'on multiplie chaque terme de la somme par un facteur  $(x_{n+2} - x_j)$  au numérateur et au dénominateur, (5.7) peut encore s'écrire

$$\sum_{j=1}^{n+2} \lambda_j P_n(x_j) = 0 \quad (5.8)$$

avec

$$\lambda_j = \left[ \prod_{k \neq j}^{n+2} (x_j - x_k) \right]^{-1} \quad (5.9)$$

### 5.1.12 Propriété

Les coefficients  $\lambda_j$  sont de signes alternés.

En effet, (5.9) donne, avec la notation du paragraphe 5.1.9,

$$\operatorname{sgn} \lambda_j = (-1)^{n-j} \quad (5.10)$$

Pour s'en convaincre, il suffit de vérifier que  $\operatorname{sgn} \lambda_{n+2} = 1$ , puisque  $x_{n+2}$  est supérieur aux autres  $x_j$ , et que tous les facteurs du produit (5.9) sont donc positifs. Pour  $x_{n+1}$ , le seul facteur  $(x_{n+1} - x_{n+2})$  est négatif, etc.

### 5.1.13 Définition

On appelle *polynôme de référence* un polynôme  $P_n(x)$  qui présente, aux abscisses d'une référence, des erreurs de signe alterné. Posons

$$k_j = P_n(x_j) - f(x_j) \quad (5.11)$$

où  $f(x)$  est la fonction objectif. Pour un polynôme de référence, on a donc, soit

$$\operatorname{sgn} k_j = \operatorname{sgn} \lambda_j \quad (5.12)$$

pour tous les points de la référence, soit

$$\operatorname{sgn} k_j = -\operatorname{sgn} \lambda_j \quad (5.13)$$

La figure 5.3 montre un exemple d'erreur présentée par un polynôme de référence.

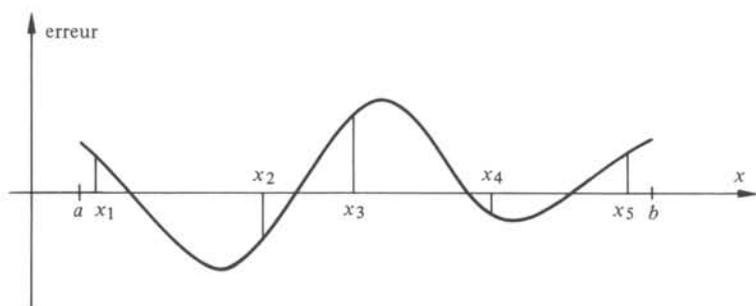


Fig. 5.3

#### 5.1.14 Définitions

Un *polynôme de référence nivelé* est un polynôme de référence dont les erreurs  $k_j$  sont identiques en valeur absolue à une valeur  $k$  appelée *déviante de référence*.

La figure 5.4 montre un exemple d'erreur présentée par un polynôme de référence nivelé.

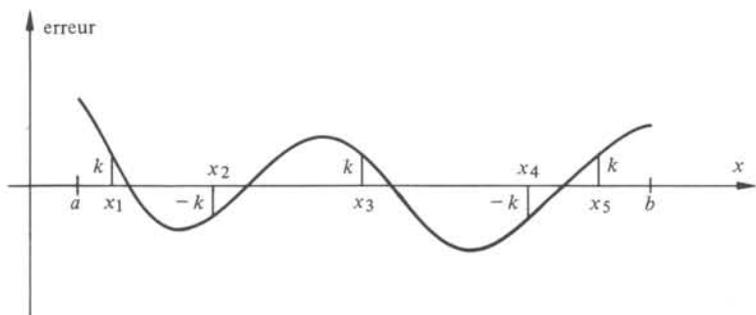


Fig. 5.4

#### 5.1.15 Propriété

La somme des  $\lambda_j k_j$  ne dépend que de la référence et de la fonction objectif: elle est indépendante du polynôme approximant.

En effet, par (5.11) et (5.8), il vient

$$\sum_{j=1}^{n+2} \lambda_j k_j = -\sum_{j=1}^{n+2} \lambda_j f(x_j) \quad (5.14)$$

Il importe de remarquer que cette formule est valable pour un polynôme quelconque de degré  $n$ . Il n'est pas nécessaire qu'il s'agisse d'un polynôme de référence.

### 5.1.16 Théorème de la moyenne pondérée

La déviation de référence est une moyenne pondérée des erreurs d'un polynôme de référence quelconque aux abscisses de la référence.

Pour un polynôme de référence quelconque, on a, par (5.12) ou (5.13), que tous les termes de la somme du premier membre de (5.14) sont de même signe. Dès lors, on peut écrire

$$\sum_{j=1}^{n+2} |\lambda_j| \cdot |k_j| = \left| \sum_{j=1}^{n+2} \lambda_j f(x_j) \right| \quad (5.15)$$

Pour un polynôme de référence nivelé, (5.15) s'écrit

$$k = \frac{|\sum \lambda_j f(x_j)|}{\sum |\lambda_j|} \quad (5.16)$$

Le numérateur de (5.16) peut être remplacé par le premier membre de (5.15), calculé pour un polynôme de référence quelconque. Il vient

$$k = \frac{\sum |\lambda_j| \cdot |k_j|}{\sum |\lambda_j|} \quad (5.17)$$

### 5.1.17 Construction du polynôme de référence nivelé

La formule (5.16) permet de calculer la déviation de référence  $k$  si l'on connaît la référence et la fonction objectif. Une fois qu'elle est calculée, on construit un ensemble de  $(n+1)$  ordonnées  $[f(x_j) \pm k \operatorname{sgn} \lambda_j]$ . Le double signe est déterminé à partir de (5.14) : si le second membre est positif, on choisit le signe  $+$ .

On construit, par la formule (5.6), le polynôme réalisant l'interpolation de ces  $(n+1)$  ordonnées. Grâce au choix de  $k$ , l'erreur à l'abscisse  $x_{n+2}$  vaudra également  $\pm k$ .

Comme le polynôme d'interpolation est unique, il en est de même du polynôme de référence nivelé.

La construction du polynôme de référence nivelé constitue une étape dans la résolution du problème de l'approximation polynomiale selon la norme de Tchebycheff. On s'intéresse à contrôler l'erreur en  $(n+2)$  points plutôt qu'à l'annuler en  $(n+1)$  comme dans le problème d'interpolation. Le problème n'est cependant pas encore résolu car, si l'on connaît l'erreur sur la référence, on ne sait rien de ce qu'elle est sur les autres points de l'intervalle.

### 5.1.18 Propriété

La déviation de référence est comprise entre le minimum et le maximum des erreurs en module sur la référence d'un polynôme de référence quelconque.

Si, dans (5.17), on remplace tous les  $|k_j|$  par le plus grand (ou le plus petit) d'entre eux, on trouve un second membre plus grand (plus petit) que  $k$  et, en simplifiant par  $\sum |\lambda_j|$ , il vient

$$\min |k_j| \leq k \leq \max |k_j| \quad (5.18)$$

Les signes d'égalité correspondent au seul cas où  $|k_j| = k, \forall j$ , c'est-à-dire quand le polynôme de référence est nivelé.

### 5.1.19 Propriété

La déviation de référence est inférieure au maximum en module de l'erreur d'un polynôme quelconque sur la référence.

Par (5.16) et (5.14), il vient

$$k = \frac{|\sum \lambda_j f(x_j)|}{\sum |\lambda_j|} = \frac{|\sum \lambda_j k_j|}{\sum |\lambda_j|} \quad (5.19)$$

Comme il ne s'agit pas nécessairement d'un polynôme de référence, les termes  $\lambda_j k_j$  ne sont pas tous de même signe. Le module de la somme est inférieur ou égal à la somme des modules, et l'on trouve

$$k \leq \frac{\sum |\lambda_j| |k_j|}{\sum |\lambda_j|} \leq \max |k_j| \quad (5.20)$$

### 5.1.20 Théorème d'unicité

Si l'erreur maximale en module d'un polynôme quelconque sur une référence donnée est égale à la déviation de référence, ce polynôme est le polynôme de référence nivelé.

Soit un polynôme  $P_n(x)$  tel que ses erreurs  $k_j$  obéissent à la relation

$$k = \max |k_j| \quad (5.21)$$

Sur la même référence, désignons par  $\tilde{P}_n(x)$  le polynôme de référence nivelé, dont les erreurs sont notées  $\tilde{k}_j = \pm k$ . On a donc

$$|\tilde{k}_j| \geq |k_j| \quad (5.22)$$

Dès lors, la différence  $(\tilde{k}_j - k_j)$  est de même signe que  $\tilde{k}_j$ , ou bien elle est nulle. Si la différence n'est pas nulle, il vient

$$\operatorname{sgn}(\tilde{k}_j - k_j) = \operatorname{sgn} \tilde{k}_j \quad (5.23)$$

Or, par (5.12) ou (5.13),  $\operatorname{sgn}(\lambda_j \tilde{k}_j)$  vaut, soit toujours 1, soit toujours -1. Par (5.23), il vient

$$\operatorname{sgn}[\lambda_j(\tilde{k}_j - k_j)] = +1 \text{ ou } -1 \quad (5.24)$$

Par le paragraphe 5.1.15, la somme pondérée des erreurs est un invariant. Dès lors,

$$\sum \lambda_j(\tilde{k}_j - k_j) = 0 \quad (5.25)$$

Comme tous les termes de la somme ont même signe, cela n'est possible que si  $k_j = \tilde{k}_j$ , c'est-à-dire si le polynôme en question est précisément le polynôme de référence nivelé.

### 5.1.21 Commentaire

Les deux derniers paragraphes ont permis de progresser dans la solution du problème qui nous occupe. On peut résumer ces résultats dans l'énoncé suivant : sur une référence donnée, l'approximation optimale au sens de Tchebycheff d'une fonction objectif est réalisée par le polynôme de référence nivelé. Tout autre polynôme présente en effet une erreur maximale plus grande que la déviation de référence.

Le seul élément qui nous manque encore est la propriété qui permette de passer du problème résolu, l'approximation optimale sur une référence, au problème à résoudre, l'approximation optimale sur un intervalle, selon le paragraphe 5.1.4. Cet élément est fourni par la propriété suivante.

### 5.1.22 Théorème de caractérisation

Si un polynôme de référence nivelé présente, sur un intervalle, une erreur maximale égale à sa déviation de référence, il constitue le polynôme réalisant l'approximation optimale, au sens de Tchebycheff, sur cet intervalle.

Soit  $E(x) = |P_n(x) - f(x)|$ , et  $k$  la déviation de référence de  $P_n(x)$  sur une référence  $x_j$ . Par hypothèse, on a

$$\max E(x) = k, \quad x \in [a, b] \quad (5.26)$$

Soit  $R_n(x)$  un polynôme quelconque et  $\eta(x) = |R_n(x) - f(x)|$ . Les erreurs de  $R_n(x)$  sur la référence valent  $\eta(x_j)$ . Le maximum de  $\eta$  sur l'intervalle est supérieur ou égal à l'erreur sur la référence, qui est elle-même supérieure, par la propriété 5.1.19, à la déviation de référence. On a donc

$$\max \eta(x) \geq \max \eta(x_j) \geq k = \max E(x) \quad (5.27)$$

Donc,  $P_n(x)$  présente *sur l'intervalle* une erreur inférieure à celle de tout autre polynôme.

A la figure 5.5, on a représenté l'erreur d'un polynôme obéissant à l'hypothèse de ce théorème. En comparant les figures 5.4 et 5.5, on comprendra mieux ce que le polynôme de référence considéré ici a de particulier.

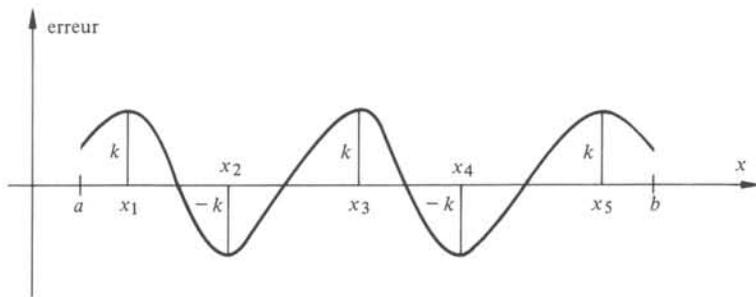


Fig. 5.5

### 5.1.23 Propriété

S'il existe un polynôme réalisant l'approximation optimale, au sens de Tchebycheff, d'une fonction objectif donnée sur un intervalle donné, il est unique.

En effet, dans la suite d'inégalités (5.27),  $\max \eta(x) = k$  seulement si  $\max \eta(x_j) = k$ , ce qui implique, par le paragraphe 5.1.20, que  $R_n(x)$  coïncide avec  $P_n(x)$ .

### 5.1.24 Définition

On appelle *déviante de Tchebycheff* la déviation de référence du polynôme réalisant l'approximation optimale. On la désignera par  $H$  dans la suite. Le polynôme correspondant sera appelé *polynôme optimal*.

### 5.1.25 Commentaire

Le théorème 5.1.23 constitue l'articulation essentielle qui permet d'établir un lien entre l'approximation sur un intervalle et l'approximation sur une référence. Le problème initial, formulé aux paragraphes 5.1.4 et 5.1.6, consistait à trouver un polynôme réalisant l'erreur minimale sur un intervalle. Ce problème est maintenant transformé en le suivant : comment trouver, dans un intervalle, une référence telle que le polynôme de référence nivelé y prenne son erreur maximale ?

Au lieu de chercher un polynôme, on cherche une référence. Si l'on prouve l'existence d'une telle référence, on prouve aussi l'existence du polynôme optimal.

### 5.1.26 Théorème d'échange

Pour une référence et un polynôme de référence donnés, il est toujours possible de choisir une abscisse quelconque, où l'erreur soit différente de zéro, et de la substituer à l'une des abscisses de la référence, de façon que le polynôme donné soit encore un polynôme de référence pour la nouvelle référence.

Soit  $x_j$  la référence et  $P_n(x)$  le polynôme. Dans un intervalle  $[a, b]$  contenant les points de la référence, soit une abscisse  $x_i$  qui n'appartient pas à la référence. Trois cas peuvent se présenter. Ou bien  $x_i$  est compris entre deux points de la référence,  $x_j$  et  $x_{j+1}$ , ou bien  $x_i < x_1$ , ou bien  $x_{n+2} < x_i$ .

Considérons l'erreur  $\epsilon(x) = f(x) - P_n(x)$ . Dans le premier cas,  $\epsilon(x_i)$  est, soit du signe de  $\epsilon(x_j)$  soit de celui de  $\epsilon(x_{j+1})$ , puisque ceux-ci sont opposés. Il suffit de substituer, dans la référence,  $x_i$  à celle des abscisses  $x_j$  ou  $x_{j+1}$  pour laquelle  $\epsilon$  a le même signe. Cette substitution est représentée à la figure 5.6 où  $x_2$  est remplacé par  $x'_2$ .

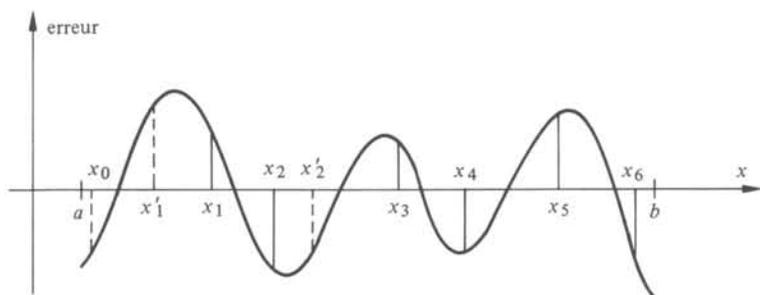


Fig. 5.6

Considérons ensuite le cas où la nouvelle abscisse est inférieure à  $x_1$ . De deux choses l'une : ou bien  $\epsilon(x_i)$  est du signe de  $\epsilon(x_1)$ , et  $x_i$  remplace  $x_1$  ; ou bien  $\epsilon(x_i)$  est du signe opposé à  $\epsilon(x_1)$  et, dans ce cas, on garde  $x_1$  et l'on supprime  $x_{n+2}$ . Le premier cas est celui où  $x'_1$  remplace  $x_1$ , et le second celui où  $x_0$  remplace  $x_6$ , à la figure 5.6.

Le cas où  $x_i > x_{n+2}$  se traite de façon analogue.

### 5.1.27 Algorithme d'échange

Le but de cet algorithme est de trouver une référence, pour une fonction objectif et un intervalle donnés, telle que le polynôme de référence correspondant vérifie le théorème de caractérisation 5.1.22.

- On choisit dans l'intervalle  $[a, b]$  une référence  $x_j$ . Un choix favorable pour la convergence de l'algorithme est constitué par les extrémités de l'intervalle et les abscisses des  $n$  extréma du polynôme de Tchebycheff de degré  $n$ , après normalisation de celui-ci à l'intervalle  $[a, b]$ .
- Par la méthode du paragraphe 5.1.17, on construit le polynôme de référence nivelé correspondant,  $P_n(x)$ . En général, l'erreur  $E(x)$  sur l'intervalle est supérieure à la déviation de référence  $k$ . Si elle ne l'était pas, le problème serait résolu.
- On cherche l'abscisse  $x_i$  pour laquelle  $|E(x)|$  est maximum.
- Par le théorème d'échange 5.1.26, on peut trouver une nouvelle référence,  $\tilde{x}_j$ , incluant  $x_i$ , telle que  $P_n(x)$  soit toujours un polynôme de référence (non nivelé). Les erreurs valent, soit  $E(x_i)$ , soit  $\pm k$ . Par (5.18),

$$|E(x_i)| > k \quad (5.28)$$

- On construit un nouveau polynôme de référence nivelé  $\tilde{P}_n(x)$  sur la référence  $\tilde{x}_j$ . Par suite de (5.18), il vient, pour la nouvelle déviation de référence  $\tilde{k}$ ,

$$k < \tilde{k} < |E(x_i)| \quad (5.29)$$

où les inégalités sont strictes, puisque  $P_n$  et  $\tilde{P}_n$  ont la même référence  $\tilde{x}_j$ , et que  $P_n$  n'est qu'un polynôme de référence *non nivelé*, dont l'erreur minimale vaut  $k$ .

On reprend ensuite à la troisième étape de cet algorithme jusqu'à trouver la référence cherchée. A chacune de ces itérations, on change donc de référence, et la déviation de référence croît. Il reste à démontrer la convergence de cet algorithme.

### 5.1.28 Convergence de l'algorithme d'échange

L'algorithme d'échange converge vers le polynôme optimal. Bien que cette propriété ne soit pas démontrée ici, on indiquera cependant la marche à suivre.

Si, pour deux itérations successives, on a  $k = \tilde{k} < H$ , on aurait, par (5.17),

$$\tilde{k} = \frac{\sum_{j \neq i} |\lambda_j| k + |\lambda_i| \cdot |E(x_i)|}{\sum |\lambda_j|} \quad (5.30)$$

et  $k$  ne peut être égal à  $\tilde{k}$  que si  $k = |E(x_i)|$ . Cela veut dire que l'erreur maximale sur l'intervalle est égale à  $k$ , ou encore que  $P_n(x)$  est le polynôme d'approximation optimale. Par les paragraphes 5.1.22 et 5.1.24, on a alors  $\tilde{k} = k = H$ .

Si, dans la suite des  $k$ , il n'y a pas deux termes successifs égaux, on peut néanmoins démontrer, par un argument plus compliqué, que les références convergent [13].

### 5.1.29 Commentaire

L'algorithme d'échange a pour effet d'engendrer une suite de polynômes de référence nivelés, dont les déviations de référence sont croissantes. En somme, pour minimiser l'erreur sur un intervalle, il faut trouver une référence sur laquelle l'erreur du polynôme de référence nivelé soit maximale : elle est, pour ce choix de référence, plus grande que ou égale à l'erreur relative à tout l'intervalle.

Tout ce qui accélère la procédure de maximisation de  $k$  constitue une amélioration de l'algorithme. La relation (5.29) montre que la nouvelle déviation de référence est plus grande que la plus petite des erreurs commise sur la nouvelle référence. Dans le cas de l'algorithme d'échange, ce minimum est égal à l'ancienne déviation de référence. Pour accélérer la convergence, il faudrait donc remplacer l'ancienne référence par une nouvelle référence dont les erreurs soient les plus grandes possibles.

### 5.1.30 Algorithme de Remez

- Choisir une référence initiale comme au paragraphe 5.1.27;
- construire le polynôme de référence nivelé;
- chercher sur l'intervalle les abscisses des extréma locaux de l'erreur;
- appliquer  $(n + 2)$  fois le théorème d'échange pour constituer une nouvelle référence, où chaque abscisse  $x_j$  de l'ancienne est remplacée par l'abscisse de l'extrémum local le plus proche, dont l'erreur est de même signe;
- itérer à partir de la seconde étape jusqu'à ce que  $k$  ne croisse plus.

### 5.1.31 Exemple

Soit la courbe d'erreur de la figure 5.7 correspondant à un polynôme de référence nivelé sur la référence  $x_1, \dots, x_6$ .

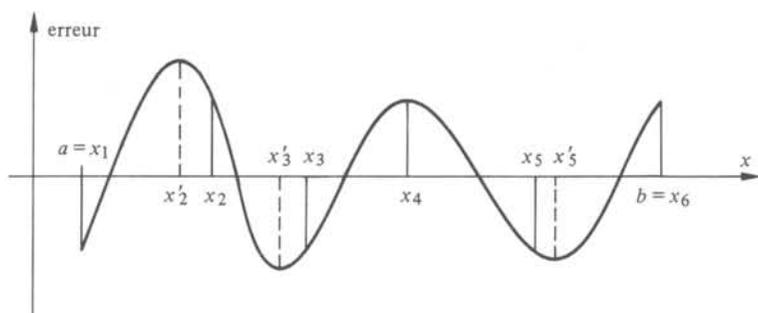


Fig. 5.7

Dans l'algorithme d'échange, on remplace simplement  $x_2$  par  $x'_2$ .

Dans l'algorithme de Remez,  $x'_2, x'_3$  et  $x'_5$  remplacent respectivement  $x_2, x_3$  et  $x_5$ .

## 5.2 APPROXIMATION DE TCHEBYCHEFF PAR UNE FONCTION NON POLYNOMIALE

### 5.2.1 Approximation par une fraction rationnelle

La fonction approximante  $F(x)$  de (5.1) est ici une fraction rationnelle réelle  $P_n(x)/Q_m(x)$ , où les degrés  $n$  et  $m$  sont fixés. On peut supposer, sans perte de généralité, que  $Q_m(x)$  est *monique*, c'est-à-dire que le coefficient de  $x^m$  est égal à l'unité : on peut toujours écrire une fraction rationnelle sous cette forme en divisant  $P_n(x)$  et  $Q_m(x)$  par le coefficient de  $x^m$ .

Les degrés de liberté d'un polynôme de degré  $n$  sont au nombre de  $(n + 1)$  : ce sont les coefficients. Dans le cas présent, la fraction rationnelle comporte  $(m + n + 1)$  paramètres inconnus, puisque  $Q_m(x)$  ne contient que  $m$  coefficients libres.

### 5.2.2 Théorème d'unicité et de caractérisation

Si la fonction objectif est continue sur l'intervalle, il existe, pour  $(m + n)$  fixé, une seule fraction rationnelle  $P_n(x)/Q_m(x)$  qui constitue une approximation optimale. Sauf dans certains cas dégénérés, l'erreur présente  $(n + m + 2)$  extréma locaux d'amplitudes égales et de signes alternants.

Nous ne démontrons pas ce théorème qui constitue une généralisation du théorème 5.1.22.

### 5.2.3 Interpolation par une fraction rationnelle

Il n'existe pas de formules analogues à celles de Lagrange pour les polynômes. On peut calculer les coefficients inconnus par résolution d'un système d'équations linéaires. Soit

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (5.31)$$

$$Q_m(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i \quad (5.32)$$

Si aux  $(m + n + 1)$  abscisses  $x_j$  la fraction rationnelle doit prendre les valeurs  $y_j$ , il faut résoudre le système constitué par les équations

$$\sum a_i x_j^i - y_j \sum b_i x_j^i = 0 \quad (5.33)$$

écrites en chacun des points d'interpolation. Ce système est linéaire en les  $(m + n + 1)$  inconnues  $a_i$  et  $b_i$ .

### 5.2.4 Recherche d'une fraction à erreurs alternées

Ce problème est analogue à celui résolu au paragraphe 5.1.7 pour le polynôme de référence nivelé. Cependant, il n'est pas possible ici de calculer par une formule explicite la déviation de référence. Le problème est de nature non linéaire.

Soit une référence constituée par  $(m + n + 2)$  abscisses distinctes  $x_j$ ,  $f(x)$  la fonction objectif, et  $k$  la déviation de référence inconnue. Les coefficients inconnus  $a_i$  et  $b_i$  sont solutions du système de  $(m + n + 2)$  équations, obtenu en écrivant

$$\sum a_i x_j^i - [f(x_j) + (-1)^j k] [\sum b_i x_j^i] = 0 \quad (5.34)$$

pour les abscisses de la référence. Ce système est non linéaire parce que l'inconnue  $k$  multiplie les inconnues  $b_i$ .

Un procédé pour le résoudre consiste à considérer le système de  $(m + n + 2)$  équations linéaires en les  $(m + n + 1)$  inconnues  $a_i$  et  $b_i$ , où  $k$  intervient donc dans les coefficients. Ce système n'admet de solution non nulle que dans la mesure où le déterminant est nul. Ce déterminant est un polynôme en l'inconnue  $k$  : ceci permet de trouver plusieurs valeurs de  $k$  vérifiant (5.34), pourvu que le polynôme admette des racines réelles.

### 5.2.5 Algorithme de Remez pour les fractions rationnelles

L'algorithme de Remez du paragraphe 5.1.30 peut être adapté au cas de la fraction rationnelle, en y remplaçant la construction du polynôme de référence nivelé par la recherche d'une fraction rationnelle selon le paragraphe 5.2.4.

Si l'approximation initiale est suffisamment proche de la solution, l'algorithme converge. Cette propriété de convergence ne sera pas démontrée.

### 5.2.6 Approximation par une fonction quelconque

Le problème consiste à généraliser les résultats, obtenus jusqu'à présent, au cas d'une fonction approximante,  $F(x)$ , qui dépend de façon non linéaire de  $(n+1)$  paramètres  $c_i$ . Un problème de ce type a été mentionné (§ 4.3.12). S'il faut approcher au sens de Tchebycheff la valeur finale de la réponse indicielle, la fonction approximante est du type  $\sum A_i \exp(p_i t)$ , où les paramètres inconnus sont les  $p_i$ .

Il n'existe, dans ce cas, aucune des propriétés d'unicité ou de caractérisation, qui ont permis d'élaborer, à la section 5.1, des algorithmes convergeant à coup sûr vers une solution unique caractérisée par l'alternance de  $(n+2)$  erreurs de même valeur absolue. Il n'est même plus possible d'affirmer qu'une erreur, prenant sa valeur maximum en  $(n+2)$  points correspond à une solution optimale. La solution proposée au paragraphe 4.4.9, pour l'approximation d'un retard constant, est arbitraire : on a découvert, plus tard [14], que des alternances non égalisées donnent une erreur moindre. Dans un problème d'approximation non linéaire, il faut prendre garde de ne pas considérer l'alternance de l'erreur égalisée comme une panacée.

Néanmoins, dans de nombreux cas, il apparaît que cette solution est favorable, et qu'un algorithme analogue à celui de Remez converge généralement. Il est difficile, voire impossible de démontrer que la solution trouvée est optimale : une analyse exhaustive de toutes les solutions possibles constitue un travail dont rien ne justifie le coût.

### 5.2.7 Algorithme de Remez généralisé

Soit  $f(x)$  la fonction objectif,  $F(c_i, x)$  la fonction approximante comportant  $(n+1)$  paramètres  $c_i$  à déterminer,  $k$  la déviation de référence inconnue, et  $x_j$  une référence initiale. Le problème consiste à trouver un ensemble de  $c_i$  et  $k$ , tel que les  $(n+2)$  équations

$$f(x_j) - F(c_i, x_j) = (-1)^j k \quad (5.35)$$

soient vérifiées.

On introduit les notations matricielles suivantes :  $f(x)$  est le vecteur colonne des  $(n+2)$  valeurs  $f(x_j)$ ;  $F(c, x)$  le vecteur colonne des  $(n+2)$  valeurs  $F(c_i, x_j)$ ;  $c$  est le vecteur colonne des  $(n+1)$  valeurs  $c_i$ ;  $K$  est le vecteur colonne dont les éléments valent alternativement  $-k$  et  $+k$ ;  $A$  est le jacobien dont l'élément  $a_{ji}$  vaut  $\partial F(c_i, x_j) / \partial c_i$ .

Avec ces notations, (5.35) s'écrit

$$f(x) - F(c, x) = K \quad (5.36)$$

Le système est vérifié lorsque  $c$  et  $K$  correspondent à la solution optimale.

Si l'on part d'une approximation initiale pour laquelle (5.36) n'est pas vérifié, on peut se rapprocher de la solution optimale en remplaçant  $c$  par  $c + \Delta c$ , en désignant

par  $\Delta c$  la modification inconnue de  $c$  nécessaire pour vérifier (5.36). On a

$$f(x) - F(c + \Delta c, x) = K \quad (5.37)$$

ou encore, après développement en série de Taylor limité au premier terme,

$$f(x) - F(c, x) - A \cdot \Delta c = K \quad (5.38)$$

qui constitue un système linéarisé en les inconnues  $\Delta c$  et  $K$ . En itérant ce calcul, on obtient finalement une erreur alternante sur une référence donnée. En somme, le calcul décrit équivaut à la construction du polynôme de référence nivelé du paragraphe 5.1.17, qui constitue la deuxième étape de l'algorithme de Remez décrit au paragraphe 5.1.30.

L'algorithme de Remez généralisé comporte donc deux itérations. L'une, l'*itération externe*, suit le schéma du paragraphe 5.1.30; l'autre, l'*itération interne*, est nécessaire pour obtenir, à chaque cycle de la première, une solution à la deuxième étape.

## 5.3 CALCUL DES PÔLES-IMAGE

### 5.3.1 Introduction

Aux paragraphes 3.3.2 et 3.5.7, on a montré comment la conception d'un filtre selon les paramètres-image se résume à l'addition de plusieurs gabarits convenablement disposés, pour couvrir les exigences d'affaiblissement en bande coupée. Dès lors que la position des pôles-image est fixée, la structure du filtre et la valeur des éléments s'en déduit.

La méthode des gabarits peut naturellement être utilisée de façon intuitive et approximative. Néanmoins, on peut la traiter comme un problème d'approximation énoncé comme suit.

Les données sont les exigences minimales d'affaiblissement dans la ou les bandes coupées définies par leurs limites; éventuellement, certains pôles-image ont une position fixée. Les pôles d'affaiblissement-image, dont la position est à choisir, sont désignés, par la suite, comme *pôles mobiles*: on désignera par  $\eta_{\infty i}$ , avec  $i = 1, \dots, n$ , la valeur de la pulsation correspondante dans le plan de la variable  $\eta$  donnée par (3.47) et (3.97);  $\eta_{\infty}$  est le vecteur des  $\eta_{\infty i}$ . On demande de déterminer la position des pôles mobiles, de façon que le nombre de ceux-ci soit le minimum qui donne à toute fréquence une différence positive entre l'affaiblissement-image et les exigences minimales.

Malgré l'analogie évidente de ce problème avec ceux résolus aux sections 5.1 et 5.2, il s'en distingue par deux traits. D'une part, il faut maximiser le minimum d'une différence entre deux fonctions, plutôt que de minimiser une différence maximale comme au paragraphe 5.1.4. D'autre part, la différence doit demeurer positive et non pas alterner.

On désignera, dans cette section, par  $f(\eta)$ , les exigences transposées dans le plan de la variable  $\eta$ , et par  $F(\eta_{\infty}, \eta)$ , la somme des gabarits (3.52).

### 5.3.2 Définition

On appelle *arc* un intervalle de l'axe  $\eta$  limité par deux pôles  $\eta_{\infty}$  mobiles, ou par un pôle mobile et la limite d'une bande coupée.

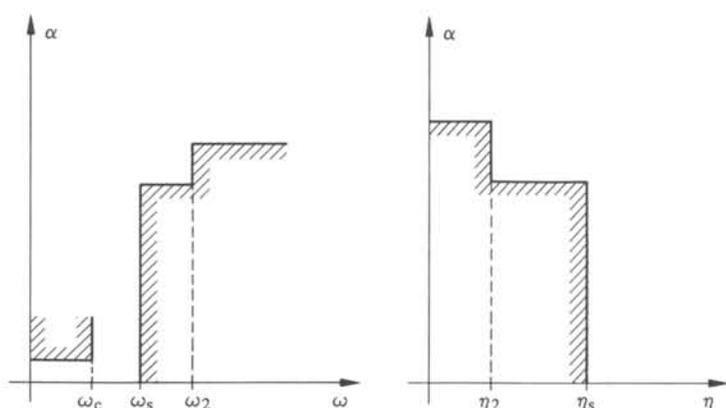


Fig. 5.8

Dans le cas du passe-bas, représenté à la figure 5.8, les  $n$  pôles mobiles et les limites 0 et  $\eta_s$  de la bande coupée déterminent  $(n + 1)$  arcs.

Dans le cas du passe-bande, représenté à la figure 5.9, les limites considérées des bandes coupées sont  $\eta_{+s}$  et  $\eta_{-s}$ . Il y aura aussi  $(n + 1)$  arcs, mais l'un d'entre eux enjambera l'intervalle  $[-\eta_0, \eta_0]$ .

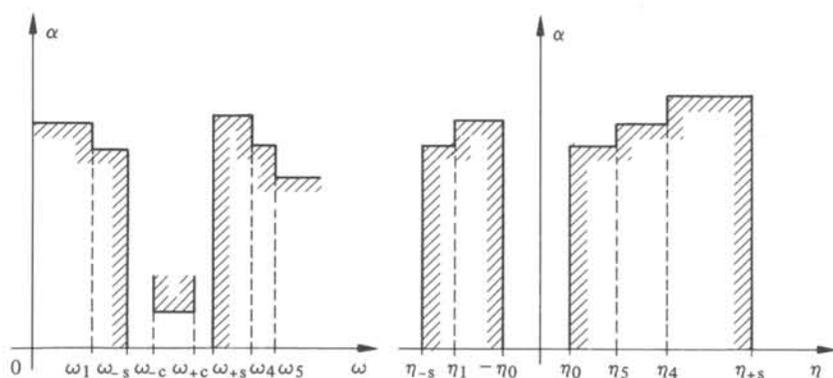


Fig. 5.9

### 5.3.3 Théorème de caractérisation

La fonction  $F(\eta_\infty, \eta)$ , telle que le minimum de  $[F(\eta_\infty, \eta) - f(\eta)]$  soit maximum, est caractérisée par des minima égaux sur chaque arc, et elle est unique.

Ce théorème ne sera pas démontré ici [15].

Comme les pôles fixes ne déterminent pas des arcs selon la définition du paragraphe 5.3.2, les minima locaux, résultant de la présence de ces pôles, ne sont pas égalisés.

Il en est de même dans le cas du passe-bande, où l'arc enjambant l'intervalle  $[-\eta_0, \eta_0]$  comporte un minimum non égalisé.

Les minima non égalisés sont supérieurs aux minima égalisés.

### 5.3.4 Formule d'estimation

A priori, on ignore le nombre  $n$  de pôles mobiles nécessaires pour couvrir les exigences. L'algorithme permettra de le déterminer de façon précises;  $n$  est le plus petit entier tel que  $(n - 1)$  pôles mobiles donnent une différence égalisée qui soit négative.

Néanmoins, il est utile de démarrer l'algorithme avec une approximation initiale donnée par la formule empirique

$$n + n_f = \frac{0,115 \alpha_s + \ln 2}{\ln \coth \left| \frac{\eta_{-s} - \eta_{+s}}{2} \right|} \quad (5.39)$$

où  $n_f$  est le nombre de pôles fixes, et  $\alpha_s$  une moyenne de l'affaiblissement exprimé en dB, qui est exigé dans la ou les bandes coupées. Pour le passe-bas,  $\eta_{-s} = 0$ .

Pour l'approximation initiale, les pôles mobiles sont répartis uniformément dans la ou les bandes coupées, sur l'axe  $\eta$ .

### 5.3.5 Algorithme

On calcule les  $(n + 1)$  abscisses  $\eta_j$  pour lesquelles se produisent les minima locaux pour chaque arc, ainsi que la valeur des écarts entre  $F(\eta_\infty, \eta_j)$  et  $f(\eta_j)$ .

- On recherche une nouvelle position des pôles mobiles, dénotés  $\tilde{\eta}_\infty$ , et un écart  $k$  tel que les écarts aux abscisses  $\eta_j$  lui soient égaux. On résoud le système de  $(n + 1)$  équations

$$F(\tilde{\eta}_\infty, \eta_j) - f(\eta_j) = k \quad (5.40)$$

Ce système est linéarisé en introduisant le développement en série de Taylor

$$F(\tilde{\eta}_\infty, \eta) = F(\eta_\infty, \eta) + \sum_i \frac{\partial F}{\partial \eta_{\infty i}} \Delta \eta_{\infty i} \quad (5.41)$$

En appliquant la formule (5.41) au système d'équations (5.40), on obtient un système linéaire aux  $(n + 1)$  inconnues  $\Delta \eta_{\infty i}$  et  $k$ ;

- on peut itérer l'étape précédente jusqu'à obtenir la solution de (5.40), ou se satisfaire de l'approximation de  $\tilde{\eta}_\infty$ , constitué par la résolution du système linéarisé;
- on calcule les nouvelles abscisses  $\tilde{\eta}_j$ , correspondant aux  $(n + 1)$  minima locaux sur chaque arc, ainsi que les écarts correspondants;
- si tous ces écarts sont négatifs, on augmente  $n$  d'une unité, et l'on recommence l'algorithme depuis le début;
- sinon, on reprend le calcul à la deuxième étape, et l'on itère jusqu'à ce que les  $\Delta \eta_{\infty i}$  tombent en dessous d'une certaine limite.

### 5.3.6 Convergence

La convergence de l'algorithme est garantie [15], pourvu que les pôles mobiles et les abscisses des extréma soient entrelacés de la même façon avant et après le passage de  $\eta_\infty$  à  $\tilde{\eta}_\infty$ . Ceci implique que l'on impose éventuellement un déplacement limité à une valeur inférieure à  $\Delta \eta_{\infty i}$ .

Dans le cas du passe-bande, le résultat d'une itération peut imposer à un pôle mobile de se situer entre  $-\eta_0$  et  $\eta_0$ , intervalle de l'axe  $\eta$  qui ne correspond pas à l'axe imaginaire. Le pôle est, dans ce cas, gelé, soit en  $-\eta_0$ , soit en  $\eta_0$ , et traité comme un pôle fixe lors de l'itération suivante.

## 5.4 APPROXIMATION DE L'AFFAIBLISSEMENT

### 5.4.1 Introduction

Le problème traité dans cette section est plus compliqué que celui qui a été résolu à la section 5.3. En effet, les exigences sur l'affaiblissement effectif portent, non seulement sur un minimum en bande coupée, mais aussi sur un maximum en bande passante. La fonction approximante est une fraction rationnelle; plus précisément, le module d'une fraction rationnelle de la variable complexe, calculé sur l'axe imaginaire. Les inconnues sont les zéros des polynômes  $f$  et  $h$ , normalement situés sur l'axe imaginaire, où ils déterminent les pôles et les zéros d'affaiblissement.

### 5.4.2 Définition

On appelle *marge de la bande passante* la différence minimale entre l'affaiblissement toléré et l'affaiblissement effectif du filtre.

On appelle *marge de la bande coupée* la différence minimale entre l'affaiblissement effectif du filtre et l'affaiblissement exigé.

L'affaiblissement effectif, dont il est question, correspond aux valeurs nominales des éléments idéaux du filtre. L'effet des tolérances sur la valeur des éléments et celui des parasites (pertes et capacités parasites des bobines, etc.) n'est pas pris en considération.

### 5.4.3 Commentaire

L'existence de deux marges différentes pose un problème dans la définition de l'approximation optimale. Cela n'a pas de sens d'exiger que la marge, exprimée en valeur absolue, soit la même dans les deux bandes. En effet, les exigences usuelles diffèrent par leurs ordres de grandeur: l'affaiblissement maximum dans la bande passante est de quelques dixièmes de dB; l'affaiblissement minimum dans la bande coupée est de quelques dizaines de dB; l'affaiblissement effectif ne peut pas tomber en dessous de zéro en bande passante; il peut tendre vers l'infini en bande coupée. Dès lors, la marge en bande passante doit rester inférieure à l'ondulation, alors qu'elle peut prendre n'importe quelle valeur en bande coupée.

Par ailleurs, on montrera (§ 7.4.5) que l'effet des imperfections sur les éléments est particulièrement sensible dans la bande passante, près des fréquences de coupure. Dès lors, il est d'usage de se créer une marge aussi grande que possible dans la bande passante, en vérifiant tout juste les exigences en bande coupée ou en précisant d'emblée une marge réaliste de l'ordre de quelques dB.

### 5.4.4 Caractérisation de la solution

Soient  $n_f$  et  $n_h$  respectivement le nombre des paires de racines mobiles de  $f$  et  $h$ . La solution optimale comportera  $(n_h + 1)$  maxima de l'affaiblissement pour lesquels la

marge de la bande passante est atteinte, et  $(n_f + 1)$  minima pour lesquels est atteinte la marge de la bande coupée. Le reste de la section sera consacré à la détermination de cette solution.

Cette caractérisation de la solution optimale est classique; elle repose sur l'hypothèse fautive qu'en chaque point où la marge est atteinte, l'effet des imperfections sur les éléments est le même. On verra que l'effet est d'autant plus sensible que l'on se rapproche de la pulsation de coupure. Il est préférable de tenir compte de cette variation si l'on veut éviter que les tolérances et les parasites acceptables sur les éléments soient déterminés par la marge en une seule fréquence. Ce problème sera discuté au paragraphe 7.4.5, parce qu'il ne peut être résolu qu'après synthèse du filtre et analyse de la sensibilité.

#### 5.4.5 Transformation de fréquence

On introduira une transformation de fréquence qui permet de résoudre simplement les problèmes où les exigences sont constantes, soit en bande passante, soit en bandes coupées.

Dans le cas du passe-bas, on pose

$$z = -\sqrt{p^2/(p^2 + \omega_c^2)} \quad (5.42)$$

où  $\omega_c$  est la pulsation de coupure.

Dans le cas du passe-bande, on pose

$$z = -\sqrt{\frac{\omega_{+c} \cdot p^2 + \omega_{+c}^2}{\omega_{-c} \cdot p^2 + \omega_{-c}^2}} \quad (5.43)$$

où  $\omega_{+c}$  et  $\omega_{-c}$  sont les pulsations de coupure.

Dans les deux cas, on s'intéresse au demi-plan défini par  $\text{Re } z \leq 0$ . Par comparaison avec (3.47) et (3.91), on a

$$z = -\exp \eta \quad (5.44)$$

La figure 5.10 représente la transformation (5.42). La bande passante  $|\omega| < \omega_c$  est transformée en la totalité de l'axe imaginaire de  $z$ . La bande coupée et l'axe réel de  $p$  deviennent l'axe réel de  $z$ .

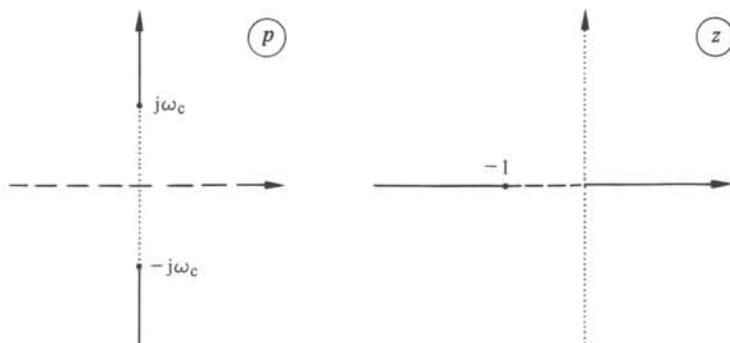


Fig. 5.10

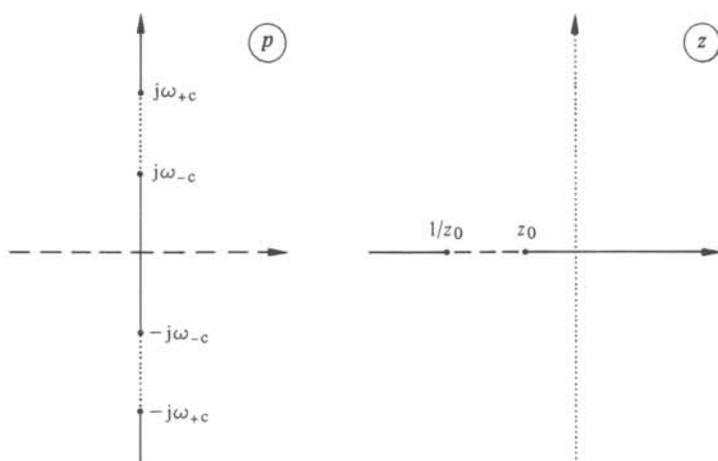


Fig. 5.11

De même, la figure 5.11 représente la transformation (5.43) qui, comme la précédente, étale la bande passante sur la totalité de l'axe imaginaire. L'axe réel de  $p$  s'inscrit sur la portion de l'axe réel de  $z$  comprise entre

$$z_0 = -\sqrt{\omega_{-c}/\omega_{+c}} \quad \text{et} \quad 1/z_0 = -\sqrt{\omega_{+c}/\omega_{-c}}$$

Rappelons qu'il y a une différence entre les pulsations de coupure au sens des paramètres-image et les limites de bande passante au sens des paramètres effectifs. Dans le cas présent  $\omega_c$ ,  $\omega_{+c}$  et  $\omega_{-c}$  sont définis au sens des paramètres effectifs selon le paragraphe 1.2.1.

#### 5.4.6 Propriété

Soit  $D(z)$  un polynôme strictement hurwitzien de degré  $n$ . La fraction rationnelle

$$R(z^2) = \frac{(D + D_*)^2}{4DD_*} \quad (5.45)$$

a un module qui oscille  $2n$  fois entre 0 et 1, le long de l'axe imaginaire.

On peut récrire (5.45) sous la forme

$$R(z^2) = \left[ \frac{D + D_*}{2D} \right] \left[ \frac{D + D_*}{2D} \right]_* \quad (5.46)$$

qui est le module au carré d'une fonction sur l'axe imaginaire et qui est donc positif ou nul. Les zéros de  $R(z^2)$  sont les zéros de  $D + D_*$ , partie réelle de  $2D$  qui sont tous situés sur l'axe imaginaire selon le paragraphe 2.1.22.

On peut récrire (5.45) sous la forme

$$R(z^2) = 1 - \left[ \frac{D - D_*}{2D} \right] \left[ \frac{D - D_*}{2D} \right]_* \quad (5.47)$$

qui par le même raisonnement est inférieur ou égal à l'unité. On a  $R(z^2) = 1$  pour les zéros de  $D - D_*$ , partie impaire de  $2D$ , qui sont tous sur l'axe imaginaire et qui alternent avec les zéros de  $D + D_*$ .

On vérifiera à titre d'exercice, selon la parité de  $n$ , que, dans tous les cas, il y a bien  $2n$  oscillations entre 0 et 1.

#### 5.4.7 Caractéristique d'affaiblissement oscillante

Le but de ce paragraphe est de construire le polynôme  $h$ , correspondant à un polynôme  $f$  arbitraire, de façon que l'affaiblissement dans la bande passante oscille le plus grand nombre de fois entre deux valeurs 0 et  $\alpha_{\max}$ .

On peut écrire

$$\alpha = 10 \log \left[ 1 + \frac{hh_*}{ff_*} \right]_{p=j\omega} = 10 \log [1 + K(z^2)]_{z=j\omega} \quad (5.48)$$

Si l'on choisit  $K(z^2) = kR(z^2)$ , avec  $R(z^2)$  du type (5.45), il en résultera que  $\alpha$  oscilera  $2n$  fois entre les valeurs 0 et  $\alpha_{\max} = 10 \log(1+k)$ . Ce nombre d'oscillations est maximal pour le degré choisi et ne dépend pas du choix des racines  $z_i$  de  $D(z)$ .

Les racines  $z_i$  sont les transformées, par (5.42) ou (5.43), des racines de  $f(p)$ . Elles sont donc placées, soit dans l'intervalle  $[-\infty, -1]$  (passe-bas), soit dans les intervalles  $[-\infty, 1/z_0]$  et  $[z_0, 0]$  (passe-bande).

Connaissant les  $z_i$ , on peut construire  $D(z)$ , qui est un polynôme hurwitzien. Sa partie paire constitue le numérateur de  $R$ ; comme la partie paire d'un polynôme hurwitzien a toutes ses racines sur l'axe imaginaire, dans le plan  $p$ , les racines correspondantes seront toutes situées dans la bande passante.

#### 5.4.8 Filtre de référence

Le but de ce paragraphe est de donner un procédé de calcul de la position des racines de  $f$ , compte tenu du fait que l'affaiblissement désiré en bande passante est oscillant.

De (5.45) et (5.48), on déduit

$$\alpha = 10 \log \left| 1 + \frac{k}{2} + \frac{k}{4} \frac{D}{D_*} + \frac{k}{4} \frac{D_*}{D} \right| \quad (5.49)$$

L'affaiblissement correspondant à la bande coupée s'étudie en considérant les intervalles  $[-\infty, 1/z_0]$  et  $[z_0, 0]$  pour le passe-bande,  $[-\infty, -1]$  pour le passe-bas. Dans ces intervalles sont situées les racines  $z_i$ , pour lesquelles  $D(z) = 0$ . En ces points, le dernier terme de la somme (5.49) tend vers l'infini: il s'agit bien des pôles d'affaiblissement. Dans ces intervalles, ce terme domine nettement les autres, et l'on peut écrire de façon approchée

$$\alpha = 10 \log \frac{k}{4} + 10 \log \left| \frac{D_*}{D} \right| \quad (5.50)$$

Par (5.44), on en déduit

$$\alpha = 10 \log \frac{k}{4} + 10 \sum \log \left| \coth \frac{\eta - \eta_i}{2} \right| \quad (5.51)$$

Dès lors, on peut utiliser les méthodes de la section 5.3 pour déterminer la position des  $\eta_i$ .

Ce procédé est appelé *méthode du filtre de référence*. Ce filtre de référence est le filtre conçu selon la méthode des paramètres-image et possédant les mêmes pôles d'affaiblissement. L'expression (5.51) montre qu'en bande coupée, le filtre à comportement oscillant dans la bande passante et le filtre de référence ont même affaiblissement à un terme constant près,  $10 \log(k/4)$ , d'autant plus grand que l'oscillation tolérée dans la bande passante est grande.

#### 5.4.9 Algorithme d'approximation pour un affaiblissement oscillant dans la bande passante

Ce paragraphe résume les résultats des paragraphes précédents. La méthode s'applique à des exigences de filtrage constantes dans la bande passante. Les étapes sont les suivantes :

- soustraire aux exigences en bande bloquée l'affaiblissement  $[10 \log(k/4)]$ ;
- chercher la position des pôles  $\eta_i$  selon l'algorithme du paragraphe 5.3.5;
- par (5.44) calculer la position correspondante des  $z_i$ ;
- calculer le polynôme  $D(z) = \prod (z - z_i)$ ;
- calculer les racines  $\tilde{z}_j$  de sa partie paire;
- pour (5.42) ou (5.43), calculer les valeurs des racines de  $f$  à partir des  $z_i$ , et des racines de  $h$  à partir des  $\tilde{z}_j$ .

#### 5.4.10 Définition

Deux filtres sont *complémentaires* si les polynômes  $h$  et  $f$  de l'un sont les polynômes  $f$  et  $h$  de l'autre. En d'autres mots, l'un a des zéros d'affaiblissement là où l'autre a des pôles d'affaiblissement.

Il résulte de cette définition que le filtre complémentaire d'un passe-bas est un passe-haut, et celui d'un passe-bande est un coupe-bande.

#### 5.4.11 Commentaire

Il ne faut pas confondre cette transformation par complémentarité avec la transformation de fréquence exposée au paragraphe 1.2.3.

A titre d'exemple, un passe-bas, dont l'affaiblissement approche une constante dans la bande passante, devient :

- par transformation de fréquence, un passe-haut dont l'affaiblissement approche une constante dans la bande passante;
- par complémentarité, un passe-haut dont l'affaiblissement approche une constante dans la bande coupée.

#### 5.4.12 Approximation d'exigences constantes dans la bande coupée

En utilisant le concept de complémentarité, on peut modifier l'algorithme du paragraphe 5.4.9, pour rencontrer des exigences constantes en bande coupée et quelconques en bande passante :

- identifier les exigences d'affaiblissement  $\alpha$  du filtre demandé avec les exigences

d'affaiblissement de réflexion  $\alpha_r$  du filtre complémentaire, c'est-à-dire l'affaiblissement calculé à partir de  $s_{11}$  ;

- calculer par la relation d'unitarité les exigences d'affaiblissement sur le filtre complémentaire : elles sont constantes en bande passante ;
- utiliser l'algorithme du paragraphe 5.4.9 pour trouver les polynômes  $f$  et  $h$  du filtre complémentaire ;
- intervertir ces polynômes pour obtenir le filtre désiré.

#### 5.4.13 Approximation directe d'exigences quelconques

Si les exigences ne sont constantes, ni en bande passante, ni en bande coupée, il faut recourir à une approximation directe dans le plan  $p$ . Pour obtenir une bonne approximation initiale, il est opportun de procéder à un premier calcul portant sur des exigences modifiées de façon à être constantes dans une bande. L'algorithme, décrit ci-dessous, ne converge que si l'approximation initiale est bonne. Il porte alternativement sur les racines de  $h$  et de  $f$ .

On désigne par  $\alpha_s(\omega)$  la courbe sur laquelle doivent se situer les maxima de  $\alpha$  en bande passante, par  $\alpha(\omega)$  l'affaiblissement nominal et par  $r(\omega) = \alpha_s - \alpha$  les écarts :

- calculer les abscisses  $\omega_i$  des maxima de  $\alpha$  dans la bande passante ;
- calculer les écarts  $r(\omega_i)$  ;
- calculer les corrections sur les racines  $\omega_j$  de  $h$  et sur le facteur d'échelle  $K$ , pour compenser les écarts par le système linéarisé

$$\Sigma \frac{\partial \alpha(\omega_i)}{\partial \omega_j} \Delta \omega_j + \frac{\partial \alpha(\omega_i)}{\partial K} \Delta K = r(\omega_i) \quad (5.53)$$

Ce calcul est itéré jusqu'à ce que les  $r(\omega_i)$  deviennent inférieurs à une borne donnée.

On choisit maintenant la courbe  $\alpha_s(\omega)$  sur laquelle doivent se situer les minima de  $\alpha$  en bande coupée. On procède de façon analogue pour optimiser les racines de  $f$ . On alterne les processus en bandes passante et coupée.

#### 5.4.14 Exemple : filtre passe-bas

A la figure 1.2, on a représenté des exigences typiques imposées à l'affaiblissement d'un filtre passe-bas. Cet affaiblissement a été obtenu au moyen d'un programme de calcul qui approxime le module d'une fonction rationnelle suivant l'algorithme de Remez décrit dans ce chapitre.

Pour une raison déjà exposée au paragraphe 1.1.13, ce sont des exigences plus sévères que celles de la figure 1.2, qui ont été imposées au programme. De plus, sur la figure 1.2, on constate que l'on a choisi des exigences non constantes qui sont plus sévères au voisinage de la limite de bande passante que dans le reste de la bande passante.

Les racines du polynôme  $f$ , normalisées pour un fonctionnement à une pulsation de coupure  $\omega_c$  de 1 rad/s sont les suivantes :

constante de  $f = 0,04257241$

racines:  $0 \pm j 1,187 605$

$0 \pm j 1,347 198$

$0 \pm j 2,119 613$

les racines du polynôme  $h$  normalisées sont :

constante de  $h = -1$   
 racines:  $0 \pm j 0,5640972$   
 $0 \pm j 0,8926198$   
 $0 \pm j 0,9887139$   
 0

les racines du polynôme  $g$  normalisées sont :

constante de  $g = 1$   
 racines:  $-0,0434247 \pm j 1,0442245$   
 $-0,1750475 \pm j 0,9763980$   
 $-0,4411509 \pm j 0,7027691$   
 $-0,6616284$

Le module de  $|s_{12}| = |f/g|$  est représenté à la figure 1.2.

Le degré du polynôme  $g$  est 7. A ce sujet, il est intéressant de comparer les résultats ci-dessus avec l'approximation analytique des mêmes exigences, telle qu'elle a été proposée au paragraphe 4.4.10, où le polynôme  $g$  avait un degré de 15 et de 34 respectivement pour une approximation au moyen de polynômes de Tchebycheff et de Butterworth.

#### 5.4.15 Exemple : filtre passe-bande

A la figure 6.26, on a représenté des exigences typiques imposées à un filtre passe-bande. On propose de déterminer, par les méthodes décrites au paragraphe 5.4.14, une fonction approximante de ces exigences. En plus des contraintes portant sur l'affaiblissement de la fonction approximante, le programme doit respecter des conditions inhérentes à la structure du filtre que l'on synthétisera par la suite au paragraphe 6.3.17. Ces conditions, décrites au chapitre 6, influencent en particulier le nombre et la position des racines des polynômes  $f$  et  $h$ . Il en résulte que la fonction approximante n'est pas unique et que les solutions possibles peuvent varier avec le type d'exigences. Dans cet exemple, les exigences sont plus sévères en bande coupée inférieure qu'en bande coupée supérieure. La justification du choix de la solution proposée dans cet exemple, apparaîtra au paragraphe 6.3.17. Les racines des polynômes  $f$ ,  $g$  et  $h$  ont été normalisées par un facteur  $2\pi \cdot 14\,000$ , correspondant à une pulsation centrale dans la bande passante.

Le module de  $|s_{12}| = |f/g|$  est représenté à la figure 6.26. Le degré du polynôme  $g$  est 10. A ce sujet, il est intéressant de comparer la caractéristique d'affaiblissement de la figure 6.26 avec celle de la figure 1.10, où l'on a rencontré les mêmes exigences en transformant un filtre passe-bas par la méthode du paragraphe 1.2.6. Cette transformation avait abouti à un filtre de degré 12.

Pour le polynôme  $f$ , on a :

constante 0,008739226  
 racines  $0 \pm j 0,8109702$   
 $0 \pm j 0,7633449$   
 $0 \pm j 1,17438$   
 0

Pour le polynôme  $h$ , on a :

constante + 1

racines  $0 \pm j0,8565888$   
 $0 \pm j0,8843242$   
 $0 \pm j0,9510570$   
 $0 \pm j1,039443$   
 $0 \pm j1,093482$

Pour le polynôme  $g$ , on a :

constante + 1

racines  $-0,008553186 \pm j0,849282$   
 $-0,01897522 \pm j1,109219$   
 $-0,06461241 \pm j1,052232$   
 $-0,03366214 \pm j0,8720990$   
 $-0,06863930 \pm j0,9420637.$

## SYNTHÈSE DES BIORTES LC EN ÉCHELLE ENTRE TERMINAISONS RÉSISTIVES

### 6.1 FACTORISATION DE LA MATRICE DE TRANSFERT

#### 6.1.1 Définition du problème

La méthode des paramètres-image, exposée au chapitre 3, mélange inextricablement les problèmes d'approximation et de synthèse. La section 3.2 montre qu'au fur et à mesure que l'on ajoute des gabarits d'affaiblissement, afin de satisfaire les exigences en bande coupée, on synthétise automatiquement le filtre. En effet, une cellule en  $m$ -dérivé est entièrement déterminée par le seul choix de la position du pôle d'affaiblissement, puisque la fréquence de coupure doit être la même pour toute la chaîne-image. Dès lors, il apparaît que le procédé d'approximation par les gabarits résout simultanément le problème de la synthèse.

En paramètres effectifs, la distinction entre les deux phases de conception du filtre est très nette. Par les méthodes exposées aux chapitres 4 et 5, on détermine les polynômes  $f$ ,  $g$  et  $h$  qui constituent la matrice  $s$  par (2.70). Par la méthode exposée dans le présent chapitre, on calcule, à partir de ces polynômes, la valeur des inductances et capacités qui constituent le biorte. Il existe, du reste, plusieurs biortes différents qui réalisent la même matrice  $s$ .

A première vue, la méthode d'approximation et de synthèse, exposée aux chapitres 4, 5 et 6, est plus séduisante que la méthode des paramètres-image, parce qu'elle est rigoureuse. Après la phase d'approximation, on sait exactement quel sera l'affaiblissement effectif réalisé par le biorte, tandis que la méthode des paramètres-image ne permet pas de contrôler avec précision la valeur de celui-ci.

En réalité, la méthode des paramètres effectifs pose de redoutables problèmes d'analyse numérique. Dès que le degré de  $g$  dépasse deux ou trois, il faut recourir à un ordinateur plus ou moins puissant, pour mettre en œuvre la synthèse. L'écriture du programme et le choix des algorithmes font l'objet d'une discussion à la section 6.4. Ces problèmes numériques expliquent pourquoi la méthode, originellement découverte en 1939, n'a été mise en œuvre que vingt ans plus tard, lorsque les premiers ordinateurs de taille suffisante ont été disponibles. Même aujourd'hui, les programmes de synthèse capables de dépasser le cap du degré vingt pour  $g$  sont rares. Très souvent, des méthodes de synthèse sommaires, telle que la transformation du passe-bas en passe-bande, sont utilisées pour la seule raison que ces problèmes d'analyse numérique n'ont pas été maîtrisés.

### 6.1.2 Rappel. Matrice de transfert

La matrice de répartition n'est pas appropriée à la synthèse du biporte avec une structure en échelle. Cette structure résulte naturellement de la mise en cascade de biportes élémentaires, constitués par une impédance dans un bras série ou parallèle.

Inversément, la synthèse d'un tel filtre peut être étudiée comme la décomposition en cascade de biportes élémentaires.

La matrice de transfert, définie au paragraphe IV.6.3.7, est l'outil mathématique adéquat pour cette synthèse. Elle provient d'un réarrangement du système (2.39) sous la forme

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

On remarquera l'inversion des éléments  $\xi$  et  $\eta$  entre les deux matrices colonnes. Cet arrangement est tel que l'onde réfléchie à la sortie coïncide avec l'onde incidente à l'entrée d'un second biporte,  $Q''$ , mis en cascade avec le premier,  $Q'$ , ainsi que cela est représenté à la figure 6.1, où  $\xi'_2 = \eta''_1$  et  $\eta'_2 = \xi''_1$ . Dès lors, la matrice  $\theta$  du biporte global est donnée par

$$\theta = \theta' \cdot \theta'' \quad (6.2)$$

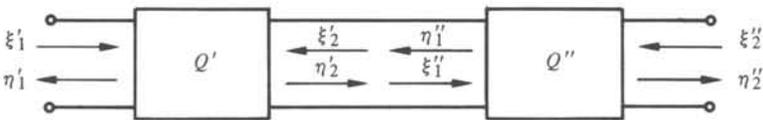


Fig. 6.1

### 6.1.3 Calcul des éléments de $\theta$

La formule générale permettant de calculer  $\theta$  à partir de  $s$  est

$$\theta = \frac{1}{s_{21}} \begin{pmatrix} -\det s & s_{11} \\ -s_{22} & 1 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

Si on l'applique au cas particulier du biporte non dissipatif et réciproque, entre terminaisons résistives, on trouve, à partir de (2.70)

$$\theta = \frac{1}{f} \begin{pmatrix} \pm g_* & h \\ \pm h_* & g \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

On remarque que la forme (6.4) met en évidence, tout comme la matrice de répartition, les polynômes  $f$  et  $h$  dont la signification est essentielle pour le filtrage. A ce titre, la matrice de transfert est plus intéressante que la matrice de chaîne qui est aussi parfois utilisée pour la synthèse en cascade.

### 6.1.4 Mise en cascade de deux biportes

La formule (6.2), où  $\theta'$  et  $\theta''$  sont définies par la forme (6.4), donne une matrice  $\theta$  dont les éléments peuvent se calculer à partir de ceux de  $\theta'$  et  $\theta''$  par les formules

$$f = f'f'' \quad (6.5)$$

$$g = g'g'' \pm h'_*h'' \quad (6.6)$$

$$h = h'g'' \pm g'_*h'' \quad (6.7)$$

où le double signe dépend uniquement de la parité de  $f'$ , et est positif si celui-ci est pair.

On remarque, à la formule (6.5), que les pôles d'affaiblissement d'une cascade de deux biportes sont l'union des pôles d'affaiblissement des deux biportes partiels, à une éventuelle simplification près par un facteur commun entre  $f$ ,  $g$  et  $h$ .

De façon plus générale encore, même si les polynômes  $f'$ ,  $g'$  et  $h'$  d'une part, et  $f''$ ,  $g''$  et  $h''$  d'autre part, sont premiers entre eux selon la remarque du paragraphe 2.3.14, il n'en est pas nécessairement de même pour les polynômes  $f$ ,  $g$  et  $h$  résultant des formules (6.5) à (6.7).

### 6.1.5 Extraction d'un biporte

Le problème de la synthèse ne consiste pas à calculer la matrice  $\theta$ , résultant d'une mise en cascade de plusieurs biportes, en faisant le produit de matrices de transfert partielles. A l'inverse, il faut factoriser une matrice  $\theta$  donnée sous forme d'un produit de matrices de *biportes élémentaires* correspondant, soit à une branche série, soit à une branche parallèle. Ces matrices valent respectivement

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 - y/2 & -y/2 \\ y/2 & 1 + y/2 \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

pour une branche parallèle d'admittance réduite  $y$  et

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 - z/2 & z/2 \\ -z/2 & 1 + z/2 \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

pour une branche série d'impédance réduite  $z$ . Les branches que l'on se propose d'extraire sont des impédances très simples, soit des capacités ou des inductances isolées, soit des circuits résonants série ou parallèle. Compte tenu des formules (6.8) et (6.9), les matrices de transfert des biportes, au moyen desquels on se propose de factoriser une matrice  $\theta$  donnée, sont répertoriées au tableau 6.2. Nous justifierons, aux paragraphes 6.2.22 et 6.2.24, la signification des deux cases inférieures.

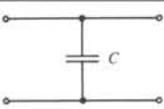
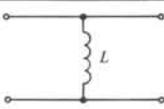
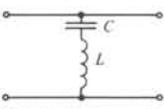
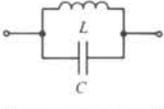
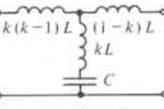
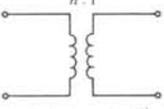
La factorisation de  $\theta$  procède par extraction d'un biporte de matrice  $\theta'$  d'un type donné et par calcul de la matrice  $\theta''$  du *biporte résiduel*. A partir de (6.2), on trouve donc

$$\theta'' = \theta'^{-1} \cdot \theta \quad (6.10)$$

D'une part, on connaît les polynômes  $f$ ,  $g$  et  $h$  déterminant la matrice  $\theta$  donnée, d'autre part, la forme de  $\theta'$  est donnée par le tableau 6.2, bien que la valeur des éléments  $L$  ou  $C$  ne soit pas précisée a priori. Le problème consiste à calculer l'ensemble de polynômes  $f''$ ,  $g''$  et  $h''$  déterminant la matrice du biporte résiduel. Chaque extraction réalise un pôle d'affaiblissement ou une paire de pôles d'affaiblissement.

En répétant cette extraction, on procède à la factorisation de  $\theta$  et à la synthèse du biporte.

Tableau 6.2

 $\begin{pmatrix} 1 - Lp/2 & Lp/2 \\ -Lp/2 & 1 + Lp/2 \end{pmatrix}$	 $\frac{1}{p} \begin{pmatrix} p - 1/2C & 1/2C \\ -1/2C & p + 1/2C \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 1 - Cp/2 & -Cp/2 \\ Cp/2 & 1 + Cp/2 \end{pmatrix}$	 $\frac{1}{p} \begin{pmatrix} p - 1/2L & -1/2L \\ 1/2L & p + 1/2L \end{pmatrix}$
 $\frac{1}{p^2 + \omega_0^2} \begin{pmatrix} p^2 + \omega_0^2 - p/2L & -p/2L \\ p/2L & p^2 + \omega_0^2 + p/2L \end{pmatrix}$ $\omega_0^2 = 1/LC$	 $\frac{1}{p^2 + \omega_0^2} \begin{pmatrix} p^2 + \omega_0^2 - p/2C & p/2C \\ -p/2C & p^2 + \omega_0^2 + p/2C \end{pmatrix}$ $\omega_0^2 = 1/LC$
 $\omega_0^2 = 1/kLC$ Cellule de Brune Matrice $\theta$ : voir (6.58)	 $\frac{1}{2n} \begin{pmatrix} n^2 + 1 & n^2 - 1 \\ n^2 - 1 & n^2 + 1 \end{pmatrix}$

### 6.1.6 Calcul du biporte résiduel

A partir de (6.4), et compte tenu de (2.69), on trouve

$$\theta^{-1} = \frac{1}{f} \begin{pmatrix} g & -h \\ \mp h_* & \pm g_* \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

Les polynômes  $f''$ ,  $g''$  et  $h''$  se calculent respectivement par (6.10) et (6.11), sous la forme *non simplifiée*

$$f''f, (\pm gg_* \mp hh_*), (g'h - h'g).$$

Comme on désire extraire les pôles d'affaiblissement correspondant au polynôme  $f'$ , on doit réaliser la relation (6.5). Il faut donc au préalable diviser les formes non simplifiées par un facteur  $f'^2$ . On obtient alors

$$f'' = f/f' \quad (6.12)$$

$$g'' = (\pm gg_* \mp hh_*)/f'^2 \quad (6.13)$$

$$h'' = (g'h - h'g)/f'^2 \quad (6.14)$$

Il n'est pas évident a priori que ces formes de  $f''$ ,  $g''$  et  $h''$  soient des polynômes.

Pour qu'il en soit ainsi, il faudra que deux conditions soient satisfaites :

- certaines conditions d'extraction doivent être vérifiées sur l'ensemble  $f, g, h$ . Il n'est pas possible d'extraire n'importe quel biporte élémentaire à partir de n'importe quel biporte donné;
- les valeurs des éléments inductance et capacité doivent être choisies de façon précise, pour que l'extraction soit réalisée. En d'autres mots, il faut choisir correctement l'ensemble des polynômes  $f', g'$  et  $h'$ .

En résumé, extraire un biporte élémentaire revient à choisir convenablement les polynômes  $f, g, h$  et  $f', g', h'$ , pour que les formes (6.12) à (6.14) soient des polynômes.

Reste évidemment la question de savoir si les valeurs trouvées pour les inductances et les capacités sont bien positives.

### 6.1.7 Réalisabilité. Définition

Un biporte non dissipatif et réciproque, caractérisé par sa matrice de répartition, est *réalisable* s'il est possible de le synthétiser au moyen d'inductances et de capacités positives.

### 6.1.8 Commentaire

La notion de réalisabilité est relative à une structure déterminée du quadripôle qui réalise le biporte. A titre d'exemple, tout filtre symétrique est réalisable sous forme d'un treillis; il n'en est pas de même si l'on s'impose la structure en échelle par laquelle certains filtres symétriques risquent de n'être pas réalisables.

La notion de réalisabilité est contraignante pour certaines technologies; par exemple, si la construction du quadripôle fait usage de bobines et de condensateurs, qui ne permettent pas de réaliser des inductances ou des capacités négatives. Par contre, la notion de réalisabilité n'a pas d'importance si l'on utilise une technologie à base de circuits *RC*-actifs, qui permet de simuler des éléments négatifs.

On remarquera que la définition de la réalisabilité exclut les transformateurs idéaux. Pour les raisons exposées au paragraphe 1.1.4, les composants physiques qui y correspondent sont peu pratiques. Par ailleurs, la cellule de Brune, décrite au paragraphe 6.2.21, permet de synthétiser n'importe quel biporte dont les zéros de transmission sont sur l'axe imaginaire moyennant l'utilisation de transformateurs idéaux.

### 6.1.9 Commentaire

La question de la réalisabilité est liée à un ensemble de problèmes qui sont à la fois très difficiles à résoudre en théorie et qui ne se posent guère en pratique.

En théorie, il faudrait poser au paragraphe 6.1.6 la question de savoir si les deux ensembles de polynômes  $f', g'$  et  $h'$  d'une part,  $f'', g''$  et  $h''$  d'autre part caractérisent bien chacun un biporte non dissipatif réciproque, selon le paragraphe 2.3.12. S'il est aisé de vérifier sur (6.12) qu'un polynôme  $f$  pair ou impair se décompose évidemment en un produit  $f'f''$  de polynômes pairs ou impairs, s'il est aisé de contrôler que la relation d'unitarité vérifiée par deux ensembles de polynômes l'est automatiquement par le troisième, il est par contre plus compliqué de prouver, à partir de (6.13), par exemple, que  $g''$  est strictement hurwitzien. Tant que  $f$  est donné par (6.5) sans simplification, on peut démontrer que  $g'$  et  $g''$  sont bien hurwitziens si  $g'$  est [16, 17].

En pratique, la plupart des filtres ne posent aucun problème de réalisabilité, qui surgit précisément lorsque  $f$  est donné par (6.5) après simplification. D'une part, si l'ondulation n'est pas trop petite, les problèmes de réalisabilité ne se posent pas : tant que l'ondulation est supérieure à  $10^{-4}$  dB, le filtre est en général réalisable, quel que soit l'ordre d'extraction des pôles; si l'ondulation est inférieure à  $10^{-6}$  dB, il est en général impossible de réaliser le filtre selon la synthèse exposée ici [18]. D'autre part, il faut en plus, dans le cas du filtre passe-bande, respecter la règle d'extraction des pôles finis, telle qu'elle est énoncée au paragraphe 6.3.5. On trouvera une discussion approfondie de ce point en [19].

## 6.2 EXTRACTION DES BIORTES ÉLÉMENTAIRES

### 6.2.1 Calcul des matrices de transfert inverses

L'inversion des matrices du type (6.8) ou (6.9) est élémentaire si l'on note que la mise en série d'une impédance  $z$  et d'une impédance  $-z$  crée un court-circuit. De même, la mise en parallèle des admittances  $y$  et  $-y$  crée un circuit ouvert. La mise en cascade de deux biportes de matrices  $\theta$  et  $\theta^{-1}$  crée un biporte de matrice  $1_2$ , c'est-à-dire deux connexions en court-circuit entre les accès d'entrée et de sortie. Ces règles sont résumées à la figure 6.3.

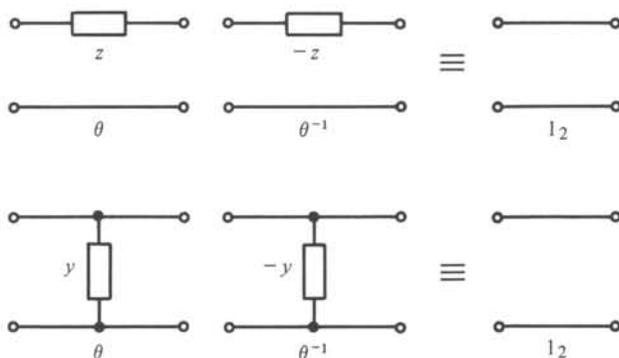


Fig. 6.3

Il en résulte que les matrices inverses, des six cases supérieures du tableau 6.2, s'obtiennent simplement en affectant  $L$  et  $C$  du signe négatif.

### 6.2.2 Conditions sur les polynômes $f$ , $g$ et $h$

Ainsi que cela a été spécifié au paragraphe 6.1.6, il n'est pas possible d'extraire un biporte élémentaire si certaines conditions ne sont pas remplies au préalable par les polynômes  $f$ ,  $g$  et  $h$  caractérisant le biporte que l'on se propose de synthétiser. Ces conditions portent sur

- les racines de  $f$ ;
- les degrés des polynômes;
- les relations entre certains coefficients de ceux-ci.

Si l'on considère une transmittance  $s_{21} = f/g$ , les pôles d'affaiblissement correspondent aux zéros de transmission déterminés de la façon suivante :

- il y a autant de pôles d'affaiblissement à l'origine que de racines de  $f(p)$  à l'origine;
- il y a autant de pôles d'affaiblissement à l'infini que d'unités dans la différence des degrés de  $g$  et  $f$ ;
- chaque pôle d'affaiblissement à la pulsation  $\omega_i$  correspond à une paire de racines en  $\pm j\omega_i$  de  $f(p)$ .

La relation d'unitarité (2.69) impose les conditions entre les degrés et les coefficients des polynômes. Au moins l'un des deux polynômes  $f$  ou  $h$  doit avoir le même degré que  $g$ . S'il y a un pôle d'affaiblissement à l'infini, les degrés de  $h$  et de  $g$  doivent être identiques et supérieurs à celui de  $f$ . Désignons le degré de  $g$  par  $n$  et par  $g_k(h_k)$  le coefficient de  $p^k$  dans  $g(h)$ . La relation d'unitarité (2.69) implique l'égalité des coefficients de  $p^{2n}$ , de part et d'autre de l'égalité. Il faut donc que  $g_n^2 = h_n^2$  ou, encore,

$$g_n = \pm h_n \quad (6.15)$$

S'il y a deux pôles d'affaiblissement à l'infini, le degré de  $f$  est inférieur à  $(n-1)$  et les coefficients de  $p^{2n-2}$ , dans les deux membres de la relation d'unitarité, doivent être égaux. Il faut donc

$$2g_n g_{n-2} - g_{n-1}^2 = 2h_n h_{n-2} - h_{n-1}^2 \quad (6.16)$$

S'il y a au moins un pôle d'affaiblissement à l'origine,  $f(0) = 0$  ou, encore,  $f(p)$  n'a pas de terme constant. Pour que les deux membres de la relation d'unitarité aient même terme constant, il faut que  $g_0^2 = h_0^2$  ou, encore,

$$g_0 = \pm h_0 \quad (6.17)$$

S'il y a au moins deux pôles d'affaiblissement à l'origine, les coefficients de  $p^2$  doivent être égaux, et il en résulte

$$2g_2 g_0 - g_1^2 = 2h_2 h_0 - h_1^2 \quad (6.18)$$

### 6.2.3 Extraction d'un pôle d'affaiblissement à l'infini

Parmi les biportes du tableau 6.2, deux peuvent servir à réaliser cette extraction : l'inductance série et la capacité parallèle. Ici,  $f'$  est une constante, et les relations (6.12) à (6.14) donnent dans les deux cas

$$f'' = f \quad (6.19)$$

et, selon qu'il s'agisse de l'inductance ou de la capacité, respectivement

$$g'' = g + (h-g) Lp/2 \quad (6.20)$$

$$h'' = h + (h-g) Lp/2 \quad (6.21)$$

ou

$$g'' = g - (h+g) Cp/2 \quad (6.22)$$

$$h'' = h + (h+g) Cp/2 \quad (6.23)$$

Si le degré de  $g$  est  $n$ , celui de  $g''$  doit être  $(n-1)$  pour qu'un pôle d'affaiblisse-

ment à l'infini ait été extrait. Il faut donc que les coefficients de  $p^{n+1}$  et de  $p^n$  s'annulent dans les expressions (6.20) ou (6.22). On a respectivement

$$g_{n+1}'' = L(h_n - g_n)/2 = 0 \quad (6.24)$$

$$g_{n+1}'' = -C(h_n + g_n)/2 = 0 \quad (6.25)$$

Par (6.15), on a, soit  $g_n = h_n$  et (6.24) est vérifié, soit  $g_n = -h_n$  et (6.25) est vérifié. Le double signe, intervenant dans (6.15), détermine donc à priori quel biporte élémentaire doit être extrait. Si  $g_n/h_n = 1$ , il faut extraire une inductance. Si  $g_n/h_n = -1$ , il faut extraire une capacité.

De même, on a respectivement

$$g_n'' = g_n + \frac{L}{2}(h_{n-1} - g_{n-1}) = 0 \quad (6.26)$$

$$g_n'' = g_n - \frac{C}{2}(h_{n-1} + g_{n-1}) = 0 \quad (6.27)$$

qui peuvent être vérifiés par un choix adéquat de la valeur de  $L$  ou  $C$  donnée par les formules

$$L = \frac{2g_n}{g_{n-1} - h_{n-1}} = \frac{g_n + h_n}{g_{n-1} - h_{n-1}} \quad (6.28)$$

ou

$$C = \frac{2g_n}{g_{n-1} + h_{n-1}} = \frac{g_n - h_n}{g_{n-1} + h_{n-1}} \quad (6.29)$$

En résumé, selon le signe du rapport  $g_n/h_n$ , il est possible d'extraire, soit une inductance de valeur (6.28), soit une capacité de valeur (6.29) et, ce faisant, de réaliser un pôle d'affaiblissement à l'infini.

#### 6.2.4 Réalisabilité

Si les polynômes  $f$ ,  $g$  et  $h$  répondent aux conditions du paragraphe 2.3.12, l'extraction décrite au paragraphe précédent est toujours réalisable, en ce sens que les valeurs (6.28) et (6.29) sont toujours positives. En effet, on peut écrire

$$L = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[ \frac{R_1}{p} \zeta_1(p) \right] \quad (6.30)$$

$$C = \lim_{p \rightarrow \infty} [pR_1 \zeta_1(p)]^{-1} \quad (6.31)$$

par la formule (2.88). Ainsi,  $L$  et  $C$  sont respectivement donnés par la valeur du résidu à l'infini de l'impédance ou de l'admittance terminée. Par la propriété 2.1.9, ils sont donc positifs.

#### 6.2.5 Extraction d'un pôle d'affaiblissement multiple à l'infini

En supposant que le pôle d'affaiblissement est au moins double, on trouve dans le cas de l'inductance, par (6.20) et (6.21),

$$g''_{n-1} = g_{n-1} + \frac{L}{2}(h_{n-2} - g_{n-2}) \quad (6.32)$$

$$h''_{n-1} = h_{n-1} + \frac{L}{2}(h_{n-2} - g_{n-2}) \quad (6.33)$$

Compte tenu de (6.16) et (6.28), il en résulte

$$g''_{n-1} = -h''_{n-1} \quad (6.34)$$

Ainsi, après avoir extrait un pôle d'affaiblissement par une inductance, l'extraction suivante sera réalisée par une capacité, et ainsi de suite.

### 6.2.6 Exemple

Soit un filtre passe-bas dont la transmittance est caractérisée par un polynôme  $f$  constant et un polynôme  $g$  du cinquième degré. Les pôles d'affaiblissement sont au nombre de cinq, tous situés à l'infini. Si l'on choisit le signe du polynôme  $h$  de façon que le rapport initial  $g_5/h_5 = -1$ , on obtient le circuit de la figure 6.4 par extraction alternée de capacités et d'inductances.

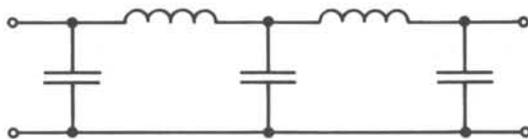


Fig. 6.4

Au lieu d'utiliser la procédure de synthèse du biporte, décrite au paragraphe 6.2.3, on pourrait, dans le cas présent, calculer  $z_{11}$  par la formule (2.81), et synthétiser cette réactance par la méthode de Cauer exposée au paragraphe 2.2.5. On constate, de la sorte, que la synthèse du biporte rejoint ici celle du bipôle, grâce à la propriété démontrée au paragraphe 2.3.30 et commentée au paragraphe 2.3.32.

### 6.2.7 Extraction d'un pôle d'affaiblissement à l'origine

Parmi les biportes du tableau 6.2, la capacité série et l'inductance parallèle sont propres à réaliser cette extraction. Par les formules (6.12) à (6.14), on trouve

$$f'' = f/p \quad (6.35)$$

et, selon le cas, soit

$$g'' = \frac{1}{2Cp^2} [h + (2Cp - 1)g] \quad (6.36)$$

$$h'' = \frac{1}{2Cp^2} [(2Cp + 1)h - g] \quad (6.37)$$

soit

$$g'' = \frac{1}{2Lp^2} [-h + (2Lp - 1)g] \quad (6.38)$$

$$h'' = \frac{1}{2Lp^2} [(2Lp + 1)h + g] \quad (6.39)$$

Pour que  $g''$  et  $h''$  soient des polynômes, il faut que les expressions entre crochets de (6.36) à (6.39) soient divisibles par  $p^2$  ou, encore, que le coefficient du terme en  $p$  et le terme constant soient nuls.

Par (6.17), on a, soit  $g_0 = h_0$  et les expressions entre crochets de (6.36) et (6.37) n'ont pas de terme constant, soit  $g_0 = -h_0$  et les expressions (6.38) et (6.39) jouissent de la même propriété. Ainsi, selon que  $g_0/h_0$  vaut 1 ou -1, le pôle d'affaiblissement à l'origine doit être extrait, soit par une capacité, soit par une inductance.

L'annulation du coefficient du terme en  $p$  résulte d'un choix correct de  $C$  ou  $L$  par les formules

$$C = \frac{g_1 - h_1}{2g_0} = \frac{g_1 - h_1}{g_0 + h_0} \quad (6.40)$$

$$L = \frac{g_1 + h_1}{2g_0} = \frac{g_1 + h_1}{g_0 - h_0} \quad (6.41)$$

### 6.2.8 Réalisabilité

Les formules (6.40) et (6.41) peuvent être réécrites sous la forme

$$C = [R_1 p \cdot \zeta_1(p)]_{p=0}^{-1} \quad (6.42)$$

$$L = [\zeta_1(p) R_1/p]_{p=0} \quad (6.43)$$

qui mettent en évidence leur caractère de résidus à l'origine de l'admittance et de l'impédance terminées. Par la propriété 2.1.9, ils sont donc toujours positifs si  $f$ ,  $g$  et  $h$  vérifient les conditions du paragraphe 2.3.12.

### 6.2.9 Extraction d'un pôle multiple

S'il y a au moins deux pôles d'affaiblissement à l'origine, la formule (6.18) est vérifiée par les coefficients de  $g$  et  $h$ . Par un raisonnement analogue à celui du paragraphe 6.2.5, on démontre que l'extraction d'une capacité, dans le cas où  $g_0/h_0 = 1$ , entraîne que  $g_0''/h_0'' = -1$ , c'est-à-dire que l'extraction suivante devra se faire par une inductance, et ainsi de suite.

### 6.2.10 Exemple

Soit une transmittance définie par un polynôme  $f = p^3$  et un polynôme  $g$  du sixième degré. Il s'agit donc d'une caractéristique de passe-bande possédant trois pôles d'affaiblissement à l'origine et trois à l'infini. Si le polynôme  $h$  est déterminé de telle façon que  $g_6/h_6 = -1$  et  $g_0/h_0 = 1$ , le biporte réalisant la transmittance donnée nécessite quatre capacités et deux inductances. A la figure 6.5, on a représenté deux réalisations équivalentes qui sont obtenues respectivement, soit en extrayant tous les pôles à l'origine puis ceux à l'infini, soit en extrayant alternativement un pôle à l'origine et un pôle à l'infini. Toutes les permutations de l'ordre d'extraction peuvent, du reste, être choisies sans modifier ni la réalisabilité, ni la dépense en éléments.

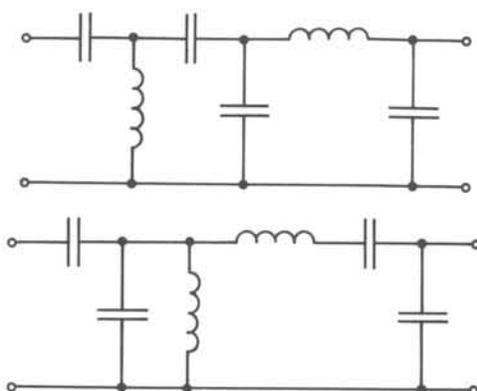


Fig. 6.5

Par contre, si le polynôme  $h$  est déterminé de telle façon que  $g_6/h_6 = 1$  et  $g_0/h_0 = -1$ , le biporte réalisant la transmittance nécessite quatre inductances et deux capacités. Une réalisation est représentée à la figure 6.6.

Comme au paragraphe 6.2.6, on remarquera que ces biportes peuvent être synthétisés, à partir de l'expression de  $z_{11}$ , par la synthèse selon Cauer d'un bipôle.

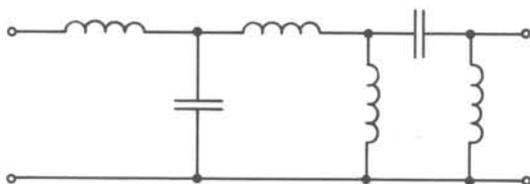


Fig. 6.6

### 6.2.11 Pôles et zéros de l'impédance terminée

Jusqu'à présent, cette section 6.2 a montré comment réaliser des pôles d'affaiblissement à l'origine ou à l'infini. Les relations (6.15) et (6.17), jointes aux formules (2.88) et (2.89), montrent qu'à ces pôles d'affaiblissement correspondent toujours soit un zéro, soit un pôle de  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$ . Pour  $\zeta_1$ , cela dépend des rapports  $g_n/h_n$  et  $g_0/h_0$ ; pour  $\zeta_2$ , cela dépend des rapports  $g_n/\mp h_n^*$  et  $g_0/\mp h_0^* = g_0/\mp h_0$ . *S'il y a au moins un pôle d'affaiblissement à l'infini ou à l'origine*, les relations (6.15) ou (6.17) sont respectées, et les rapports correspondants valent +1 ou -1. Pour la simplicité de ce qui suit, ces rapports seront représentés par des nombres binaires, avec la notation suivante :

$$g_n/h_n \rightarrow a \quad (6.44)$$

$$g_0/h_0 \rightarrow b \quad (6.45)$$

$$g_n/\mp h_n^* \rightarrow c \quad (6.46)$$

$$g_0/\mp h_0 \rightarrow d \quad (6.47)$$

Il est convenu qu'un rapport valant +1 (-1) est noté par le nombre binaire 1(0).

Comme il y a quatre nombres binaires, on trouve 16 combinaisons différentes du comportement à l'origine et à l'infini des impédances terminées. Inversement, il est facile de découvrir, sur un filtre de structure donnée, quels sont les comportements à l'origine et à l'infini des impédances terminées, et d'en déduire les relations qui existent entre les coefficients de  $g$  et de  $h$ . Il suffit de remplacer, selon le cas, inductances et capacités par des courts-circuits ou des circuits ouverts.

### 6.2.12 Exemple

Le filtre de la figure 6.5, quel que soit l'ordre d'extraction des pôles, a des impédances terminées qui valent respectivement  $\xi_1(0) = \infty$ ,  $\xi_1(\infty) = 0$ ,  $\xi_2(0) = \infty$ ,  $\xi_2(\infty) = 0$ . Par le tableau 6.7, il résulte que  $a, b, c, d$  valent respectivement 0, 1, 0, 1.

Tableau 6.7

$a$	$b$	$c$	$d$	$\xi_1(\infty)$	$\xi_1(0)$	$\xi_2(\infty)$	$\xi_2(0)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	$\infty$
0	0	1	0	0	0	$\infty$	0
0	0	1	1	0	0	$\infty$	$\infty$
0	1	0	0	0	$\infty$	0	0
0	1	0	1	0	$\infty$	0	$\infty$
0	1	1	0	0	$\infty$	$\infty$	0
0	1	1	1	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$
1	0	0	0	$\infty$	0	0	0
1	0	0	1	$\infty$	0	0	$\infty$
1	0	1	0	$\infty$	0	$\infty$	0
1	0	1	1	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$
1	1	0	0	$\infty$	$\infty$	0	0
1	1	0	1	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$
1	1	1	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0
1	1	1	1	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

### 6.2.13 Conditions pour l'extraction d'une paire de pôles finis

Le paragraphe 6.2.2 résumait les conditions nécessaires sur les polynômes  $f, g$  et  $h$  pour extraire des pôles d'affaiblissement à l'origine ou à l'infini. Dans le présent paragraphe, on étudiera les conditions nécessaires pour extraire une paire de pôles d'affaiblissement en  $\pm j\omega_i$ . Il faut que :

- $f(\pm j\omega_i) = 0$ , c'est-à-dire que le polynôme  $f(p)$  possède un facteur  $(p^2 + \omega_i^2)$ ;
- $(g + h)$  ou  $(g - h)$  possède également une paire de racines en  $\pm j\omega_i$ . En effet, l'extraction s'opère au moyen de l'un des deux biportes du tableau 6.2, constitué par un circuit résonant ou antirésonant. Il faut donc que  $\xi_1(\pm j\omega_i)$ , donné par (2.88), soit nul ou infini.

Cette seconde condition n'est, sauf exception, jamais spontanément remplie. Contrairement aux conditions, étudiées au paragraphe 6.2.2 pour les pôles à l'origine ou à l'infini, qui sont spontanément remplies pour  $g$  et  $h$  dès lors que ces pôles doivent être extraits, il n'en est pas de même pour une paire de pôles finis. Bien entendu,

par la relation d'unitarité (2.69), à toute paire de racines  $\pm j\omega_i$  de  $f(p)$ , on a l'égalité  $|g|^2 = |h|^2$ , mais il n'en résulte pas pour autant que  $(g+h)$  ou  $(g-h)$  est nul.

#### 6.2.14 Capacités de translation

Afin de réaliser la seconde condition mentionnée au paragraphe 6.2.13, on procède à l'extraction préalable, soit d'une capacité série pour préparer l'extraction d'un bras parallèle, soit d'une capacité parallèle pour préparer l'extraction d'un bras série. Selon le cas, il faut donc respectivement, soit avoir un pôle d'affaiblissement à l'origine, soit avoir un pôle d'affaiblissement à l'infini. On verra que l'extraction de ces *capacités de translation* ne se ramène pas à l'extraction des pôles d'affaiblissement correspondants, mais constitue une *extraction partielle*.

L'utilisation de *capacités* de translation est traditionnelle dans les filtres à réalisation par bobines et condensateurs, parce que les seconds sont moins chers et moins encombrants que les premiers. Dès lors que l'on s'écarte de cette technologie, on peut aussi bien utiliser des inductances, voire des éléments de translation plus compliqués (§ 8.1.13, § 8.3.14 et sect. 9.5). Bien entendu, l'extraction partielle d'une capacité série ou parallèle n'est légitime que si les conditions sur les nombres binaires,  $a$  et  $b$ , sont réalisées pour pouvoir extraire les branches en question.

#### 6.2.15 Capacité de translation série

Soit, pour le circuit de la figure 6.8, un ensemble de polynômes  $f, g, h$  tels que  $f(j\omega_0) = 0$  et  $g(j\omega_0) + h(j\omega_0) \neq 0$ . Comme  $\zeta(j\omega_0)$  ne possède pas de zéro à cette pulsation, on se propose d'extraire une capacité  $C$  telle qu'après son extraction,  $\zeta''$  possède un zéro à la pulsation requise. En  $\pm j\omega_0$ , on peut écrire

$$\zeta(j\omega_0) = 1/jC\omega_0 \quad (6.48)$$

ou encore, par le théorème 2.3.30,

$$C = [\mathcal{Y}_{11}(p)/p]_{p^2 = -\omega_0^2} \quad (6.49)$$

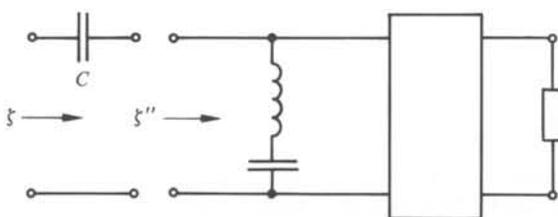


Fig. 6.8

Cette formule n'a rien à voir avec la formule (6.40) qui permet de calculer la capacité à extraire pour réaliser un pôle d'affaiblissement à l'origine : c'est en ce sens que l'on réalise une extraction partielle de ce pôle, qui pourra être répétée un certain nombre de fois, pour préparer l'extraction d'autres circuits résonants.

Les polynômes  $f''$ ,  $g''$  et  $h''$  s'obtiennent par les formules du paragraphe 6.2.7, relatives à l'extraction d'une capacité série. On notera cependant que  $f'' = f$ , puisqu'il

n'y a pas réalisation de pôle d'affaiblissement à l'origine. Dès lors,  $g''$  et  $h''$  sont donnés par (6.36) et (6.37) dont les seconds membres ont été multipliés par  $p$ .

### 6.2.16 Réalisabilité

Par (6.49), la susceptance  $C\omega_0$  doit être égale à la susceptance  $b_{11}(\omega)$  de l'admittance en court-circuit  $y_{11}$ , qui est une fonction de Foster. On sait, dès lors, que cette susceptance a un comportement du type de la figure 6.9, qui comporte des valeurs positives et négatives. C'est seulement si  $\omega_0$  se trouve dans un intervalle où  $b_{11}$  est positif que  $C > 0$ .

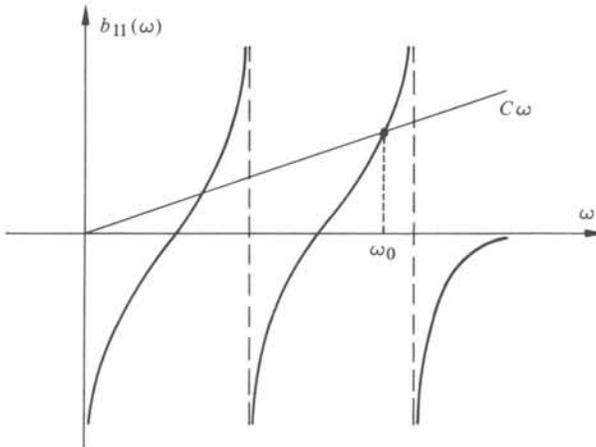


Fig. 6.9

Contrairement à l'extraction d'un pôle d'affaiblissement à l'origine, qui est toujours réalisable par une capacité positive, dès lors que  $f$ ,  $g$  et  $h$  vérifient les conditions du paragraphe 2.3.12, l'extraction d'une capacité de translation série n'est pas toujours possible même dans ce cas.

Lorsque l'on parle du *problème de réalisabilité* d'un filtre LC, on fait donc référence au problème posé par les capacités de translation.

### 6.2.17 Capacité de translation parallèle

Soit, pour le circuit de la figure 6.10, un ensemble de polynômes  $f$ ,  $g$  et  $h$  tels que  $f(j\omega_0) = 0$  et  $g(j\omega_0) - h(j\omega_0) \neq 0$ . Comme  $\zeta_1$  ne possède pas de pôle à cette pulsation, il n'est pas possible d'extraire le circuit antirésonant dans une branche série. Pour déterminer  $C$ , on peut écrire l'équation (6.48) ou (6.49). Après extraction, les polynômes  $f''$ ,  $g''$  et  $h''$  s'obtiennent par les formules (6.22) et (6.23). On remarquera ici qu'après extraction, le polynôme  $g''$  a même degré que le polynôme  $g$ . Il n'y a donc pas eu réalisation d'un pôle d'affaiblissement à l'infini, mais extraction partielle de celui-ci. Pour préparer l'extraction d'un nouveau circuit antirésonant, il est donc possible d'extraire à nouveau une capacité parallèle.

L'extraction de cette capacité de translation parallèle soulève le même problème de réalisabilité que celui évoqué au paragraphe 6.2.16, pour la capacité série.

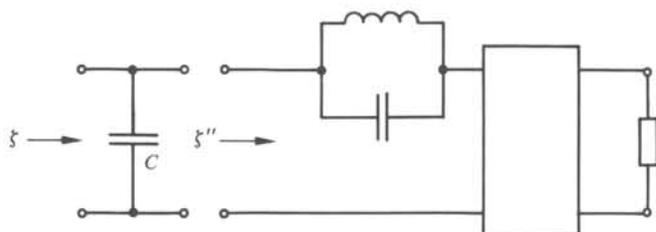


Fig. 6.10

### 6.2.18 Commentaires

L'extraction des capacités de translation soulève certains problèmes de compréhension. Il est paradoxal d'extraire un pôle d'affaiblissement à l'origine ou à l'infini au moyen de plusieurs capacités. A la figure 6.11, on représente le cas d'un filtre passe-bas, réalisé par extractions successives de trois branches série antirésonantes préparées par autant de capacités parallèles de translation. Ce filtre possède un seul pôle d'affaiblissement à l'infini, créé par les quatre capacités qui constituent, pour  $\omega = \infty$ , une seule capacité en parallèle : en effet, les capacités situées dans les branches série constituent autant de courts-circuits. Selon le paragraphe 6.2.5, il ne peut du reste y avoir plusieurs pôles d'affaiblissement à l'infini que dans la mesure où interviennent alternativement inductances série et capacités parallèle.

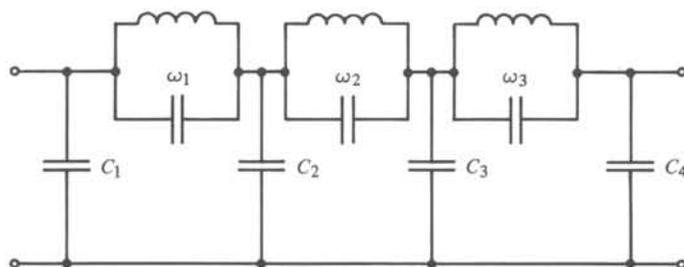


Fig. 6.11

Le problème de la réalisabilité se pose dans les termes suivants. Avant synthèse de la première branche, on peut calculer la capacité  $C$  par (6.29), qui permettrait d'extraire entièrement le pôle à l'infini. Si  $C_1 < C$ , on peut extraire cette fraction de  $C$ , qui permet précisément d'extraire ensuite un circuit antirésonant en  $\omega_1$ . Après extractions successives de toutes les paires de pôles finis, il reste toujours un pôle d'affaiblissement à l'infini à extraire, en ce sens que le polynôme  $g$  a toujours un degré de plus que  $f$ . On extrait définitivement ce pôle par  $C_4$ .

### 6.2.19 Extraction d'une paire de pôles finis

On suppose que les conditions du paragraphe 6.2.13 sont réunies. En utilisant les formules (6.12) à (6.14), et les matrices  $\theta^i$  du tableau 6.2 pour les circuits résonants parallèle et antirésonants série, on trouve dans les deux cas

$$f'' = f/(p^2 + \omega_0^2) \quad (6.50)$$

Pour le circuit résonant parallèle, on a

$$g'' = \left[ g - \frac{p(g+h)}{2L(p^2 + \omega_0^2)} \right] / (p^2 + \omega_0^2) \quad (6.51)$$

$$h'' = \left[ h + \frac{p(g+h)}{2L(p^2 + \omega_0^2)} \right] / (p^2 + \omega_0^2) \quad (6.52)$$

Pour le circuit antirésonant série on a

$$g'' = \left[ g + \frac{p(h-g)}{2C(p^2 + \omega_0^2)} \right] / (p^2 + \omega_0^2) \quad (6.53)$$

$$h'' = \left[ h + \frac{p(h-g)}{2C(p^2 + \omega_0^2)} \right] / (p^2 + \omega_0^2) \quad (6.54)$$

Pour que  $g''$  et  $h''$  soient des polynômes, il faut assurer la divisibilité des expressions entre crochets par  $(p^2 + \omega_0^2)$ . On dispose pour cela d'un paramètre libre, soit  $L$ , soit  $C$ . Les valeurs adéquates de ces éléments sont données par

$$L = \left[ \frac{pR_1}{p^2 + \omega_0^2} \frac{g+h}{2g} \right] p^2 = -\omega_0^2 \quad (6.55)$$

ou encore, compte tenu de  $g = -h$  en  $p^2 = -\omega_0^2$ ,

$$L = \left[ \frac{pR_1}{p^2 + \omega_0^2} \zeta_1(p) \right] p^2 = -\omega_0^2 \quad (6.56)$$

Par un calcul analogue, on trouve

$$C = \left[ \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} \frac{1}{R_1 \zeta_1(p)} \right] p^2 = -\omega_0^2 \quad (6.57)$$

### 6.2.20 Réalisabilité

Les formules (6.56) et (6.57) montrent que  $L$  et  $C$  sont les résidus de  $\zeta_1(p)$ , correspondant à une paire de pôles sur l'axe imaginaire. Si  $f$ ,  $g$  et  $h$  vérifient le paragraphe 2.3.12, ce sont donc des grandeurs réelles et positives. De façon équivalente, on peut rapprocher ces deux formules, par la propriété 2.3.30, de la formule (2.14). A un pôle d'affaiblissement de pulsation  $\omega_0$ ,  $\zeta_1(p)$  est égal, soit à  $z_{11}$ , soit à  $y_{11}^{-1}$ . Ces deux dernières grandeurs sont des fonctions de Foster : on peut donc extraire, par synthèse de Foster, soit un circuit résonant, soit un circuit antirésonant à  $\omega_0$ , dont les éléments sont positifs.

En résumé, l'extraction d'une paire de pôles d'affaiblissement finis ne pose pas de problème de réalisabilité. Par contre, ainsi que nous l'avons vu au paragraphe 6.2.16, les capacités de translation en posent un, au moins en principe. S'il n'y a pas moyen de réaliser un filtre donné par la méthode exposée, on peut recourir à l'extraction d'une ou de plusieurs cellules de Brune qui ne posent pas de problème de réalisabilité.

### 6.2.21 Cellule de Brune

La cellule de Brune est représentée au tableau 6.2 comme un quadripôle constitué par un T d'inductances, en série avec un quadripôle constitué par une capacité

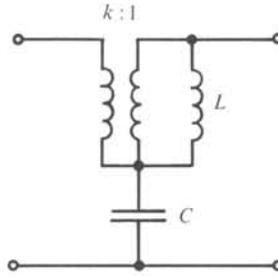


Fig. 6.12

parallèle. A la figure 6.12, on en trouvera une version avec transformateur idéal de rapport de transformation  $k$  et de couplage parfait. Le T d'inductances du tableau 6.2 comporte en effet au moins une inductance négative. Comme il n'est pas possible de réaliser un transformateur idéal à couplage parfait, la réalisation d'une cellule de Brune, par des bobines et des condensateurs, est pour le moins problématique. Son intérêt est surtout théorique : c'est la seule cellule qui permette d'extraire une paire de pôles finis sans problème de réalisabilité.

La matrice de transfert de la cellule de Brune s'écrit

$$\theta = \frac{1}{2kL(p^2 + \omega_0^2)} \begin{pmatrix} M - (P+1)p + 2kL\omega_0^2 & N + (P-1)p \\ N - (P-1)p & M + (P+1)p + 2kL\omega_0^2 \end{pmatrix} \quad (6.58)$$

où  $M = (k^2 + 1)p^2L$ ,  $N = (k^2 - 1)p^2L$ ,  $P = k(k-1)^2L^2\omega_0^2$  et  $\omega_0^2 = 1/kLC$ . On constate que si  $k > 0$ , il en est de même pour  $\omega_0^2$ , et les racines de  $f$  correspondent à deux pôles d'affaiblissement situés en  $\pm j\omega_0$ . Si  $k < 0$ , on pose  $-\sigma^2 = 1/kLC$  et  $f$  possède deux racines qui correspondent à des zéros de transmission, situés en  $\pm \sigma$  sur l'axe des réels.

### 6.2.22 Extraction de la cellule de Brune

En utilisant les formules (6.12) à (6.14), on trouve, dans le cas où  $k > 0$ ,

$$f'' = f/(p^2 + \omega_0^2) \quad (6.59)$$

$$g'' = [g(M - Pp - p + 2kL\omega_0^2) - h(N - Pp + p)]/2kL(p^2 + \omega_0^2)^2 \quad (6.60)$$

$$h'' = [g(-N - Pp + p) + h(M + Pp + p + 2kL\omega_0^2)]/2kL(p^2 + \omega_0^2)^2 \quad (6.61)$$

Pour que  $g''$  et  $h''$  soient des polynômes, il faut que leurs numérateurs, ainsi que les dérivées premières de ceux-ci, s'annulent en  $p^2 = -\omega_0^2$ . Après quelques calculs, on trouve deux conditions portant sur l'impédance terminée

$$[R_1 \xi_1 / p]_{p^2 = -\omega_0^2} = k(k-1)L \quad (6.62)$$

$$\left[ p \frac{d(\log \xi_1)}{dp} \right]_{p^2 = -\omega_0^2} = \frac{k+1}{k-1} \quad (6.63)$$

Or, par les paragraphes 2.3.30 et 2.3.31, on sait que l'on peut remplacer dans ces ex-

pressions, calculées en un pôle d'affaiblissement,  $\zeta_1$  par  $z_{11}$ . En opérant ces substitutions, on peut calculer les premiers membres de (6.62) et (6.63), qui sont des grandeurs réelles. On déduit  $k$ ,  $L$  et  $C$ .

### 6.2.23 Réalisabilité

Celle-ci est toujours assurée. En posant  $z_{11}(j\omega) = jx(\omega)$ , (6.62) et (6.63) deviennent

$$x(\omega_0)/\omega_0 = k(k-1)L \quad (6.64)$$

$$\frac{\omega_0}{x(\omega_0)} \frac{dx}{d\omega} \Big|_{\omega_0} = \frac{k+1}{k-1} \quad (6.65)$$

Par la propriété 2.1.18,  $dx/d\omega \geq |x|/\omega > 0$  et donc le premier membre du (6.65) a un module supérieur à l'unité. Il en résulte que  $k > 0$ , et, en multipliant membre à membre (6.64) et (6.65), on trouve

$$k(k+1)L = \frac{dx}{d\omega} \Big|_{\omega_0} \quad (6.66)$$

d'où il résulte que  $L > 0$ . Il est donc possible d'extraire une paire de pôles finis par la cellule de Brune, si  $f$ ,  $g$  et  $h$  vérifient les conditions du paragraphe 2.3.12.

### 6.2.24 Extraction d'un transformateur idéal

Compte tenu de la matrice de transfert, donnée au tableau 6.2, et des formules (6.12) à (6.14), on trouve

$$g'' = \frac{1+n^2}{2n} g + \frac{1-n^2}{2n} h \quad (6.67)$$

$$h'' = \frac{1-n^2}{2n} g + \frac{1+n^2}{2n} h \quad (6.68)$$

$$f'' = f \quad (6.69)$$

Bien entendu, cette extraction ne réalise aucun pôle d'affaiblissement.

### 6.2.25 Réalisation de zéros de transmission hors de l'axe imaginaire

Dans la mesure où  $f(p)$  possède des racines complexes hors de l'axe imaginaire, il faut se départir de la liste des cellules, donnée au tableau 6.2. Ce cas est tout à fait théorique : un zéro de transmission hors de l'axe imaginaire ne crée pas un pôle d'affaiblissement, et ne constitue donc pas une contribution à l'affaiblissement élevé, exigé dans les bandes coupées. L'intérêt de racines de  $f(p)$  situées hors de l'axe imaginaire ne peut résider que dans la contribution apportée à la caractéristique de déphasage.

Par ailleurs, la réalisation de telles racines se heurte à des obstacles technologiques, puisqu'elles requièrent des transformateurs idéaux.

La cellule de Brune permet d'extraire une paire de zéros de transmission situés sur l'axe réel, ainsi que cela a été noté, au paragraphe 6.2.21, dans le cas où  $k$  est négatif.

La cellule de Darlington, représentée à la figure 6.13, permet d'extraire un quadruplet de racines complexes ( $p_0, p_0^*, -p_0, -p_0^*$ ) de  $f(p)$ . Sa réalisation est tout aussi problématique que celle de la cellule de Brune, et son intérêt est purement théorique.

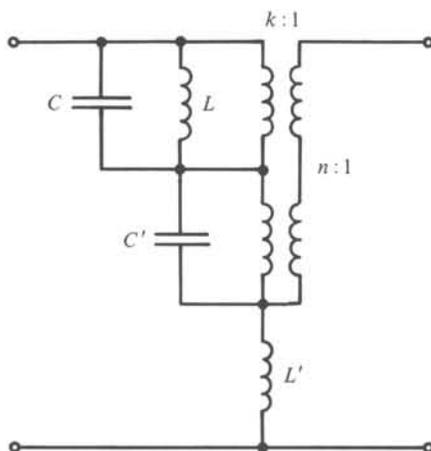


Fig. 6.13

Il existe d'autres cellules, en particulier des treillis et des T-pontés, qui permettent ces extractions sans requérir de transformateurs idéaux. Néanmoins ces cellules exigent des conditions supplémentaires sur  $f$ ,  $g$  et  $h$  qui ne peuvent être toujours satisfaites.

## 6.3 CLASSIFICATION DES FILTRES

### 6.3.1 Introduction

Lors de la synthèse selon les paramètres-image, une distinction évidente est établie entre bandes passante(s) et coupée(s), par la définition des fréquences de coupure. La synthèse selon les paramètres effectifs n'opère pas une distinction aussi naturelle. Les polynômes  $f$ ,  $g$  et  $h$  résultent d'un processus d'approximation distinct de celui de la synthèse. Le seul renseignement simple, que l'on puisse déduire de l'observation de ces polynômes, est le comportement tant à l'origine qu'à l'infini. On peut déduire, du tableau 6.14, la nature du filtre selon la répartition en quatre classes du paragraphe 1.2.1. A l'intérieur de ces classes, on peut encore élaborer des catégories plus fines.

### 6.3.2 Synthèse à nombre minimal d'inductances

Nous nous placerons systématiquement dans cette optique, qui est naturelle pour une technologie à base de condensateurs et de bobines. L'objectif est de réaliser un filtre de degré déterminé, avec le minimum d'inductances. D'une part, ces induc-

		$\alpha(0)$	
		fini	infini
$\alpha(\infty)$	fini	coupe- bande	passe- haut
	infini	passe- bas	passe- bande

Tableau 6.14

tances sont indispensables chaque fois que l'on désire réaliser une paire de pôles finis par un circuit résonant ou antirésonant. Il en faut donc autant qu'il y a de paires de racines imaginaires conjuguées pour  $f(p)$ .

D'autre part, les pôles d'affaiblissement à l'origine doivent être réalisés alternativement par une capacité série ou une inductance parallèle. Si ces pôles sont en nombre pair,  $2n$ , la moitié de ce nombre constitue le nombre d'inductances nécessaires. Si les pôles sont en nombre impair,  $(2n + 1)$ , on utilisera  $(n + 1)$  capacités et  $n$  inductances, dans la mesure où  $b$  vaut initialement 1.

Enfin, les pôles d'affaiblissement à l'infini sont aussi réalisés alternativement par une capacité parallèle ou une inductance série. Si leur nombre est  $2n$ , il faut nécessairement  $n$  inductances. Si leur nombre est  $(2n + 1)$ , il suffit de  $n$  inductances et  $(n + 1)$  capacités, pourvu que  $a$  vaille initialement 0.

Cette discussion montre que le nombre total d'inductances dépend non seulement du nombre des pôles d'affaiblissement à réaliser, mais aussi des rapports  $a$  et  $b$ , spécialement lorsqu'ils sont définis tous les deux, c'est-à-dire dans le cas du filtre passe-bande.

Après que la position des racines de  $h$  et de  $f$  a été fixée, par une procédure d'approximation décrite au chapitre 5, on dispose encore du choix du signe de  $h_n$ . Celui-ci peut être fait en vue de la minimisation du nombre des inductances nécessaires.

Par le paragraphe 2.1.23, on sait que les coefficients de  $g$ , polynôme de Hurwitz, ont tous le même signe. On peut toujours supposer  $g_n > 0$ , sans perte de généralité; il en résulte que  $g_0 > 0$ .

Si toutes les racines de  $h$  sont situées sur l'axe imaginaire,  $h_n$  et  $h_0$  sont forcément de même signe. Or, si le nombre de pôles d'affaiblissement est impair, tant à l'origine qu'à l'infini, l'économie optimale des inductances exige  $a = 0$  et  $b = 1$ . La première condition entraîne  $h_n < 0$ ; la seconde exigerait simultanément  $h_0 > 0$ .

Il y a donc contradiction entre deux objectifs : minimiser le nombre d'inductances et placer tous les zéros de  $h$  sur l'axe imaginaire. Le second objectif est souvent sacrifié au profit du premier : une ou deux racines de  $h$  sont situées sur l'axe réel, pour obtenir simultanément les valeurs requises de  $a$  et  $b$ .

### 6.3.3 Définition

Un *filtre paramétrique* possède une ou deux racines de  $h$  sur l'axe réel, afin de minimiser le nombre d'inductances nécessaires à la synthèse.

Selon la propriété 2.3.20, un filtre paramétrique à *une* racine réelle n'est ni symétrique, ni antisymétrique.

Par contre un filtre paramétrique possédant une paire de racines en  $\pm \sigma$  est, soit symétrique, soit antisymétrique.

### 6.3.4 Calcul du nombre minimal de bobines

Soient  $\deg(g)$  et  $\deg(f)$  respectivement les degrés des polynômes  $g$  et  $f$ . Le nombre minimal d'inductances nécessaires pour la réalisation des pôles d'affaiblissement finis, y compris ceux à l'origine, est le plus grand entier contenu dans  $[\deg(f)/2]$ . De même, les pôles d'affaiblissement à l'infini requièrent au minimum un nombre de bobines qui est le plus grand entier compris dans  $[\deg(g) - \deg(f)]/2$ . Le nombre total de bobines est donné par le tableau 6.15. Ce calcul suppose que les rapports  $a$  et  $b$  ont été choisis de façon optimale.

		$\deg(f)$	
		pair	impair
$\deg(g)$	pair	$\deg(g)/2$	$\deg(g)/2 - 1$
	impair	$\frac{\deg(g) - 1}{2}$	$\frac{\deg(g) + 1}{2}$

Tableau 6.15

### 6.3.5 Nombre minimal de pôles d'affaiblissement à l'origine et à l'infini

Le chapitre 5 a montré combien il est important de pouvoir choisir librement la position des pôles d'affaiblissement afin de rencontrer les exigences en bande coupée avec le filtre de degré minimum. Par ailleurs, la section 6.2 a montré qu'il est nécessaire d'utiliser des capacités de translation, pour pouvoir extraire des paires de pôles finis : or, ces capacités ne peuvent elles-mêmes être extraites que dans la mesure où il existe des pôles d'affaiblissement, soit à l'origine, soit à l'infini.

Ces deux contraintes peuvent être contradictoires : on est obligé de disposer un pôle d'affaiblissement à l'origine ou à l'infini, dans le seul but de pouvoir extraire des capacités de translation.

D'après le tableau 6.15, on peut disposer au moins un pôle d'affaiblissement à l'infini pour le passe-bas, et à l'origine pour le passe-haut.

Dès lors, la structure d'un filtre passe-bas, représentée à la figure 6.17, est une échelle dont les branches parallèle sont des capacités de translation et les branches série des circuits antirésonants. L'ensemble des branches parallèle réalise un pôle d'affaiblissement à l'infini. Cette structure n'est, du reste, pas essentiellement différente de celle étudiée au chapitre 3, sous la forme d'une chaîne-image de cellules en  $m$ -dérivé. Si l'on a besoin de plusieurs pôles d'affaiblissement à l'infini, certaines branches série seront de simples inductances.

La structure d'un filtre passe-haut sera celle de la figure 6.16, avec des branches série qui sont autant de capacités de translation, réalisant ensemble un pôle d'affaiblissement à l'origine, et des branches parallèle qui sont des circuits résonants. S'il y a

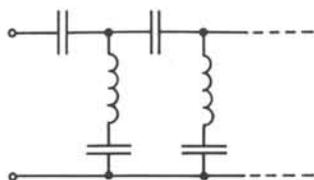


Fig. 6.16

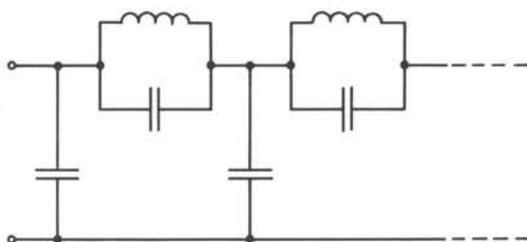


Fig. 6.17

plusieurs pôles d'affaiblissement à l'origine, certaines branches parallèle seront de simples inductances.

Dans le cas du passe-bande, on dispose au minimum un pôle d'affaiblissement, tant à l'origine qu'à l'infini. En principe, on pourrait synthétiser n'importe quelle paire de pôles d'affaiblissement finis, par un circuit résonant dans une branche parallèle ou par un circuit antirésonant dans une branche série, puisque les deux possibilités existent. Cependant, l'usage est de réaliser les pôles d'affaiblissement situés en dessous de la bande passante exclusivement par des circuits résonants parallèle, et ceux situés au-dessus par des circuits antirésonants série. La seule justification de cette méthode est d'assurer la réalisabilité qui est toujours problématique pour les capacités de translation. L'argument, à la base de ce choix, est purement qualitatif et analogique. Les filtres zig-zag, décrits au paragraphe 3.5.5, et représentés à la figure 6.18 sont conçus par la méthode des paramètres-image et sont *toujours* réalisables, pourvu que l'on extraie les pôles d'affaiblissement, selon leur position par rapport à la bande passante, tantôt par un circuit résonant, tantôt par un circuit antirésonant. Il est donc logique d'agir de même dans le cas d'un filtre conçu selon les paramètres effectifs, qui ne peut pas radicalement différer d'un filtre zig-zag ni dans sa structure, ni dans sa caractéristique d'affaiblissement, ni dans la relation entre les deux.

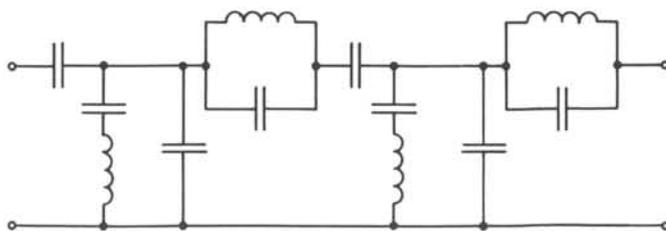


Fig. 6.18

Il reste le cas du filtre coupe-bande, pour lequel on ne peut pas prévoir de pôles d'affaiblissement à l'origine ou à l'infini; dès lors la technique des capacités de translation ne peut pas être appliquée. Il n'y a donc, pour le filtre coupe-bande, que des méthodes de synthèse bien imparfaites : soit utiliser une cascade de cellules de Brune, ce qui est une solution purement théorique dans une technologie à base de bobines et de condensateurs; soit utiliser la transformation de fréquence du paragraphe 1.2.12, qui gaspille délibérément un degré de liberté sur deux.

### 6.3.6 Effet des extractions sur les nombres binaires

La section 6.2 a essentiellement été consacrée à l'analyse détaillée des différentes extractions, et des conditions préalables sur les nombres binaires  $a$  et  $b$ . Le tableau 6.19 résume ces résultats. D'une façon plus imagée, les modifications induites sur  $a$  et  $b$ , par les diverses extractions, peuvent être schématisées à la figure 6.20 : chaque nœud représente une des quatre combinaisons possibles de ces deux nombres binaires, tandis que les branches indiquent l'extraction réalisée.

Tableau 6.19

Conditions avant extraction		Conditions après extraction						
$a$	$b$	$A$ Capacité série	$B$ Inductance série	$C$ Capacité parallèle	$D$ Inductance parallèle	$E$ Circuit résonnant précédé d'une capacité de translation	$F$ Circuit antirésonnant précédé d'une capacité de translation	$G$ Cellule de Brune
1	1	10	01			11		11
1	0		00		11			10
0	1	00		11		01	01	01
0	0			10	01		00	00

Bien entendu, ce tableau et ce diagramme n'ont de sens que dans le cas où il existe au moins un pôle d'affaiblissement à l'origine et à l'infini. Si tel n'est pas le cas, les rapports  $g_n/h_n$  et  $g_0/h_0$  ont d'autres valeurs que  $\pm 1$ , et les nombres binaires  $a$  et  $b$  ne sont pas définis.

Moyennant cette réserve, on constate, à la figure 6.20, que le nœud 01 occupe une position privilégiée, en ce sens que l'on peut extraire des paires de pôles finis par les branches E et F, des paires de pôles à l'infini par la boucle CB, des paires de pôles à l'origine par la boucle AD. Toutes ces extractions se font par un chemin dont le nœud initial et le nœud final coïncident avec 01.

### 6.3.7 Structure globale d'un filtre passe-bande

La position privilégiée du nœud 01, à la figure 6.20, suggère de réaliser systématiquement la plus grande partie des extractions à partir de ce nœud, et d'y revenir après l'extraction de chaque paire de pôles finis, à l'origine ou à l'infini.

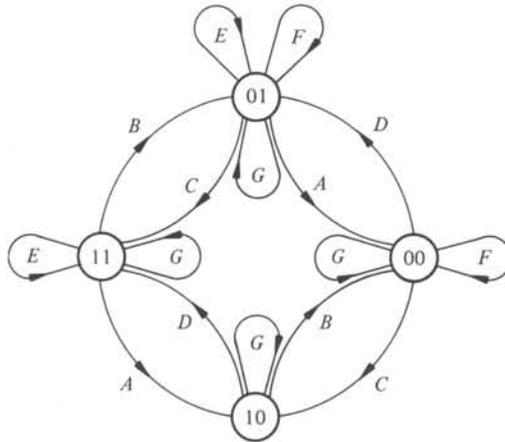


Fig. 6.20

Bien entendu, parmi toutes les caractéristiques de filtre passe-bande, la valeur initiale de  $a$  et  $b$  sera souvent différente de 0 et 1, et il faudra prévoir une ou deux extractions préalables pour aboutir à ce nœud. De même, après avoir extrait toutes les paires de pôles en 01, il faut éventuellement prévoir une ou deux extractions supplémentaires pour réaliser les pôles restants.

On distinguera dans le processus de synthèse, trois étapes :

- le *préambule*, constitué par le chemin le plus court, dans le graphe 6.20, dont l'origine est le nœud initial et la destination le nœud 01;
- le *corps*, constitué par l'ensemble des extractions de paires de pôles effectuées en 01;
- la *conclusion*, constituée par les extractions à réaliser, après épuisement de celles réalisables en 01.

Le corps d'une synthèse est identique pour tous les passe-bande. Ils se distinguent entre eux par la nature des préambules et des conclusions.

### 6.3.8 Classification des filtres passe-bande

La figure 6.20 montre clairement qu'il y a quatre préambules distincts :

- si le nœud initial est 00, le préambule est constitué par l'extraction D;
- si le nœud initial est 11, le préambule est constitué par l'extraction B;
- si le nœud initial est 10, le préambule est constitué par les extractions BD ou DB, qui sont du reste équivalentes par la transformation de Norton;
- si le nœud initial est 01, le préambule ne comporte aucune extraction.

De même que le préambule dépend des grandeurs binaires  $a$  et  $b$ , la conclusion dépend de  $c$  et  $d$ , qui sont les homologues de  $a$  et  $b$  pour les polynômes  $g$  et  $\mp h_*$ , qui définissent  $s_{22}$  ou  $\xi_2$ . La synthèse que nous avons présentée à la section 6.2, procède de gauche à droite, de façon purement conventionnelle. On pourrait, tout aussi bien, procéder à la synthèse de droite à gauche, ce qui revient à remplacer, dans les formules de la section 6.2, le polynôme  $h$  par  $\mp h_*$ . Après avoir épuisé toutes les paires de

pôles à extraire au nœud 01, il peut, au maximum, rester à extraire un pôle à l'origine et un pôle à l'infini, respectivement par les extractions A et C

- si le nœud initial pour la synthèse de droite à gauche est 11, la conclusion est constituée par l'extraction A, seule capacité que l'on peut extraire selon le tableau 6.19;
- si ce nœud initial est 00, la conclusion comporte l'extraction C;
- si ce nœud initial est 01, la conclusion comporte l'extraction AC ou CA;
- si ce nœud initial est 10, la conclusion ne comporte aucune extraction.

Le tableau 6.21 indique les 16 combinaisons possibles de structures, ainsi que les nombres binaires correspondants. Ces combinaisons de nombres sont identiques à celles du tableau 6.7. Elles permettent de distinguer 16 classes de filtres passe-bande.

		Préambule			
		<i>D</i>	néant	<i>BD</i>	<i>B</i>
Conclusion	<i>C</i>	0000 (0)	0100 (4)	1000 (8)	1100 (12)
	<i>AC</i>	0001 (1)	0101 (5)	1001 (9)	1101 (13)
	néant	0010 (2)	0110 (6)	1010 (10)	1110 (14)
	<i>A</i>	0011 (3)	0111 (7)	1011 (11)	1111 (15)

Tableau 6.21

### 6.3.9 Parités des degrés des polynômes

Pour chaque classe, on peut calculer la parité des polynômes à partir des nombres binaires. On utilisera les fonctions OU-exclusif et NON, représentées respectivement par les symboles  $\oplus$  et  $-$  (chap. V.1).

La parité du degré du polynôme  $f$ , dépend de la comparaison de  $b = g_0/h_0$  et  $d = g_0/\pm h_0$ . Si  $b$  ou  $d$  vaut 1, ou encore si

$$d \oplus b = 1 \quad (6.70)$$

$\deg(f)$  est pair

La parité de  $\deg(h) = \deg(g)$  se déduisent d'une opération effectuée sur les quatre nombres binaires. Si  $\deg(h)$  est pair,  $h_n = h_{n*}$ ; dans ce cas, soit  $a = c$  et  $b = d$  quand  $\deg(f)$  est impair, soit  $a = \bar{c}$  et  $b = \bar{d}$  quand  $\deg(f)$  est pair. De toute façon,  $a \oplus c = b \oplus d$  ou

$$a \oplus b \oplus c \oplus d = 0 \quad (6.71)$$

Inversement, si  $\deg(h)$  est impair

$$a \oplus b \oplus c \oplus d = 1 \quad (6.72)$$

### 6.3.10 Caractère paramétrique des passe-bande

Si  $\deg(h)$  est impair, c'est-à-dire si (6.72) est vérifié, toutes les racines de  $h$  ne peuvent plus être placées sur l'axe imaginaire, puisque l'on ne peut pas accepter un zéro d'affaiblissement à l'origine. Dès lors,  $h(p)$  possède un facteur  $(p \pm \sigma)$ . Le signe + doit être choisi si

$$a \oplus b = 0 \quad (6.73)$$

puisque, dans ce cas,  $g_n/h_n = g_0/h_0$ . Inversement, le signe - doit être choisi si

$$a \oplus b = 1 \quad (6.74)$$

Si, d'une part,  $\deg(h)$  est pair, donc (6.71) est vérifié et que, d'autre part,  $h_n$  et  $h_0$  n'ont pas le même signe, donc (6.74) est vérifié, alors un facteur  $(p^2 - \sigma^2)$  doit être prévu.

### 6.3.11 Caractère symétrique ou antisymétrique des passe-bande

Le polynôme  $h$  ne peut pas être impair, parce que cela signifierait l'existence d'au moins un zéro d'affaiblissement à l'origine. Dès lors que  $\deg(h)$  est pair, c'est-à-dire que (6.71) est vérifié,  $h$  est choisi comme un polynôme pair : soit que toutes les racines sont sur l'axe imaginaire, soit qu'un facteur paramétrique  $(p^2 - \sigma^2)$  a été choisi. Si, en plus, (6.70) est vérifié, le filtre est antisymétrique. Sinon il est symétrique.

### 6.3.12 Nombre de pôles d'affaiblissement à l'origine et à l'infini

Selon la discussion du paragraphe 6.3.5, on prévoit au minimum un pôle d'affaiblissement, tant à l'origine qu'à l'infini. Mais, selon la parité des degrés des polynômes  $f$ ,  $g$  et  $h$ , il peut être nécessaire d'en réaliser un nombre pair, c'est-à-dire au minimum deux. Même lorsque le nombre de pôles est impair, il peut être nécessaire d'en prévoir au minimum trois, parce que l'on désire disposer d'un pôle à extraire sous forme de capacité, engendrant les capacités de translation du corps de la synthèse.

Si (6.70) est vérifié,  $f$  est pair : il y a au moins deux pôles d'affaiblissement à l'origine.

Si (6.70) et (6.71) sont simultanément vérifiés, ou encore si

$$a \oplus c = 1 \quad (6.75)$$

$\deg(f)$  et  $\deg(g)$  sont pairs, et il y a au moins deux pôles à l'infini. De même, si  $\deg(f)$  et  $\deg(g)$  sont simultanément impairs, on trouve que (6.75) est toujours vérifié, et il y a au moins deux pôles à l'infini.

Si  $\deg(f)$  est impair, c'est-à-dire si  $b \oplus d = 0$ , et si le préambule comporte l'extraction D d'un pôle à l'origine chaque fois que  $b = 0$ , il faut prévoir au minimum trois pôles à l'origine, de façon qu'il y en ait encore un lorsque la synthèse du corps commence. En résumé,  $b = d = 0$  implique trois pôles d'affaiblissement à l'origine.

On prouvera, de même, que  $a = c = 1$  implique l'existence de trois pôles d'affaiblissement à l'infini. En effet,  $[\deg(g) - \deg(f)]$  est impair, et le préambule comporte l'extraction B d'un pôle d'affaiblissement à l'origine.

Tableau 6.22

Classe	Numérotation décimale			deg( $f$ )	deg( $g$ ) = deg( $h$ )	Facteur paramétrique	Symétrie ou anti-symétrie	Nombre de bobines	Nombre minimal de pôles à l'origine	Nombre minimal de pôles à l'infini
	$a$	$b$	$c$							
0	0	0	0	0	pair	néant	symétrie	$\frac{\deg(g)}{2}$	3	1
1	0	0	0	1	impair	$p + \sigma$		$\frac{\deg(g) - 1}{2}$	2	1
2	0	0	1	0	impair	$p + \sigma$		$\frac{\deg(g) + 1}{2}$	3	2
3	0	0	1	1	pair	néant	antimétrie	$\frac{\deg(g)}{2}$	2	2
4	0	1	0	0	impair	$p - \sigma$		$\frac{\deg(g) - 1}{2}$	2	1
5	0	1	0	1	impair	$p^2 - \sigma^2$	symétrie	$\frac{\deg(g)}{2} - 1$	1	1
6	0	1	1	0	pair	$p^2 - \sigma^2$	antimétrie	$\frac{\deg(g)}{2}$	2	2
7	0	1	1	1	impair	$p - \sigma$		$\frac{\deg(g) - 1}{2}$	1	2
8	1	0	0	0	impair	$p - \sigma$		$\frac{\deg(g) + 1}{2}$	3	2
9	1	0	0	1	pair	$p^2 - \sigma^2$	antimétrie	$\frac{\deg(g)}{2}$	2	2
10	1	0	1	0	impair	$p^2 - \sigma^2$	symétrie	$\frac{\deg(g)}{2} + 1$	3	3
11	1	0	1	1	pair	$p - \sigma$		$\frac{\deg(g) + 1}{2}$	2	3
12	1	1	0	0	pair	néant	antimétrie	$\frac{\deg(g)}{2}$	2	2
13	1	1	0	1	impair	$p + \sigma$		$\frac{\deg(g) - 1}{2}$	1	2
14	1	1	1	0	impair	$p + \sigma$		$\frac{\deg(g) + 1}{2}$	2	3
15	1	1	1	1	impair	néant	symétrie	$\frac{\deg(g)}{2}$	1	3

### 6.3.13 Commentaire

Selon le tableau 6.21, il existe 16 classes différentes de passe-bande, auxquelles il est possible d'attribuer les diverses propriétés qui ont été discutées aux paragraphes précédents. L'ensemble des résultats fait l'objet du tableau 6.22. On complètera ces résultats par ceux du tableau 6.7 qui lie la classe, de façon univoque, au comportement des impédances terminées à l'origine et à l'infini.

La lecture du tableau 6.22 indique combien le choix d'une classe peut être complexe. Si l'on s'impose, comme seule contrainte, l'économie maximale en bobines, le choix n'est même pas évident. Ainsi, la classe 5 est privilégiée à première vue, en ce sens qu'elle est la seule à ne requérir qu'un seul pôle d'affaiblissement, tant à l'origine qu'à l'infini. Dès lors, on n'y consommera pas plus d'inductances qu'il n'y a de paires de pôles finis. Cependant, cette classe est aussi paramétrique, puisque  $h$  possède nécessairement une paire de racines sur l'axe réel. On ne dispose donc pas de l'ensemble des racines de  $h$ , pour minimiser l'ondulation dans la bande. Il n'est pas certain qu'en utilisant le même nombre de bobines, dans un filtre non paramétrique, on n'arrive pas à améliorer la sélectivité du filtre.

Par ailleurs, l'économie maximale en bobines n'est pas la seule contrainte imposée aux filtres. On exige souvent que l'impédance terminée ait un certain comportement dans certaines gammes de fréquence. A ce point de vue, un filtre débutant par les extractions BA possède un circuit résonant dans son premier bras série, ce qui peut être intéressant.

### 6.3.14 Classification des filtres passe-bas

Dans ce cas, les variables binaires  $b$  et  $d$  sont indéfinies, puisqu'il n'y a pas de pôle d'affaiblissement à l'origine. Les combinaisons des variables  $a$  et  $c$  déterminent quatre classes recensées au tableau 6.23.

Tableau 6.23

Classe $a$ $c$	Préambule	Conclusion	$D(g)$	Symétrie et anti- métrie	Nombre minimal de pôles à l'infini	Nombre de bobines
0 0 0	néant	$C$	impair	symétrie	1	$\frac{\deg(g) - 1}{2}$
1 0 1	néant	néant	pair	antimétrie	2	$\frac{\deg(g)}{2}$
2 1 0	$B$	$C$	pair	antimétrie	2	$\frac{\deg(g)}{2}$
3 1 1	$B$	néant	impair	symétrie	3	$\frac{\deg(g) + 1}{2}$

Dans tous les cas,  $\deg(f)$  est pair puisque  $f$  n'a pas de racine à l'origine. Les classes vérifiant

$$a \oplus c = 0 \quad (6.76)$$

sont caractérisées par  $\deg(g)$  impair. Dans le cas de la classe 3, le préambule extrait déjà un pôle d'affaiblissement à l'infini. Dès lors, il faut en prévoir au minimum trois.

Si  $\deg(h)$  est impair, il n'est plus nécessaire de prévoir un facteur paramétrique, puisque l'on peut placer un zéro d'affaiblissement à l'origine. Si toutes les racines de  $h$  sont placées sur l'axe imaginaire, les filtres passe-bas sont, soit symétriques, soit antisymétriques.

### 6.3.15 Commentaire

Si l'on choisit, comme contraintes, d'utiliser le minimum d'inductances et que chacune serve à créer une paire de pôles finis par un circuit antirésonant, la classe 0 est optimale. Le circuit est du type de la figure 6.11. Le filtre est symétrique : à l'origine, l'affaiblissement est nul, puisque le quadripôle se réduit à une paire de connexions droites entre deux résistances égales.

### 6.3.16 Exemple : filtre passe-bas

Au paragraphe 1.1.13, on a représenté des exigences typiques imposées à un filtre passe-bas. Ces exigences ont été remplies au moyen d'une fonction déterminée par un programme d'approximation. Les racines des polynômes  $f$  et  $h$  caractérisant cette fonction approximante sont énumérées au paragraphe 5.4.14.

La synthèse de ce filtre passe-bas a été effectuée au moyen d'un programme de calcul. La structure avec les valeurs nominales des éléments est dessinée à la figure 6.24. Le niveau d'impédance a été choisi tel que le filtre ait son affaiblissement nominal lorsqu'il est terminé par des résistances de  $600\Omega$ . La courbe d'affaiblissement nominal de ce filtre, calculée par un programme d'analyse, est présentée à la figure 1.2.

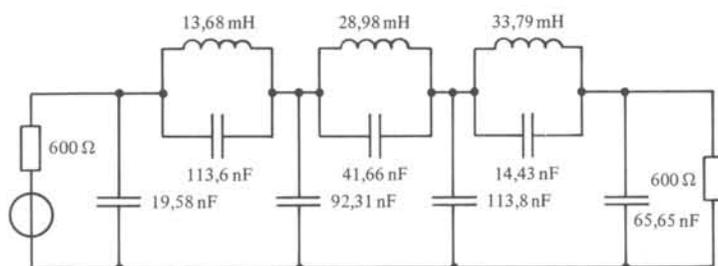


Fig. 6.24

Ces mêmes exigences ont été reprises au paragraphe 3.3.10 par la méthode de synthèse en paramètres-image. On pourra dès lors comparer les figures 1.2, 3.14, 3.15 et 6.24.

### 6.3.17 Exemple : filtre passe-bande

A la figure 6.26, on a représenté des exigences typiques imposées à un filtre passe-bande. Au paragraphe 5.4.15, on a calculé une fonction approximante rencontrant ces exigences.

On propose de synthétiser ce filtre passe-bande de degré 10, dont les polynômes  $f$ ,  $g$  et  $h$  ont été déterminés dans le cadre du problème d'approximation posé au paragraphe 5.4.15.

Parmi les seize classes de filtres passe-bande proposées dans le tableau 6.22, on a retenu la classe 12 qui requiert une paire de pôles d'affaiblissement à l'origine et à l'infini. De plus, tous les zéros d'affaiblissement sont situés sur l'axe imaginaire. Ce choix a été fait compte tenu du critère suivant : d'une part, résoudre le problème d'approximation avec la plus grande marge possible, et d'autre part, pour un degré donné, obtenir une structure comportant le plus petit nombre possible de bobines.

La structure, avec les valeurs des éléments calculés par un programme de synthèse, est donnée à la figure 6.25. Le niveau d'impédance a été choisi pour un fonctionnement nominal sur une résistance de source de  $600\Omega$ .

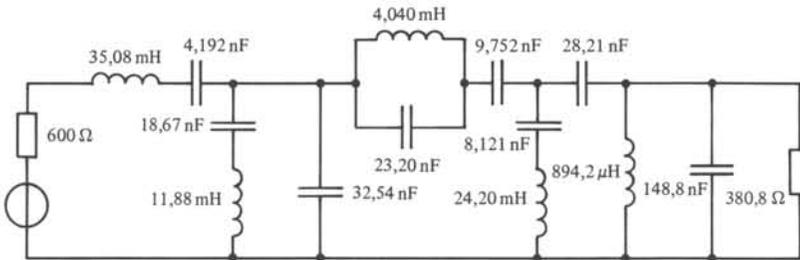


Fig. 6.25

On a représenté à la figure 6.26 une analyse de ce filtre en fonction de la fréquence avec les valeurs nominales des éléments successivement considérés sans, puis avec pertes estimées avec un facteur de qualité de 5000 à 15 kHz pour les condensateurs et de 800 à 15 kHz pour les bobines.

Ces mêmes exigences ont été reprises au paragraphe 3.5.8 par la méthode des paramètres-image. La méthode avait conduit dans ce cas à un filtre de degré 14. On comparera les structures obtenues aux figures 3.30 et 6.25, ainsi que leurs analyses respectives faites dans les mêmes conditions aux figures 3.31 et 6.26.

## 6.4 ANALYSE NUMÉRIQUE

### 6.4.1 Introduction

Les sections 6.2 et 6.3 ont exposé respectivement les algorithmes d'extraction des différentes cellules et la façon d'enchaîner ceux-ci. On est de la sorte arrivé au point où l'on peut concevoir la totalité d'un filtre depuis les exigences qui lui sont imposées jusqu'aux valeurs des éléments qui vérifient ces exigences. Rappelons les étapes de ce calcul.

Par les techniques décrites à la section 5.4, on détermine les polynômes  $f$  et  $h$  tels que l'affaiblissement donné par la formule (2.72) vérifie les exigences, tout en prévoyant une marge de sécurité pour tenir compte des pertes et des tolérances des éléments. La *phase d'approximation* est réalisée par un programme qui implémente l'algorithme de Remez. Le résultat du calcul est constitué par les racines des polynômes  $f$  et  $h$  ainsi que par une constante multiplicative.

En utilisant la formule (2.69), on calcule le polynôme  $g$  à partir de  $f$  et  $h$ . Cette *phase de factorisation* est effectuée par un programme de calcul. Il faut remarquer que

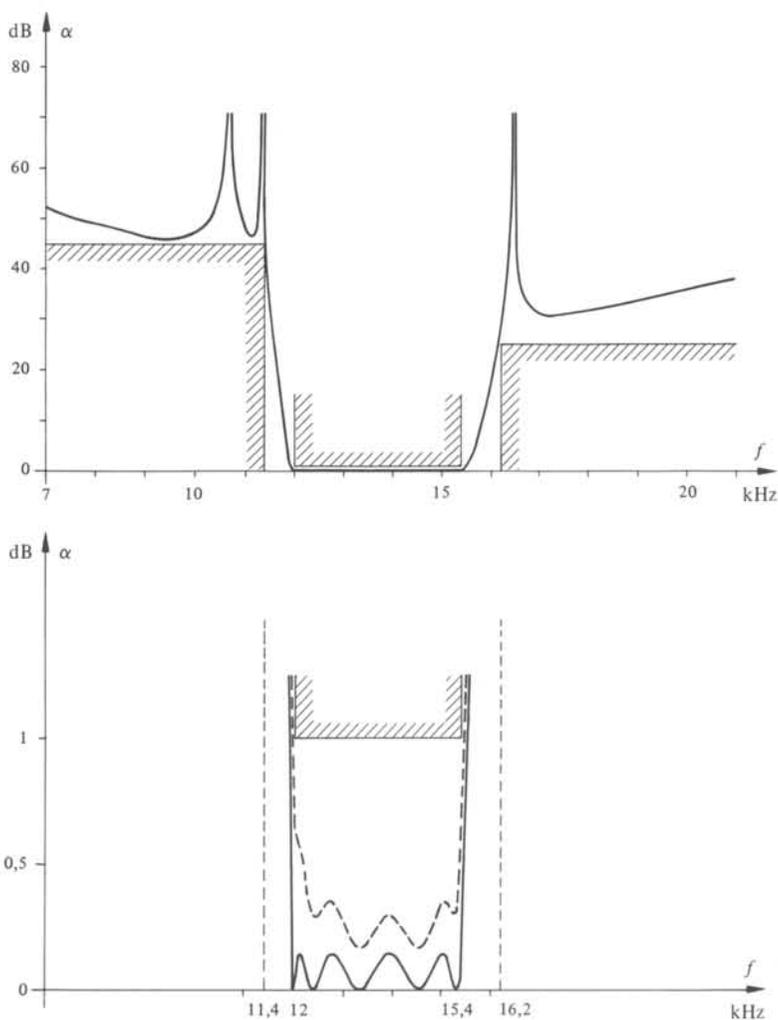


Fig. 6.26

cette phase comprend la recherche des racines d'un polynôme dont le degré est le double de celui de  $g$ . Le problème est compliqué par le fait que les racines de  $g$  sont entassées à proximité de la limite de bande passante, de façon à réaliser la discrimination requise. Plus cette discrimination est élevée et plus faible est l'intervalle de transition, plus grand sera le degré de  $g$  et plus faible la distance relative entre les racines. Cet entassement des racines est une première source de difficultés numériques, parce qu'il faut utiliser un grand nombre de chiffres significatifs afin de distinguer ces racines les unes des autres.

En utilisant les formules de la section 6.2, on calcule successivement la valeur des éléments. C'est la *phase de synthèse* réalisée par un programme. Au vu des formules, cette phase semble très simple : la valeur des éléments se calcule à partir des coefficients des polynômes  $g$  et  $h$ ; on consultera pour s'en convaincre, par exemple,

les formules (6.40) et (6.41). Les polynômes  $f''$ ,  $g''$  et  $h''$  se calculent sans peine à partir de formules qui donnent leurs coefficients comme fonctions linéaires des coefficients de  $f$ ,  $g$  et  $h$ ; on le vérifiera par exemple sur (6.38) et (6.39). Malheureusement, cette synthèse, opérée par calcul sur les *coefficients* des polynômes, devient rapidement imprécise : en effet, si l'on exige une certaine précision des racines d'un polynôme, on ne peut l'obtenir qu'en travaillant avec une précision bien plus élevée sur les coefficients de celui-ci (voir § 6.4.2). Or, ce qui compte vraiment dans une caractéristique d'affaiblissement, c'est la position des racines de  $f$  et de  $h$  qui constituent les pôles et les zéros de celle-ci.

En pratique, compte tenu de l'entassement des racines de  $g$  et de la sensibilité des racines aux valeurs des coefficients, une séquence de programmes conçus sans précaution spéciale sur un ordinateur, dont les mots ont une mantisse de  $n$  décimales, ne permettra pas de synthétiser un filtre dont le degré dépasse  $n$ . Comme il est souvent nécessaire de synthétiser des filtres dont le degré atteint 20, 30 ou même 50, et que  $n$  vaut une dizaine, ce problème d'analyse numérique doit être pris en compte, faute de quoi la synthèse fournira un circuit qui ne respectera pas les exigences et qui sera même complètement aberrant.

#### 6.4.2 Exemple

Soit un polynôme du quatrième degré dont les racines sont situées sur l'axe imaginaire respectivement en  $\pm j 1,0001$  et  $\pm j 0,9999$ . Ce polynôme peut s'écrire sous les formes équivalentes arrondies à 8 décimales après la virgule

$$(p^2 + 1,00020001)(p^2 + 0,99980001) = p^4 + 2,00000002p^2 + 0,99999998 \quad (6.77)$$

Si l'on arrondit les coefficients de la deuxième forme à la *septième décimale*, on trouve

$$(p^4 + 2p^2 + 1) = (p^2 + 1)^2 \quad (6.78)$$

et les deux paires de racines sont confondues. Toute l'information qui permet de discerner une racine de l'autre se trouve donc concentrée dans la huitième décimale des coefficients de la deuxième forme. L'exemple élémentaire de (6.77) montre qu'il faut une précision de quatre décimales pour les racines et de huit décimales dans la forme avec coefficients pour obtenir la même précision sur les racines.

#### 6.4.3 Commentaire

Il existe donc deux sources de mauvais conditionnement des problèmes numériques à résoudre : d'une part, la position des racines de  $g$ , concentrées dans un petit domaine du plan; d'autre part, la sensibilité des racines d'un polynôme à la valeur des coefficients de celui-ci. Dès lors, on peut imaginer deux types de méthodes pour contourner la difficulté: soit d'étaler les racines par une transformation de variable (§ 6.4.4), soit de ne jamais utiliser les coefficients d'un polynôme (§ 6.4.5). Bien entendu, il est aussi possible de calculer en multiple longueur, ce qui constitue la solution la plus simple. Le choix entre ces trois solutions dépend du logiciel informatique disponible.

#### 6.4.4 Méthode de la variable transformée

Pour étaler les racines de  $g$ , on dispose des transformations de  $p$  en  $z$ , données respectivement par (5.42) et (5.43) pour les cas du passe-bas et du passe-bande. Elles ont le mérite de transformer la bande passante en la totalité de l'axe imaginaire et, donc, d'étaler les racines de  $g$ . Elles ont le désavantage de constituer une relation irrationnelle entre  $p$  et  $z$  : il faut effectuer *toute la synthèse* dans le plan  $z$ , en tenant compte de ces facteurs irrationnels, ce qui est passablement fastidieux. On trouvera un exemple entièrement traité dans [21], p. 117.

#### 6.4.5 Méthode du produit

Elle consiste à ne jamais représenter un polynôme par ses coefficients mais à toujours en calculer les racines. On évite de la sorte la sensibilité mentionnée plus haut. Cette méthode est très exigeante au point de vue des calculs à effectuer, puisqu'un calcul linéaire simple des coefficients de  $g''$  à partir de  $g$ ,  $h$  et  $L$ , tel qu'il est donné par exemple à la formule (6.38), est remplacé par la recherche des racines de  $g''$ . En pratique, cela signifie qu'à chaque extraction, on doit procéder à une factorisation des nouveaux polynômes  $g$  et  $h$  de degré relativement élevé.

### 6.5 CIRCUITS AUXILIAIRES

#### 6.5.1 Introduction

Les filtres conçus selon les méthodes d'approximation exposées aux chapitres 4 et 5, vérifient certaines exigences d'affaiblissement. Par contre, le déphasage a été totalement négligé jusqu'à présent. En règle générale, le déphasage est corrigé après coup, si l'on doit en tenir compte : on insère, en cascade avec le biporte filtre proprement dit, un biporte supplémentaire qui a une fonction de transfert passe-tout, de façon que le déphasage du filtre puisse être corrigé sans que l'affaiblissement soit modifié. Ce biporte est appelé *correcteur de phase*.

#### 6.5.2 Propriété

Un correcteur de phase passif est un biporte non dissipatif, symétrique et à impédance constante.

Le biporte est non dissipatif parce que l'on exige un affaiblissement nul à toute fréquence. Son coefficient de transmission vaut  $s_{12} = g_*/g$  par le paragraphe 2.3.5. Dès lors, par (2.67), il vient  $s_{11} = s_{22} = 0$ , et le biporte est symétrique. Puisqu'il ne présente pas de réflexion tant à l'entrée qu'à la sortie, il faut qu'il soit à impédance constante (§ 3.1.5). Dès lors que le correcteur de phase est à impédance constante, il peut être connecté en cascade avec le filtre proprement dit : les coefficients de transmission de deux biportes doivent être multipliés simplement, et les déphasages s'additionnent. En effet, la matrice de transfert du filtre et du correcteur ont respectivement les formes (3.6) et (3.7). En les multipliant, le coefficient de transmission global est simplement  $s_{21}s_i$ .

### 6.5.3 Synthèse

La synthèse d'un correcteur de phase est élémentaire par suite de la propriété précédente. Puisque tout correcteur de phase est à impédance constante, on peut constituer un correcteur de degré élevé par une chaîne de cellules élémentaires, qui constitue en fait une chaîne-image. Il suffit, dès lors, de décomposer  $g(p)$  en facteurs de degré aussi faible que possible. Si l'on s'en tient à des facteurs à coefficients réels, il faut prévoir une cellule pour les facteurs du premier degré, tenant compte des racines réelles de  $g(p)$  et une autre cellule pour les facteurs du second degré, tenant compte des paires de racines complexes conjuguées.

### 6.5.4 Structure en treillis

Par (3.17), il apparaît que les impédances  $Z_1$  et  $Z_2$  du treillis, réalisant un bi-porte à impédance constante, sont duales l'une de l'autre.

Par ailleurs, la formule (3.55), dans laquelle on remplace  $Z_{11} = Z_{22}$  et  $Z_{12}$  par leurs expressions en fonction de  $Z_1$  et  $Z_2$  à partir de (3.15) et (3.16), prend la forme

$$s_{21} = \frac{(Z_1 - Z_2)R}{(Z_1 + R)(Z_2 + R)} \quad (6.79)$$

valable pour tout bi-porte symétrique.

Si, de plus, il est à impédance constante, en posant  $Z_2 = R^2/Z_1$  dans (6.79), on trouve

$$s_{21} = \frac{Z_1 - R}{Z_1 + R} \quad (6.80)$$

qui donne encore

$$Z_1 = R \frac{1 + s_{12}}{1 - s_{12}} \quad (6.81)$$

Dès lors que les impédances du treillis peuvent être calculées directement à partir de  $s_{12}$ , la synthèse est élémentaire.

### 6.5.5 Cellule du premier ordre

Soit le coefficient de transmission

$$s_{21} = -\frac{p - a}{p + a} \quad (6.82)$$

où  $a$  est un réel positif. Par (6.81), il en résulte que  $Z_1$  est une inductance de valeur  $R/a$  et  $Z_2$  est une capacité  $C$  de valeur  $1/Ra$ . Le déphasage de cette cellule vaut

$$\phi = 2 \arctan \omega/a \quad (6.83)$$

et le retard

$$\tau = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \quad (6.84)$$

Le circuit correspondant est représenté à la figure 6.27.

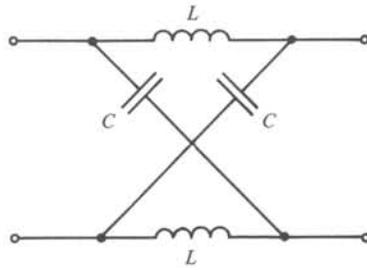


Fig. 6.27

### 6.5.6 Cellule du deuxième ordre

Soit la fonction

$$s_{12} = -\frac{(p-a)^2 + \beta^2}{(p+a)^2 + \beta^2} \quad (6.85)$$

Par le même procédé, cette fonction donne lieu à la synthèse de la cellule représentée à la figure 6.28, où  $L_1 = R/2a$ ,  $C_2 = 1/2aR$ ,  $C_1 = 2a/R(a^2 + \beta^2)$  et  $L_2 = 2aR/(a^2 + \beta^2)$ .

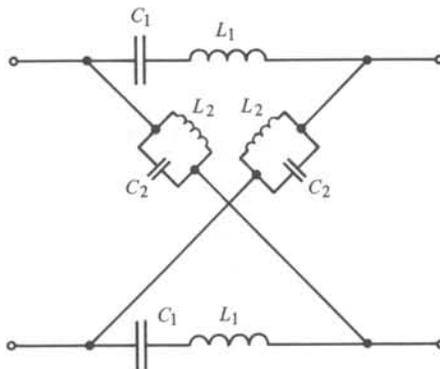


Fig. 6.28

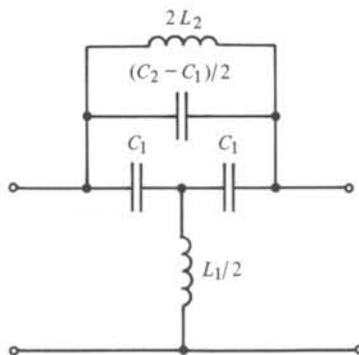


Fig. 6.29

Un circuit équivalent plus économe en bobines est représenté à la figure 6.29. Le déphasage vaut

$$\phi = 2 \left( \arctan \frac{\omega + \beta}{a} + \arctan \frac{\omega - \beta}{a} \right) - \pi \quad (6.86)$$

et le retard est

$$\tau = 2 \left[ \frac{a}{a^2 + (\omega + \beta)^2} + \frac{a}{a^2 + (\omega - \beta)^2} \right] \quad (6.87)$$

### 6.5.7 Correcteur d'affaiblissement

Un correcteur d'affaiblissement est un biporte à impédance constante, placé en cascade avec un filtre, de façon à corriger la caractéristique d'affaiblissement et, en particulier, à compenser l'effet des pertes (section 7.5). La réalisation de cette correction par un biporte à impédance constante permet d'additionner simplement les affaiblissements du filtre et du correcteur.

Ce biporte ne peut pas être non dissipatif parce que la relation (2.67), valable pour tout biporte non dissipatif, entraînerait  $|s_{21}| = 1$ , et le correcteur d'affaiblissement serait un passe-tout.

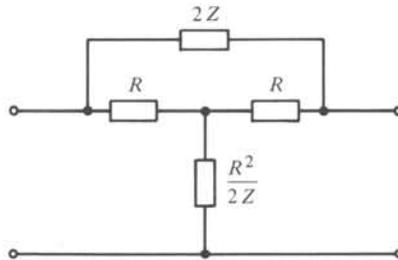


Fig. 6.30

Le réseau en T-ponté de la figure 6.30 permet de réaliser simplement une correction d'affaiblissement, en spécifiant une impédance  $Z$  non dissipative. Par le théorème de Bartlett (§ IV.6.2.7), on peut calculer les impédances du treillis équivalent à ce quadripôle symétrique comme étant

$$Z_1 = R(Z + R)/Z \quad (6.88)$$

$$Z_2 = R^2/Z_1 \quad (6.89)$$

Les branches du treillis sont donc duales et, par la propriété 6.5.4, le T-ponté équivalent est bien à impédance constante. Par (6.80), on trouve

$$s_{21} = \frac{R}{2Z + R} \quad (6.90)$$

et

$$\alpha = 20 \log \left| 1 + \frac{2Z}{R} \right| \quad (6.91)$$

Si l'on désire par exemple égaliser le surcroît d'affaiblissement créé par les pertes près d'une limite de bande passante, on choisira pour  $Z$  un circuit antirésonant accordé sur cette fréquence limite. Comme  $Z$  passe par un minimum, il en sera de même pour  $\alpha$ . Bien entendu, la mise en cascade d'un correcteur d'affaiblissement avec le filtre proprement dit, crée un affaiblissement constant supplémentaire pour le biporte global.

Enfin, il importe de remarquer que la caractéristique de déphasage est également affectée par ce correcteur.

### 6.5.8 Transformations de circuits

Le filtre, tel qu'il résulte du processus de synthèse décrit plus haut, n'est généralement pas construit tel quel, c'est-à-dire en attribuant à des bobines et à des condensateurs, composants physiques, les valeurs trouvées pour les inductances et les capacités. Pour construire pratiquement un filtre, il faut que les valeurs des éléments correspondent à un ordre de grandeur où les composants aient des dimensions et une précision acceptables. Il faut aussi que ces valeurs ne soient pas trop dispersées pour que les composants soient réalisables dans la même technologie.

On dispose, pour atteindre ce but, de transformations de circuits dont deux ont déjà été décrites au volume IV : la transformation étoile-triangle, du paragraphe IV.5.5.17, et la transformation de Norton, décrite au paragraphe IV.6.2.13. En jouant sur les capacités série et parallèle d'un filtre passe-bande, on dispose d'un large choix de transformations.

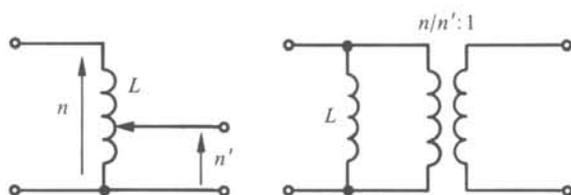


Fig. 6.31

On peut également utiliser la possibilité d'une prise intermédiaire sur une bobine, de façon à créer de la sorte un auto-transformateur que l'on suppose parfait, au sens du paragraphe IV.1.4.12. La figure 6.31 représente le circuit équivalent de cette bobine : le transformateur idéal peut être choisi de façon à modifier le niveau d'impédance du biporte, qui est situé à droite lorsque l'on supprime le transformateur idéal, selon l'équivalence de la figure 6.32. Les nombres  $n$  et  $n'$  représentent respectivement le nombre total de tours de la bobine et celui où la prise intermédiaire est fixée.

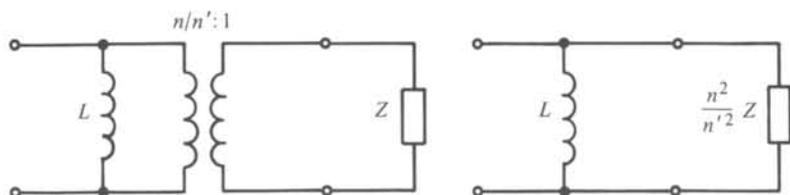


Fig. 6.32



## SENSIBILITÉ DES FILTRES LC

## 7.1 PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

## 7.1.1 Introduction

Le résultat du calcul, exposé au chapitre 6, est un ensemble de valeurs attribuées aux différents composants, inductances, capacités et résistances. Ces valeurs sont déjà affectées des erreurs inhérentes, caractéristiques du problème traité, et des erreurs d'arrondi, propres à l'algorithme utilisé. Compte tenu de ces erreurs, il est usuel de calculer la *valeur nominale* des composants, avec une précision habituelle de huit à dix chiffres significatifs au moyen d'un ordinateur.

Bien entendu, il n'est pas possible physiquement, et il n'est pas souhaitable économiquement, de construire un filtre avec des composants dont la précision serait de  $10^{-8}$  ou  $10^{-10}$ . Pratiquement, la plupart des filtres sont construits avec des composants dont la précision est de l'ordre de  $10^{-2}$ . Il est assez paradoxal de constater que des dispositifs, dont le calcul est tellement sensible à l'algorithme choisi, soient aussi peu sensibles aux valeurs réelles des composants.

De plus, les composants réels ne sont même pas assimilables aux composants idéaux : une inductance isolée n'existe pas; il faut accepter de la réaliser par une bobine affectée de pertes, voire d'une capacité parasite.

L'imprécision et l'imperfection des composants à la construction peuvent être en partie atténuées par le *réglage des pôles*. Comme les pôles d'affaiblissement sont réalisés individuellement par un circuit résonant ou antirésonant dans une structure en échelle, il est possible d'accorder séparément ceux-ci et d'obtenir, lors de la construction, une excellente précision, de l'ordre de  $10^{-4}$ , sur les racines de  $f$ . Par ailleurs, l'affaiblissement aux racines de  $h$ , situées sur l'axe imaginaire, est insensible au premier ordre aux variations des composants (§ 1.1.15). Ces deux particularités, propres aux filtres classiques, expliquent le paradoxe évoqué plus haut.

Après construction, un filtre est encore soumis à des variations de composants, dues à la température et au vieillissement. Toujours pour les circuits résonants et antirésonants, les erreurs résultantes peuvent en partie être palliées par le choix de composants dont les coefficients de température soient de signes opposés.

Malgré ces différentes sources d'imprécision, les filtres classiques bien conçus sont en pratique des dispositifs remarquablement insensibles aux variations de leurs composants. Les problèmes posés par la sensibilité aux composants ne deviennent aigus que dans la mesure où l'on abandonne une réalisation avec des bobines et des condensateurs, pour se tourner vers les techniques de circuits intégrés, qui font l'objet des chapitres 8, 9 et 10. Avant d'abandonner le filtre classique, il est donc utile d'en étudier la sensibilité pour en transposer les propriétés intéressantes dans d'autres technologies.

Il faut du reste vérifier que le filtre nominal choisi, aussi insensible soit-il, est bien le plus insensible des filtres nominaux. Si ce n'est pas le cas, il est possible de modifier légèrement les valeurs nominales du filtre, afin d'en réaliser le *centrage*, c'est-à-dire d'optimiser non plus son affaiblissement nominal, mais son affaiblissement réel, compte tenu des imperfections des composants.

L'effet des pertes et leur éventuelle compensation font l'objet de la section 7.5. Les particularités propres aux filtres RC-actifs seront discutées à la section 9.7.

### 7.1.2 Définitions

La *sensibilité relative* d'une fonction  $F$  par rapport à une variable  $x$  s'écrit

$$S(F, x) = \frac{x}{F} \frac{\partial F}{\partial x} \quad (7.1)$$

On définit de même deux *sensibilités semi-relatives*

$$'S(F, x) = x \frac{\partial F}{\partial x} \quad (7.2)$$

$$S'(F, x) = \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x} \quad (7.3)$$

La *sensibilité absolue*  $'S'(F, x)$  est simplement la dérivée partielle de  $F$  par rapport à  $x$ ,  $\partial F / \partial x$ .

La variable  $x$  représente la valeur d'un composant quelconque du filtre. L'ensemble des valeurs de tous les composants est désigné par  $x = \{x_i\}$ , où  $i = 1, \dots, n$ .

### 7.1.3 Propriétés

Si  $F$  est une fonction de réponse à valeurs complexes, d'affaiblissement  $\alpha$  [Np] et de déphasage  $\varphi$  [rad], on a

$$'S(\alpha, x) = -S(|F|, x) = -\operatorname{Re} S(F, x) \quad (7.4)$$

$$'S(\varphi, x) = -\operatorname{Im} S(F, x) \quad (7.5)$$

En effet, si l'on pose

$$F = \exp(-\alpha - j\varphi) \quad (7.6)$$

il vient

$$S(F, x) = -x \frac{\partial \alpha}{\partial x} - jx \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (7.7)$$

$$= -'S(\alpha, x) - j'S(\varphi, x) \quad (7.8)$$

et

$$\frac{1}{|F|} \frac{\partial |F|}{\partial x} = -\frac{\partial \alpha}{\partial x} \quad (7.9)$$

(7.4) et (7.5) en résultent.

### 7.1.4 Modèle probabiliste

Soit  $x$  la valeur d'un élément incorporé dans un filtre LC. Comme tout élément de circuit est affecté d'imprécisions,  $x$  diffère de la valeur nominale  $\bar{x}$ , d'une façon qui échappe au contrôle du constructeur de filtres. Cette situation est modélisée en considérant  $x$  comme une variable aléatoire. Dans sa distribution de probabilité est condensée toute l'information sur le processus de fabrication d'une série d'éléments supposés identiques, qui est pertinente pour le comportement de la série de filtres.

Dans la plupart des cas pratiques, un calcul approché est suffisant. Si  $F$  est une fonction de réponse à valeurs réelles, qui dépend de  $x$ , alors le comportement de  $F$ , dans un voisinage de la valeur nominale  $\bar{x}$ , peut être approximé par

$$F(x) \cong F(\bar{x}) + (x - \bar{x}) \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}) \quad (7.10)$$

L'interprétation probabiliste de (7.10) est la suivante : par le biais de sa dépendance de la variable aléatoire  $x$ ,  $F$  est également une variable aléatoire. Moyennant (7.10), elle est exprimée par  $x$  et les constantes  $\bar{x}$ ,  $F(\bar{x})$  et  $\partial F/\partial x$ .

Il est préférable d'utiliser, au lieu de  $x$  et  $F$ , les *écarts relatifs de la valeur nominale*  $\delta x = (x - \bar{x})/\bar{x}$  et  $\delta F = (F - \bar{F})/\bar{F}$ . Alors, (7.10) prend la forme

$$\delta F \cong \left[ \frac{\bar{x}}{F(\bar{x})} \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}) \right] \delta x = S(F, x) \delta x \quad (7.11)$$

Dans l'approximation au premier ordre, les variables aléatoires  $\delta F$  et  $\delta x$  sont donc proportionnelles et le facteur de proportionnalité est la sensibilité de  $F$  par rapport à  $x$ , évaluée au point nominal  $\bar{x}$ .

Il s'ensuit que la moyenne et la variance de  $\delta F$  et  $\delta x$  sont liées par

$$\mu_{\delta F} \cong S(F, x) \mu_{\delta x} \quad (7.12)$$

$$\sigma_{\delta F}^2 \cong S^2(F, x) \sigma_{\delta x}^2 \quad (7.13)$$

Si l'écart  $\delta x$  est borné en module par  $M_{\delta x}$  ou, en d'autres mots, si la distribution de probabilité est concentrée dans l'intervalle  $[-M_{\delta x}, +M_{\delta x}]$ , alors, l'écart  $\delta F$  est borné en module, en première approximation, par

$$|\delta F| \leq M_{\delta F} \cong |S(F, x)| M_{\delta x} \quad (7.14)$$

### 7.1.5 Commentaires

Dans l'analyse de ce chapitre, on n'utilisera jamais la distribution de probabilité de  $x$  dans sa totalité; la moyenne  $\mu_{\delta x}$  et la variance  $\sigma_{\delta x}^2$ , ou, éventuellement, la borne  $M_{\delta x}$  suffisent pour l'analyse approchée de cette section. D'ailleurs, les fabricants de composants ne fournissent guère plus d'informations que  $M_{\delta x}$ .

Normalement, la distribution de probabilité de  $x$  devrait être centrée autour de la valeur nominale  $\bar{x}$  et, par conséquent, on peut supposer que  $\mu_{\delta x} = 0$ , ce qui entraîne  $\mu_{\delta F} = 0$ . Cependant, une variation de température et le vieillissement peuvent altérer la distribution de probabilité de  $x$  et, en particulier, engendrer une moyenne  $\mu_{\delta x} \neq 0$ , ce qui implique  $\mu_{\delta F} \neq 0$ .

### 7.1.6 Généralisation à plusieurs variables

Généralisons les développements, du paragraphe 7.1.4, au cas où les imprécisions des valeurs  $x_i$  de plusieurs éléments sont considérées simultanément.

Dans un voisinage des valeurs nominales  $\bar{x}_i$ , la fonction  $F$  peut être approximée par

$$F(x_1, \dots, x_n) \cong F(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \sum_i (x_i - \bar{x}_i) \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \quad (7.15)$$

et alors

$$\delta F \cong \sum_i S(F, x_i) \delta x_i \quad (7.16)$$

Dans cette approximation, la variable aléatoire  $\delta F$  est donc une combinaison linéaire des variables aléatoires  $\delta x_i$  avec, comme coefficients, les sensibilités évaluées au point nominal  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ .

Il résulte de (7.16) que

$$\mu_{\delta F} \cong \sum_i S(F, x_i) \mu_i \quad (7.17)$$

où  $\mu_i$  est la moyenne de  $\delta x_i$ , et, si la borne de l'écart  $\delta x_i$  est  $M_i$ ,

$$M_{\delta F} \leq \sum_i |S(F, x_i)| M_i \quad (7.18)$$

Par contre, la variance de  $\delta F$  fait intervenir des corrélations entre les  $\delta x_i$ . Cependant, il est raisonnable de supposer que les variables  $\delta x_i$  sont indépendantes, tant que l'on ne considère pas les dérives dues aux effets de température et au vieillissement. D'après la théorie des probabilités, pour une somme de variables aléatoires indépendantes, il vient que

$$\sigma_{\delta F}^2 \cong \sum_i S^2(F, x_i) \sigma_i^2 \quad (7.19)$$

où  $\sigma_i$  est l'écart type de  $\delta x_i$ .

Ainsi que cela a été remarqué au paragraphe 7.1.5, en l'absence de variations de température et du vieillissement, on peut supposer  $\mu_i = 0$ , ce qui implique  $\mu_{\delta F} = 0$ . On peut tenir compte des effets de température et du vieillissement par les modifications qu'ils induisent sur  $\sigma_i$  et  $\mu_i$ : cela est fait au paragraphe 7.1.12.

### 7.1.7 Commentaire

L'indépendance des variables aléatoires  $x_i$  n'est une hypothèse valable que si l'on considère le filtre avant un éventuel réglage.

### 7.1.8 Cas particulier

Si les éléments d'un filtre sont de même précision, ce qui signifie que les  $M_i$  sont égaux, il est raisonnable de supposer que les  $\mu_i$  et les  $\sigma_i$  sont aussi identiques. Sous cette hypothèse, (7.17) à (7.19) deviennent

$$\mu_{\delta F} \cong \left[ \sum_i S(F, x_i) \right] \mu_x \quad (7.20)$$

$$M_{\delta F} \leq \left[ \sum_i |S(F, x_i)| \right] M_x \quad (7.21)$$

$$\sigma_{\delta F}^2 \cong \left[ \sum_i S^2(F, x_i) \right] \sigma_x^2 \quad (7.22)$$

### 7.1.9 Définitions

Soit  $F$  une fonction à valeurs réelles de  $n$  variables,  $x_1, \dots, x_n$ .  
L'indice de sensibilité moyenne est défini par

$$\psi(F) = \sum_i S(F, x_i) \quad (7.23)$$

L'indice de sensibilité absolue est défini par

$$\nu(F) = \sum_i |S(F, x_i)| \quad (7.24)$$

L'indice de sensibilité quadratique est défini par

$$\rho(F) = \left[ \sum_i S(F, x_i)^2 \right]^{1/2} \quad (7.25)$$

Remarquons que ces indices dépendent du point,  $x_1, \dots, x_n$ , où les sensibilités sont évaluées.

### 7.1.10 Propriétés

Dans le cas d'éléments à précisions égales, on a, d'après (7.20) à (7.22),

$$\mu_{\delta F} = \psi(F) \mu_x \quad (7.26)$$

$$M_{\delta F} = \nu(F) M_x \quad (7.27)$$

$$\sigma_{\delta F} = \rho(F) \sigma_x \quad (7.28)$$

Les indices  $\psi$ ,  $\nu$  et  $\rho$  sont à évaluer au point nominal  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ .

### 7.1.11 Propriétés de l'affaiblissement

Dans les paragraphes 7.1.4 à 7.1.10,  $F$  est supposée une fonction à valeurs réelles. Si  $F$  prend des valeurs complexes, ce qui est le cas de  $s_{21}$ , les développements restent valables pour les fonctions de réponse  $|F|$  et  $\alpha$ . Cependant, l'analyse du filtre fournit les sensibilités complexes  $S(s_{21}, x_i)$ , comme on le verra à la section 7.2. Il est donc préférable de ramener toutes les expressions aux sensibilités  $S(F, x_i)$  complexes.

En première approximation, autour du point nominal, on a

$$\delta |F| = \frac{e^{-\alpha} - e^{-\bar{\alpha}}}{e^{-\bar{\alpha}}} = \exp(\bar{\alpha} - \alpha) - 1 \cong -\Delta\alpha \quad (7.29)$$

La distribution de probabilité de  $-\Delta\alpha$  est donc, en première approximation, égale à celle de  $\delta |F|$ . En particulier,  $-\mu_{\Delta\alpha}$ ,  $\sigma_{\Delta\alpha}$ ,  $M_{\Delta\alpha}$  sont égales à  $\mu_{\delta |F|}$ ,  $\sigma_{\delta |F|}$  et  $M_{\delta |F|}$ , auxquelles sont applicables les formules des paragraphes précédents. Enfin, ces formules font intervenir les sensibilités  $S(|F|, x_i)$  qui, d'après (7.4), sont égales à  $\text{Re } S(F, x_i)$ , au signe près.

### 7.1.12 Influence de la température et du vieillissement

L'influence de la température, du vieillissement et d'éventuels autres facteurs ambiants, sur la valeur des éléments, peut être modélisée par une dépendance des distributions de probabilité de ces paramètres. Pour fixer les idées, nous restreindrons la discussion à la température  $\theta$  et à des éléments dont la précision et la dépendance de la température sont égales. Les différentes généralisations sont immédiates.

Dans le cas considéré, (7.26) et (7.28) peuvent être écrites en

$$\mu_{\delta F}(\theta) = \psi(F) \mu_x(\theta) \quad (7.30)$$

$$\sigma_{\delta F}(\theta) = \rho(F) \sigma_x(\theta) \quad (7.31)$$

À la température nominale  $\theta_0$ ,  $\mu_x(\theta_0) = 0$ , et  $\sigma_x(\theta_0)$  est lié à la précision nominale des éléments. En augmentant  $\theta$ ,  $\mu_x(\theta)$  croît (décroît) si les éléments ont un coefficient de température positif (négatif), tandis que  $\sigma_x(\theta)$  croît normalement avec  $\theta$ .

### 7.1.13 Commentaire

Les définitions et les propriétés précédentes nous permettent de déduire, soit la variance, soit la déviation maximale d'une fonction à partir de la variance ou de la déviation maximale des variables. Nous appliquerons, dans ce qui suit, ces résultats à la relation entre l'affaiblissement et la valeur des composants.

Une difficulté supplémentaire surgit, par le fait que les indices  $\rho$  et  $\nu$  sont des fonctions de la fréquence. Pour des raisons pratiques d'économie de calcul, il n'est pas intéressant de calculer la tolérance des éléments, variable en fonction de la fréquence, en un grand nombre de fréquences. Par ailleurs, la tolérance acceptable sur un élément est en fait celle qui correspond à sa valeur la plus faible, calculée à la fréquence la plus critique. Enfin, la comparaison de deux filtres, du point de vue de la sensibilité, n'est possible que si chaque filtre est caractérisé par un nombre réel et non par une fonction de la fréquence.

### 7.1.14 Définitions

L'écart  $m$  est la différence, en valeur absolue, entre l'affaiblissement nominal  $\alpha$  et les exigences sur l'affaiblissement  $\alpha_e$ . On a donc

$$m = |\alpha - \alpha_e| \quad (7.32)$$

avec  $\alpha < \alpha_e$  dans la bande passante, et  $\alpha > \alpha_e$  dans la bande coupée: on suppose que l'affaiblissement nominal vérifie les exigences.

Les pulsations, pour lesquelles  $m$  atteint un minimum local sont appelées *pulsations critiques*: on les désigne par  $\omega_j$ .

À la figure 7.1, se trouvent présentées une courbe d'affaiblissement, les exigences et la courbe de l'écart avec les fréquences critiques.

### 7.1.15 Définitions

La *tolérance absolue*  $T_a$  des éléments est la déviation relative maximale de ceux-ci, supposée identique pour tous, telle que l'écart ne soit nulle part dépassé.

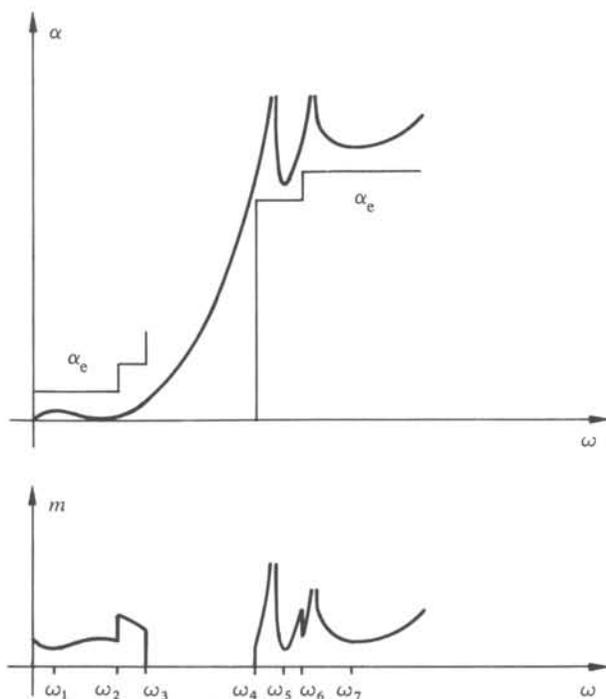


Fig. 7.1

La *tolérance statistique*  $T_s$  des éléments est l'écart type relatif  $T_x$ , supposé commun à tous les éléments, tel que l'écart type de l'affaiblissement soit égal à l'écart  $m$ .

Pratiquement, ces tolérances seront calculées aux fréquences critiques, et l'on retiendra la plus faible de ces valeurs.

Ces définitions ne tiennent pas compte de l'influence de la température et du vieillissement : elles se généralisent sans difficulté à ces cas. De même on peut généraliser ces définitions aux cas où les différentes catégories d'éléments, inductances d'une part et capacités d'autre part, ont des distributions différentes.

#### 7.1.16 Calcul des tolérances

A partir de (7.27), (7.28) et du paragraphe 7.1.11, on trouve

$$M_{\Delta\alpha} = \nu(|s_{21}|) M_x \quad (7.33)$$

$$\sigma_{\Delta\alpha} = \rho(|s_{21}|) \sigma_x \quad (7.34)$$

D'après la définition du paragraphe 7.1.15,  $M_{\Delta\alpha}$  et  $\sigma_{\Delta\alpha}$  sont inférieurs ou égaux à  $m$ , aux fréquences critiques, si  $M_x$  est remplacé par  $T_a$  et  $\sigma_x$  par  $T_s$ , dans (7.33) et (7.34). Par conséquent,

$$1 = T_a \max[\nu(|s_{21}|)/m] \quad (7.35)$$

$$1 = T_s \max[\rho(|s_{21}|)/m] \quad (7.36)$$

ce qui permet de déterminer  $T_a$  et  $T_s$  :

$$T_a = \min [m/\nu (|s_{21}|)] \quad (7.37)$$

$$T_s = \min [m/\rho (|s_{21}|)] \quad (7.38)$$

où le minimum est à prendre sur l'ensemble des fréquences critiques.

### 7.1.17 Signification des tolérances absolues et statistiques

Dans le domaine de validité de l'approximation au premier ordre, c'est-à-dire pour des imprécisions des éléments pas trop importantes, les tolérances absolues et statistiques ont une incidence pratique très importante.

Il est clair que si les éléments d'un filtre ont une précision au moins égale à la tolérance absolue, le filtre satisfera certainement les exigences.

L'interprétation de la tolérance statistique n'est pas aussi transparente. L'information que l'on aimerait en tirer, serait la probabilité qu'un filtre ne satisfasse pas les exigences si des éléments d'une certaine précision sont choisis. Mais, le fait d'avoir des éléments dont l'écart type est  $\gamma T_s$ , où  $\gamma$  est une constante arbitraire, ne permet que d'affirmer que l'écart type de  $\Delta\alpha$ , à la fréquence la plus critique  $\omega_0$  où le rapport entre l'indice  $\rho$  et l'écart  $m$  est maximum, est  $\gamma m$ . En supposant que la distribution de  $\Delta\alpha$  en  $\omega_0$  est gaussienne, ce qui est assez bien vérifié en pratique, ceci permet une estimation de la *probabilité d'échec du filtre en  $\omega_0$* , c'est-à-dire la probabilité qu'un exemplaire du filtre ne rencontre pas les exigences. C'est également une bonne estimation de la probabilité d'échec tout court, si la plupart des filtres qui violent les exigences, les violent en  $\omega_0$ . Cette propriété est certainement valable, si le rapport entre l'indice de sensibilité quadratique et l'écart est bien plus grand en  $\omega_0$  qu'aux autres fréquences critiques. Par contre, si ce rapport est presque égal à plusieurs fréquences critiques, ce que l'on attend d'un filtre qui a subi un centrage (sect. 7.4), alors la validité de cette estimation pour la probabilité d'échecs est un problème ouvert. Cependant, les tolérances ne sont souvent utilisées qu'à titre indicatif, et pour comparer différents filtres soumis aux mêmes exigences. Pour ce genre d'application,  $T_s$  donne une information suffisamment précise.

A titre d'exemple, supposons que  $T_s = 1,7\%$  et que des éléments de précision  $2\%$ , avec distribution uniforme, soient choisis. Cela signifie que la densité de probabilité des variables aléatoires  $\delta x_i$  vaut 25 entre  $-0,02$  et  $+0,02$ , et est nulle ailleurs. Par conséquent, l'écart type des éléments est  $\sigma_{\delta x} = 0,02/\sqrt{3} = 0,012 = 0,68 T_s$ . Ceci implique  $\sigma_{\Delta\alpha} = 0,68 m$ , et la fonction d'erreur fournit une estimation de la probabilité d'échecs de  $7\%$  en  $\omega_0$ , ce qui est pris pour la probabilité d'échecs du filtre.

## 7.2 CALCUL DE LA SENSIBILITÉ D'UN FILTRE EN ÉCHELLE

### 7.2.1 Introduction

Le procédé d'analyse le plus simple pour une échelle consiste à décomposer le quadripôle en une cascade de quadripôles composés chacun d'une branche série ou d'une branche parallèle. Chacun de ces quadripôles partiels est décrit par sa matrice de

chaîne qui s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.39)$$

pour la branche série (fig. 7.2), et

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix} \quad (7.40)$$

pour la branche parallèle (fig. 7.3).

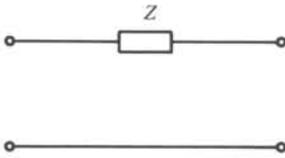


Fig. 7.2

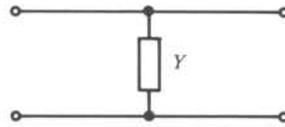


Fig. 7.3

A chaque fréquence, à laquelle l'analyse est effectuée, on calcule la valeur numérique de  $Z$  ou  $Y$ . Le produit des matrices est effectué de droite à gauche. Pour calculer la sensibilité par rapport à l'impédance  $Z$  de la figure 7.4, il suffit de garder en mémoire la matrice de chaîne de  $Q_d$ . A partir de cette matrice et de la matrice globale, on peut trouver la sensibilité de  $s_{21}$  par rapport à  $Z$ . Un résultat analogue est valable pour la branche parallèle. On distingue systématiquement par les indices  $g$  et  $d$  les paramètres des biportes  $Q_g$  et  $Q_d$ .

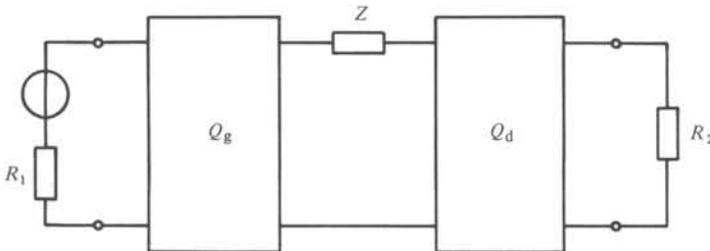


Fig. 7.4

### 7.2.2 Rappels

A partir des formules (2.84) à (2.87), on peut calculer

$$s_{21} = 2\sqrt{R_1/R_2} (A + B/R_2 + CR_1 + DR_1/R_2)^{-1} \quad (7.41)$$

La matrice de chaîne globale se calcule sous la forme

$$A = A_g A_d + (A_g Z + B_g) C_d \quad (7.42)$$

$$B = A_g B_d + (A_g Z + B_g) D_d \quad (7.43)$$

$$C = C_g A_d + (C_g Z + D_g) C_d \quad (7.44)$$

$$D = C_g B_d + (C_g Z + D_g) D_d \quad (7.45)$$

Par ailleurs, le biporte étant réciproque, on a (IV.6.27)

$$AD - BC = 1 \quad (7.46)$$

qui est valable aussi pour les paramètres de chaîne de  $Q_g$  et  $Q_d$ . A partir de (7.46) et de (7.42) à (7.45), on peut aussi exprimer les paramètres de  $Q_g$  à partir de ceux de  $Q_d$  et du biporte global

$$A_g = AD_d - BC_d \quad (7.47)$$

$$C_g = CD_d - DC_d \quad (7.48)$$

### 7.2.3 Propriété

La sensibilité de la transmittance, par rapport à l'impédance de la branche série  $Z$ , vaut

$$S(s_{21}, Z) = \frac{Z(C_d + D_d/R_2) [(B + R_1D) C_d - (A + R_1C) D_d]}{A + B/R_2 + CR_1 + DR_1/R_2} \quad (7.49)$$

A partir des expressions (7.41) à (7.45), on trouve

$$S(s_{21}, Z) = -\frac{Z(C_d + D_d/R_2)(A_g + R_1C_g)}{A + B/R_2 + CR_1 + DR_1/R_2} \quad (7.50)$$

qui, par (7.47) et (7.48), donne (7.49).

### 7.2.4 Propriété

Par des calculs analogues, on trouve la sensibilité, par rapport à l'admittance d'une branche parallèle, sous la forme

$$S(s_{21}, Y) = -\frac{Y(A_d + B_d/R_2) [(B + R_1D) A_d - (A + R_1C) B_d]}{A + B/R_2 + CR_1 + DR_1/R_2} \quad (7.51)$$

### 7.2.5 Propriété

Les expressions (7.49) et (7.51) prennent une forme particulièrement simple, si l'on calcule, à partir des paramètres de chaîne, les impédances terminées de  $Q_g$  et de  $Q_d$ , à partir de leurs accès où est connecté  $Z$  ou  $Y$ . En désignant ces impédances par  $\xi_g$  et  $\xi_d$ , on a

$$S(s_{21}, Z) = -Z/(Z + \xi_g + \xi_d) \quad (7.52)$$

$$S(s_{21}, Y) = -Y/(Y + 1/\xi_g + 1/\xi_d) \quad (7.53)$$

### 7.2.6 Propriété

La sensibilité du coefficient de transmission d'un biporte réciproque, par rapport à une terminaison, vaut la moitié du coefficient de réflexion relatif à l'accès auquel est connectée la terminaison.

Ce résultat est immédiat à partir des expressions de  $s_{11}$  et  $s_{12}$ , calculées à partir de la relation (2.41), en fonction des paramètres  $Z_{ij}$  et  $R_i$ .

On a donc, par exemple,

$$S(s_{21}, R_1) = s_{11}/2 \quad (7.54)$$

Il en résulte qu'à toute fréquence où  $s_{11} = 0$ , et donc  $|s_{21}| = 1$  ou  $\alpha = 0$ , la sensibilité semi-relative  $S(\alpha, x_i) = 0$ , non seulement par rapport aux éléments du biporte selon le théorème de Fettweis-Orchard (§ 1.1.15), mais aussi par rapport aux terminaisons.

### 7.2.7 Sensibilité d'un circuit accordé

Au paragraphe 7.1.1, on a indiqué que le réglage des pôles d'affaiblissement, par l'accord des circuits résonants et antirésonants, permet de réduire la sensibilité aux variations des éléments. Cette propriété est valable pour l'accord initial des circuits lors de la construction, et pour la compensation des dérives de température au moyen de composants dont les coefficients de température sont opposés. On suppose donc que

$$\omega_0^2 = 1/LC \quad (7.55)$$

est constant.

Il en résulte la relation

$$\delta L + \delta C = 0 \quad (7.56)$$

Les variables aléatoires  $\delta L$  et  $\delta C$  ne sont donc plus indépendantes. L'effet de la variation simultanée de  $L$  et  $C$  s'écrit

$$\delta F = [S(F, L) - S(F, C)] \delta L \quad (7.57)$$

On peut donc ne tenir compte que de la variation de l'inductance, et affecter celle-ci d'une sensibilité modifiée, représentée par l'expression entre crochets de (7.57) et notée  $\tilde{S}(F, L)$ .

Si l'on désigne par  $Z = Lp + 1/Cp$ , l'impédance du circuit résonant, il vient

$$S(F, L) = S(F, Z) pL/Z \quad (7.58)$$

$$S(F, C) = -S(F, Z)/pCZ \quad (7.59)$$

On a donc, sur l'axe imaginaire,

$$S(F, L)/S(F, C) = \omega^2/\omega_0^2 \quad (7.60)$$

et un résultat analogue pour le circuit antirésonant

$$S(F, L)/S(F, C) = \omega_0^2/\omega^2 \quad (7.61)$$

Dès lors, par (7.57), il vient

$$\tilde{S}(F, L) = S(F, L) [\omega^2 - \omega_0^2]/\omega^2 \quad (7.62)$$

et pour le circuit antirésonant

$$\tilde{S}(F, L) = S(F, L) [\omega_0^2 - \omega^2]/\omega_0^2 \quad (7.63)$$

Des formules (7.62) et (7.63), il ressort que la sensibilité à  $L$ , pour un circuit accordé, s'annule strictement en  $\omega = \omega_0$ , et, en dehors de l'accord, peut prendre des valeurs supérieures ou inférieures à celle de la sensibilité à l'inductance seule.

Par contre, tant dans l'indice de sensibilité absolue que dans l'indice de sensibi-

lité quadratique, les contributions de  $S(F, L)$  et  $S(F, C)$  sont remplacées par celles du seul terme  $[S(F, L) - S(F, C)]$  qui est toujours inférieure puisque les deux sensibilités ont même argument. Le module de leur différence est égal à la différence des modules, par exemple.

### 7.3 INVARIANTS DE SENSIBILITÉ

#### 7.3.1 Rappel d'analyse dimensionnelle

Si une impédance  $Z(p) = Z(L_i p, R_i, C_i p)$  est transformée par multiplication de toutes les inductances, résistances et capacités respectivement par  $a, \sqrt{a/b}$  et  $b$ , cela revient à multiplier toutes les impédances par  $\sqrt{a/b}$  et la variable complexe par  $\sqrt{ab}$ . On a donc

$$Z(aL_i p, \sqrt{a/b} R_i, bC_i p) = \sqrt{a/b} Z(\sqrt{ab} p) \quad (7.64)$$

Si l'on dérive les deux membres par rapport à  $a$ , que l'on divise par  $Z$  et que l'on pose  $a=1$ , on trouve

$$\sum_L S(Z, L_i) + \frac{1}{2} \sum_R S(Z, R_i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} S(Z, p) \quad (7.65)$$

où

$$S(Z, p) = \frac{p}{Z} \frac{dZ}{dp} \quad (7.66)$$

par extension de la notation (7.1).

Si l'on dérive les deux membres par rapport à  $b$ , que l'on divise par  $Z$  et que l'on pose  $b=1$ , on trouve

$$\sum_C S(Z, C_i) - \frac{1}{2} \sum_R S(Z, R_i) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} S(Z, p) \quad (7.67)$$

#### 7.3.2 Invariants dimensionnels

Si l'impédance en question comporte les trois types de composants, on obtient, par les relations (7.65) et (7.67), des expressions liant les sommes des sensibilités par rapport à un type de composant. Par contre, si le circuit ne comporte que deux types de composants, la somme des sensibilités par rapport à ceux-ci est invariante. Par exemple, pour un circuit LC, on a tout de suite

$$\sum_L S(Z, L_i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} S(Z, p) \quad (7.68)$$

$$\sum_C S(Z, C_i) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} S(Z, p) \quad (7.69)$$

En additionnant membre à membre ces relations, on trouve

$$\sum_{x_i} S(Z, x_i) = S(Z, p) \quad (7.70)$$

Les formules (7.68) à (7.70) montrent que la somme des sensibilités, soit à un type de composants pris séparément, soit à tous les composants, est un invariant. Quelle

que soit la structure choisie pour synthétiser l'impédance, ces sommes ne dépendent que de l'expression de l'impédance.

Naturellement, en utilisant des formules analogues dans les cas où la fonction de réponse a la dimension d'une admittance ou qu'elle est sans dimension, on obtient des formules similaires. Elles sont rassemblées au tableau 7.5.

### 7.3.3 Commentaire

Comme ces résultats dépendent uniquement de l'analyse dimensionnelle, ils sont valides pour toutes fonctions dépendant de composants qui ont les bonnes dimensions.

Ainsi les relations valides pour une fonction ayant la dimension d'une impédance sont valables non seulement pour l'impédance d'un bipôle, mais aussi pour l'impédance de transfert à circuit ouvert d'un biporte.

Il en est de même pour les dimensions des composants. Ce qui est valable pour une inductance, l'est aussi pour une inductance mutuelle. Ce qui vaut pour le bipôle résistance, vaut également pour la résistance de gyration d'un gyrateur. Les circuits à constantes réparties LC ou RC jouissent des mêmes invariants que leurs contreparties à constantes localisées.

Les limites de la généralisation sont tout aussi évidentes. Il n'y a pas, en général, d'invariants de sensibilité pour les circuits à trois types de composants. Il n'y a pas d'invariant par rapport aux composants, tel le transformateur idéal décrit par un paramètre sans dimension.

### 7.3.4 Invariants dimensionnels pour un filtre

Si l'on considère le cas d'un filtre LC entre terminaisons résistives et si l'on suppose que ces dernières sont fixes, il est possible de déduire les invariants dimensionnels pour le biporte LC, à partir de la relation entre matrices d'impédance et de répartition (2.42). Elle s'écrit encore  $s = 1_2 - 2(z + 1_2)^{-1}$ . En dérivant membre à membre par rapport à l'élément  $x_i$ , il vient

$$\frac{\partial s}{\partial x_i} = -2 \frac{\partial}{\partial x_i} (z + 1_2)^{-1} \quad (7.71)$$

Compte tenu de la relation, valable pour toute matrice régulière  $M$ ,

$$\frac{\partial M^{-1}}{\partial x_i} = -M^{-1} \frac{\partial M}{\partial x_i} M^{-1} \quad (7.72)$$

il vient

$$\frac{\partial s}{\partial x_i} = -2(z + 1_2)^{-1} \frac{\partial z}{\partial x_i} (z + 1_2)^{-1} \quad (7.73)$$

Cette relation, explicitée pour chaque élément des matrices  $s$  et  $z$ , permet de déduire les invariants pour  $s$  à partir de ceux du tableau 7.5.

Ces relations font l'objet de la table 7.6.

### 7.3.5 Commentaire

En pratique, on s'intéresse surtout à la sensibilité de l'affaiblissement. Par suite de la formule (7.4), il est possible d'obtenir des invariants pour l'affaiblissement, à

Tableau 7.5

	Circuits LC		Circuits RC	
	$\Sigma_L$	$\Sigma_C$	$\Sigma_R$	$\Sigma_C$
Impédance $Z$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} S(Z, p)$	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} S(Z, p)$	$1 + S(Z, p)$	$S(Z, p)$
Admittance $Y$	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} S(Y, p)$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} S(Y, p)$	$-1 + S(Y, p)$	$S(Y, p)$
Fonction sans dimension $H$	$\frac{1}{2} S(H, p)$	$\frac{1}{2} S(H, p)$	$S(H, p)$	$S(H, p)$

Tableau 7.6

	$S_{11}$	$S_{12}$	$S_{22}$
$\Sigma_k S(s_{ij}, C_k)$	$-\frac{1}{4s_{11}} (1 - s_{11}^2 - s_{12}s_{21}) + \frac{1}{2} S(s_{11}, p)$	$\frac{1}{4} (s_{11} + s_{22}) + \frac{1}{2} S(s_{12}, p)$	$-\frac{1}{4s_{22}} (1 - s_{22}^2 - s_{12}s_{21}) + \frac{1}{2} S(s_{22}, p)$
$\Sigma_k S(s_{ij}, L_k)$	$\frac{1}{4s_{11}} (1 - s_{11}^2 - s_{12} - s_{21}) + \frac{1}{2} S(s_{11}, p)$	$-\frac{1}{4} (s_{11} + s_{22}) + \frac{1}{2} S(s_{12}, p)$	$\frac{1}{4s_{22}} (1 - s_{22}^2 - s_{12}s_{21}) + \frac{1}{2} S(s_{22}, p)$
$\Sigma_k S(s_{ij}, X_k)$	$S(s_{11}, p)$	$S(s_{12}, p)$	$S(s_{22}, p)$

partir de ceux donnés, pour  $s_{21}$ , à la table 7.6. On obtient ainsi

$$\Sigma S(\alpha, L_i) = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\alpha} \operatorname{Re}(s_{11} + s_{22}) + 2 S(\alpha, \omega) \right] \quad (7.74)$$

$$\Sigma S(\alpha, C_i) = \frac{1}{4} \left[ -\frac{1}{\alpha} \operatorname{Re}(s_{11} + s_{22}) + 2 S(\alpha, \omega) \right] \quad (7.75)$$

$$\Sigma S(\alpha, x_i) = S(\alpha, \omega) \quad (7.76)$$

### 7.3.6 Rappels

Soit un ensemble de  $n$  nombres complexes  $n_i$ . On peut démontrer les inégalités classiques

$$\Sigma |n_i| \geq |\Sigma n_i| \quad (7.77)$$

$$\Sigma |n_i|^2 \geq \frac{1}{n} |\Sigma n_i|^2 \quad (7.78)$$

Le signe égalité est valable dans (7.77) si tous les arguments sont égaux. Il est valable dans (7.78) si les arguments et les modules sont égaux.

### 7.3.7 Bornes inférieures des indices de sensibilité

Les inégalités (7.77) et (7.78), jointes aux invariants (7.74) et (7.75), fournissent des bornes inférieures pour les indices de sensibilité absolue et quadratique de l'affaiblissement. En posant

$$b_L = \frac{1}{4} |\operatorname{Re}(s_{11} + s_{22})/\alpha + 2S(\alpha, \omega)| \quad (7.79)$$

$$b_C = \frac{1}{4} |\operatorname{Re}(s_{11} + s_{22})/\alpha - 2S(\alpha, \omega)| \quad (7.80)$$

on a, d'après les définitions 7.1.9,

$$\nu(\alpha, L_i) \geq b_L \quad (7.81)$$

$$\nu(\alpha, C_i) \geq b_C \quad (7.82)$$

$$\nu(\alpha, x_i) \geq b_C + b_L \quad (7.83)$$

$$\rho^2(\alpha, L_i) \geq b_L^2 / n_L \quad (7.84)$$

$$\rho^2(\alpha, C_i) \geq b_C^2 / n_C \quad (7.85)$$

$$\rho^2(\alpha, x_i) \geq b_L^2 / n_L + b_C^2 / n_C \quad (7.86)$$

où  $n_L$  et  $n_C$  représentent respectivement le nombre des inductances et des capacités et  $x_i$  l'ensemble  $L_i$  et  $C_i$ .

### 7.3.8 Commentaire

Si l'on considère les sensibilités semi-relatives  $'S(\alpha, x_i)$  et les indices correspondants  $'\nu$  et  $'\rho$ , les relations (7.81) à (7.86) sont transposées avec leurs seconds membres multipliés par  $\alpha$ . En un zéro d'affaiblissement,  $s_{11} = s_{22} = 0$  et  $d\alpha/d\omega = 0$ , puisque le zéro est double. Dès lors, les bornes inférieures mentionnées au paragraphe 7.3.7 sont toutes égales à zéro. On sait, par ailleurs (§ 1.1.15), qu'à ces fréquences  $\partial\alpha/\partial x_i = 0$  et donc  $'\nu = 0$  et  $'\rho = 0$ . Aux zéros d'affaiblissement, les indices semi-relatifs touchent donc leurs bornes inférieures.

En dehors de ces fréquences, les bornes inférieures dépendent de deux choix bien distincts :

- le nombre des inductances et des capacités qui a pour effet de diminuer la borne de  $'\rho$  lorsqu'il croît;
- la matrice de répartition qui détermine entièrement  $s_{11}$ ,  $s_{22}$  et  $\alpha$ .

En d'autres mots, dès lors que le problème d'approximation est résolu et que le choix de  $s$  est fixé, il n'y a plus grand-chose à faire pour diminuer le seuil inférieur de sensibilité : pour des raisons d'économie,  $n_C$  et surtout  $n_L$  ne peuvent pas être gratuitement augmentés. Il apparaît qu'une seule stratégie existe pour diminuer ce seuil. Il faut tenir compte de l'interaction entre les problèmes d'approximation et de sensibilité. On peut renoncer au critère de Tchebycheff, qui n'assure une solution optimale que dans l'hypothèse sommaire où les éléments ne sont pas affectés d'imprécision. C'est l'objet du paragraphe 7.4.5.

D'une façon absolue, on peut diminuer ce seuil inférieur en augmentant le degré choisi pour  $s_{21}$ . En effet, l'élévation du degré permet d'augmenter le nombre de zéros d'affaiblissement, de diminuer l'ondulation et donc les valeurs de  $|s_{11}|$  et  $|s_{22}|$  dans la

bande passante, de réduire les maxima de  $d\alpha/d\omega$  et, par la force des choses, d'augmenter  $n_C$  et  $n_L$ . Un filtre de degré plus élevé que ce qui est strictement nécessaire jouira d'une tolérance plus grande sur ses éléments.

### 7.3.9 Bornes supérieures des indices de sensibilité

En plus des bornes inférieures de  $\nu$  et  $\rho$ , qui dépendent de considérations d'analyse dimensionnelle, il existe des bornes supérieures dont l'origine est tout autre. On peut démontrer que l'énergie emmagasinée dans un bipôle LC est un invariant entièrement déterminé par l'impédance de ce bipôle, et indépendant de la structure choisie pour la synthèse. On peut séparément démontrer le même résultat pour les énergies emmagasinées dans les inductances et dans les capacités. Des résultats analogues peuvent être démontrés pour le bipôle LC, qu'il soit à circuit ouvert, en court-circuit ou entre terminaisons résistives.

Grâce à ces propriétés, il est possible de démontrer, par exemple, que l'indice de sensibilité absolue d'une réactance est invariant et égal au module du second membre de (7.70). On peut trouver également des bornes supérieures pour  $'\rho(\alpha, x_i)$  et  $'\nu(\alpha, x_i)$ . Ces bornes sont nulles à nouveau pour  $\alpha = 0$ , ce qui confirme une fois de plus le théorème de Fettweis-Orchard. Les bornes sont proportionnelles à  $|s_{11}|$ , ce qui confirme l'intérêt d'une faible ondulation dans la bande passante.

Des références complètes sur cette question se trouvent en [20].

### 7.3.10 Exemple

On trouvera, à la figure 7.7, un exemple présentant les variations de  $\alpha^2 \rho^2(\alpha, x_i)$  dans une partie de la bande passante d'un filtre, ainsi que ses seuils supérieurs et inférieurs. Le filtre passe-bas en question, a un comportement de Tchebycheff dans la bande passante normalisée à l'intervalle  $[0, 1]$ ; il est du onzième degré, et il a été syn-

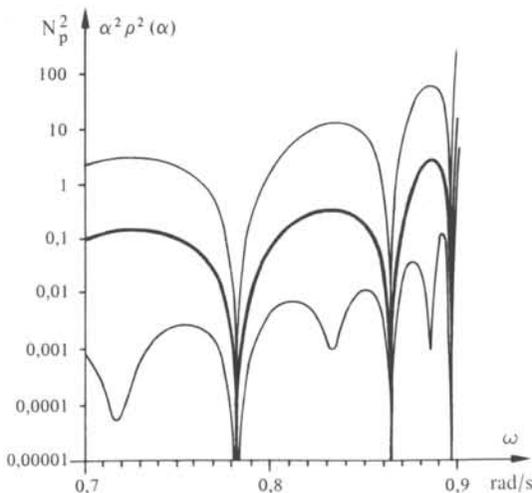


Fig. 7.7

thétisé selon la structure en échelle (capacités dans les bras parallèles, et circuits anti-résonants dans les bras série). L'ordre d'extraction des pôles d'affaiblissement a été choisi de façon à minimiser le maximum de  $\alpha^2 \rho^2(\alpha, x_i)$ .

## 7.4 CENTRAGE D'UN FILTRE

### 7.4.1 Introduction

Les sections précédentes ont permis de calculer les indices de sensibilité et, par conséquent, les tolérances. Pour simplifier, nous ne nous occuperons plus, à partir d'ici, que de l'indice  $\rho(\alpha, x_i)$ .

La présente section a pour but d'étudier les moyens propres à diminuer  $\rho$ . En d'autres mots, il ne s'agit plus de calculer la sensibilité ou la tolérance, mais de modifier la conception du filtre de façon à minimiser  $[\max \rho(\omega_j)]$ , où les  $\omega_j$  sont les pulsations critiques. Ce problème sera désigné dans la suite comme le *centrage* d'un filtre. Un filtre est *centré* si sa caractéristique nominale est telle que la tolérance des éléments  $y$  soit maximale, comparée à celle de tout autre filtre de même degré soumis aux mêmes exigences.

L'intérêt du centrage est évident. Il permet d'utiliser les composants ayant la plus grande tolérance possible, c'est-à-dire les plus économiques. Il peut permettre de réaliser un filtre dont l'affaiblissement nominal vérifierait tout juste les exigences et dont les tolérances sur les éléments seraient en conséquence trop faibles.

L'exemple typique du paragraphe 7.3.10 montre cependant que le centrage ne permettra certainement pas de gagner plus qu'un ordre de grandeur sur la tolérance. En pratique, on peut espérer gagner un facteur valant environ trois sur la tolérance d'un filtre non centré.

Bien que la section 7.3 ait indiqué que  $\rho$  est compris entre des bornes qui dépendent principalement de  $s_{21}$ , et donc de  $\alpha$ , il ne faut pas exclure a priori qu'il soit possible, pour une matrice de répartition donnée, de trouver une structure qui soit meilleure, du point de vue considéré, que la structure en échelle. C'est l'objet du paragraphe 7.4.2.

### 7.4.2 Transformations équivalentes

Il existe des transformations de circuits équivalentes, continue (Schoeffler) ou discrète (Howitt), qui permettent en principe de modifier la structure du réseau interne du quadripôle, ainsi que les valeurs des éléments, sans modifier cependant les caractéristiques externes du biporte : par exemple, sa matrice de répartition. Par l'utilisation de ces méthodes, il est possible d'engendrer de nombreux circuits et de tenter un centrage du filtre à transmittance donnée.

Toutes les expériences tentées en ce sens sur des exemples typiques ont abouti à un échec [22]. La structure en échelle semble donc optimale, bien que l'on n'en possède pas une preuve théorique. Il faut du reste noter que les transformations en question ne permettent pas de trouver tous les circuits équivalents.

Néanmoins, les résultats de cette recherche confortent l'intuition initiale, qui a conduit à construire un filtre en échelle pour pouvoir régler individuellement ses pôles d'affaiblissement, localisés dans une seule branche.

### 7.4.3 Ordre d'extraction des pôles

Si l'on choisit une fonction  $s_{21}$  et que l'on se borne aux structures en échelle, la synthèse classique produira cependant autant de quadripôles distincts qu'il y a d'ordres différents d'extraction des pôles d'affaiblissement. Le choix de cet ordre n'a pas été discuté au chapitre 6; il n'est pas imposé par des considérations théoriques impérieuses. Ce choix influencera trois caractéristiques du filtre :

- la réalisabilité sans cellules de Brune;
- la différence entre les valeurs maximales et minimales des éléments;
- la sensibilité de  $\alpha$  aux valeurs des éléments.

On peut choisir l'ordre d'extraction optimal en fonction de n'importe lequel de ces trois critères. Nous ne traiterons ici que de l'influence du troisième critère.

On ne dispose d'aucune étude théorique qui permette de guider le choix de cet ordre d'extraction. Certains exemples particuliers ont été étudiés exhaustivement [23]. On peut en tirer les règles empiriques suivantes :

- dans le cas d'un filtre, dont les circuits résonants et antirésonants ne sont pas accordés, le minimum de sensibilité est atteint lorsque les pôles d'affaiblissement, aux fréquences les plus proches de la bande passante, sont extraits en premier lieu et en dernier lieu, ou, encore, lorsque les cellules réalisant ces pôles sont les plus proches des deux accès;
- lorsque les circuits résonants et antirésonants sont accordés, la règle est inversée, c'est-à-dire qu'il faut extraire, à proximité des accès, les pôles d'affaiblissement dont la fréquence est la plus éloignée de la bande passante.

### 7.4.4 Exemple

Soit un filtre passe-bas de degré 11, dont la caractéristique d'affaiblissement approche une constante, tant dans la bande passante que dans la bande coupée. La fréquence de coupure a été normalisée à 0,9 Hz et le début de la bande coupée à 1 Hz. La structure du filtre est une échelle composée de cinq circuits antirésonants dans des bras série, et de six capacités dans les bras parallèle. Il y a donc 60 ordres d'extraction distincts, compte tenu de la symétrie du filtre. L'ondulation dans la bande est de 0,088 dB, et la discrimination de 80 dB.

Désignons les pôles d'affaiblissement par les numéros d'ordre de 1 à 5, par ordre croissant de fréquences. Le pôle le plus proche de la bande passante porte donc le numéro 1.

Si les pôles d'affaiblissement ne sont pas accordés, la meilleure séquence d'extraction est [14532] avec  $\rho = 23,9$ , et la pire [42135] avec  $\rho = 28,4$ . La borne inférieure pour  $\rho$ , selon (7.86), vaut 22,1.

Si les pôles d'affaiblissement sont accordés, la meilleure séquence est [42135] avec  $\rho = 8,5$ , et la pire [14532] avec  $\rho = 14,8$ . La borne inférieure pour  $\rho$  vaut ici 0,01.

Sur ce cas particulier, on remarque que le choix du meilleur ordre d'extraction permet d'améliorer la tolérance par un facteur 1,75.

### 7.4.5 Egalisation des tolérances

En fonction de ce qui précède, il est clair qu'un filtre en échelle avec le meilleur ordre d'extraction, constitue un filtre centré *pour une courbe d'affaiblissement don-*

*née*. En d'autres mots, le centrage se résume à choisir le meilleur ordre d'extraction, tant que l'on ne remet pas en cause le procédé d'approximation. Les méthodes exposées aux chapitres 4 et 5 sont optimales dans la mesure où la courbe d'affaiblissement *nominal* vérifie les exigences de façon optimale. En fait, ce qui nous intéresse, c'est la courbe de réponse réelle, compte tenu des tolérances et des imperfections des éléments : la meilleure caractéristique nominale n'est sans doute pas la meilleure caractéristique pratique.

L'analyse détaillée du calcul de la tolérance, selon la définition 7.1.15, montre en effet que la tolérance acceptable est en fait déterminée par la sensibilité à une seule fréquence critique, qui est généralement, soit une fréquence de coupure, soit le début d'une bande coupée. La tolérance acceptable pour les éléments aux autres fréquences critiques est beaucoup plus élevée.

Dès lors, il apparaît possible de centrer le filtre en agissant sur la courbe d'affaiblissement. L'approximation optimale sera définie de façon à prévoir des marges telles que les tolérances aux différentes fréquences soient égales. Ce principe repose sur l'idée, entièrement intuitive, qu'une fois les tolérances égalisées, l'on a atteint un optimum, parce que toute amélioration supplémentaire exigerait l'accroissement simultané de la tolérance à toutes les fréquences critiques.

Le centrage du filtre repose sur l'algorithme suivant :

- approximation des exigences initiales selon les critères et les méthodes du chapitre 5;
- synthèse du filtre selon les méthodes du chapitre 6;
- calcul de la sensibilité par la méthode de la section 7.2;
- comparaison des tolérances aux différentes fréquences critiques;
- accroissement des exigences aux fréquences critiques, où la tolérance est la plus faible, de façon à améliorer la marge par rapport aux exigences initiales.

On reprend l'algorithme au début, et l'on parcourt le cycle jusqu'à ce que les tolérances, aux différentes fréquences critiques, soient égalisées par rapport aux exigences initiales [24].

#### 7.4.6 Exemple

Soit un filtre passe-bas dont les exigences sont les suivantes : 0,32 dB maximum dans la bande passante, normalisée à 1 Hz, et 52 dB minimum dans la bande coupée, dont la limite inférieure est située à 1,3 Hz. Un filtre du 11<sup>e</sup> degré vérifie ces exigences pour la courbe nominale, dont l'ondulation dans la bande passante a été choisie égale à 0,174 dB.

Les fréquences critiques correspondent aux cinq maxima de l'affaiblissement dans la bande passante, auxquelles s'ajoutent 1 Hz et 1,3 Hz. Les valeurs de  $\rho$  à ces fréquences sont respectivement : 3,23; 9,60; 17,00; 28,09; 49,65; 107,0; 107,0. Le choix de l'ondulation dans la bande a du reste été fait de façon à égaliser  $\rho$  pour ces deux dernières fréquences. Il reste que la tolérance acceptable à la première fréquence critique est 33 fois plus élevée que la tolérance globale déterminée par le comportement à la fréquence de coupure : l'une vaut 26%, l'autre 0,78%.

Après égalisation des tolérances, on obtient, en chacune des fréquences critiques, une tolérance de 1,91%, ce qui représente une amélioration par un facteur de 2,45. Les courbes optimales, avant et après égalisation, sont représentées à la figure 7.8.

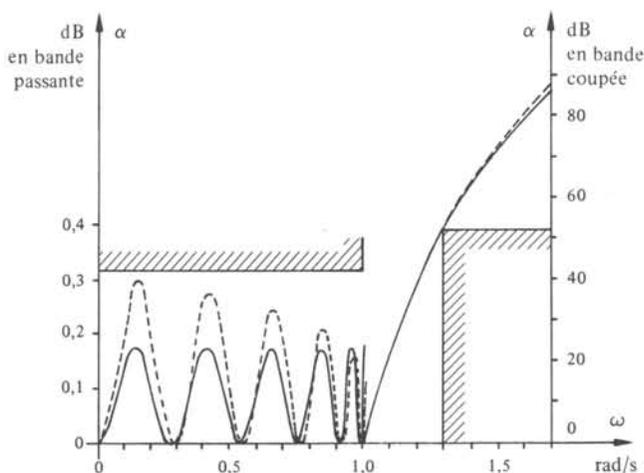


Fig. 7.8

#### 7.4.7 Commentaire

L'égalisation des tolérances constitue la procédure de centrage la meilleure dans l'état actuel des connaissances. Sa description montre qu'elle exige un volume de calculs important, la disposition de programmes efficaces et souples, et une certaine expérience.

On ne peut faire mieux qu'en remettant en cause d'autres éléments de la conception du filtre. La méthode de synthèse par les paramètres effectifs peut être remplacée par la méthode des paramètres-image : on a pu montrer que cette méthode est intrinsèquement propre à engendrer des filtres encore plus insensibles [25]. Un filtre selon les paramètres-image présente une distorsion plus faible à la suite des tolérances que le même filtre conçu selon les paramètres effectifs.

Enfin, si un filtre n'a pas la tolérance requise pour les éléments disponibles, malgré tous les efforts de centrage, la seule ressource est d'augmenter le degré de la fonction de réponse. La tolérance en sera améliorée pour deux raisons convergentes : comme l'ondulation sera plus faible, la marge croîtra, et la sensibilité diminuera.

Les procédés de centrage évoqués ci-dessus ne tiennent compte que d'une estimation au premier ordre des tolérances. Ces méthodes de calcul sont valables jusqu'à une tolérance de l'ordre de 1%. Au delà, il faut recourir au calcul des tolérances discrètes, c'est-à-dire de la tolérance mesurée réellement entre le filtre nominal et la limite des éléments acceptables. Le centrage effectué sur cette définition plus exacte des tolérances conduit à des résultats comparables [26].

### 7.5 EFFET DES ÉLÉMENTS PARASITES

#### 7.5.1 Introduction

Il a été noté dès le paragraphe 1.1.5 que la conception d'un filtre s'opère en supposant, dans un premier temps, que l'on dispose d'inductances et de capacités. Dans un second temps, on analyse l'effet des éléments parasites qui sont inévitablement as-

sociés aux bobines et aux condensateurs qui réalisent physiquement les éléments idéaux. Le but de cette section est d'étudier l'effet de ces éléments parasites, ce qui constitue d'une certaine façon l'étude de la sensibilité des filtres LC au caractère non idéal des composants physiques. On se limitera à deux effets : les pertes résistives dans les bobines et les condensateurs; les capacités parasites dans les bobines.

### 7.5.2 Définition

La *dissipation uniforme égale* est l'effet engendré sur la fonction de réponse d'un réseau non dissipatif par l'adjonction en série (en parallèle) à toute inductance (capacité) d'une résistance (conductance) proportionnelle, le facteur de proportionnalité étant identique pour les inductances et les capacités.

Il s'agit là d'une hypothèse d'école, puisque l'on suppose que les pertes des bobines et des condensateurs sont égales, alors que dans la réalité, les premières prédominent. Néanmoins, cette hypothèse peu réaliste permet d'effectuer des calculs simples qui constituent une première évaluation de l'effet des pertes.

### 7.5.3 Cas de la dissipation uniforme égale

Soit  $F(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$  une fonction de réponse d'un réseau. Cette fonction dépend de la fréquence, grâce aux impédances (admittances) des inductances  $L_i$  (capacités  $C_i$ ). Si chaque inductance (capacité) est remplacée par un bipôle d'impédance  $L_i p + R_i$  (d'admittance  $C_i p + G_i$ ) et que les rapports  $R_i/L_i = C_i/G_i = \epsilon$  sont identiques pour tous les composants, cette substitution correspond à une transformation de la variable complexe  $p$  en  $p + \epsilon$  et de  $j\omega$  en  $j(\omega - j\epsilon)$ .

Pour  $\epsilon$  petit, le développement de Taylor de  $F$  donne

$$\tilde{F}(j\omega) = F(j\omega + \epsilon) = F(j\omega) - j\epsilon \frac{dF}{d\omega} \quad (7.87)$$

d'où l'on déduit

$$\tilde{R}(\omega) = R(\omega) + \epsilon \frac{dX}{d\omega} \quad (7.88)$$

$$\tilde{X}(\omega) = X(\omega) - \epsilon \frac{dR}{d\omega} \quad (7.89)$$

### 7.5.4 Commentaire

L'hypothèse très générale de la dissipation uniforme égale permet de traiter un cas tout aussi général. Pour obtenir les résultats précédents, il n'a fallu faire aucune hypothèse, ni sur la nature du réseau dissipatif ou non, ni sur la dimension de la fonction de réponse. On peut en déduire des résultats intéressants dans deux cas particuliers.

En premier lieu, si  $F$  est l'impédance d'un bipôle non dissipatif,  $R(\omega) \equiv 0$  et  $\tilde{R} = \epsilon dX/d\omega$ . Comme  $\tilde{R}$  doit être positif, il faut qu'il en soit de même pour  $dX/d\omega$ , ce qui a été démontré déjà au paragraphe 2.1.18.

En second lieu, si  $F$  est le comportement d'un filtre,  $R$  et  $X$  correspondent à l'affaiblissement et au déphasage. La formule (7.88) montre que l'accroissement de

l'affaiblissement dû à la dissipation est proportionnel au retard de groupe, qui est une fonction à valeurs positives par le paragraphe 4.1.15. Si l'on se reporte aux figures 4.3 et surtout 4.10, on constatera que le retard présente un maximum au voisinage de la fréquence de coupure. L'effet des pertes est donc important là où l'effet des imprécisions sur les éléments l'est aussi. Un filtre dont l'affaiblissement croît rapidement dans l'intervalle de transition, présente un retard d'autant plus accentué et un effet des pertes d'autant plus sensible.

On conçoit donc qu'il n'est pas possible de construire un filtre passe-bande très sélectif, qui présenterait une bande passante relative étroite et une discrimination importante, avec deux intervalles de transition faibles, si l'on ne dispose pas de bobines à faible perte. Sinon, les effets des pertes aux deux fréquences de coupure se conjugueraient pour détruire la bande passante. L'étude du circuit résonant au paragraphe IV.3.5.8 a déjà montré l'influence du facteur de qualité sur la sélectivité : en général, on admet la validité de la formule (IV.3.68), même pour des filtres plus compliqués qu'un simple circuit résonant. La règle veut donc que l'on exige des *bobines d'un facteur de qualité supérieur ou égal à l'inverse de la bande passante relative*.

La section 8.1 est consacrée aux filtres construits au moyen de résonateurs lorsque leur bande passante relative est telle qu'il n'existe pas de bobines à facteur de qualité adéquat.

### 7.5.5 Prédistorcion

Sous le nom de *prédistorcion*, on désigne les méthodes qui anticipent l'effet prévisible des pertes, afin de le supprimer ou de le minimiser.

Dans le cas de la dissipation uniforme, la méthode est élémentaire. En effet, ainsi que cela a été noté au paragraphe 7.5.3, l'effet de cette dissipation est d'induire un changement de la variable  $p$  en  $p + \epsilon$ . Si le circuit que l'on désire synthétiser a une fonction de réponse idéale  $s_{21}(p) = f(p)/g(p)$ , il suffit apparemment de synthétiser  $s_{21}(p - \epsilon) = kf(p - \epsilon)/g(p - \epsilon)$  pour que l'adjonction des pertes au circuit non dissipatif restitue  $s_{21}(p)$ . En fait, cette méthode se heurte à de sérieuses difficultés :

- les filtres ont en principe les zéros de transmission sur l'axe imaginaire. Si tel est le cas pour les zéros de  $f(p)$ , ceux de  $f(p - \epsilon)$  sont situés dans le demi-plan de droite, et leur extraction exigerait des cellules de Darlington. La prédistorcion de  $f(p)$  est donc irréaliste;
- on peut se rabattre sur une méthode simplifiée, qui consiste à synthétiser le biporte de fonction de réponse  $\tilde{s}_{12}(p) = kf(p)/g(p - \epsilon)$ . Le filtre prédistorcu est alors simplement caractérisé par une translation vers la droite des racines de  $g$ , qui compense exactement la translation vers la gauche induite par les pertes. Bien entendu, on ne peut pas compenser par ce procédé des pertes trop grandes ou prédistorcu des filtres trop sélectifs : il faut que la racine de  $g(p)$  la plus proche de l'axe imaginaire ait une partie réelle négative suffisante pour que cette racine ne glisse pas dans le demi-plan de droite lorsque la prédistorcion lui fera subir une translation d'amplitude  $-\epsilon$ . On rejoint ici la limitation évoquée au paragraphe précédent : même avec la prédistorcion, il n'est pas possible de construire un filtre très sélectif, caractérisé par des racines de  $g$  proche de l'axe imaginaire, au moyen de composants ayant un faible facteur de qualité;

- cependant, même cette méthode simplifiée se heurte à un obstacle insurmontable. On aura remarqué la présence d'un facteur constant  $k$  dans la forme proposée pour  $\tilde{s}_{21}(p)$  : en effet, il faut par (1.2) que  $|\tilde{s}_{21}| \leq 1$  sur l'axe imaginaire; comme tel est le cas pour  $|s_{21}|$ , le facteur  $k$  est nécessaire pour ajuster  $|\tilde{s}_{21}|$ . Or, dans un filtre classique,  $f(p)$  et  $g(p)$  sont tels que  $h(p)$  calculé par (2.66) possède le maximum possible de racines sur l'axe imaginaire. Il n'en sera pas de même pour  $\tilde{h}(p)$  calculé par (2.66) à partir de  $kf(p)$  et  $g(p - \epsilon)$  : en règle générale, il n'y aura qu'un seul zéro d'affaiblissement pour le filtre prédistoré. Dès lors, celui-ci souffrira d'une sensibilité exagérée à l'imprécision des éléments. Ce que l'on gagne sur l'effet des pertes est perdu et au delà sur l'effet des tolérances.

Cette dernière considération est d'un poids suffisant pour que la méthode de prédistorion soit à déconseiller. Elle est parfois utilisée pour compenser une partie des pertes; le plus souvent, on n'opère en pratique aucune prédistorion.

### 7.5.6 Cas de la dissipation uniforme inégale

Les méthodes précédentes peuvent être généralisées au cas où les pertes des bobines d'une part et celles des condensateurs d'autre part ne seraient pas identiques [29]. Ni l'analyse de l'effet des pertes, ni l'éventuelle prédistorion ne changent quoi que ce soit d'essentiel aux commentaires du paragraphe précédent.

### 7.5.7 Cas de la dissipation non uniforme

Si les pertes introduites par les composants ne sont pas uniformes, il n'y a pas d'autre recours que d'analyser le circuit réel, compte tenu de son circuit équivalent, par un programme tel que ceux mentionnés au chapitre 11.

La prédistorion de ces pertes pourrait être tentée par des techniques d'optimisation purement numériques, n'était l'objection fondamentale à toute prédistorion mentionnée au paragraphe 7.5.6. Régulièrement, des méthodes de ce genre sont présentées dans la littérature, sans aucune chance de succès.

### 7.5.8 Effet de la dissipation dans un seul élément

Soit une inductance de valeur nominale  $L$  qui est réalisée par une bobine d'impédance  $R + jL\omega = (L\omega/Q) + jL\omega$ . On considère  $L$  comme une variable  $x$  affectée d'une erreur  $-jL/Q$  et donc d'une erreur relative  $\delta x = -j/Q$ .

A partir de (7.11), on peut déduire la formule

$$\Delta F = 'S(F, x) \delta x \quad (7.90)$$

Si  $F$  est le comportement, il vaut :

$$\Delta \alpha + j \Delta \phi = [ 'S(\alpha, x) + j 'S(\phi, x) ] \left( \frac{-j}{Q} \right) \quad (7.91)$$

En égalant les parties réelles et imaginaires, on trouve :

$$\Delta \alpha = 'S(\phi, x) \frac{1}{Q} \quad (7.92)$$

Compte tenu de (7.5) et de (7.29), il vient :

$$\delta |F| = \operatorname{Im} S(F, x) \frac{1}{Q} \quad (7.93)$$

### 7.5.9 Capacités parasites

L'effet des capacités parasites des bobines et leur éventuelle compensation ont été étudiés en [30]. Contrairement à la prédistorsion des pertes, qui échoue pour les raisons évoquées au paragraphe 7.5.6, la compensation des capacités parasites est possible parce que la méthode n'implique que des biportes non dissipatifs.

## SIMULATION DIRECTE DU BIORTE NON DISSIPATIF ENTRE TERMINAISONS RÉSISTIVES

### 8.1 FILTRES À RÉSONATEURS

#### 8.1.1 Introduction

Cette section présente un premier exemple d'une technologie qui s'appuie sur les résultats théoriques, développés aux chapitres précédents dans le cas du filtre LC, et qui emploie d'autres composants que des bobines et des condensateurs. Comme dans les deux exemples qui font l'objet des sections suivantes, le but est de se débarrasser des bobines. En effet, ce ne sont que des approximations très imparfaites des inductances :

- il y a des pertes inévitables qui sont représentées par une résistance en série ou en parallèle avec l'inductance; le facteur de qualité, défini au paragraphe IV.3.5.4, mesure l'importance de ces pertes;
- la valeur de l'inductance elle-même est soumise à des dérives en fonction de la température et du vieillissement;
- les valeurs d'inductances nécessaires aux filtres à basse fréquence exigent des bobines encombrantes; le facteur de qualité de celles-ci est médiocre.

#### 8.1.2 Résonateurs piézo-électriques

Le *résonateur* est un composant utilisant le phénomène de piézo-électricité (§ II.4.9.5). Dans la suite de cet exposé, il sera identifié à un modèle composé d'une inductance et de deux capacités : il s'agit bien entendu d'un modèle très simplifié, négligeant un certain nombre de résonances considérées comme parasites.

Le symbole graphique du résonateur est représenté à la figure 8.1, et les circuits équivalents à la figure 8.2.



Fig. 8.1

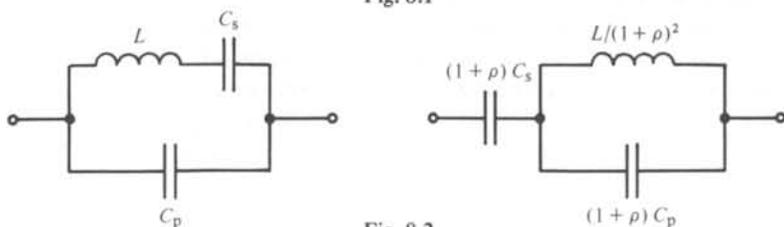


Fig. 8.2

### 8.1.3 Circuit équivalent

Les deux circuits équivalents sont identiques avec la notation

$$\rho = C_p/C_s \quad (8.1)$$

L'impédance s'écrit

$$Z(p) = \frac{1}{(C_p + C_s)p} \frac{1 + (p^2/\omega_r^2)}{1 + (p^2/\omega_a^2)} \quad (8.2)$$

La réactance  $X(\omega)$ , calculée par  $jX(\omega) = Z(j\omega)$ , est représentée à la figure 8.3. Elle comporte un zéro en  $\omega_r$  et un pôle en  $\omega_a$ , qui sont respectivement les pulsations de résonance et d'antirésonance. A l'origine,  $X$  est asymptotique à la réactance  $-1/(C_s + C_p)\omega$ , et à l'infini à  $-1/C_p\omega$ . Aux deux extrémités de l'axe positif des fréquences, le résonateur se comporte donc comme une capacité.

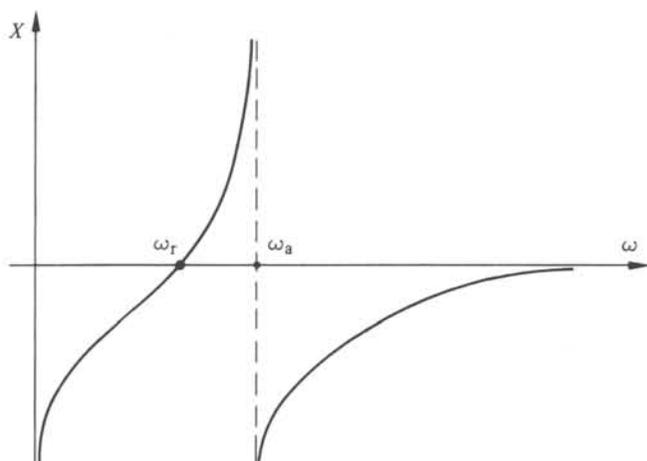


Fig. 8.3

Compte tenu du circuit équivalent, on trouve les formules

$$\omega_r^2 = 1/LC_s \quad (8.3)$$

$$\omega_a^2 = (1 + 1/\rho) \omega_r^2 \quad (8.4)$$

Il est clair que du rapport  $\rho$  dépend l'écart entre  $\omega_a$  et  $\omega_r$ .

### 8.1.4 Ordre de grandeur des paramètres

Le facteur  $\rho$  dépend très étroitement des contraintes du matériau utilisé, et de la construction du résonateur. La valeur minimale pour un cristal de quartz est de l'ordre de 200, pour un résonateur céramique de l'ordre de 10. Par (8.4), on a respectivement  $\omega_a = 1,002 \omega_r$  et  $\omega_a = 1,05 \omega_r$ . On verra plus loin que la *bande passante relative*, c'est-à-dire le rapport de la largeur de bande à la pulsation moyenne, est liée à l'écart entre  $\omega_a$  et  $\omega_r$ . Il en résulte qu'en général, les filtres ne comportant que des résonateurs et des capacités ont une bande passante relative très étroite allant de quelques pour mille à quelques pour cent.

Les facteurs de qualité du circuit résonant, supposé sans perte dans le modèle équivalent de la figure 8.2 sont effectivement très élevés : ils vont de 1000 pour un résonateur céramique à  $10^6$  pour un résonateur à quartz. Les résonateurs constituent à ce point de vue un composant bien meilleur que la bobine.

La stabilité en température de la caractéristique d'un résonateur est tout aussi remarquable. Ainsi, la variation relative de la fréquence de résonance vaut environ  $10^{-6}$  par degré pour le quartz; elle s'élève à  $50 \cdot 10^{-6}$  pour la céramique.

### 8.1.5 Commentaire

Le résonateur permet de résoudre certains problèmes posés par les imperfections des bobines. L'avantage du haut facteur de qualité et de l'insensibilité par rapport à la température est malheureusement compensé par la liaison étroite entre  $\omega_r$  et  $\omega_a$ . A ce titre, le résonateur est un composant aussi difficile à mettre en œuvre qu'une paire de bobines couplées : les deux composants sont caractérisés par trois paramètres dépendant les uns des autres. On ne dispose donc plus de la souplesse d'une synthèse LC habituelle, où chaque élément est calculé séparément et est réalisé par un composant distinct dont la valeur est librement ajustée.

On remarquera, par le schéma équivalent de la figure 8.2 à gauche, qu'en plaçant un condensateur en parallèle sur un résonateur, on ne fait qu'augmenter le rapport  $\rho$  et rapprocher encore davantage  $\omega_a$  et  $\omega_r$ , puisque  $C_p$  augmente et que  $C_s$  est invariant. Il en est paradoxalement de même si l'on ajoute un condensateur en série avec un résonateur. En effet, le rapport des capacités parallèle et série du schéma équivalent de droite de la figure 8.2, vaut exactement  $\rho$ . Si l'on ajoute un condensateur en série, cela revient à diminuer la valeur de la capacité série et, donc, à augmenter de nouveau  $\rho$ .

En résumé, la limitation inférieure de  $\rho$  constitue une contrainte à laquelle on ne peut échapper, tant qu'un circuit est réalisé uniquement par des condensateurs et des résonateurs. Une synthèse réalisée par la méthode des paramètres effectifs ne permet pas de contrôler a priori la valeur des éléments ou de lier celle-ci à la caractéristique de filtrage. C'est pourquoi, la synthèse d'un filtre comportant des résonateurs s'opère souvent par la méthode des paramètres-image.

Enfin, au moyen de résonateurs et de condensateurs, il n'est pas possible de construire autre chose que des filtres passe-bande de classe 5, puisque le résonateur, ayant un comportement capacitif tant à l'origine qu'à l'infini, crée forcément, selon sa position dans un bras série ou parallèle, un pôle d'affaiblissement à l'origine ou à l'infini. Comme on ne dispose pas d'inductances isolées, il est impossible du reste de créer plus qu'un pôle d'affaiblissement en ces fréquences. Dès lors, selon la classification du tableau 6.22, le filtre passe-bande doit être de classe 5, et, donc, il est paramétrique.

### 8.1.6 Synthèse de filtres en échelle par la méthode des paramètres-image

La méthode repose sur l'utilisation des cellules représentées aux figures 3.24 et 3.26. En effet, les branches médianes de ces cellules correspondent aux schémas équivalents du résonateur. Construites au moyen de ce composant, ces cellules auront la structure représentée aux figures 8.4 et 8.5.

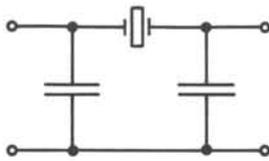


Fig. 8.4

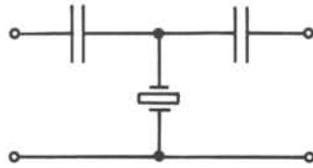


Fig. 8.5

A partir des formules du paragraphe 3.5.6, appliquées à la cellule de la figure 8.5, on trouve la relation

$$\omega_{+c}^2 = (1 + 1/\rho) \omega_c^2 \quad (8.5)$$

qui montre, par comparaison avec (8.4), que les fréquences d'antirésonance et de résonance correspondent respectivement à la fréquence de coupure supérieure et à la fréquence du pôle d'affaiblissement située dans la bande coupée inférieure. La fréquence de coupure inférieure  $\omega_{-c}$  est forcément située entre les deux, et la largeur de bande  $(\omega_{+c} - \omega_{-c})$  est donc inférieure à  $(\omega_a - \omega_r)$ .

Un calcul analogue pour la cellule de la figure 8.4 montre que la fréquence du pôle d'affaiblissement, située dans la bande passante supérieure, et la fréquence de coupure inférieure sont liées par une relation analogue

$$\omega_{\infty}^2 = (1 + 1/\rho) \omega_{-c}^2 \quad (8.6)$$

qui entraîne la même conclusion.

Non seulement l'utilisation de résonateurs limite sévèrement la largeur de bande relative, mais elle entraîne en plus une élévation du degré nécessaire pour rencontrer les exigences d'affaiblissement. En effet, la méthode des gabarits, telle qu'elle est utilisée à la figure 5.9, montre que la couverture des exigences est réalisée avec le minimum de pôles lorsque ceux-ci peuvent être librement placés. Il est clair que le nombre de pôles nécessaires pour couvrir des exigences données croîtra si la position de ces pôles est strictement limitée au voisinage immédiat des fréquences de coupure.

### 8.1.7 Synthèse des filtres en échelle par la méthode des paramètres effectifs

Ainsi que nous l'avons noté au paragraphe 8.1.5, seuls les filtres passe-bande de classe 5 peuvent être synthétisés au moyen de résonateurs et de capacités à l'exclusion d'autres composants. Si l'on extrait alternativement des pôles d'affaiblissement situés au-dessus et en dessous de la bande passante, la structure du filtre est celle de la figure 6.18, dont les branches parallèle et série ont le même schéma équivalent que le résonateur, présenté à la figure 8.2. Rien ne garantit cependant que le rapport  $\rho$ , obtenu par la synthèse, ne soit pas inférieur à ce qui est réalisable avec le type de résonateur prévu. Rien, non plus, ne permet théoriquement de prévoir, a priori, quel sera le rapport  $\rho$  d'une synthèse.

Par analogie avec le résultat obtenu au paragraphe 8.1.6, la règle pratique consiste à restreindre les racines de  $f$  dans le voisinage immédiat des fréquences de coupure : on peut, par exemple, imposer la limitation introduite par les relations (8.5) et (8.6), compte tenu de la valeur  $\rho$  imposée par les résonateurs considérés; par ce fait même, la bande passante reste toujours aussi limitée.

L'expérience montre que l'on peut obtenir un réseau en échelle, du type de la figure 6.18 avec un rapport  $\rho$  supérieur à une limite fixée, pourvu que l'on observe la règle énoncée à l'alinéa précédent.

### 8.1.8 Synthèse des filtres en treillis par les paramètres-image

La restriction rencontrée aux paragraphes 8.1.6 et 8.1.7 tient à deux contraintes : le choix exclusif de résonateurs et de capacités comme composants; la structure en échelle du réseau. En acceptant de construire un filtre n'ayant pas une structure en échelle, on peut diminuer les restrictions rencontrées quant au type de caractéristiques qui peuvent être réalisées.

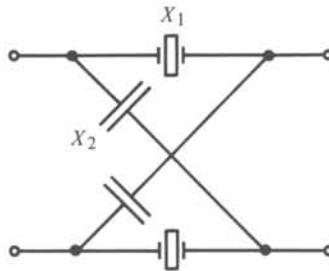


Fig. 8.6

La figure 3.21 donne un premier exemple d'un filtre en treillis qui sera réalisé, selon la figure 8.6, au moyen de résonateurs et de capacités. Les paramètres-image peuvent être calculés par le paragraphe 3.1.11. En particulier, la bande passante sera déterminée, selon (3.17), comme l'intervalle de fréquence où les réactances  $X_1$  et  $X_2$  des branches sont de signes opposés. Par la figure 8.7, il apparaît que la bande passante est l'intervalle entre  $\omega_a$  et  $\omega_r$ . Cela représente une certaine amélioration par rapport au réseau en échelle, où le même intervalle séparait une fréquence de coupure d'un pôle d'affaiblissement situé dans la bande coupée qui n'est pas contiguë.

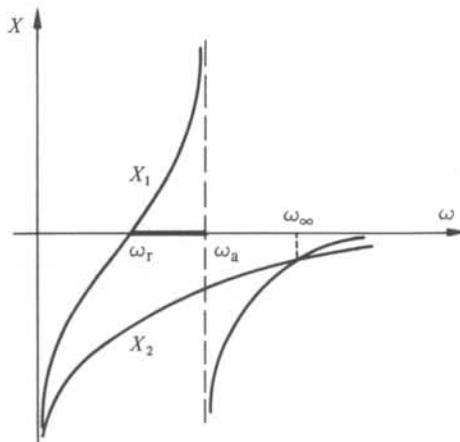


Fig. 8.7

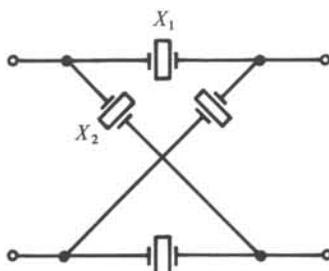


Fig. 8.8

Un second exemple est donné à la figure 8.8, où les deux paires de branches sont des résonateurs. La figure 8.9 montre comment choisir les résonateurs pour obtenir une seule bande passante : il faut faire coïncider la pulsation de résonance d'un résonateur avec la pulsation d'antirésonance de l'autre. Par ce fait même, la bande passante ( $\omega_{+c} - \omega_{-c}$ ) a pour largeur deux fois l'intervalle ( $\omega_a - \omega_r$ ) des résonateurs considérés.

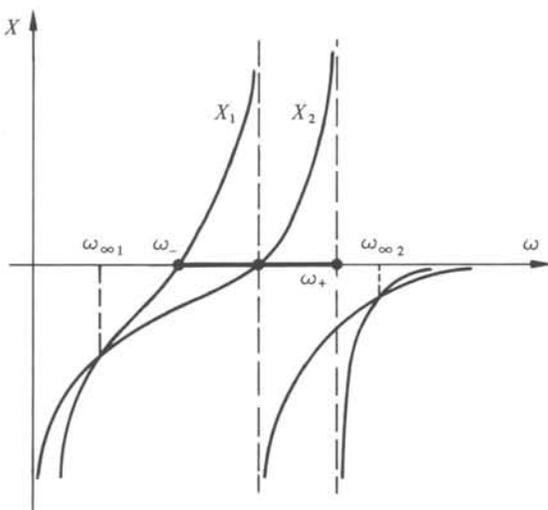


Fig. 8.9

Enfin, on remarquera, aux figures 8.6 et 8.8, que la position des pôles d'affaiblissement n'est en rien limitée par le facteur  $\rho$ . Dans le cas d'un filtre en treillis, un pôle d'affaiblissement se produit à toute fréquence où les impédances des branches sont égales. Dès lors, les pôles d'affaiblissement peuvent être placés librement, ce qui supprime la restriction très sévère impliquée par la structure en échelle.

### 8.1.9 Commentaire

La structure en treillis présente donc un double avantage par rapport à la structure en échelle : la bande passante est plus large pour un même  $\rho$ ; les pôles d'affaiblissement peuvent être librement placés. Elle présente aussi deux inconvénients.

Tout d'abord, le nombre de résonateurs est doublé. On peut s'affranchir de cet inconvénient en utilisant une des *structures de Jaumann* représentée à la figure 8.10, mais l'économie en résonateurs se paie par l'utilisation d'un transformateur. Il est aussi possible d'utiliser des résonateurs à double paire d'électrodes.

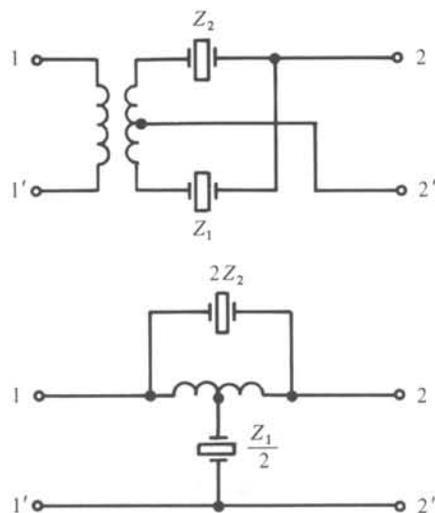


Fig. 8.10

Ensuite, la structure en treillis ne jouit pas de l'avantage propre à l'échelle : les pôles d'affaiblissement ne sont plus créés par la résonance ou l'antirésonance d'une branche isolée, mais par l'égalité entre les impédances des branches du treillis. Les formules (3.15) et (3.16) montrent que  $Z_1 = Z_2$  implique  $Z_{12} = 0$ , ou encore, par (2.83),  $f = 0$ . De faibles variations de  $Z_1$  ou  $Z_2$  engendreront un déplacement sensible des racines de  $f$ . A ce point de vue, le treillis est un bon circuit de mesure, *sensible* aux valeurs des éléments, ainsi qu'il apparaît dans les différents ponts d'impédance où il est utilisé. Cette sensibilité sera d'autant plus élevée que les branches du treillis seront de degré plus élevé. Il n'est donc pas opportun de construire un filtre de degré élevé sous la forme d'un seul treillis dont les branches comporteraient plusieurs résonateurs en parallèle. Il vaut mieux placer plusieurs treillis simples en cascade.

### 8.1.10 Synthèse de filtres en treillis par les paramètres effectifs

Aucune des cellules extraites à la section 6.2 ne correspond au treillis. Il faut donc commencer par synthétiser un filtre en échelle que l'on transformera en une cascade de treillis, pour bénéficier des avantages découverts pour cette structure dans la synthèse selon les paramètres-image.

Tout comme au paragraphe 8.1.7, on ne connaît pas les limitations théoriques des filtres en treillis de résonateur. On sait simplement qu'il faut se limiter à des caractéristiques de passe-bande de classe 5. Par analogie avec les résultats du paragraphe 8.1.8, on se restreint à des filtres dont la bande passante n'excède pas une à deux fois l'écart ( $\omega_a - \omega_r$ ) des résonateurs donnés. Moyennant cette restriction, on peut s'at-

tendre, après la synthèse de l'échelle et sa transformation en cascade de treillis, à trouver des circuits équivalents de résonateurs dont le rapport soit supérieur ou égal au minimum réalisable.

Pour passer d'une échelle du type de la figure 6.18 à une cascade de treillis du type 8.6, il suffit de décomposer l'échelle en une cascade de cellules du type de la figure 3.24 ou 3.26, et d'utiliser à rebours les équivalences de Mason entre ces cellules et le treillis de la figure 3.21. Bien entendu, la décomposition de l'échelle ne donnera pas spontanément des cellules symétriques comme les figures 3.24 et 3.26. Il faudra donc admettre des capacités résiduelles, parallèle ou série, entre les treillis. Un exemple en est donné à la figure 8.11.

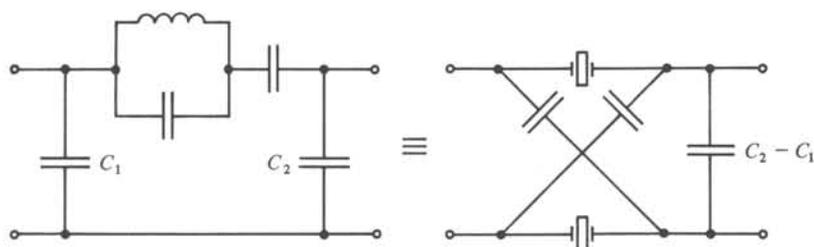


Fig. 8.11

Pour passer d'une échelle à une cascade de treillis du type de la figure 8.8, il faut opérer une transformation portant sur une cellule en échelle réalisant deux pôles d'affaiblissement. On utilise, pour cela, la *transformation de Szentirmai* représentée dans son principe à la figure 8.12. Les formules de conversion peuvent être trouvées dans la référence [27].

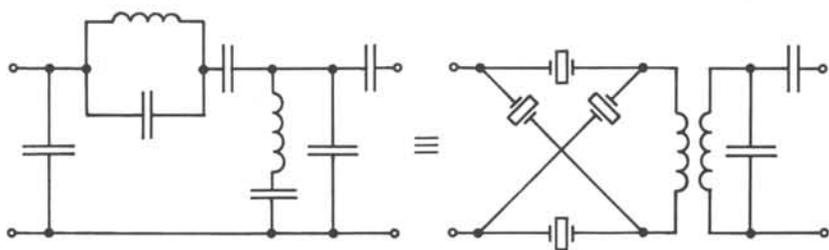


Fig. 8.12

### 8.1.11 Synthèse de filtres comportant résonateurs, capacités et inductances

Ce qui précède a montré pourquoi les filtres de résonateurs et de capacités sont limités à des caractéristiques de passe-bande à bande passante relativement étroite. Pour un facteur  $\rho$  donné, il est pratiquement impossible de dépasser une bande valant  $2(\omega_a - \omega_r)$ . La seule façon de s'affranchir de cette limitation consiste à admettre l'utilisation d'une ou de plusieurs inductances.

La figure 8.13 montre que l'addition de la susceptance  $B$  du résonateur et de  $1/L\omega$  de l'inductance déplace l'antirésonance de  $\omega_a$  à  $\omega'$ , tandis que  $\omega_r$  est inchangé.

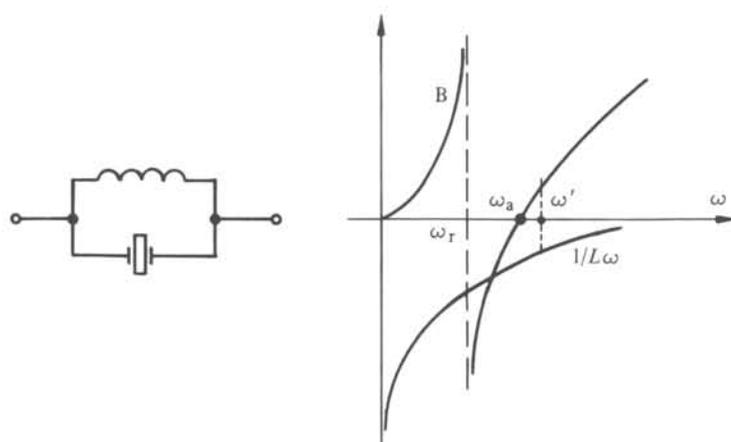


Fig. 8.13

L'écart entre la résonance et l'antirésonance est donc accru. Par les discussions des paragraphes antérieurs, il résulte que les largeurs de bande correspondantes en sont également accrues.

Bien entendu, il ne peut être question d'adjoindre une bobine en parallèle sur chaque résonateur sans perdre les avantages propres aux filtres de résonateur. Pratiquement, cette technique n'est utilisée que dans deux circuits : un treillis unique comportant deux ou trois résonateurs en parallèle ou en série avec une bobine ; un passe-bande ordinaire comportant un ou deux résonateurs pour fixer les pôles d'affaiblissement proches de la bande passante.

### 8.1.12 Treillis d'inductances, de capacités et de résonateurs

Il s'agit des treillis dont les branches sont représentées aux figures 8.14 et 8.15. En pratique, il faut éviter de mettre plus de deux à trois résonateurs en parallèle, par suite des difficultés de réglage et de sensibilité évoquées au paragraphe 8.1.9.

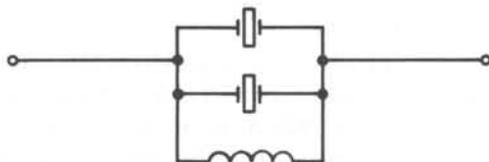


Fig. 8.14

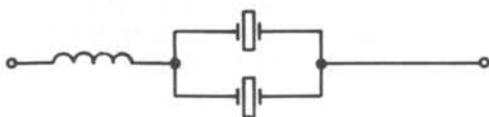


Fig. 8.15

La synthèse selon les paramètres-image s'opère de façon analogue à la méthode du paragraphe 8.1.8. La synthèse selon les paramètres effectifs est limitée aux passe-bande de classe 0, pour un treillis dont les branches sont du type 8.14, et de classe 15, pour un treillis dont les branches sont du type 8.15. En effet, à titre d'exemple, on peut extraire, par l'équivalence de Mason, la plus grande des deux inductances en parallèle des branches du type 8.14. Le treillis résiduel se résume à une capacité série à la fréquence nulle. Le circuit comportant deux inductances parallèle et une capacité série a effectivement trois pôles d'affaiblissement à l'origine.

La bande passante est plus large que pour les circuits présentés antérieurement, par suite de la présence d'une inductance. La relation suivante permet d'estimer la bande passante réalisable, pour un rapport de capacités donné,

$$(\omega_{+c} - \omega_{-c})^2 / \omega_{+c} \omega_{-c} = 2/\rho \quad (8.7)$$

### 8.1.13 Cellule de Poschenrieder

Si la bande passante relative d'un filtre est large, par exemple de l'ordre de 50%, on ne peut créer tous les pôles d'affaiblissement par des résonateurs. Néanmoins, il est intéressant de pouvoir utiliser quelques résonateurs pour créer les pôles d'affaiblissement les plus proches de la bande passante. On peut ainsi utiliser la grande stabilité en fréquence de la résonance.

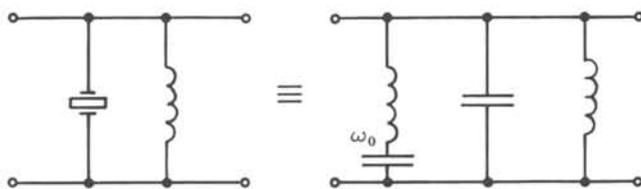


Fig. 8.16

Le problème consiste à extraire le bras parallèle représenté à la figure 8.16. La bobine en parallèle sur le résonateur remplit deux fonctions : d'une part, écarter les fréquences de résonance et d'antirésonance selon la discussion du paragraphe 8.1.11 ; d'autre part, utiliser la bobine en tant qu'autotransformateur afin de pouvoir insérer un résonateur ayant n'importe quel niveau d'impédance.

L'extraction de ce bras parallèle pose un problème original en ce qui concerne les éléments de translation. En nous référant au tableau 6.22, il faut  $a = 0$ ,  $b = 0$ . En général, ce ne sera pas le cas et il faudra extraire au préalable les éléments  $C$  et  $L$  de la figure 8.17. La valeur de ces éléments est entièrement déterminée par le fait qu'il s'agit de l'extraction complète d'un pôle à l'origine et d'un pôle à l'infini.

Dès lors que l'on a réalisé les conditions requises,  $a = b = 0$ , on ne dispose plus d'élément de translation série afin de créer le zéro d'impédance en  $\omega_0$ , qui permettra d'extraire le résonateur. Des éléments de translation parallèle ne modifient pas les zéros de  $\zeta_1$ . Si  $\zeta_1$  n'a pas de zéro en  $\omega_0$ , il faut utiliser un élément de translation série plus compliqué qu'une simple capacité ou inductance.

On utilise, dans ce but, un circuit antirésonant à la pulsation  $\omega_a$  qui correspond à l'extraction partielle du pôle d'affaiblissement situé à cette pulsation. Par extrac-

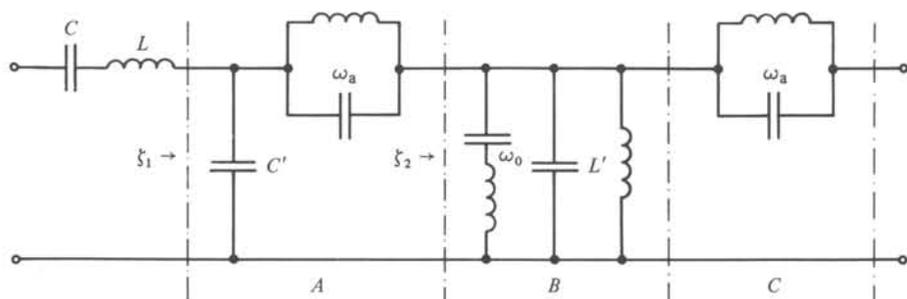


Fig. 8.17

tion partielle, on entend ici celle d'un circuit antirésonant dont le niveau d'impédance est choisi de telle façon que  $\zeta_2(\omega_0) = 0$ .

Par ailleurs, cette extraction partielle elle-même ne peut pas être effectuée directement, parce que  $\zeta_1$  n'a pas spontanément de pôle en  $\omega_a$ . Il faut donc commencer par extraire la capacité parallèle de translation  $C'$ .

Enfin, après extraction du résonateur et de son autotransformateur représenté par le quadripôle *B*, il faut encore extraire le résidu du pôle en  $\omega_a$  par un second circuit antirésonant.

Au total, l'extraction du résonateur coûte donc quatre bobines. Il n'est évidemment pas question ici d'économie de bobines ou des impératifs d'un haut facteur de qualité : le seul but de l'opération est de créer un pôle d'affaiblissement dont la position soit stable, malgré le vieillissement ou les variations de température.

Il faut noter encore que l'extraction en deux étapes du pôle en  $\omega_a$  n'est pas sans créer des problèmes. Les quadripôles *A* et *C* ont chacun un polynôme  $f$  contenant un facteur  $(p^2 + \omega_a^2)$ . Lorsque l'on calcule la matrice  $s$  du quadripôle *ABC*, avant toute simplification, on trouve un facteur  $(p^2 + \omega_a^2)^2$  dans  $f$  et  $(p^2 + \omega_a^2)$  dans  $g$ . Après simplification, il demeure un seul pôle d'affaiblissement.

Pendant, cette simplification n'est rigoureuse que dans la mesure où tous les éléments ont leur valeur nominale, et qu'ils ne sont pas affectés de pertes. Dans le circuit réel, cela n'est pas le cas. La courbe d'affaiblissement mesurée comporte un minimum d'affaiblissement très gênant à la pulsation  $\omega_a$ .

## 8.2 FILTRES À GYRATEURS ET À CAPACITÉS

### 8.2.1 Introduction

Comme toute inductance peut en principe (§ IV.1.3.7) être simulée par un gyrateur fermé sur une capacité, la synthèse de n'importe quel filtre LC peut aisément être transposée dans une technologie à base de gyrateurs et de capacités.

Néanmoins, certaines contraintes supplémentaires surgissent. En premier lieu, il est plus simple de construire un gyrateur sous forme d'un tripôle dont la borne commune soit à la masse. Cette contrainte entraîne, soit la nécessité de ne simuler que des filtres LC dont toutes les inductances ont une borne à la masse, soit l'obligation de transformer au préalable d'autres filtres LC.

En second lieu, l'objectif ici n'est plus de minimiser le nombre des inductances mais celui des gyrateurs : il y a quelques nuances entre les deux objectifs. De plus, il peut être commode de n'utiliser que des gyrateurs à résistance de gyration normalisée : comme les gyrateurs sont réalisés par un circuit actif assez compliqué, on peut se limiter à un seul circuit de ce type.

En revanche, l'utilisation du gyrateur permet de s'abstraire d'une limitation de la technologie LC : dans celle-ci, on ne dispose pas du transformateur idéal, ni même du transformateur à couplage parfait, qui est nécessaire en théorie pour réaliser la cellule de Brune. Dans le cas de la technologie à base de gyrateurs, cette contrainte disparaît.

Bien entendu, le circuit actif qui réalise le gyrateur ne simule pas celui-ci à la perfection. Nous reviendrons, à la section 9.7, sur ces imperfections. Notons, dès à présent, que la réalisation du gyrateur introduit de nombreuses limitations sur les filtres réalisables : consommation de puissance continue, introduction de bruit, limitation de la dynamique, éléments parasites gênants sauf aux très basses fréquences.

### 8.2.2 Matrice de répartition du biporte

La formule (2.68) donne la forme générale de la matrice de répartition d'un biporte non dissipatif réciproque ou non. Cette formule est naturellement valable pour un biporte composé de gyrateurs et de capacités. A ce point de vue, le gyrateur ne permet pas de réaliser des affaiblissements qui soient différents de ceux réalisés par des biportes réciproques ne comportant que des inductances et des capacités. Le problème de cette section se limite donc à la synthèse de biportes non dissipatifs et réciproques, puisque la non-réciprocité ne change rien aux caractéristiques d'affaiblissement réalisables. Le seul rôle du gyrateur est de simuler l'inductance ou le transformateur idéal. Bien que le biporte contienne des gyrateurs, son comportement reste cependant réciproque.

### 8.2.3 Description du gyrateur

D'après la définition du paragraphe IV.1.1.15, le gyrateur est défini par une matrice d'impédance à circuit ouvert

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & r \\ -r & 0 \end{pmatrix} \quad (8.8)$$

Si l'on choisit  $r$  comme résistance de référence pour le biporte, on trouve

$$z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.9)$$

On sera souvent amené à utiliser le même gyrateur à travers tout le biporte pour des raisons de standardisation. La notation (8.9) est donc utile et pertinente. Dans ce cas, on peut déduire de (8.9) la matrice de transfert

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8.10)$$

### 8.2.4 Extraction d'un gyrateur

Soit un biporte non dissipatif, et éventuellement non réciproque, défini par sa matrice de transfert

$$\theta = \frac{1}{\pm f_*} \begin{pmatrix} \pm g_* & h \\ \pm h_* & g \end{pmatrix} \quad (8.11)$$

Si l'on extrait un gyrateur de matrice de transfert (8.10), le biporte résiduel est caractérisé par

$$\theta'' = \frac{1}{\mp f_*} \begin{pmatrix} \mp g_* & -h \\ \pm h_* & g \end{pmatrix} \quad (8.12)$$

Le seul résultat de cette extraction est de changer  $h$  en  $-h$  et de changer le signe des déterminants de  $s$  et  $\theta$ . En effet le choix du double signe de  $f_*$  est libre dans ce cas. En particulier, cela signifie que les nombres binaires  $a$  et  $b$  sont remplacés par leurs compléments.

### 8.2.5 Commentaire

L'extraction d'un gyrateur n'ajoute rien en ce qui concerne la réalisation de pôles d'affaiblissement proprement dits. Cependant, elle permet de se déplacer dans le diagramme de la figure 6.21, modifié à la figure 8.18, du nœud 01 ou 11 au nœud 10 ou 00 et réciproquement. La figure 8.18 ne comprend plus les branches  $B$  et  $D$  correspondant aux extractions d'inductances.

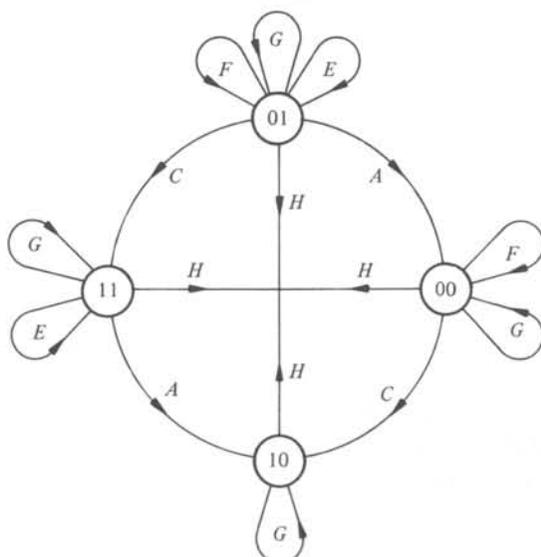


Fig. 8.18

### 8.2.6 Réalisation des pôles d'affaiblissement à l'origine et à l'infini

La figure 8.18 montre que l'on peut extraire un pôle à l'origine et un pôle à l'infini par l'extraction  $CAH$  ou  $ACH$  (identiques à une transformation de Norton

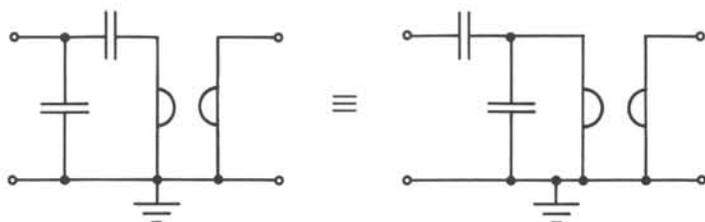


Fig. 8.19

près) et revenir au nœud initial 01. Ces circuits sont représentés à la figure 8.19. L'extraction de pôles situés uniquement à l'infini s'opère par le cycle  $CHCH\dots$ , et des pôles à l'origine par le cycle  $AHAH\dots$ , représentés respectivement aux figures 8.20 et 8.21. En fait, dans ce cas, il est plus économique de simuler les inductances parallèle par des gyrateurs fermés sur des capacités.

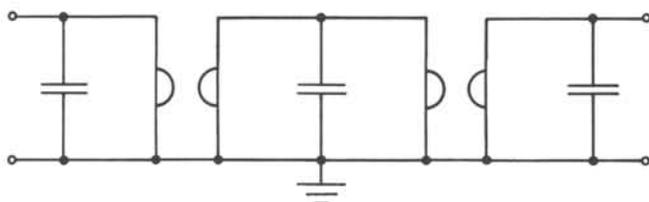


Fig. 8.20

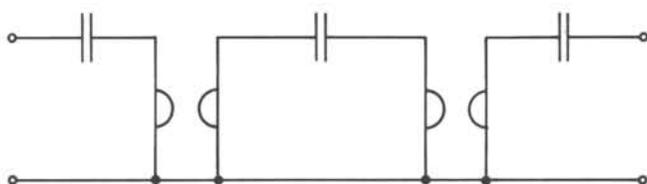


Fig. 8.21

En conclusion, s'il n'y a que  $n$  pôles d'affaiblissement situés à l'infini, on dépense  $(n - 1)$  gyrateurs. S'il n'y a que  $n$  pôles situés à l'origine, on utilisera  $n/2$  ou  $(n - 1)/2$  gyrateurs, selon que  $n$  est pair ou impair.

Dans le cas du passe-bande, s'il y a  $n$  pôles à l'origine et autant à l'infini, le nombre de gyrateurs vaut  $(n - 1)$ .

### 8.2.7 Réalisation d'une paire de pôles d'affaiblissement à une fréquence finie

La réalisation d'une paire de pôles par un circuit résonant dans un bras parallèle est immédiate par le circuit de la figure 8.22.

La réalisation d'une paire de pôles par un circuit antirésonant dans un bras série est moins évidente. On utilise l'identité générale des circuits de la figure 8.23 qui permet de transformer une inductance série en une capacité parallèle. En utilisant égale-

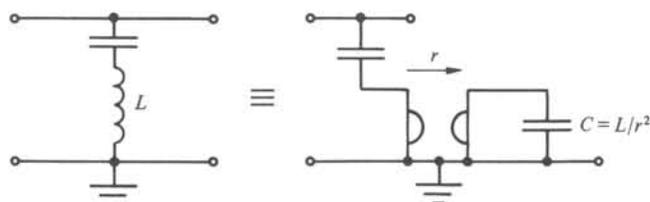


Fig. 8.22

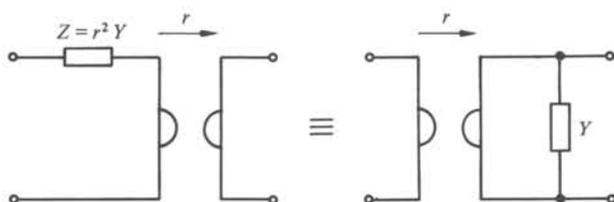


Fig. 8.23

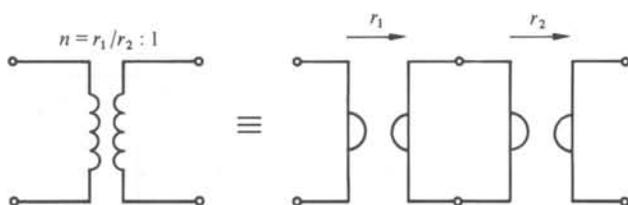


Fig. 8.24

ment la décomposition du transformateur idéal en deux gyrateurs en cascade de la figure 8.24, on trouve les transformations de la figure 8.25.

Enfin, la cellule de Brune peut être réalisée puisque deux gyrateurs permettent la synthèse d'un transformateur idéal et, donc, a fortiori d'une inductance mutuelle à couplage parfait (§ IV.1.4.13). La cellule de gauche de la figure 8.26 est une version duale du tableau 6.2, où le T d'inductances représentant l'inductance mutuelle est représenté par un  $\Pi$  équivalent (équivalence étoile-triangle du § IV.5.5.17). On peut le remplacer par un transformateur idéal et une inductance série, selon le paragraphe IV.1.4.13. Par l'utilisation des transformations des figures 8.23 et 8.24, on trouve la cellule de droite de la figure 8.26. Elle ne diffère de celle de la figure 8.25 que par les résistances de gyration des deux gyrateurs, qui ont des valeurs imposées et inégales.

### 8.2.8 Commentaire

La réalisation de pôles d'affaiblissement situés en-dessous de la bande passante (passe-haut, passe-bande) ne coûte, selon la figure 8.22, qu'un gyrateur par paire de pôles, plus trois capacités en tenant compte de la capacité de translation.

La réalisation de pôles d'affaiblissement situés au-dessus de la bande passante (passe-bas, passe-bande) coûte deux gyrateurs et trois capacités, selon la figure 8.25.

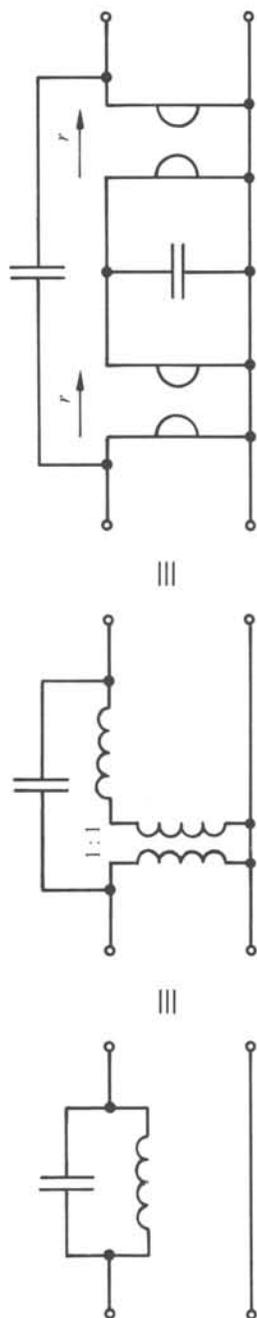


Fig. 8.25

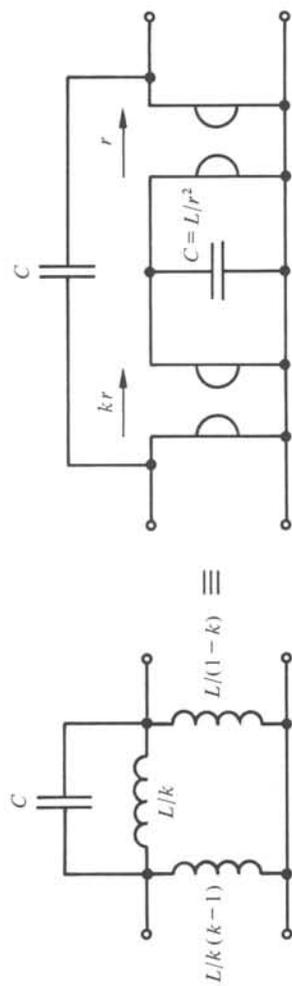


Fig. 8.26

L'emploi de la cellule de Brune, selon la figure 8.26, permet de ne dépenser que deux capacités par paire de pôles, de s'affranchir des contraintes de réalisabilité posées par les capacités de translation et, même, de synthétiser des filtres coupe-bande tout à fait généraux. Le prix à payer est l'emploi de gyrateurs non standardisés à une valeur uniforme de la résistance de gyration.

### 8.2.9 Capacités parasites associées aux accès du gyrateur

Une famille de filtres à gyrateurs et à capacités, appelés *filtres à temps continu*  $g_m C$  ( $g_m C$  continuous-time filters) est largement employée en conception de circuits intégrés depuis 1986. Ces filtres sont encore appelés *TAC filters* (Transconductance Amplifier Capacitor filters) ou *OTA-C filters* (Operational Transconductance Amplifier-Capacitor filters). Ils peuvent être utilisés jusqu'à des fréquences de l'ordre de 100 MHz.

L'élément actif des filtres  $g_m C$  est l'amplificateur opérationnel à transconductance, appelé *amplificateur OTA*. L'amplificateur OTA est un biporte (fig. 2.17) qui effectue une conversion tension-courant entre la tension appliquée à son entrée et son courant de sortie. Il est caractérisé par l'équation

$$-I_2 = g_m U_1 \quad (8.13)$$

La variable  $g_m$ , appelée *transconductance*, est positive; elle est considérée comme constante dans le cas idéal. D'après les équations du gyrateur et celle de l'amplificateur OTA, on montrera que le gyrateur de résistance de gyration  $r$  peut être réalisé par deux amplificateurs OTA, bouclés entre eux, de transconductance égale à  $1/r$  [31, 32].

Dans le cas des filtres  $g_m C$  utilisés en moyennes et hautes fréquences, le but recherché n'est plus de minimiser le nombre de gyrateurs mais de réduire l'effet des capacités parasites associées aux accès du gyrateur (fig. 8.27). Une méthode va être proposée pour que ces capacités parasites apparaissent systématiquement en parallèle avec les capacités fonctionnelles du filtre [31, 32]. La valeur de ces capacités parasites peut être estimée en conception de circuits intégrés; il suffira d'en tenir compte lors du calcul des capacités fonctionnelles du filtre.

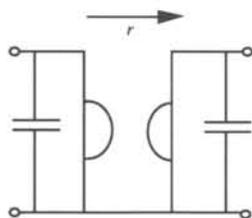


Fig. 8.27

### 8.2.10 Transformation d'une branche parallèle ou d'une branche série

Soit un biporte formé d'une branche parallèle qui contient l'impédance  $Z_1$  (fig. 8.28). D'après les équations du gyrateur, on peut montrer (§ IV.5.1.12) que le biporte de gauche de la figure 8.28 est équivalent à celui de droite si les impédances  $Z_1$  et  $Z_2$  sont liées par la relation

$$Z_1 Z_2 = r^2 \quad (8.14)$$

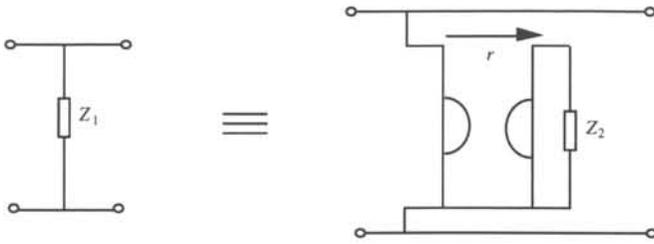


Fig. 8.28

De même, le biporte de gauche de la figure 8.29, formé d'une branche série qui contient l'impédance  $Z_1$ , est équivalent à celui de droite si les impédances  $Z_1$  et  $Z_2$  sont liées par (8.14). Ces deux équivalences vont être utilisées ci-après pour que les capacités parasites aux accès du gyrateur apparaissent en parallèle avec les capacités fonctionnelles du filtre.

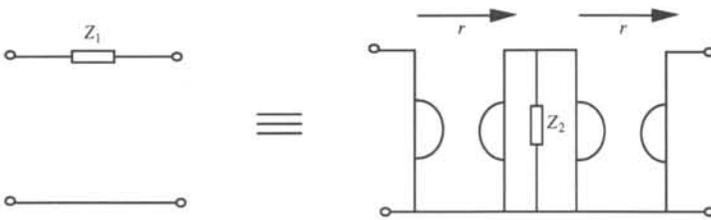


Fig. 8.29

### 8.2.11 Circuit résonant placé dans une branche parallèle

Soit un biporte formé de la mise en parallèle d'un circuit résonant et d'une capacité parallèle  $C_1$  (fig. 8.30). La capacité  $C_1$  peut être considérée comme la mise en parallèle des capacités  $C_3$  et  $C_4$  d'où

$$C_1 = C_3 + C_4 \quad (8.15)$$

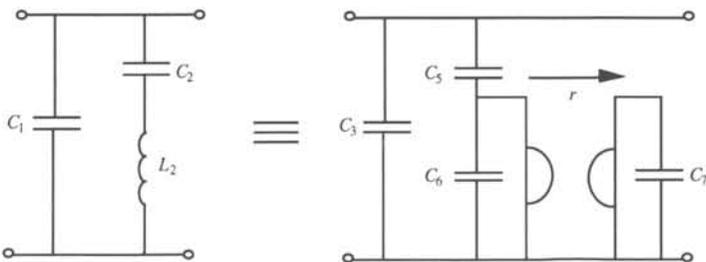


Fig. 8.30

La transformation de Norton (§ IV.6.2.13) permet de montrer que les biportes de gauche et de droite de la figure 8.30 sont équivalents si leurs éléments sont liés par

$$C_5 = C_2 \left(1 + \frac{C_4}{C_2}\right) \quad C_6 = C_4 \left(1 + \frac{C_4}{C_2}\right) \quad C_7 = \frac{L_2}{r^2 \left(1 + \frac{C_4}{C_2}\right)^2} \quad (8.16)$$

La résistance de gyration  $r$  et la capacité  $C_4$  doivent être choisies pour que les capacités parasites à l'entrée et à la sortie du gyrateur soient plus petites que les capacités fonctionnelles  $C_6$  et  $C_7$ . Il suffira alors de soustraire la valeur de la capacité parasite d'entrée (de sortie) du gyrateur de la valeur de  $C_6$  ( $C_7$ ) pour trouver la valeur de la capacité à connecter à l'entrée (la sortie) du gyrateur.

L'équivalence de la figure 8.28 peut aussi être utilisée en considérant que  $Z_1$  correspond au circuit résonant formé de la mise en série de  $C_2$  et de  $L_2$ . L'impédance  $Z_2$  du biporte équivalent (fig. 8.31) est formée de la mise en parallèle de la capacité  $C_3$  et de l'inductance  $L_3$  telles que

$$C_3 = \frac{L_2}{r^2} \quad L_3 = C_2 r^2 \quad (8.17)$$

L'inductance  $L_3$  est ensuite remplacée par un gyrateur de résistance de gyration  $r$  fermé sur une capacité égale à  $C_2$ . De ce fait, l'équivalence de la figure 8.31 utilise un gyrateur de plus que celle de la figure 8.22 ou 8.30.

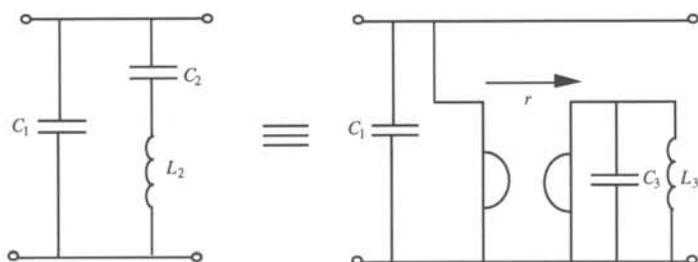


Fig. 8.31

### 8.2.12 Circuit résonant placé dans une branche série

Soit un biporte formé d'un circuit résonant placé dans une branche série (fig. 8.32). L'inductance ne peut pas être directement remplacée par la mise en cascade d'un gyrateur, d'une capacité parallèle et d'un gyrateur (fig. 8.25), car la capacité parasite présente à l'entrée du premier gyrateur n'est pas en parallèle avec une capacité fonctionnelle du filtre. Il faut alors utiliser l'équivalence de la figure 8.29. On obtient le biporte équivalent de la figure 8.32. Ce biporte doit être précédé et suivi d'une capacité parallèle pour que la capacité parasite d'entrée (de sortie) du premier (deuxième) gyrateur soit en parallèle avec une capacité fonctionnelle du filtre.

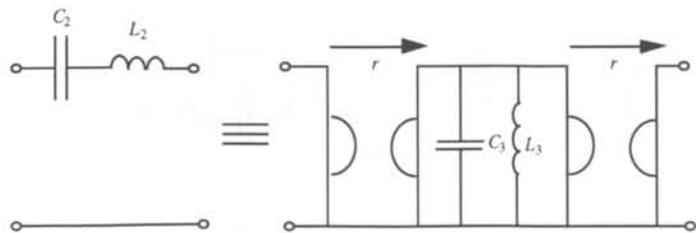


Fig. 8.32

Les éléments des biportes équivalents de la figure 8.32 sont liés par (8.17). L'inductance  $L_3$  est ensuite remplacée par un gyrateur de résistance de gyration  $r$  fermé sur une capacité égale à  $C_2$ . On utilise donc un gyrateur de plus que si l'inductance du circuit résonant avait été directement remplacée comme indiqué à la figure 8.25.

### 8.2.13 Circuit antirésonant placé dans une branche série

Soit un biporte formé d'un circuit antirésonant placé dans une branche série (fig. 8.25). L'équivalence de la figure 8.25 peut être utilisée si ce biporte est précédé et suivi d'une capacité parallèle. Cette contrainte assure que la capacité parasite d'entrée (de sortie) du premier (deuxième) gyrateur soit en parallèle avec une capacité fonctionnelle du filtre. La capacité parallèle placée à l'entrée correspond à la capacité de translation. En revanche, il n'est pas garanti que ce biporte soit suivi par une capacité parallèle.

Comme premier exemple, considérons le cas où le circuit antirésonant est suivi par une inductance série (fig. 8.33). On utilise l'équivalence de la figure 8.29 pour obtenir le biporte équivalent de la figure 8.33. Les éléments des biportes équivalents de la figure 8.33 sont liés par

$$C_2 = \frac{L_1}{r^2} \quad L_2 = C_1 r^2 \quad C = \frac{L}{r^2} \quad (8.18)$$

L'équivalence de la figure 8.30 ou 8.31 est ensuite utilisée pour remplacer le circuit résonant du biporte équivalent de la figure 8.33.

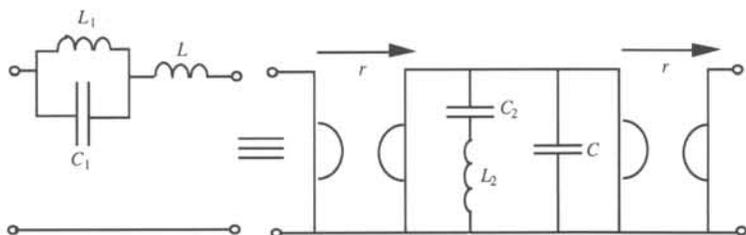


Fig. 8.33

Comme deuxième exemple, considérons le cas où le circuit antirésonant est suivi par une capacité série (fig. 8.34). Les biportes de la figure 8.34 sont équivalents si leurs éléments sont liés par

$$C_2 = \frac{C^2}{C + C_1} \quad L_2 = \frac{L_1(C + C_1)^2}{C^2} \quad C_3 = \frac{C C_1}{C + C_1} \quad (8.19)$$

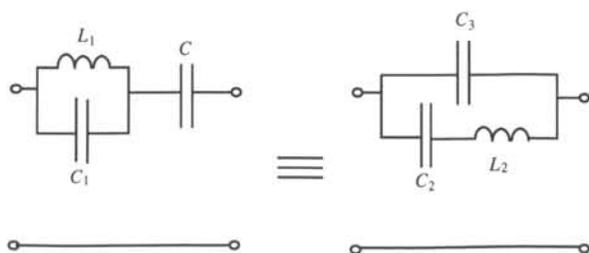


Fig. 8.34

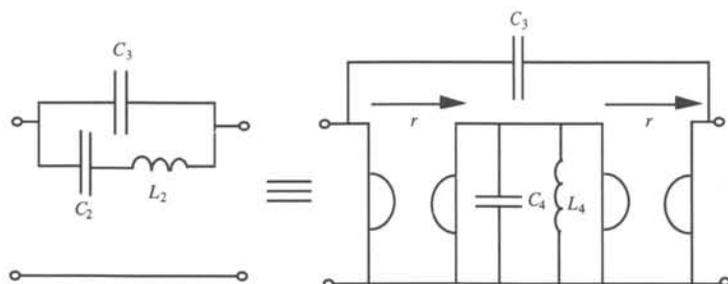


Fig. 8.35

Les biportes de la figure 8.35 sont équivalents si leurs éléments sont liés par

$$C_4 = \frac{L_2}{r^2} \quad L_4 = C_2 r^2 \quad (8.20)$$

Il suffit ensuite de remplacer  $L_4$  par un gyrateur de résistance de gyration  $r$  fermé sur une capacité égale à  $C_2$ .

Pour ces deux exemples, les biportes initiales des figures 8.33 et 8.34 doivent être précédés (suivis) par une capacité parallèle pour que la capacité parasite d'entrée (de sortie) du premier (deuxième) gyrateur des figures 8.33 et 8.35 soit en parallèle avec une capacité fonctionnelle du filtre.

### 8.2.14 Filtre passe-haut

La structure la plus générale d'un filtre passe-haut correspond à la mise en cascade de biportes élémentaires qui contiennent alternativement une capacité placée dans une branche série et un circuit résonant placé dans une branche parallèle. Le circuit résonant se réduit à une inductance si le pôle d'affaiblissement correspondant est situé en zéro.

Il n'existe donc pas de capacités fonctionnelles du filtre placées dans une branche parallèle. Cette remarque entraîne, d'une part, que la capacité parasite à l'entrée du gyrateur de la figure 8.28 n'est pas en parallèle avec une capacité fonctionnelle si l'on considère que  $Z_1$  correspond à un circuit résonant du filtre, et que, d'autre part, cette capacité parasite aura tendance à empêcher la transmission d'un signal haute fréquence.

### 8.2.15 Filtres à temps continu

En dehors des filtres numériques, qui nécessitent l'emploi de convertisseurs A/D et D/A pour les relier au monde analogique, les deux types de filtres les plus souvent employés en conception de circuits intégrés sont les filtres à capacités commutées (*switched capacitors filters*) et les filtres à temps continu (*continuous-time filters*). Il est donc intéressant de les comparer.

Par définition, un *filtre à temps continu* est un filtre électrique analogique non échantillonné. Contrairement aux filtres à capacités commutées, les filtres à temps continu n'imposent pas l'emploi d'un filtre de garde et d'un filtre de lissage pour respecter les contraintes dues au théorème d'échantillonnage. Il est à noter que ces filtres de garde et de lissage sont par définition des filtres à temps continu.

La principale difficulté pour réaliser des filtres à temps continu est de concevoir un système qui permette d'asservir automatiquement les caractéristiques du filtre (fréquence centrale, sélectivité, facteur de qualité, etc.) face aux tolérances sur les paramètres technologiques, à l'effet de la température et au vieillissement du circuit. Par exemple, la valeur absolue d'une capacité peut facilement varier de  $\pm 20\%$  du fait de la variation des paramètres technologiques. Ce problème est beaucoup moins aigu pour les filtres à capacités commutées, qui sont sensibles à la variation du rapport des capacités et non à la valeur absolue de ces éléments. On estime que ce rapport peut être contrôlé à  $0,2\%$  en respectant des règles de symétrie au niveau du layout. Dans le cadre des filtres à temps continu, le système d'asservissement automatique est réalisé à l'aide d'une boucle à verrouillage de phase (*Phase Locked Loop* : PLL).

En ce qui concerne les limitations en fréquence, les filtres à temps continu sont beaucoup mieux adaptés au domaine des très hautes fréquences [31] (jusqu'à 100 MHz) que ceux à capacités commutées dont l'emploi est limité à 500 KHz. Cette restriction vient du fait que les filtres à capacités commutées sont des systèmes échantillonnés. Ceci entraîne qu'il faut laisser le temps aux capacités d'atteindre leur charge d'équilibre. En effet, cette opération n'est pas immédiate car la résistance des interrupteurs considérés en position fermée est typiquement de l'ordre de 5 à 10  $K\Omega$ .

La technologie CMOS (*Complementary Metal Oxide Semiconductor*) est généralement utilisée pour la réalisation des filtres à capacités commutées et des filtres à temps continu. A l'origine, cette technologie avait été élaborée dans le cadre des circuits numériques à faible consommation. Elle est actuellement la technologie la plus utilisée du fait de la haute densité des composants au  $mm^2$  de silicium, de son faible coût et du savoir-faire acquis à son sujet. Bien entendu, au prix d'un coût plus élevé, la technologie BICMOS (*Bipolar-CMOS*), qui permet d'allier les avantages des transistors bipolaires à ceux des transistors MOS, peut également être utilisée si nécessaire pour concevoir des filtres à temps continu [33].

Il existe deux grandes familles de filtres à temps continu. La première famille, appelée *filtre MOSFET-C* (*Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor-Capacitor*), est similaire aux filtres RC actifs [33]. Les filtres RC actifs peuvent être intégrés pour des applications basses fréquences à l'aide d'un système qui permette de contrôler les constantes de temps RC du filtre qui peuvent facilement varier de  $\pm 30\%$ . Il n'est pas possible de réaliser une version intégrée des filtres RC-actifs en moyennes ou hautes fréquences, du fait de l'effet des capacités parasites distribuées associées aux résistances intégrées. Cette remarque justifie l'introduction des filtres MOSFET-C pour lesquelles les résistances sont remplacées par des transistors MOS qui fonctionnent en régime de conduction (§ VIII.1.5.8). Les filtres MOSFET-C ne sont utilisés qu'en basses et moyennes fréquences (jusqu'à 100 KHz), du fait de la bande passante limitée des amplificateurs (§ VIII.2.4.3). Des applications typiques sont celles de filtres fonctionnant soit dans la bande des fréquences vocales, soit dans la bande audio [33]. Les filtres MOSFET-C sont également souvent utilisés comme filtre de garde ou de lissage.

La deuxième famille de filtres continus est celle des *filtres  $g_mC$*  (§ 8.2.9) qui peuvent être employés jusqu'à des fréquences de l'ordre de 100 MHz [31, 33]. Ils sont donc particulièrement bien adaptés au domaine des hautes fréquences comme celui des bandes de fréquences vidéo ou des radiofréquences.

Le lecteur intéressé par les filtres  $g_mC$  ou MOSFET-C trouvera un recueil des principaux articles publiés jusqu'en 1992 par l'IEEE dans le livre de Tsvividis et Voorman

[33]. Pour notre part, nous allons expliquer comment réaliser les filtres  $g_m C$  en vue de leur utilisation possible en très hautes fréquences.

### 8.2.16 Méthode pour réaliser des filtres à temps continu $g_m C$

La méthode proposée pour réaliser un filtre  $g_m C$  sous forme intégrée consiste à remplacer les impédances passives des branches d'un filtre non dissipatif en échelle par des bipôles équivalents formés de gyrateurs et de capacités [31, 32, 34]. Du fait du fonctionnement de ces filtres à hautes fréquences, les capacités parasites aux accès des gyrateurs doivent apparaître en parallèle avec les capacités fonctionnelles du filtre après substitution des impédances passives.

On montrera comment réaliser le gyrateur à l'aide de deux amplificateurs OTA bouclés entre eux. Le générateur de tension sinusoïdale, formé de la mise en série de la source de tension idéale  $E$  et de la résistance  $R_1$ , sera remplacé par le bipôle équivalent de Norton constitué de la mise en parallèle de  $R_1$  et de la source de courant idéale  $E/R_1$ . Les résistances de terminaison et la source de courant idéale seront remplacées par des amplificateurs OTA.

### 8.2.17 Amplificateur OTA à transconductance

En hautes fréquences, les amplificateurs OTA utilisés sont tels que la valeur moyenne des potentiels  $v_1(t)$  et  $v_1'(t)$  ( $v_2(t)$  et  $v_2'(t)$ ) des deux bornes d'entrée 1 et 1' (de sortie 2 et 2') soit constante. Cette valeur moyenne est appelée la *tension de mode commun d'entrée (de sortie)*. Un circuit de contre-réaction, appelé *circuit de contre-réaction de mode commun (common mode feedback circuit)*, garantit que cette valeur demeure constante au cours du temps [31, 32, 34]. Cette contrainte est nécessaire afin de diminuer l'effet des capacités parasites présentes entre l'entrée et la sortie de l'amplificateur OTA, d'obtenir une bonne linéarité de la caractéristique tension-courant de l'OTA et de maximiser la réjection de perturbations sur les tensions d'alimentation. Cette réjection est appelée *Power Supply Rejection (PSR)* dans le monde anglo-saxon. Ces perturbations sont générées par l'interaction entre les parties numériques et analogiques du circuit due aux interrupteurs et aux signaux d'horloge. Dans le cas d'un filtre  $g_m C$ , la boucle à verrouillage de phase, employée pour asservir les caractéristiques du filtre face aux variations des composants, comporte une partie numérique.

L'amplificateur OTA (fig. 8.36) utilisé en hautes fréquences doit donc être un biporte dont les accès sont flottants, puisque la moyenne des potentiels des deux bornes d'entrée (de sortie) doit rester constante au cours du temps. Par définition, le courant  $I_{OUT}$  sort de la borne positive de sortie de ce biporte. Il est égal à

$$I_{OUT} = g_m U_1 \quad (8.21)$$

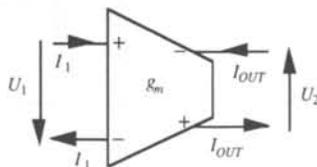


Fig. 8.36

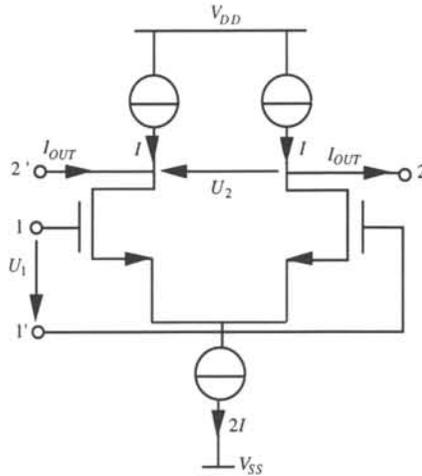


Fig. 8.37

La transconductance  $g_m$  est constante, le courant d'entrée  $I_1$  est nul et les impédances d'entrée et de sortie sont infinies dans le cas idéal pour lequel les éléments parasites ne sont pas pris en compte. Une réalisation possible de l'amplificateur OTA en technologie CMOS est proposée à la figure 8.37. Les deux transistors NMOS de la paire différentielle fonctionnent en régime de saturation (§ VIII.1.5.8).

Il est également possible d'obtenir des amplificateurs à transconductance non flottants, en considérant que la borne négative ou positive de sortie de l'amplificateur est connectée à la terre. Ces types d'amplificateurs peuvent être utilisés en basses et moyennes fréquences.

En hautes fréquences, il est nécessaire de considérer le cas non idéal pour tenir compte des éléments parasites. Un modèle linéaire plus compliqué de l'OTA (fig. 8.38), qui tient compte des capacités parasites, de la conductance de sortie et de la pulsation de coupure parasite interne  $\omega_0$ , est alors utilisé [31, 34]. Ce modèle est obtenu à partir de celui du transistor MOS (§ VIII.1.5.11). La capacité parasite  $C_M$  entre l'entrée et la sortie est appelée *capacité Miller*. Le facteur multiplicatif  $g$  de la source de courant commandée est

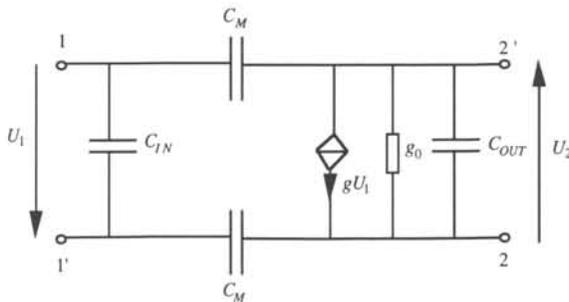


Fig. 8.38

égal à

$$g(j\omega) = \frac{g_m}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}} \quad (8.22)$$

Dans la pratique, les capacités parasites sont de l'ordre de 0,05 pF, la résistance de sortie  $1/g_0$  est comprise entre 50 K $\Omega$  et 1 M $\Omega$ , la fréquence de coupure  $\omega_0/2\pi$  est de l'ordre de 50 MHz à quelques centaines de MHz et la transconductance  $g_m$  est comprise entre quelques dizaines à quelques centaines de  $\mu$ S dans le cas de la technologie CMOS [34]. Ce modèle linéaire, qui permettra de modéliser le gyrateur, est employé par des logiciels de simulation de circuits tels que Spice ou Smash.

### 8.2.18 Réalisation du gyrateur par des amplificateurs OTA

On rappelle que la matrice d'impédance à circuit ouvert d'un gyrateur de résistance de gyration  $r$  est définie par la relation (8.8). Le courant d'entrée (de sortie) est de signe opposé (du même signe) à (que) la tension de sortie (d'entrée). Cette convention de signe est choisie car elle correspond à celle employée dans le paragraphe 1.1.15 du volume IV du Traité d'Electricité. Dans les articles cités en référence relatifs aux filtres  $g_m C$ , le lecteur attentif remarquera que la convention inverse est souvent utilisée dans le monde anglo-saxon.

En première approximation, si l'on ne tient pas compte des éléments parasites des amplificateurs OTA, la relation (8.21) implique que la matrice d'impédance à circuit ouvert du biporte de la figure 8.39 est égale à

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{g_{m2}} \\ \frac{-1}{g_{m1}} & 0 \end{pmatrix} \quad (8.23)$$

Les relations (8.8) et (8.23) sont identiques si

$$r = \frac{1}{g_{m1}} = \frac{1}{g_{m2}} \quad (8.24)$$

Un gyrateur de résistance de gyration  $r$  peut donc être synthétisé par deux amplificateurs OTA, bouclés entre eux, de transconductance égale à  $1/r$ . Cette réalisation est employée dans le cas des filtres continus  $g_m C$ .

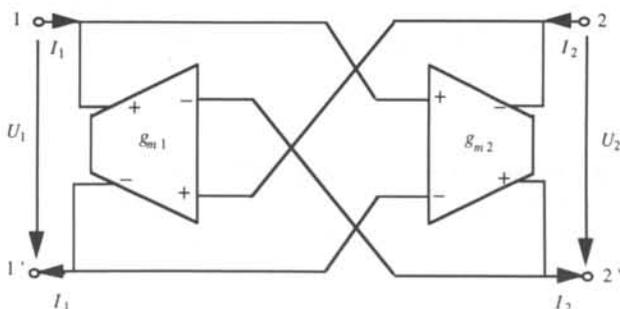


Fig. 8.39

D'après (8.23), on remarque que la conductance  $g_{m1}$  de la sortie à l'entrée du biporte de la figure 8.39 peut être différente de la conductance  $g_{m2}$  de l'entrée à la sortie de ce même biporte. Ce biporte est alors équivalent à un gyrateur et à une source de courant commandée en tension (fig. 8.40) tels que

$$r = \frac{1}{g_{m1}} \quad g = g_{m2} - g_{m1} \quad (8.25)$$

Le biporte de la figure 8.40 n'est plus non énergétique (§ IV.1.3.6) si  $g_{m1}$  est différent de  $g_{m2}$ . Il peut alors violer la règle de non-dissipativité s'il est connecté n'importe comment, comme c'est le cas si sa sortie est refermée sur une résistance. En revanche, cette règle est respectée si la sortie du biporte de la figure 8.40 est refermée sur une capacité  $C$ . Dans ce cas, l'impédance équivalente vue depuis l'entrée de ce biporte correspond à celle d'une inductance  $L$  de valeur égale à

$$L = \frac{C}{g_{m1} g_{m2}} \quad (8.26)$$

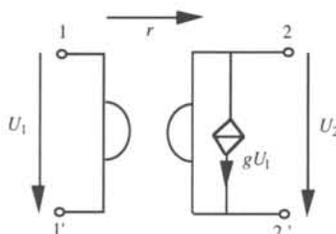


Fig. 8.40

Le facteur de liberté supplémentaire donnée par le fait que  $g_{m1}$  peut être différent de  $g_{m2}$  pourra être alors utilisé pour égaliser les niveaux des tensions maximales dans le filtre avec celui du signal d'entrée afin d'éviter des phénomènes de surtension. Le lecteur intéressé par ce point pourra consulter [31, 32, 34].

### 8.2.19 Modèle linéaire du gyrateur réalisé par des amplificateurs OTA

Le modèle linéaire du gyrateur réalisé par deux amplificateurs OTA est obtenu en remplaçant chaque amplificateur de la figure 8.39 par le modèle représenté à la figure 8.38. Ce modèle permet également de comprendre pourquoi l'emploi d'amplificateurs flottants en hautes fréquences permet de minimiser l'effet des capacités parasites Miller  $C_M$  si les tensions alternatives aux deux bornes d'entrée (de sortie) du gyrateur sont en opposition de phase [31, 32, 34].

### 8.2.20 Source de tension appliquée à l'entrée du filtre $g_m C$

Dans le cas d'un filtre  $g_m C$  utilisé en hautes fréquences, la source de tension sinusoïdale  $e(t)$  appliquée à l'entrée du filtre (fig. 2.17) doit être telle que les potentiels sinusoïdaux des deux bornes d'entrée 1 et 1' soient en opposition de phase. Cette contrainte est nécessaire pour que le filtre travaille de manière flottante. La source de tension  $e(t)$  et la résistance  $R_1$  peuvent alors être modélisées comme cela est indiqué à la figure 8.41.

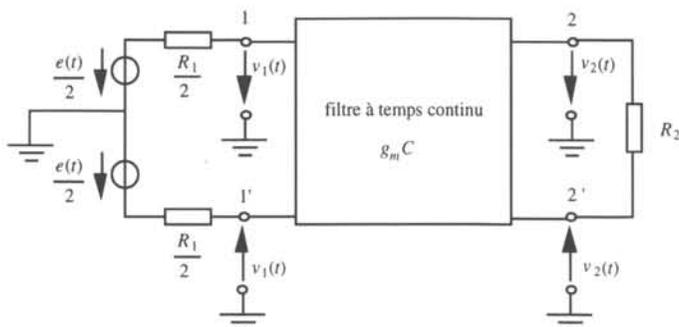


Fig. 8.41

De plus, on peut montrer que ce filtre doit être un quadripôle équilibré afin de minimiser l'effet des capacités parasites Miller et celui des perturbations sur les tensions d'alimentation [31, 32, 34]. On rappelle qu'un quadripôle qui fonctionne en biorte est *équilibré* si la permutation simultanée des deux bornes de chaque accès entre elles ne modifie pas ce quadripôle; c'est-à-dire que son axe de symétrie est horizontal (§ IV.6.2.1). Cette contrainte entraîne que les potentiels sinusoïdaux des deux bornes de sortie 2 et 2' sont également en opposition de phase (fig. 8.41).

### 8.2.21 Génération de quadripôles équilibrés

La première étape consiste à employer les biportes équivalents des paragraphes 8.2.9 à 8.2.13 afin d'obtenir des quadripôles formés de capacités et de gyrateurs. Ces règles de transformation permettent d'associer une capacité fonctionnelle du filtre à chaque capacité parasite. La deuxième étape revient à remplacer chaque gyrateur réalisé, pour ces biportes équivalents, sous forme d'un tripôle avec la borne commune à la masse, par un gyrateur à accès flottants. Le but est atteint si le quadripôle obtenu après ces deux étapes est équilibré. Dans le cas contraire, on revient au filtre obtenu après la première étape puis on prend son image par rapport à l'axe horizontal pour obtenir un quadripôle équilibré [31, 32, 34].

Deux biportes équivalents, obtenus en suivant cette méthode, sont représentés aux figures 8.42 et 8.43, à la figure 8.44, aux figures 8.45 et 8.46, et à la figure 8.47 [31]. La

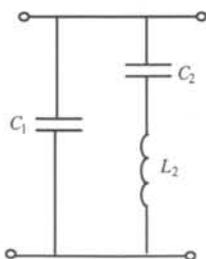


Fig. 8.42

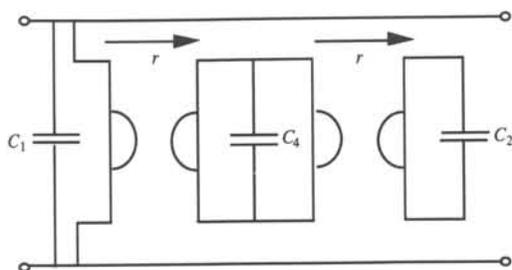


Fig. 8.43

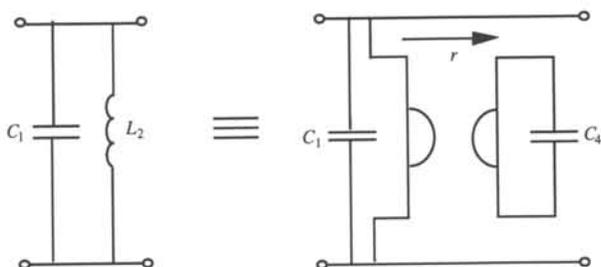


Fig. 8.44

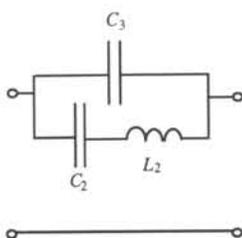


Fig. 8.45

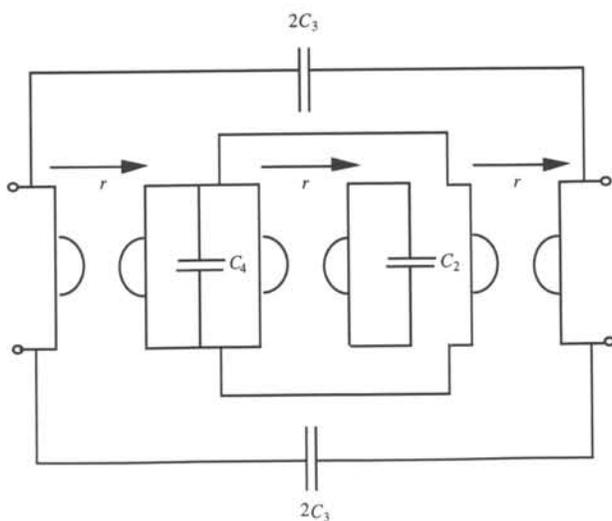


Fig. 8.46

valeur de la capacité  $C_3$  (fig. 8.45 à 8.47) doit être multipliée par 2 dans le cas du bipôle équivalent [31, 32]. Pour toutes ces figures, la capacité  $C_4$  est égale à

$$C_4 = \frac{L_2}{r^2} \quad (8.27)$$

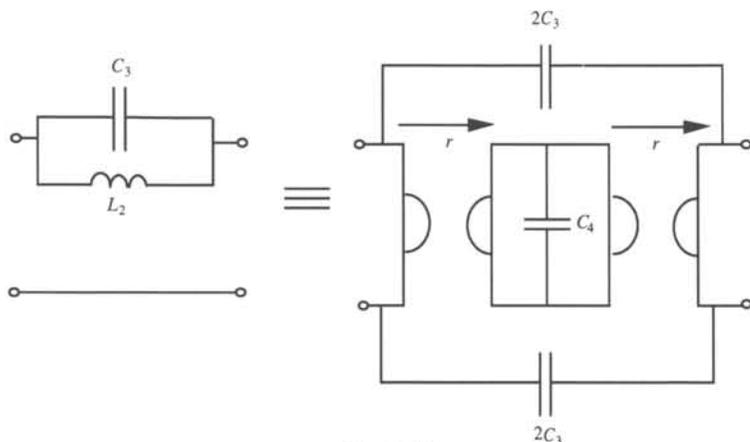


Fig. 8.47

### 8.2.22 Résistance positive ou négative

D'après la relation (8.21), valable en négligeant l'effet des éléments parasites (cas idéal), une résistance positive (négative)  $R$  ( $-R$ ) peut être réalisée par un amplificateur OTA connecté suivant le schéma de gauche (droite) de la figure 8.48 si sa transconductance est égale à

$$g_m = \frac{1}{R} \quad (8.28)$$

Les deux résistances de terminaison du filtre pourront être remplacées de cette manière par deux amplificateurs OTA.

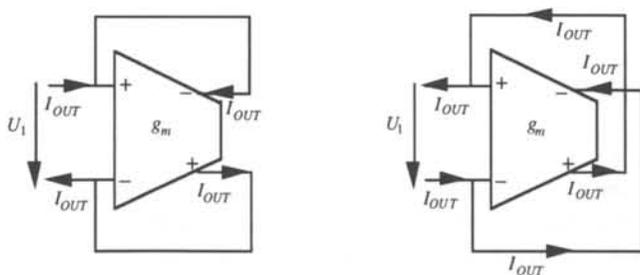


Fig. 8.48

### 8.2.23 Bipôle équivalent de Thévenin-Norton

Le générateur de tension sinusoïdale, formé de la mise en série de la source de tension idéale  $E$  et de la résistance  $R_1$ , est remplacé par le bipôle équivalent de Norton constitué de la mise en parallèle de  $R_1$  et de la source de courant idéale  $E/R_1$ . Le bipôle

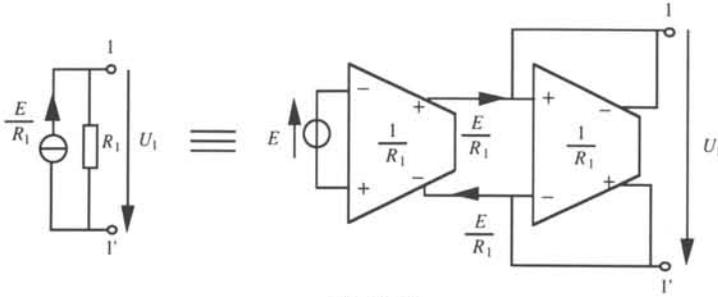


Fig. 8.49

équivalent de Norton (fig. 8.49) peut être remplacé par deux amplificateurs OTA de transconductance  $g_m$  égale à  $1/R_1$  si l'on néglige, en première approximation, l'effet des éléments parasites (cas idéal).

### 8.2.24 Système d'asservissement du filtre $g_m C$

Les filtres  $g_m C$  sont sensibles à la valeur absolue des éléments qui peuvent facilement varier de  $\pm 20\%$ . Il est donc nécessaire d'employer un système d'asservissement des valeurs des éléments du filtre afin de pouvoir contrôler la caractéristique de filtrage du filtre face aux variations des éléments. On rappelle que les inductances ainsi que les circuits résonants et antirésonants sont remplacés par des gyrateurs et des capacités. Il suffit donc d'ajuster les valeurs des résistances de gyration  $r$  des gyrateurs pour contrôler la réponse en fréquence du filtre par l'intermédiaire des constantes de temps  $rC$  du filtre. Le système d'asservissement des résistances de gyration sera réalisé par une boucle à verrouillage de phase. Il existe deux possibilités pour réaliser ce système d'asservissement [31, 32, 33, 34].

La première solution (fig. 8.50) est telle que la boucle à verrouillage de phase soit constituée d'un filtre, appelé *filtre auxiliaire*, qui correspond à la duplication d'une des cellules de base du filtre continu, d'un comparateur de phase et d'un filtre passe-bas. Le filtre auxiliaire servira de *circuit de référence*. Le filtre continu  $g_m C$  est appelé *filtre principal*. Un signal de référence, généré par un oscillateur à quartz, est appliqué à l'entrée du filtre auxiliaire. Le comparateur de phase compare les phases du signal de référence et du signal de sortie du filtre auxiliaire. Le signal de sortie du comparateur de phase est appliqué à l'entrée d'un filtre passe-bas qui joue le rôle d'intégrateur. Le signal de sortie de ce filtre correspond à la tension de contrôle  $U_c$ . Cette tension est appliquée au filtre auxiliaire et au filtre principal. La tension  $U_c$  est ajustée jusqu'à ce que la différence de phase entre le signal de référence et le signal de sortie du filtre auxiliaire soit égale à une valeur de consigne. Par cette méthode, la tension de contrôle permet d'ajuster les valeurs des résistances de gyration pour contrôler la caractéristique de filtrage du filtre auxiliaire. La valeur du rapport de deux capacités (résistances de gyration) identiques réalisées sur la même plaquette de silicium peut être contrôlée à  $0,2\%$  ( $1\%$ ) en respectant des règles de symétrie au niveau du layout. Ce bon degré de similitude permet d'appliquer la même tension  $U_c$  au filtre principal pour contrôler la caractéristique de filtrage du filtre principal par l'intermédiaire de ses résistances de gyration.

La seconde solution (fig. 8.51) est telle que la boucle à verrouillage de phase contienne un oscillateur qui servira de circuit de référence. Cet oscillateur est formé des

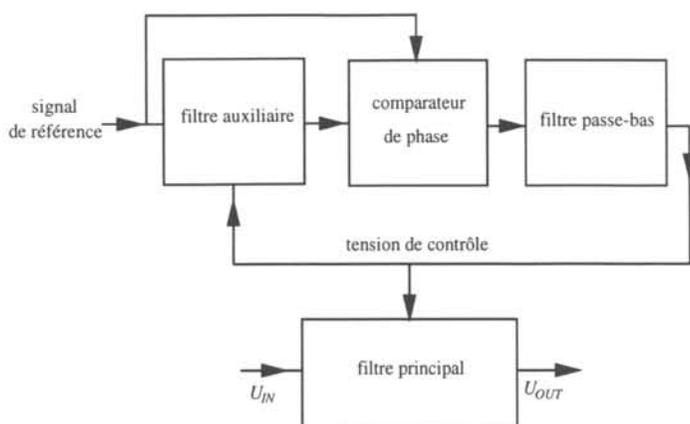


Fig. 8.50

mêmes cellules de base (capacité, amplificateur OTA) que le filtre principal. Le comparateur de phase compare maintenant les fréquences du signal de référence et du signal de sortie de l'oscillateur. La tension de contrôle  $U_c$  est ajustée jusqu'à ce que la fréquence de ces deux signaux soit identique; c'est-à-dire jusqu'à ce que le déphasage entre ces deux signaux reste constant au cours du temps. Cette tension  $U_c$  permet de contrôler les réponses en fréquence de l'oscillateur et du filtre principal par la même méthode que celle employée pour la première solution.

Pour ces deux solutions, le circuit de référence ne reproduit qu'une partie des cellules de base du filtre principal en vue de consommer moins de puissance et d'utiliser moins de surface de silicium. Il faut souligner que la caractéristique de filtrage du filtre principal ne peut pas être directement contrôlée sans avoir recours à un circuit de référence (filtre auxiliaire, oscillateur). En effet, sans circuit de référence, le signal de référence devrait être

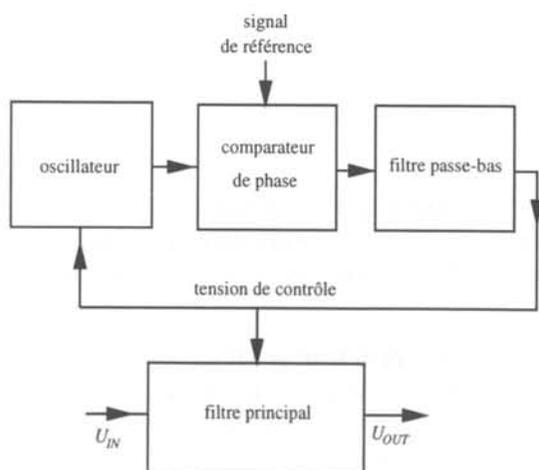


Fig. 8.51

appliqué directement au filtre principal à ajuster. Des interférences seraient alors générées entre le signal d'entrée du filtre principal et le signal de référence. Cette remarque souligne l'intérêt d'utiliser un circuit de référence.

Le lecteur intéressé par plus d'explications sur les boucles à verrouillage de phase pourra consulter les références [31] à [34].

## 8.3 FILTRES AVEC FDNC ET FDNR

### 8.3.1 Transformation d'impédances

Une méthode d'élimination des inductances consiste à diviser toutes les impédances d'un circuit par le facteur sans dimension  $p/\omega_n$ , où  $\omega_n$  est une pulsation constante arbitraire. Ainsi, l'impédance des inductances devient l'impédance de résistances, les résistances des capacités, et les capacités des bipôles d'impédance proportionnelle à  $1/p^2$ , que l'on réalisera moyennant un circuit RC-actif. Les grandeurs sans dimension, comme par exemple une fonction de transfert en tension, restent invariantes.

Cette transformation peut être considérée comme généralisation de la transformation du paragraphe 2.1.24 à des facteurs  $a$  et  $b$  qui dépendent de la fréquence, soit  $a = \omega_n/p$  et  $b = p/\omega_n$ .

De même, la multiplication des impédances par un facteur  $p/\omega_n$  engendre des inductances, des résistances et des bipôles d'impédance proportionnelle à  $p^2$ . Bien que cette seconde transformation engendre des inductances, elle se révélera cependant utile.

### 8.3.2 Définition: FDNC et FDNR

Le *FDNC* (*FDNR*) est un bipôle dont l'impédance est proportionnelle à  $1/p^2$  ( $p^2$ ). Leurs symboles sont représentés à la figure 8.52.

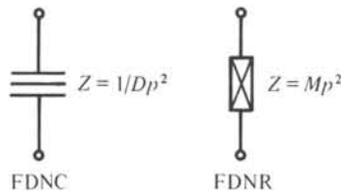


Fig. 8.52

### 8.3.3 Commentaire

Les termes FDNC et FDNR sont des abréviations anglaises de "frequency dependent negative conductance" et "frequency dependent negative resistance". D'autres auteurs emploient les termes *supercapacité* et *superinductance*.

### 8.3.4 Contrainte de réalisation des FDNC et FDNR

La réalisation des FDNC et FDNR par des circuits RC-actifs sera décrite dans la section 9.3. Elle ne nécessite que deux amplificateurs opérationnels si le bipôle a une borne à la terre, et elle en exige jusqu'à quatre pour un bipôle flottant. C'est une situation analogue à celle de la section 8.2 : la simulation d'une inductance contre terre nécessite un gyrateur, tandis que l'inductance flottante en exige deux.

Pour des raisons de consommation de puissance et de coût, on cherchera donc, si possible, à utiliser exclusivement des FDNC et FDNR avec une borne à la terre. Cette contrainte se révélera assez sévère dans le cas des filtres passe-bande.

Si des amplificateurs opérationnels flottants (§ 9.1.3) intégrés existaient, avec une performance, une consommation et un coût comparables aux amplificateurs opérationnels conventionnels, alors la contrainte tomberait, et la synthèse des filtres à FDNC et FDNR serait identique à la synthèse LC.

### 8.3.5 Filtre passe-bas à FDNC

Appliquons la transformation du paragraphe 8.3.1 à un filtre LC passe-bas. Si l'on exclut les FDNC flottants, les capacités du filtre LC d'origine doivent toutes être connectées à la terre. Ce n'est donc pas le filtre LC passe-bas habituel à nombre minimal d'inductances, mais son dual (fig. 8.53) qu'il faut choisir comme filtre de base.



Fig. 8.53

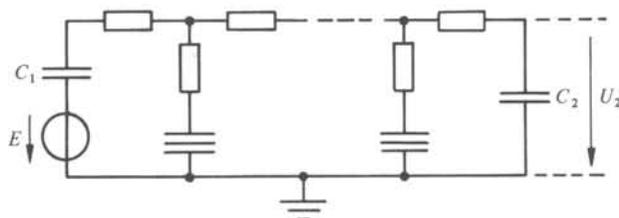


Fig. 8.54

La transformation d'impédances conduit à la structure de la figure 8.54. En utilisant la réalisation des FDNC, décrite au paragraphe 9.3.6, le nombre d'amplificateurs opérationnels nécessaires est, à une unité près, égal au degré du filtre.

Ce filtre RC-actif a rencontré beaucoup de succès grâce à sa faible sensibilité par rapport aux imperfections des éléments passifs et actifs. La sensibilité passive sera discutée qualitativement au paragraphe 8.3.8. Un traitement quantitatif des sensibilités actives et passives sera donné au paragraphe 9.7.12.

### 8.3.6 Commentaire

On constate que les terminaisons sont devenues des capacités. De ce fait, elles ne peuvent plus représenter, comme c'est le cas des terminaisons résistives d'un filtre LC, la chaîne de transmission des deux côtés du filtre, mais elles deviennent partie intégrante du filtre lui-même. Le filtrage s'opère alors sur la fonction de transfert en

tension à sortie ouverte,  $T = U_2/E$ , qu'on obtient, par (1.1), à partir de la transmittance  $s_{21}$  du filtre LC par  $s_{21} = 2T\sqrt{C_2/C_1}$ . Ce type de filtre ne peut donc fonctionner correctement, dans une chaîne de transmission, que s'il est inséré entre une source de tension idéale et un circuit ouvert. Si l'environnement du filtre n'assure pas, par lui-même, cette situation, on peut y arriver en insérant un (ou deux) suiveur(s) de tension (fig. 9.4).

L'affaiblissement de  $T$  s'obtient donc à partir de l'affaiblissement de  $s_{21}$ , en ajoutant la quantité constante  $10 \log(4C_2/C_1)$  dB. Elle peut être compensée en remplaçant les suiveurs de tensions par des amplificateurs de tension selon la figure 9.3. La même remarque s'applique à tous les filtres de cette section.

Un désavantage de ce filtre doit être mentionné : il n'y a pas de chemin pour le courant de polarisation continu, nécessaire pour les amplificateurs opérationnels des FDNC. Plusieurs remèdes ont été proposés [28]. Nous n'en parlerons pas davantage.

### 8.3.7 Exemple

On propose de transformer le filtre LC passe-bas de la figure 6.24, pour obtenir un filtre FDNC. Pour cela, on prendra successivement le dual du filtre de la figure 6.24 avec une constante dimensionnelle  $R_e = 1\Omega$ , puis on divisera chaque impédance par le facteur  $p/\omega_n$ , avec  $\omega_n = 6 \cdot 10^{10}$  rad/s. Ce facteur  $\omega_n$  a été choisi tel que les valeurs obtenues pour les éléments conviennent à une réalisation. Le filtre FDNC, ainsi obtenu, est représenté à la figure 8.55. L'affaiblissement de sa fonction de transfert en tension est celui de la figure 1.2, augmenté de 6,02 dB.

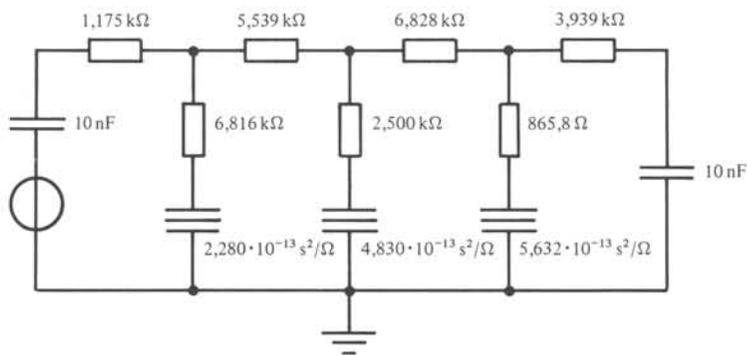


Fig. 8.55

### 8.3.8 Puissance réactive et sensibilité

Au paragraphe 1.1.15, on a démontré que toutes les sensibilités par rapport aux valeurs des éléments d'un filtre non dissipatif sont nulles aux zéros d'affaiblissement. Cette propriété découle du fait que la puissance active transmise de la source vers la charge présente, à ces fréquences, un maximum. Elle explique, de façon plus générale, la faible sensibilité des filtres non dissipatifs, dans toute la bande passante.

Il est clair qu'un tel argument ne s'applique en général plus aux filtres actifs. Mais il est possible de l'adapter aux filtres à FDNC et FDNR et, en général, aux filtres RC-actifs qui simulent des filtres LC (filtres avec gyrateurs, filtres LF).

Complétons la transformation d'impédances du paragraphe 8.3.1 par une transformation de courants et tensions, en gardant les tensions invariantes et en multipliant les courants par  $p/\omega_n$ . La puissance active absorbée par une branche du circuit original vaut  $\text{Re}(IU^*)$ . La puissance réactive du circuit transformé où  $\tilde{I} = j\omega I/\omega_n$ , vaut  $\text{Im}(\tilde{I}U^*) = \omega \text{Re}(IU^*)/\omega_n$ . Comme la puissance active, fournie à la charge résistive d'un filtre LC, est bornée par une constante  $K$ , la puissance réactive, fournie à la charge capacitive, est bornée par  $K\omega/\omega_n$  dans le filtre RC-actif issu de la transformation d'impédances. Par conséquent, aux fréquences où cette borne est atteinte, toutes les sensibilités par rapport aux valeurs des éléments passifs du filtre RC-actif sont également nulles, *pour autant que des éléments imprécis n'engendrent pas de réactances parasites sur les FDNC, mais modifient seulement leurs valeurs*. Cette dernière condition est satisfaite pour la réalisation des FDNC, décrite à la section 9.3. La faible sensibilité des filtres à FDNC est donc une conséquence de la faible sensibilité des filtres LC, combinés avec une réalisation adaptée des FDNC. Une propriété analogue vaut d'ailleurs pour toutes les structures qui simulent des filtres LC entre terminaisons résistives.

### 8.3.9 Filtre passe-haut à FDNR

La première transformation du paragraphe 8.3.1, appliquée à un filtre passe-haut LC conventionnel, ou à son dual, conduit toujours à des FDNC flottants. Par contre, si l'on multiplie toutes les impédances par  $p/\omega_n$ , au lieu de les diviser, on obtient le filtre de la figure 8.56, qui comporte des FDNR au lieu de FDNC. On constate que les terminaisons sont maintenant des inductances qui doivent être simulées par des circuits RC-actifs (§ 9.3.6).

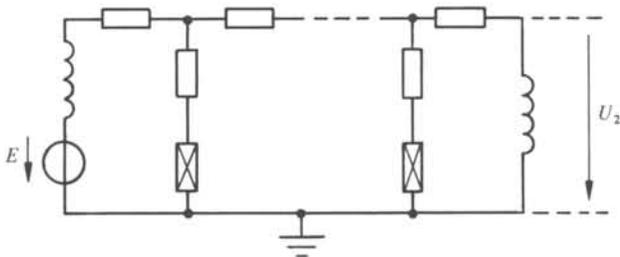


Fig. 8.56

L'utilité pratique de ce filtre passe-haut est compromise par des instabilités causées par les imperfections des amplificateurs opérationnels. Néanmoins, la méthode sera reprise dans une synthèse de passe-bande, décrite au paragraphe 8.3.11.

### 8.3.10 Filtre passe-haut à inductances simulées

La même structure RC-active, qui réalise les FDNC et FDNR, est aussi capable de simuler des inductances (§ 9.3.6). On aboutit d'ailleurs au même circuit qu'avec l'une des réalisations du gyrateur (§ 9.3.8). Le filtre passe-haut peut être réalisé de cette manière sans transformation d'impédances préalable. Les autres types de filtres,

par contre, mènent à des inductances flottantes, ce qui n'est pas souhaitable, pour les mêmes raisons que dans le cas des FDNC et FDNR (§ 8.3.4).

Une raison technologique défavorise la réalisation des filtres RC-actifs à inductances simulées. Comparés aux filtres à FDNC et FDNR, ils nécessitent un nombre plus élevé de capacités. Dans le cas des circuits intégrés hybrides, les capacités sont des éléments coûteux et non réglables.

### 8.3.11 Filtre passe-bande à FDNC et FDNR, avec séparation des cellules passe-bas et passe-haut par un convertisseur d'impédances

On peut considérer un filtre passe-bande comme étant composé de cellules passe-bas et passe-haut. Dans cette optique, on est tenté de combiner la méthode du paragraphe 8.3.5 avec celle du paragraphe 8.3.9. Cependant, deux transformations d'impédances différentes, appliquées à deux parties d'un même filtre, changent forcément sa fonction de réponse.

Si l'on prend soin de réaliser la transition entre les deux parties moyennant un circuit adéquat, la caractéristique du filtre peut être conservée. Le convertisseur d'impédances (sect. 9.3), avec facteur de conversion  $p^2/\omega_n^2$ , remplit exactement cette fonction.

Dans le but d'économiser les amplificateurs opérationnels, on s'efforcera de n'utiliser qu'un seul convertisseur, ce qui implique un groupement des cellules passe-bas et des cellules passe-haut (fig. 8.57). L'expérience en synthèse LC montre que la sensibilité de cette structure n'est pas la meilleure, et qu'il est préférable d'alterner les deux types de cellules.

Néanmoins, compte tenu des désavantages des autres méthodes, ce genre de filtre n'est pas à écarter.

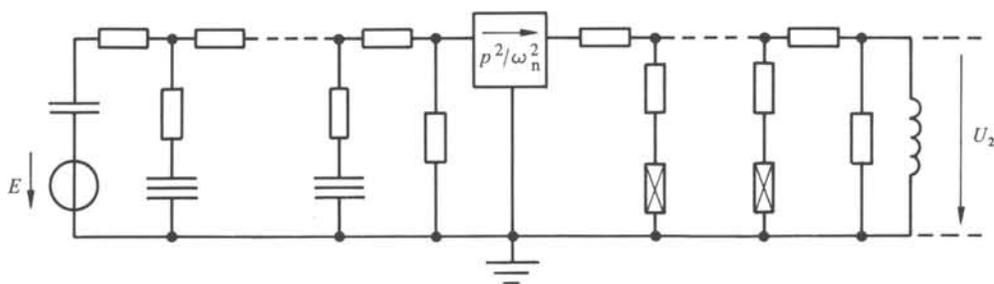


Fig. 8.57

### 8.3.12 Exemple

On propose de synthétiser un filtre passe-bande qui satisfait les exigences de la figure 1.10 par la méthode du paragraphe 8.3.11. Pour cet exemple, le meilleur choix est le même filtre qu'au paragraphe 5.4.15, mais dont l'entrée et la sortie sont permuées. Par conséquent, il appartient à la classe 3.

Les pôles d'affaiblissement, situés dans la bande coupée inférieure (supérieure) sont extraits au moyen de circuits résonants parallèles précédés de capacités (inductances) de translation série.

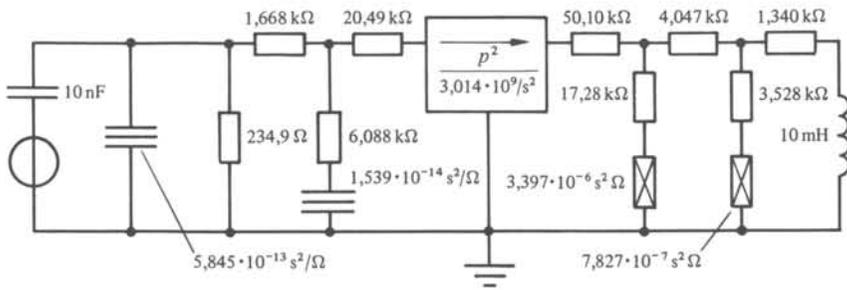


Fig. 8.58

La structure transformée, faisant apparaître des FDNR et FDNC contre terre, est représentée à la figure 8.58. Le facteur de conversion  $p^2/\omega_n^2$  du convertisseur d'impédance a été choisi tel que les valeurs des éléments conviennent à une réalisation. L'affaiblissement de ce filtre est celui de la figure 6.26, augmenté de 11,23 dB. Selon le paragraphe 8.3.6, cet affaiblissement constant peut être compensé par un amplificateur de tension dont on a de toute façon besoin.

### 8.3.13 Commentaire

Sans employer d'amplificateurs opérationnels supplémentaires, on peut, moyennant une simple résistance parallèle, ajouter un pôle d'affaiblissement à l'origine au passe-bas et un pôle d'affaiblissement à l'infini au passe-haut. De cette manière, ils deviennent deux passe-bande avec un seul pôle dans une des bandes coupées. Ce filtre aura le même nombre d'amplificateurs opérationnels que son degré.

Suivant les exigences, cette solution peut être avantageuse. En même temps, elle résout le problème du courant de polarisation du passe-bas. Dans l'exemple du paragraphe 8.3.12, elle a été adoptée du côté passe-bas.

### 8.3.14 Filtre passe-bande FDNC à extraction inverse

D'après le paragraphe 6.1.9, les pôles d'affaiblissement situés au-dessus de la bande passante doivent être réalisés par des circuits antirésonants série, et les pôles en dessous par des circuits résonants parallèle. Sinon, certaines capacités de translation risquent d'être négatives. Cependant, dans une réalisation RC-active, les éléments négatifs ne sont pas nécessairement à exclure, et il est possible d'envisager un filtre passe-bande, dont tous les pôles d'affaiblissement sont réalisés par des circuits antirésonants série. Dans la version duale, cette méthode conduit à la structure du passe-bas à FDNC (§ 8.3.5), avec une résistance parallèle supplémentaire (fig. 8.59).

Il faut donc s'attendre à quelques résistances négatives flottantes dans le circuit de la figure 8.59. Comme dans le cas des FDNC et FDNR, la réalisation des résistances négatives flottantes requiert un nombre d'amplificateurs opérationnels double de celui des résistances contre terre. La transformation de la figure 8.60 permet de remplacer une résistance négative flottante par deux résistances négatives contre terre et un transformateur idéal de rapport  $-1$ . Ce dernier ne change que le signe de la fonction de transfert et, par conséquent, peut être éliminé. A première vue, il semblerait

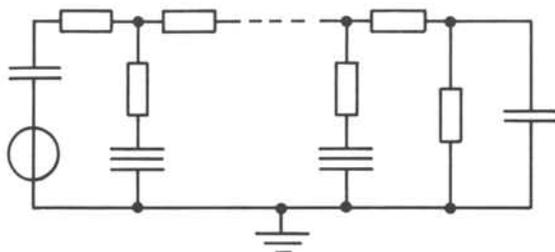


Fig. 8.59

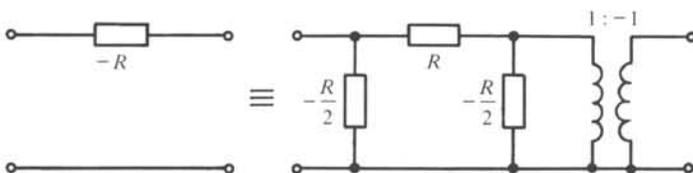


Fig. 8.60

que l'on ne gagne pas, de cette manière, un amplificateur opérationnel. Mais l'on remarque qu'une résistance parallèle peut être déplacée à travers tout le filtre moyennant des transformations de Norton (§ IV.6.2.13). De cette façon, il est possible d'éliminer certaines résistances négatives en les combinant avec des résistances positives parallèles. L'expérience montre que le nombre de résistances négatives contre terre peut ainsi être réduit, à peu près, au nombre de résistances négatives flottantes du départ.

La transformation de Norton peut servir non seulement à la réduction du nombre de résistances négatives, mais aussi à l'optimisation de la sensibilité, de la dynamique et des valeurs d'éléments. Comme dans le cas des filtres passe-bande LC, elle sert par ailleurs à obtenir une terminaison de charge convenable.

### 8.3.15 Filtre à FDNC et FDNR entre terminaisons généralisées

Il est intéressant de généraliser la méthode de la section précédente. En effet, les réalisations de filtres passe-bande et passe-haut ont toutes certains désavantages : soit une structure trop rigide (§ 8.3.11), soit la présence de résistances négatives (§ 8.3.14). De plus, aucune des méthodes exposées jusqu'ici ne permet la synthèse de filtres coupe-bande.

Une généralisation n'a de sens que si elle respecte la propriété fondamentale qui distingue les filtres présentés dans cette section : l'insensibilité par rapport aux valeurs des éléments passifs, aux zéros d'affaiblissement.

Au paragraphe 8.3.8, on a lié cette propriété au transfert maximum de puissance réactive, qui dépend de la structure du biporte non réactif entre terminaisons non dissipatives. Nous allons conserver cette structure, mais des terminaisons réactives plus compliquées seront admises.

Il sera également possible d'établir un lien étroit entre cette classe de filtres et les filtres RC-actifs en connexion "leapfrog" (sect. 9.5).

Comme le cas de terminaisons différentes sera envisagé, la méthode de transformation d'impédances ne suffit plus; la théorie de la matrice de répartition doit être

généralisée aux terminaisons qui sont des fonctions paires de la fréquence et dont les valeurs sont donc réelles sur l'axe imaginaire. Comme elle ne peuvent ni absorber ni développer de la puissance réactive, on les appelle *non réactives*. La division de toutes les impédances par  $p/\omega_n$  permettra, comme auparavant, le passage du biporte non dissipatif entre terminaisons non réactives au biporte non réactif entre terminaisons non dissipatives.

### 8.3.16 Définition : matrice de répartition généralisée

La matrice de répartition  $s$  d'un biporte par rapport à des terminaisons d'impédance  $Z_1$  et  $Z_2$ , fonctions rationnelles paires, est définie par la relation (2.39)

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad (8.29)$$

où les ondes incidentes  $\xi$  et les ondes réfléchies  $\eta$  sont définies par (fig. 8.36)

$$\xi_i = U_i + Z_i I_i, \quad i = 1, 2 \quad (8.30)$$

$$\eta_i = U_i - Z_i I_i, \quad i = 1, 2 \quad (8.31)$$

Remarquons que dans le cas particulier des terminaisons constantes  $Z_i = R_i$ , les définitions (8.30), (8.31) des ondes incidentes et réfléchies, et par conséquent de la matrice de répartition  $s$ , diffèrent de celles du chapitre 2. La raison en sera donnée au paragraphe suivant. Il faut donc faire attention au fait que le symbole  $s$  n'a pas la même fonction dans cette section que dans le restant de ce volume.

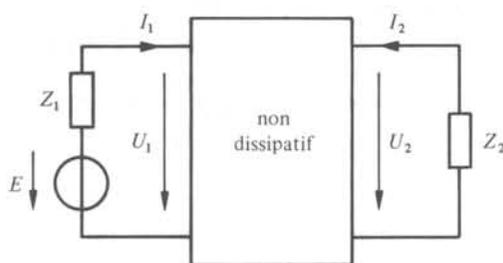


Fig. 8.61

### 8.3.17 Ondes de tension et transfert de puissance active

Les ondes incidentes et réfléchies, définies au paragraphe 8.3.16, ont la dimension d'une tension au lieu de la racine carrée d'une puissance (§ 2.3.1), et ceci pour deux raisons : d'une part, la normalisation par des facteurs  $\sqrt{Z_i}$  créerait des éléments de la matrice de répartition non rationnels; d'autre part, dans l'application aux filtres RC-actifs, la fonction de transfert  $T$  en tension plutôt qu'en puissance est à considérer et, d'après (8.29), (8.30) et (8.31), on a directement

$$T = U_2/E = s_{21}/2 \quad (8.32)$$

Néanmoins, le transfert en puissance est important pour la sensibilité. Les équations

(8.30), (8.31) et la parité des  $Z_i$  impliquent

$$\xi_i \xi_{i*} - \eta_i \eta_{i*} = 2 Z_i (U_{i*} J_i + U_i J_{i*}) \quad (8.33)$$

et par conséquent, la puissance active  $P_i$  fournie au biporte à l'accès  $i$  s'exprime par

$$P_i = (|\xi_i|^2 - |\eta_i|^2)/4 Z_i \quad (8.34)$$

Un biporte placé entre les terminaisons  $Z_1$  et  $Z_2$ , par rapport auxquelles est définie la matrice de répartition, absorbe, à cause de

$$\xi_1 = E, \quad \xi_2 = 0 \quad (8.35)$$

les puissances actives

$$P_1 = (|E|^2 - |\eta_1|^2)/4 Z_1 \quad (8.36)$$

$$P_2 = -|\eta_2|^2/4 Z_2 \quad (8.37)$$

Si le biporte est non dissipatif, alors toute la puissance fournie par la source est absorbée par la charge, c'est-à-dire  $P_2 = -P_1$ , comme d'habitude. Cependant, les terminaisons  $Z_1$  et  $Z_2$  n'étant plus forcément positives,  $P_1$  et  $P_2$  peuvent changer de signe, suivant la fréquence. Par conséquent, on peut rencontrer la situation bizarre où la source absorbe de la puissance fournie par la charge.

Il y a donc quatre combinaisons de signes à distinguer :

- dans le cas habituel, où  $Z_1$  et  $Z_2$  sont positives, la source de tension fournit de la puissance active dont une partie est absorbée par la charge et le restant par la terminaison de source. La puissance que peut fournir la source à la charge est limitée, d'après (8.36), par  $|E|^2/4 Z_1$  ;
- aux fréquences où  $Z_1$  et  $Z_2$  sont négatives, tant la charge que la terminaison de source développent de la puissance active qui doit être absorbée par la source de tension, pour respecter le théorème de Tellegen. D'après (8.36), la puissance, qui peut être fournie par la charge à la source, est limitée à  $|E|^2/4|Z_1|$  ;
- aux fréquences où  $Z_1 < 0$  et  $Z_2 > 0$ , la charge dissipe la puissance développée par la source. Cette puissance est développée, en partie par la terminaison de source et le restant, positif ou négatif, par la source de tension elle-même ;
- aux fréquences où  $Z_1 > 0$  et  $Z_2 < 0$ , la source dissipe la puissance développée par la charge. Une partie est dissipée par la terminaison de source, le restant, positif ou négatif, par la source de tension.

Le rapport  $P_{21}$  entre la puissance absorbée (fournie) par la charge et la puissance maximale que peut fournir (absorber) la source, peut être exprimé d'après (8.32) sous la forme

$$P_{21} = |T|^2 4 Z_1/Z_2 = |s_{21}|^2 Z_1/Z_2 \quad (8.38)$$

D'après sa définition

$$P_{21} \leq 1 \quad (8.39)$$

mais  $P_{21}$  peut prendre des valeurs négatives, sans aucune borne inférieure, dans le cas où  $Z_1$  et  $Z_2$  sont de signe différent.

D'après les équations (8.38) et (8.32), le coefficient de transfert de puissance et le module au carré du coefficient de transfert de tension sont liés par le facteur de proportionnalité  $4 Z_1/Z_2$ . La dépendance de  $4 Z_1/Z_2$  par rapport à la fréquence sera à l'origine d'un dilemme pour la synthèse (§ 8.3.20).

La condition de non dissipativité  $P_1 + P_2 = 0$ , exprimée à partir de (8.34), conduit à la caractérisation de la matrice de répartition de façon analogue à celle de la section 2.3. Elle sera donnée sans démonstration.

### 8.3.18 Caractérisation de la matrice de répartition d'un biorte non dissipatif entre terminaisons non réactives

La matrice de répartition d'un biorte non dissipatif réciproque stable pour les ondes de tension, définie par rapport à des terminaisons  $Z_1$  et  $Z_2$ , fonctions rationnelles paires, s'écrit sous la forme générale

$$s = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} h & fN/D \\ f & \mp h_* \end{pmatrix} \quad (8.40)$$

où les polynômes  $f, g, h, N, D$  satisfont aux conditions suivantes :

- $N/D$  est une forme irréductible de  $Z_1/Z_2$ ;
- $f$  est pair ou impair;
- $D$  divise  $f$ ;
- $gg_* = hh_* + \frac{N}{D} ff_*$ ;
- $g$  est strictement hurwitzien.

### 8.3.19 Commentaire

La troisième condition implique que les pôles de  $Z_1$ , ainsi que les zéros de  $Z_2$ , sont des zéros de transmission, sauf s'ils se simplifient dans  $Z_1/Z_2$ . On pourra donc attribuer les pôles d'affaiblissement, soit aux terminaisons, soit au biorte, soit aux deux ensemble (§ 8.3.29).

Comme  $s_{21}$  et  $s_{12}$  ne sont pas égaux, la fonction de transfert en tension de l'accès 1 vers l'accès 2 est en général différente de la fonction de transfert en direction opposée. Ce sont les pôles d'affaiblissement liés aux terminaisons qui changent.

### 8.3.20 Transfert maximum de puissance active, sensibilité nulle et transfert maximum de tension

En combinant (8.32), (8.38) et (8.39), on obtient aux fréquences, où  $Z_1/Z_2 > 0$ , la borne suivante

$$\frac{|s_{21}|^2}{4} = |T|^2 \leq Z_2/4Z_1 \quad (8.42)$$

Aux fréquences où (8.42) est une égalité, le transfert de puissance, de la source vers la charge, ou vice versa, est maximum. Ces fréquences sont, d'après (8.40) et (8.41), des zéros de  $h$ . Par le même raisonnement qu'au paragraphe 1.1.15, toutes les sensibilités de  $|s_{21}|$ , et donc de  $|T|$ , par rapport aux valeurs des éléments qui constituent le bi-

porte, s'annulent aux fréquences pour lesquelles le transfert de puissance est maximum. Pour avoir une faible sensibilité en bande passante, il faut placer autant que possible de zéros de  $h$  sur l'axe imaginaire.

Notons que  $h = 0$  n'est possible que si  $Z_1/Z_2 > 0$ ; la bande passante d'un filtre avec terminaisons d'impédance  $Z_1$  et  $Z_2$  se situera donc dans l'un des intervalles où  $Z_1/Z_2 > 0$ .

Comme la borne supérieure de  $|T|$  dans (8.42) n'est pas une constante, si l'on place tous les zéros de  $h$  sur l'axe imaginaire, les maxima de  $|T|$ , en bande passante, ne sont plus tous égaux. La fonction de transfert en tension est ainsi déformée par  $Z_2/Z_1$ , ce qui va à l'encontre d'une caractéristique optimale en bande passante, à minimum d'ondulation.

Par ailleurs, si l'on choisit une caractéristique conventionnelle, avec maxima égaux en bande passante, alors, par un choix judicieux du rapport des facteurs d'échelle de  $Z_1$  et  $Z_2$ , on arrive à placer un zéro de  $h$  sur l'axe imaginaire, mais en général pas plus. Les autres se trouvent ailleurs dans le plan complexe.

On se trouve donc devant un dilemme : soit l'on crée le nombre maximum de points d'insensibilité, soit l'on satisfait les exigences par une fonction rationnelle de degré minimum et une marge maximale.

Ce choix est d'autant moins important que  $Z_2/Z_1$  varie peu en bande passante. Alors, la première alternative conduit à une caractéristique peu déformée en bande passante, et la seconde à des zéros de  $h$  qui sont proches de l'axe imaginaire. Il est donc important de choisir les terminaisons telles que la fonction  $Z_2/Z_1$  soit approximativement une constante en bande passante.

### 8.3.21 Synthèse de biportes non dissipatifs entre terminaisons non réactives

Étant donné deux terminaisons non réactives d'impédance  $Z_1$  et  $Z_2$  et les trois polynômes  $f, g, h$ , qui constituent la matrice de répartition d'un biporte défini par rapport à ces terminaisons, il s'agit de synthétiser les terminaisons et le biporte.

Les terminaisons ne posent pas de problèmes particuliers si leurs zéros et pôles sont situés sur l'axe imaginaire. Dans ce cas, la division de toutes les impédances par  $p/\omega_n$  transforme  $Z_i$  en fonctions impaires et les rend accessibles à la synthèse de bipôles LC (sect. 2.2), éventuellement avec des éléments négatifs. Comme les pôles de  $Z_1$  et les zéros de  $Z_2$  peuvent réaliser des pôles d'affaiblissement, il est souhaitable que ces fréquences soient situées sur l'axe imaginaire.

On aimerait également ramener la synthèse du biporte aux méthodes développées au chapitre 6. Cependant, les polynômes  $f, g, h$  ne peuvent pas être utilisés directement, puisqu'ils sont définis par rapport à  $Z_1$  et  $Z_2$ . Néanmoins, on peut en déduire les polynômes  $\hat{f}, \hat{g}, \hat{h}$  du même biporte, définis par rapport à des résistances unités.

Dans ce but, il convient d'introduire les polynômes

$$a = \frac{1}{2} [g + h \pm (g + h)_*] \quad (8.43)$$

$$b = \frac{1}{2} [g + h \mp (g + h)_*] \quad (8.44)$$

$$c = \frac{1}{2} [g - h \mp (g - h)_*] \quad (8.45)$$

$$d = \frac{1}{2} [g - h \pm (g - h)_*] \quad (8.46)$$

et de définir les polynômes  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$  par les mêmes expressions, mais avec  $\hat{g}, \hat{h}$  à la place de  $g, h$ .

Puisque dans le cas de terminaisons égales les matrices de répartition pour les ondes de tension et pour les ondes de puissance sont identiques, les formules (2.84) à (2.87) sont valables pour  $\hat{f}, \hat{g}, \hat{h}$ , et on constate que  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$  sont les polynômes numérateurs de la matrice de chaîne. Par contre, pour obtenir les expressions correspondantes avec  $f, g, h$ , il faut remplacer les membres de gauche dans (2.84) à (2.87) par  $A, B/Z_2, Z_1 C$  et  $(Z_1/Z_2)D$ , respectivement. Il s'ensuit que

$$\hat{a}/\hat{f} = a/f \quad (8.47)$$

$$\hat{b}/(\hat{f}N_2) = b/(fD_2) \quad (8.48)$$

$$\hat{c}/(\hat{f}D_1) = c/(fN_1) \quad (8.49)$$

$$\hat{d}/(\hat{f}D_1N_2) = d/(fN_1D_2) \quad (8.50)$$

Les équations (8.47) à (8.50) permettent de déterminer  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}, \hat{f}$  à partir de  $a, b, c, d, f$  qui, moyennant (8.43) à (8.46), sont donnés par  $f, g, h$ . Dans cette opération, il faut tenir compte des facteurs communs entre numérateurs et dénominateurs dans (8.47) à (8.50). C'est le sujet des paragraphes 8.3.23 et 8.3.24.

A partir de  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}, \hat{f}$ , on obtient  $\hat{g}, \hat{h}$ , et la synthèse s'effectue ensuite par les méthodes du chapitre 6, mais en choisissant une structure qui convienne à la réalisation RC-active du circuit obtenu par transformation d'impédances.

### 8.3.22 Commentaires

La matrice de répartition engendrée par  $\hat{f}, \hat{g}$  et  $\hat{h}$  n'est qu'un artifice de calcul; le polynôme  $\hat{g}$  n'est pas forcément hurwitzien, car le biorte, placé entre terminaisons résistives, peut très bien être instable sans qu'il le soit entre terminaisons d'impédances  $Z_1$  et  $Z_2$ .

Néanmoins, l'expérience de la synthèse LC, acquise au chapitre 6, permet d'énumérer les contraintes sur  $\hat{f}, \hat{g}, \hat{h}$  qu'impose une structure de biorte désirée.

### 8.3.23 Pôles d'affaiblissement du biorte avec terminaisons généralisées ou constantes

Pour abrégé, nous désignerons, dans la suite de cette section, par *filtre* le biorte non dissipatif entre terminaisons d'impédances  $Z_1 = N_1/D_1$  et  $Z_2 = N_2/D_2$  (irréductibles) et par *biorte* le biorte entre terminaisons résistives unité.

En comparant les dénominateurs dans (8.47) à (8.50), on constate qu'un pôle d'affaiblissement du filtre, c'est-à-dire un zéro de  $f$ , est ou bien en même temps un pôle d'affaiblissement du biorte, c'est-à-dire un zéro de  $\hat{f}$ , ou bien un pôle de  $Z_1$  ou un zéro de  $Z_2$ . De même, un pôle d'affaiblissement du filtre peut être un zéro de  $Z_1$  ou un pôle de  $Z_2$ . En d'autres mots, les terminaisons peuvent créer des pôles d'affaiblissement pour le filtre et elles peuvent empêcher qu'un pôle d'affaiblissement du biorte soit pôle d'affaiblissement du filtre. A part ces deux possibilités, le filtre et le biorte ont les mêmes pôles d'affaiblissement.

Aux pôles d'affaiblissement qui font intervenir les terminaisons, certains des poly-

nômes parmi  $a, \dots, d, \hat{a}, \dots, \hat{d}$  doivent obligatoirement s'annuler. Le théorème suivant cite les différents cas.

### 8.3.24 Théorème

Les pôles d'affaiblissement du filtre et du biporte ainsi que les zéros et les pôles des terminaisons apparaissent dans une des onze combinaisons du tableau 8.62 ou dans une superposition de certaines d'entre elles. Chaque combinaison, sauf le numéro zéro, entraîne simultanément un zéro appartenant à deux au moins parmi les polynômes  $a, \dots, d, \dots, \hat{a}, \dots, \hat{d}$ . Les zéros obligatoires sont marqués dans le tableau 8.62. Un exemple typique de circuit est également représenté par une figure pour chaque cas.

Par superposition de combinaisons on entend ici la réunion de tous les zéros leur appartenant selon le tableau 8.62, ce qui conduit pour certains polynômes à des zéros de multiplicité supérieure à 1.

Les pôles d'affaiblissement à la fréquence infinie sont inclus dans ce théorème, si l'on remplace les polynômes  $N_i, D_i, f, \hat{f}, a, \dots, \hat{d}$  par les fractions  $N_i/D_i, D_i/N_i, f/g, \hat{f}/\hat{g}, a/g, \dots, \hat{d}/\hat{g}$ .

La démonstration se trouve dans [35].

### 8.3.25 Exemple

On se propose de satisfaire les exigences de passe-bande de la figure 1.10 par un filtre à FDNC/FDNR obtenu par transformation d'impédances d'un filtre LC entre terminaisons  $Z_1 = p^2/(p^2 + \omega_a^2)$  et  $Z_2 = K(p^2 + \omega_r^2)$ .

Les choix suivants de combinaisons du tableau 8.62 ont été adoptés pour les zéros et les pôles de  $Z_1$  et  $Z_2$  :

- cas numéro 2 pour le pôle  $j\omega_a$  de  $Z_1$ , qui devient alors pôle d'affaiblissement du filtre et du biporte. Par conséquent,  $\hat{c}$  et  $\hat{d}$  et donc  $g - \hat{h}$ , ont un zéro en  $j\omega_a$ . C'est un pôle de réflexion à l'entrée du biporte;
- cas numéro 4 pour le zéro  $j\omega_r$  de  $Z_2$ , qui devient aussi pôle d'affaiblissement du filtre et du biporte. Par conséquent,  $\hat{b}$  et  $\hat{d}$  et donc  $g \mp \hat{h}_*$  ont un zéro en  $j\omega_r$ . C'est un pôle de réflexion à la sortie du biporte;
- superposition des cas 5 et 6 pour le zéro double de  $Z_1$  à la fréquence nulle. Le biporte comporte alors un pôle d'affaiblissement en plus du filtre en zéro. On a obligatoirement un zéro de  $c, d$  et de  $\hat{a}, \hat{b}$  et donc de  $g - h$  et  $g + \hat{h}$  à la fréquence nulle.
- superposition des cas 7 et 8 pour le pôle double de  $Z_2$  à l'infini. Ce biporte comporte alors un pôle d'affaiblissement en plus du filtre à l'infini. On a obligatoirement un zéro de  $b/g, d/g$  et de  $\hat{a}/\hat{g}, \hat{c}/\hat{g}$  et donc de  $(g \mp h_*)/g$  et de  $(g \pm h_*)/\hat{g}$  à l'infini.

Les autres pôles d'affaiblissement seront communs au filtre et au biporte et appartiennent au cas 0 du tableau 8.62.

On a choisi une transmittance  $s_{21} = f/g$  sans pôle d'affaiblissement en zéro et à l'infini. Les polynômes suivants sont fournis par un programme qui implémente l'algorithme de Remez. Ils sont normalisés par rapport à 14 kHz.

Tableau 8.62

Cas no	Un zéro commun de				$f$	$\hat{f}$	Doit simultanément être zéro de								Exemple à la figure
	$N_1$	$D_1$	$N_2$	$D_2$			$a$	$b$	$c$	$d$	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{c}$	$\hat{d}$	
0					X	X									8.63, 8.64
1		X			X		X	X							8.65
2		X			X	X						X	X		8.66
3			X		X		X		X						8.67
4			X		X	X						X	X		8.68
5	X							X	X						8.69
6	X					X				X	X				8.70
7				X			X		X						8.71
8				X		X				X		X			8.72
9	X		X						X			X			8.73
10		X		X				X				X	X		8.74

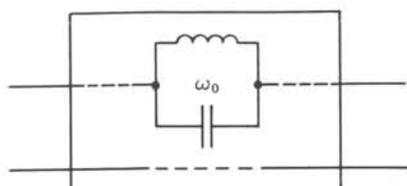


Fig. 8.63

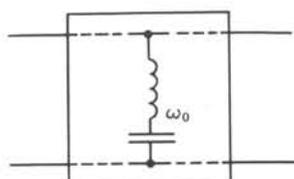


Fig. 8.64

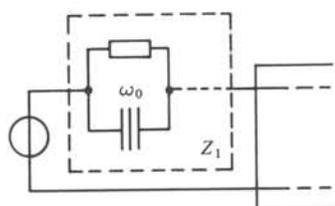


Fig. 8.65

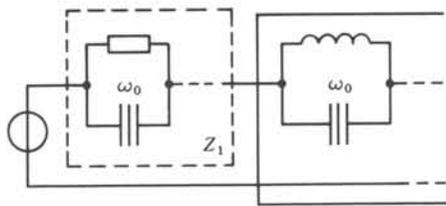


Fig. 8.66

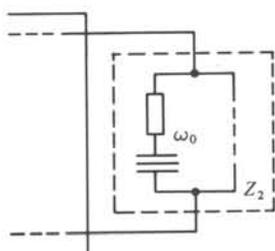


Fig. 8.67

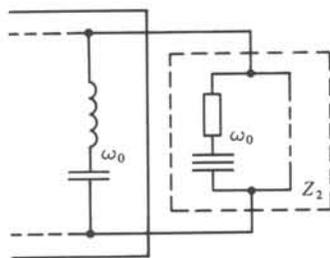


Fig. 8.68

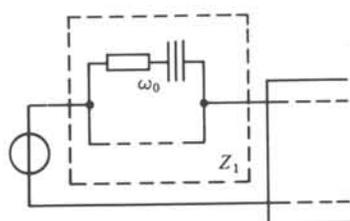


Fig. 8.69

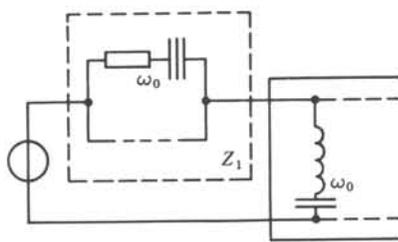


Fig. 8.70

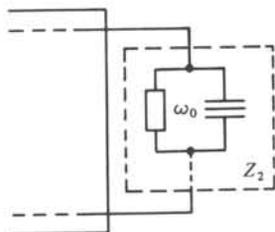


Fig. 8.71

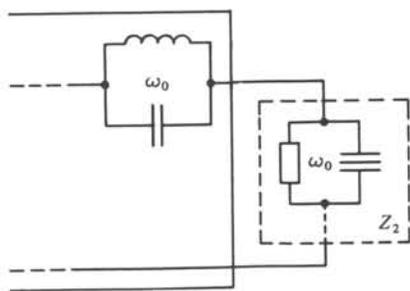


Fig. 8.72

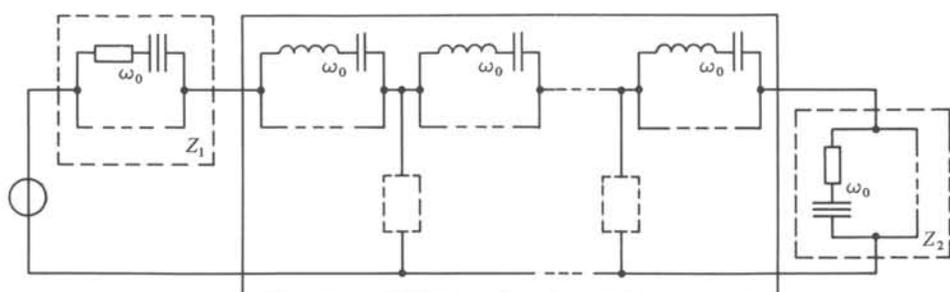


Fig. 8.73

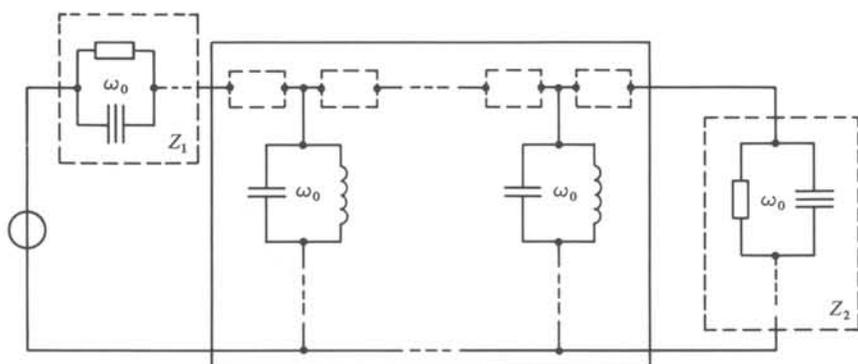


Fig. 8.74

Polynôme  $f$  :

constante : 0,005615189

racines :  $\pm j 0,5228583$

$\pm j 0,7677367$

$\pm j 0,8113517$

$\pm j 1,1689741$

$\pm j 1,9433971$

Polynôme  $g$  :

constante : 1,000015765

racines :  $-0,00936199 \pm j 0,8512074$

$-0,03675151 \pm j 0,8727100$

$-0,07707181 \pm j 0,9422174$

$-0,07166993 \pm j 1,0582541$

$-0,01965709 \pm j 1,1124655$

L'affaiblissement de  $s_{21}$  est représenté à la figure 8.75.

La synthèse commence par les terminaisons. Les pulsations  $j\omega_a$  et  $j\omega_r$  doivent se trouver parmi les racines de  $f$ ; elles sont choisies comme la plus grande et la plus petite racine respectivement, afin de garantir une fonction  $Z_1/Z_2$  aussi constante que

possible en bande passante (§ 8.3.20). Le facteur d'échelle est choisi  $K = -1,914567$ , ce qui engendre, par la relation d'unitarité (8.41), un polynôme  $h$  avec un zéro sur l'axe imaginaire. L'attribution des autres zéros de  $hh_*$  à  $h$  et  $h_*$  est arbitraire, mais la constante de  $h$  doit être positive pour respecter  $(g-h)(0) = 0$  et  $(1 \mp h_*/g)(\infty) = 0$ . Le polynôme  $h$  obtenu est le suivant :

constante : 1,000015765

racines :      0                     $\pm j 0,8598765$   
                   -0,01183956  $\pm j 0,8842769$   
                   -0,03314132  $\pm j 0,9497857$   
                   -0,03123858  $\pm j 1,0455676$   
                   -0,00872644  $\pm j 1,0973392$

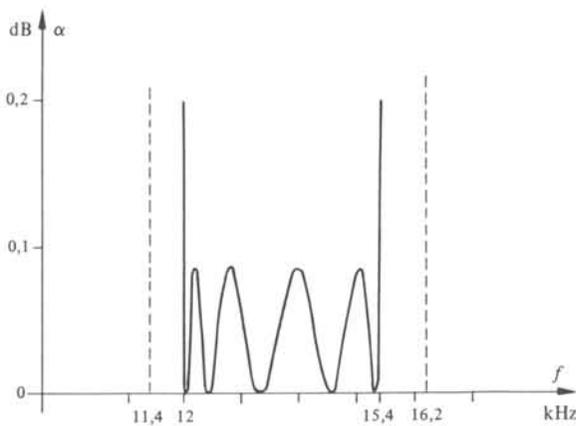
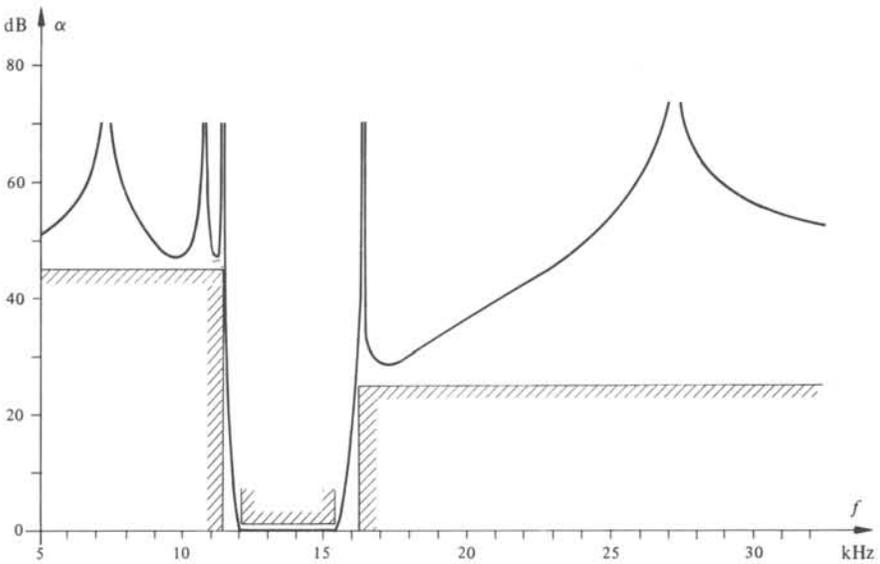


Fig. 8.75

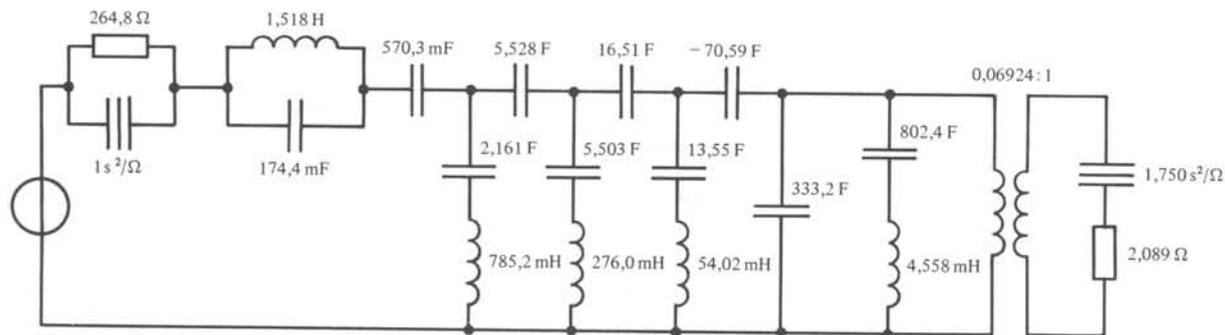


Fig. 8.76

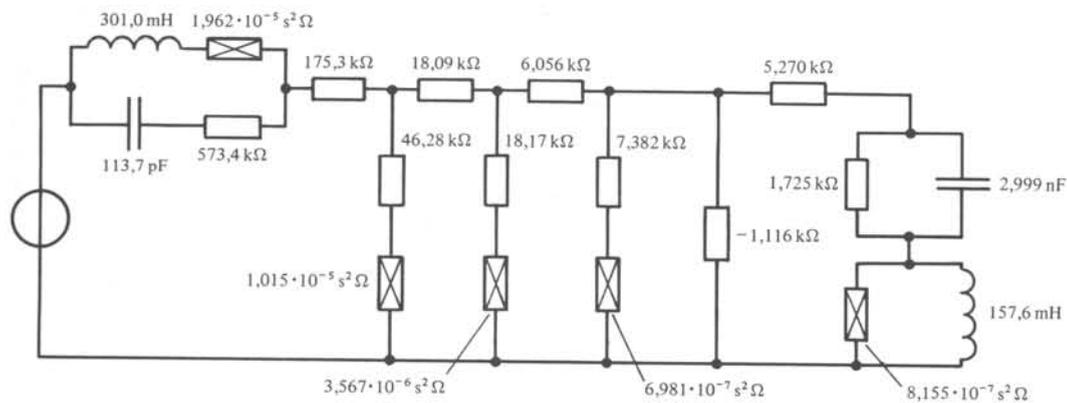


Fig. 8.77

Le filtre LC avec les terminaisons généralisées est représenté à la figure 8.76. On en déduit le filtre RC-actif de la figure 8.77 par les opérations suivantes :

- multiplication de toutes les impédances par  $p/\omega_n$ ,  $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$ ;
- dénormalisation en fréquence :  $1 \text{ rad/s} \rightarrow 14 \text{ kHz}$ ;
- dénormalisation en impédance :  $1 \Omega \rightarrow 100 \text{ k}\Omega$ ;
- transformation de Norton pour convertir la résistance négative de série en parallèle;
- élimination des transformateurs idéaux en les amenant vers la sortie du filtre où ils sont supprimés;
- application des équivalences de la figure 8.78 pour les terminaisons.

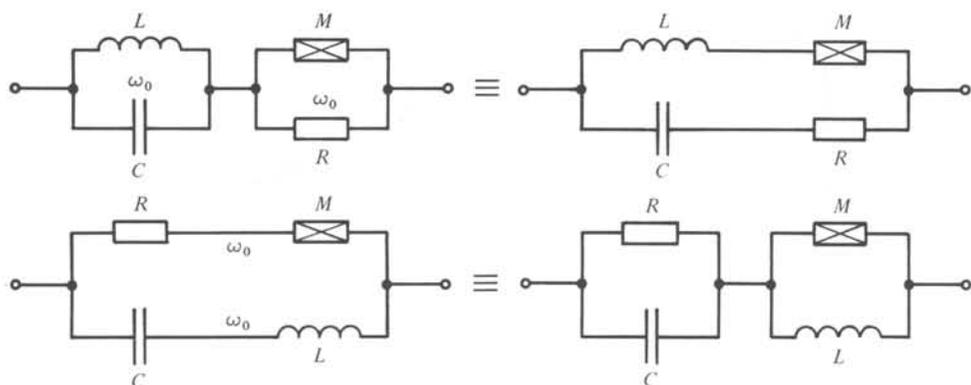


Fig. 8.78

La dénormalisation en impédance conduit à des valeurs d'éléments qui conviennent à la réalisation. La suppression des transformateurs idéaux engendre un affaiblissement constant de 11,78 dB qui s'ajoute à celui de la figure 8.75. Selon le commentaire du paragraphe 8.3.6, il peut être compensé par un amplificateur de tension dont on a de toute façon besoin. La transformation des terminaisons selon la figure 8.78 permet de les réaliser, selon la méthode de la section 9.3, par deux amplificateurs opérationnels chacune.

### 8.3.26 Commentaires

L'étude du tableau 8.62 et l'expérience de l'exemple du paragraphe 8.3.25 conduisent à quelques réflexions de caractère général.

A première vue, la possibilité de créer des pôles d'affaiblissement par les terminaisons semble intéressante. Ce sont les cas numéros 1 et 3 du tableau 8.62. Cependant, ils impliquent un zéro de  $a$  et  $b$  et donc  $g + h$ , ou bien  $a, c$  et donc  $g \pm h_g$ . Ce sont des contraintes sur le problème d'approximation. Alors qu'en zéro et à l'infini ces contraintes peuvent être satisfaites en choisissant le signe adéquat pour le facteur d'échelle de  $h$  et, si nécessaire, par l'introduction de facteurs paramétriques, à des fréquences finies elles constituent un problème plus difficile à résoudre.

Réaliser un pôle d'affaiblissement, et par les terminaisons et par le biporte, comme dans les cas numéros 2 et 4 du tableau 8.62, semble revenir à un gaspillage

d'éléments. Cependant, le pôle d'affaiblissement du biorte est forcément un pôle de réflexion, grâce aux zéros simultanés de  $\hat{c}$  et  $\hat{d}$  ou de  $\hat{b}$  et  $\hat{a}$ , et il est synthétisé selon la figure 8.66 ou 8.68. Par conséquent, les deux branches peuvent être réalisées ensemble, et la complexité du circuit résultant est comparable à celle de la terminaison toute seule. Ce procédé est d'ailleurs indiqué pour éviter qu'à cause des imprécisions des éléments le pôle ou zéro de la terminaison ne coïncide pas exactement avec le pôle de réflexion du biorte.

La possibilité, que les terminaisons empêchent qu'un pôle d'affaiblissement du biorte soit pôle d'affaiblissement du filtre, représentée par les cas 6 et 8 du tableau 8.62, n'a sans doute aucun intérêt aux fréquences finies.

Par contre, elle rend des caractéristiques  $f/g$  sans pôles d'affaiblissement à l'origine et à l'infini synthétisables. De telles caractéristiques permettent, d'une part une approximation plus efficace, d'autre part la synthèse de filtres coupe-bande.



## FILTRES RC-ACTIFS

### 9.1 INTRODUCTION

#### 9.1.1 Filtres RC-passifs

Les filtres sans inductances les plus simples que l'on puisse imaginer sont composés de *résistances et de capacités seulement*. Mais on se heurte tout de suite à la contrainte suivante : les fonctions de transfert RC-passives, de même que les immittances RC-passives (sect. 2.2), ont tous leurs pôles sur l'axe réel négatif. Par contre, une caractéristique optimale de filtres sélectifs a des pôles proches de l'axe imaginaire, selon la figure 1.3. Une caractéristique apte à la synthèse RC-passive serait donc forcément loin de l'optimum, c'est-à-dire d'un degré beaucoup plus élevé. En plus, elle ne satisferait les exigences qu'à un affaiblissement constant non négligeable près qui devrait être compensé dans la chaîne de transmission.

Tout ceci limite les filtres RC-passifs à des applications de filtrage très simple et nous n'en parlerons pas davantage.

#### 9.1.2 Élément actif

En ajoutant aux éléments résistance et capacité un élément actif, on élimine les restrictions inhérentes aux fonctions de transfert RC-passives (§ 9.1.1).

Les tubes à vide ayant les désavantages de la consommation de puissance, du volume et d'un prix élevé, c'est avec l'apparition du transistor vers 1950 que cette possibilité a attiré l'attention des chercheurs. La microélectronique vers 1960 a permis d'utiliser un grand nombre de transistors pour réaliser l'amplificateur opérationnel. C'est à présent l'élément actif universel dont la production en masse fait un composant bon marché.

Ceci justifie le point de vue restrictif, adopté dans ce volume, de limiter les filtres RC-actifs à des circuits avec amplificateurs opérationnels.

#### 9.1.3 Définition : amplificateur opérationnel idéal

Un *amplificateur opérationnel idéal* est un quadripôle qui satisfait les équations  $u_1 = i_1 = i_1' = 0$  et  $v_2' = 0$  : une borne de la sortie est connectée à la terre (fig. 9.1). Si cette dernière condition n'est pas satisfaite, c'est un *amplificateur opérationnel (idéal) flottant*.

#### 9.1.4 Définition : amplificateur de tension à gain fini

Un *amplificateur de tension avec gain  $A$*  est un quadripôle qui satisfait les équations  $u_2 = Au_1$ ,  $i_1' = 0$  et  $v_2' = 0$  : une borne de la sortie est connectée à la terre

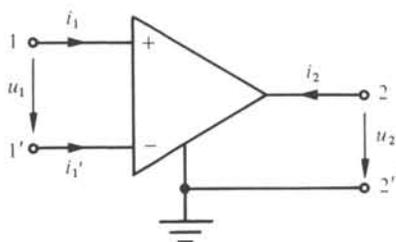


Fig. 9.1

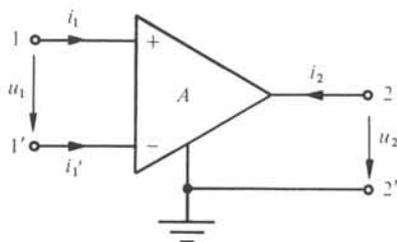


Fig. 9.2

(fig. 9.2). Si cette dernière condition n'est pas satisfaite, c'est un *amplificateur de tension flottant*.

### 9.1.5 Commentaires

On peut se demander pourquoi le quadripôle défini dans le paragraphe 9.1.3 mérite le nom d'amplificateur. La raison est qu'on peut le considérer comme limite d'un amplificateur de tension quand le gain tend vers l'infini. On verra cette équivalence plus en détail au paragraphe 9.1.9.

Les deux bornes 1 et 1' d'un amplificateur opérationnel idéal peuvent être interchangées sans modifier les équations qui le caractérisent. Les signes "+" et "-" qui distinguent 1 et 1' n'ont donc une signification que si des imperfections de l'amplificateur opérationnel, en particulier le gain fini, sont prises en considération.

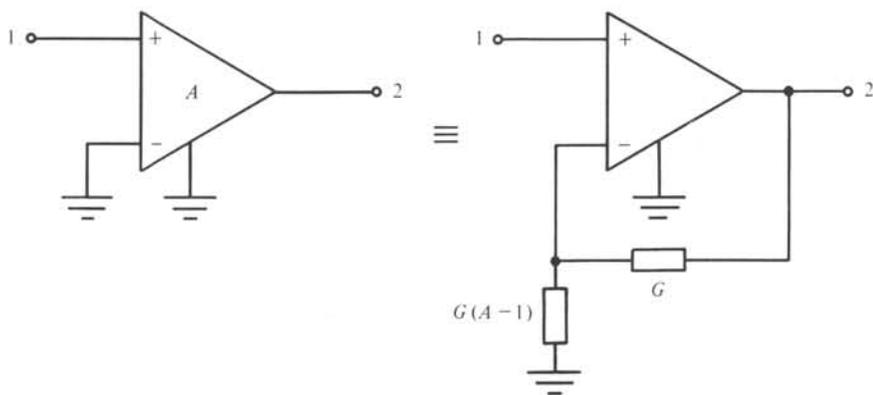


Fig. 9.3

Un amplificateur de tension de gain  $A \geq 1$  avec  $V_1' = 0$  peut être synthétisé par un amplificateur opérationnel idéal suivant la figure 9.3. Le cas limite,  $A = 1$  et  $G = \infty$ , de la figure 9.4, appelé *suiveur de tension*, est souvent utilisé pour isoler un filtre RC-actif du reste de la chaîne de transmission afin qu'il fonctionne correctement (§ 8.3.6).

La synthèse des amplificateurs de tension avec gain négatif et  $V_1' = 0$  ou, ce qui revient au même, avec gain positif et  $V_1 = 0$ , sera traitée au paragraphe 9.1.20.

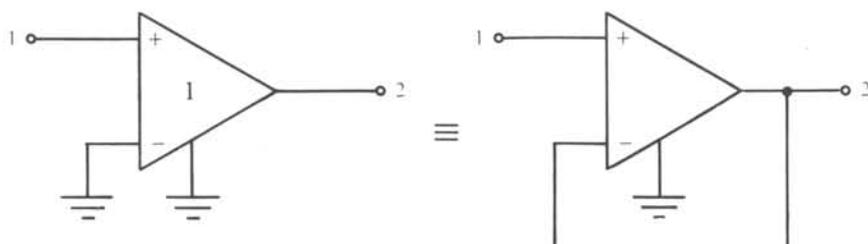


Fig. 9.4

### 9.1.6 Analyse des circuits avec amplificateurs opérationnels idéaux

Dans un circuit qui comporte des amplificateurs opérationnels, on peut enlever ces derniers et en tenir compte de la façon suivante : l'équation de Kirchhoff des courants n'est plus exigée aux nœuds auxquels la sortie d'un amplificateur est connectée. En revanche, on exige l'égalité entre les potentiels des deux nœuds auxquels les entrées d'un amplificateur sont connectées.

La mise en équation par la méthode des potentiels indépendants (section IV.4.5) peut être modifiée de la façon suivante. Comme d'habitude, pour chaque nœud qui n'est pas sortie d'un amplificateur opérationnel, la somme des courants incidents en un nœud est posée égale à zéro; les courants sont exprimés par les potentiels des nœuds moyennant les équations constitutives des éléments. Ce système d'équations est complété par les égalités entre les potentiels des nœuds qui sont les entrées d'un amplificateur.

Supposons qu'un circuit connexe qui comporte  $\nu$  nœuds et  $\beta$  amplificateurs opérationnels satisfasse aux conditions suivantes :

- les sorties des amplificateurs opérationnels sont connectées à des nœuds différents;
- si l'on introduit pour chaque amplificateur opérationnel une branche entre ses deux bornes d'entrée, alors ces branches auxiliaires ne constituent aucune maille.

Alors, il y a  $(\nu - \beta - 1)$  équations indépendantes correspondant aux nœuds normaux, complétées par  $\beta$  égalités entre potentiels, alors que le nombre de potentiels inconnus est  $(\nu - 1)$ . Le nombre d'équations coïncide donc bien avec le nombre d'inconnues.

### 9.1.7 Analyse des circuits avec amplificateurs de tension à gain fini

Le remplacement des amplificateurs opérationnels idéaux par des amplificateurs de tension à gain fini revient à remplacer dans le système d'équations, établi selon la méthode du paragraphe 9.1.6, les égalités  $V_1 = V_1'$  par  $V_2 = A(V_1 - V_1')$ , où 1 et 1' sont les entrées "+" et "-" et 2 la sortie d'un amplificateur de tension avec gain  $A$ .

### 9.1.8 Exemple

Dans le circuit de la figure 9.5, on s'intéresse à la fonction de transfert en tension  $T$  (à sortie ouverte) entre les nœuds 1 et 2. Ceci revient à connecter une source

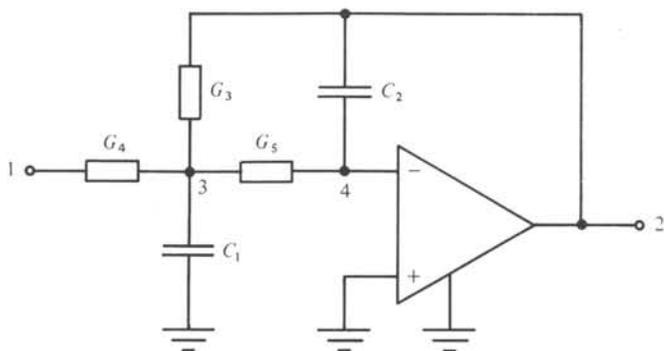


Fig. 9.5

de tension de valeur  $V_1$  entre 1 et la terre, à calculer le potentiel  $V_2$  en 2 et à poser

$$T = V_2/V_1 \quad (9.1)$$

Aux nœuds 3 et 4, les équations de Kirchoff des courants, exprimées par les potentiels, sont

$$G_4(V_1 - V_3) + G_3(V_2 - V_3) + G_5(V_4 - V_3) - C_1 p V_3 = 0 \quad (9.2)$$

$$C_2 p(V_2 - V_4) + G_5(V_3 - V_4) = 0 \quad (9.3)$$

Il n'y a pas d'équation pour le nœud 2 puisque la sortie de l'amplificateur opérationnel y est connectée. Le nœud 1 ne donne pas lieu non plus à une équation, par suite de la source de tension connectée en 1, qui est implicitement présente dans le calcul de la fonction de transfert  $T$ . L'égalité entre les potentiels des entrées de l'amplificateur est

$$V_4 = 0 \quad (9.4)$$

$V_2$  se calcule en éliminant  $V_3$  et  $V_4$  des quatre équations (9.1) à (9.4). On obtient

$$T = \frac{-G_4 G_5}{C_1 C_2 p^2 + (G_3 + G_4 + G_5) C_2 p + G_3 G_5} \quad (9.5)$$

Si l'amplificateur opérationnel idéal dans la figure 9.5 est remplacé par un amplificateur de tension de gain  $A$  (fig. 9.6), il faut substituer à la place de (9.4)

$$-AV_4 = V_2 \quad (9.6)$$

d'où il résulte

$$T = -\frac{G_4 G_5}{Q_1(p) + \frac{1}{A} Q_2(p)} \quad (9.7)$$

où

$$Q_1(p) = C_1 C_2 p^2 + (G_3 + G_4 + G_5) C_2 p + G_3 G_5 \quad (9.8)$$

$$Q_2(p) = C_1 C_2 p^2 + [(G_3 + G_4 + G_5) C_2 + G_5 C_1] p + (G_3 + G_4) G_5 \quad (9.9)$$

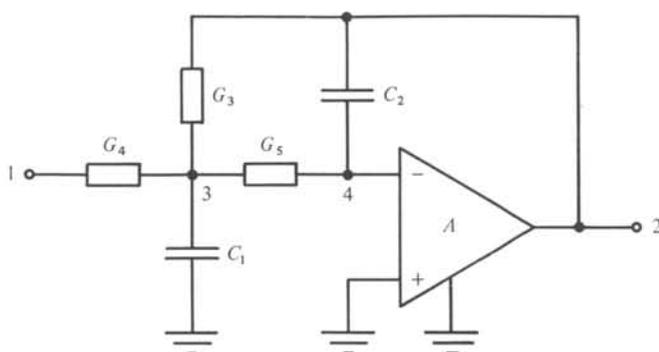


Fig. 9.6

### 9.1.9 Commentaire

La fonction de transfert (9.7) tend vers (9.5) quand  $A$  tend vers l'infini. Cet exemple confirme que l'amplificateur opérationnel idéal peut être considéré comme limite d'un amplificateur de tension quand le gain tend vers l'infini.

### 9.1.10 Lieu d'Evans

Il est instructif de dessiner le lieu des pôles de la fonction de transfert  $T$  donnée par l'équation (9.7), en faisant varier le gain  $A$  de zéro à l'infini. C'est le *lieu d'Evans*, un concept provenant du réglage automatique. La condition  $A = 0$  revient à connecter le nœud 2 dans la figure 9.6 à la terre. Les pôles de  $T$  coïncident dans ce cas avec les racines de  $Q_2$  et sont les pulsations propres du circuit RC-passif de la figure 9.7.

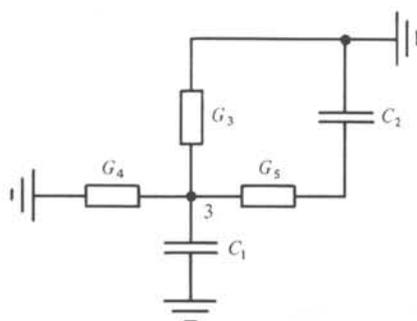


Fig. 9.7

Ils se situent donc sur l'axe réel négatif. Pour  $A = \infty$ , les pôles de  $T$  deviennent des racines de  $Q_1$  qui peuvent être conjuguées complexes. Dans ce cas, en faisant augmenter  $A$  de 0 à  $l'∞$  tout d'abord, les deux pôles se rapprochent l'un de l'autre sur l'axe réel, puis ils coïncident et ils quittent ensuite l'axe réel (fig. 9.8).

Ceci constitue une bonne illustration de la méthode par laquelle on se libère des restrictions sur les pôles des fonctions de transfert RC-passives au moyen d'un élément actif.

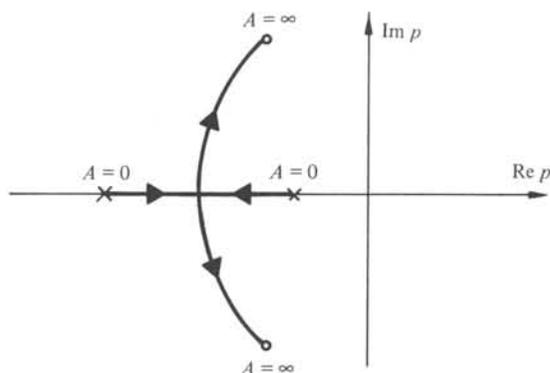


Fig. 9.8

### 9.1.11 Définition : filtre RC-actif

Un *filtre RC-actif* est un tripôle composé de résistances, de capacités et d'amplificateurs opérationnels. Il réalise le filtrage par la fonction de transfert en tension  $T = V_2/V_1$ , à sortie ouverte (fig. 9.9).

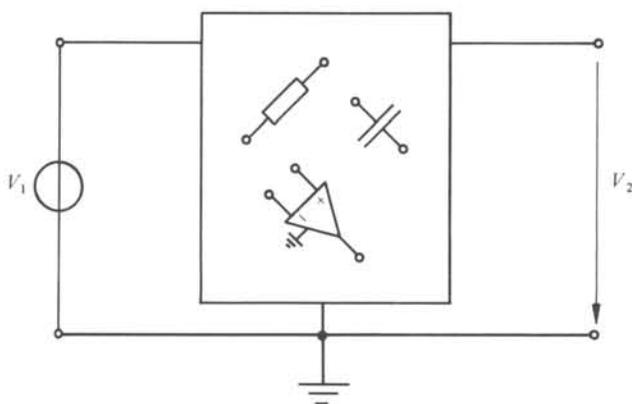


Fig. 9.9

### 9.1.12 Structures de filtres RC-actifs

La plupart des filtres RC-actifs peuvent être conçus comme un ensemble de *sous-circuits*, qui sont des  $(N + 1)$  - pôles RC-actifs, et comme une certaine connexion de ceux-ci. Dans cette optique, les sous-circuits sont utilisés comme des éléments connectés en réseau de Kirchhoff de la même façon que les résistances, inductances, transformateurs idéaux, etc. des réseaux classiques.

Suivant la nature des sous-circuits, on peut dans l'état actuel des choses distinguer deux classes de filtres RC-actifs :

- les filtres de simulation LC directe;
- les filtres à transfert de tension.

Les sous-circuits de la première classe simulent des bipôles et biportes. Dans le cas des filtres à gyrateurs, traités à la section 8.2, les sous-circuits simulent précisément les gyrateurs. Dans le cas des filtres à FDNC et FDNR, traités à la section 8.3, les sous-circuits simulent des FDNC et/ou des FDNR, ainsi que des résistances négatives ou des inductances.

Les sous-circuits de la deuxième classe sont des tripôles à impédance de sortie nulle. Cela signifie que l'équivalent de Thévenin (cf sect. IV.5.4) du bipôle, obtenu en fermant l'entrée sur n'importe quel bipôle, est toujours une source de tension. Par conséquent, les courants qui circulent dans les connexions n'affectent en rien les tensions aux bornes des sous-circuits, et la fonction de transfert globale est obtenue uniquement à partir des fonctions de transfert en tension des sous-circuits. Ceci n'est possible que si la sortie de chaque sous-circuit coïncide avec la sortie d'un amplificateur opérationnel.

Les sous-circuits des filtres RC-actifs à transfert de tension sont eux-mêmes des filtres RC-actifs. Ils seront appelés *cellules*. Normalement, ces filtres-composants sont de degré 2 et on parle de *cellules biquadratiques*.

Les connexions de cellules, discutées dans ce volume, sont :

- la connexion cascade;
- la connexion "leapfrog" (LF);
- la connexion "follow the leader feedback" (FLF).

La synthèse des cellules biquadratiques ne sera qu'effleurée à la section 9.2, tandis que les connexions cascade, LF et FLF seront discutées respectivement aux sections 9.4, 9.5 et 9.6.

### 9.1.13 Analyse et synthèse de structures composées

Bien qu'il soit possible d'analyser n'importe quel filtre RC-actif directement par la méthode du paragraphe 9.1.6, il est préférable d'établir les équations engendrées par les connexions des sous-circuits, et de n'utiliser la mise en équations du paragraphe 9.1.6 que pour ces derniers.

Dans le cas du filtre à simulation LC directe, on analyse tout d'abord le filtre LC. La même méthode est indiquée pour la synthèse.

Dans le cas du filtre à transfert de tension, on établit les équations pour les nœuds de connexion, avec les fonctions de transfert des cellules comme coefficients. Les mêmes équations sont engendrées par un système linéaire (chap. IV.2) composé, qui est associé au filtre de la manière suivante : à chaque cellule biquadratique on fait correspondre un système linéaire en interprétant la tension d'entrée comme signal et la tension de sortie comme réponse. La fonction de transfert du système, aussi appelée fonction de réponse isomorphe au paragraphe IV.2.1.12, et la fonction de transfert de la cellule sont alors identiques. Aux connexions des cellules correspondent les connexions de ces systèmes, opérations qui seront décrites aux paragraphes 9.1.14 et 9.1.17. Inversement, la synthèse de filtres à transfert de tension consiste à réaliser les systèmes composés, en synthétisant les cellules biquadratiques (sect. 9.2) et leurs connexions (§ 9.1.17).

Grâce à cette décomposition de l'analyse et de la synthèse, des circuits très

compliqués peuvent être traités en deux étapes distinctes :

- un calcul de la cellule ou du sous-circuit simulant un élément;
- un calcul du réseau de connexion.

L'indépendance de ces deux calculs met bien en lumière que des choix distincts doivent être opérés à chacun des niveaux.

### 9.1.14 Définitions : systèmes multidimensionnels, connexions

La notion de système, introduite au chapitre IV.2, se généralise facilement aux *systèmes multidimensionnels* qui ont plusieurs entrées et sorties.

Un *système à n entrées et m sorties* est une application qui fait correspondre à un vecteur de  $n$  signaux  $x = (x_1, \dots, x_n)$  un vecteur de  $m$  réponses  $y = (y_1, \dots, y_m)$ . Sa représentation graphique, appelée *schéma bloc* (§ XVI.7.1.4), est donnée à la figure 9.10. Les notions de causalité, de linéarité et d'invariance, définies au chapitre IV.2, se généralisent de façon évidente.

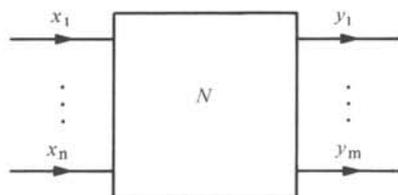


Fig. 9.10

La réponse impulsionnelle d'un système linéaire invariant devient dans le cas multidimensionnel une matrice, dont l'élément  $h_{ij}$  est la réponse  $y_i$  au signal vecteur dont toutes les composantes sont nulles, sauf  $x_j$ , qui vaut  $\delta$ . La réponse  $y$  à un signal  $x$  est alors

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^n h_{ij}(t) * x_j(t) \quad i = 1, \dots, m \quad (9.10)$$

La fonction de transfert devient la *matrice de transfert* dont l'élément  $H_{ij}$  est la transformée de Laplace de  $h_{ij}$ . Par transformation de Laplace de (9.10), on trouve alors

$$Y_i(p) = \sum_{j=1}^n H_{ij}(p) X_j(p) \quad i = 1, \dots, m \quad (9.11)$$

On connecte deux systèmes en identifiant un certain nombre d'entrées de l'un avec le même nombre de sorties de l'autre et vice versa. Elles sont appelées *entrées et sorties connectées*. Les systèmes multidimensionnels offrent plusieurs possibilités de connexion dont chacune engendre un nouveau système, défini de la manière suivante : les entrées (sorties) sont les entrées (sorties) non connectées des deux systèmes de départ. La fonction de transfert est obtenue en écrivant les deux équations matricielles (9.1), en identifiant le signal et la réponse dans chaque paire entrée-sortie connectées, en éliminant ces variables du système d'équations résultant et en le résolvant pour les réponses des sorties non connectées.

Par la même définition, on peut engendrer de nouveaux systèmes à partir d'un seul système, en identifiant entre elles certaines de ses entrées et sorties.

L'application répétée de ces opérations permet de bâtir des systèmes compliqués à partir de systèmes composants simples.

**9.1.15 Définitions : multiplicateur, sommateur, nœud**

Les systèmes causals, linéaires et invariants décrits ici, jouent un rôle particulier dans l'analyse et la synthèse des filtres RC-actifs à transfert de tension et des filtres numériques traités aux chapitres 11 et 12.

Le *multiplicateur* est un système à une entrée et à une sortie défini par

$$y(t) = c x(t) \tag{9.12}$$

où  $c$  est une constante réelle ou complexe. Son symbole est représenté à la figure 9.11. Sa fonction de transfert est constante et vaut  $c$ .

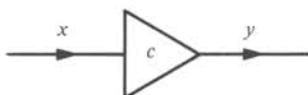


Fig. 9.11

Le *sommateur* est un système à  $n$  entrées et une sortie défini par

$$y(t) = \sum_{j=1}^n x_j(t) \tag{9.13}$$

Son symbole est représenté à la figure 9.12. Sa matrice de transfert, qui comporte une ligne et  $n$  colonnes, est constituée de constantes 1.

Le *nœud* est un système à une entrée et  $m$  sorties défini par

$$y_i(t) = x(t) \tag{9.14}$$

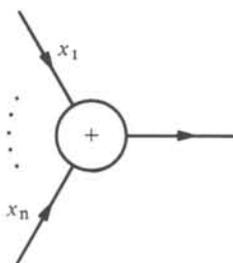


Fig. 9.12

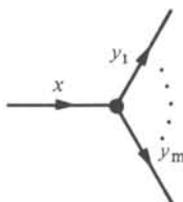


Fig. 9.13

Son symbole est représenté à la figure 9.13. Sa matrice de transfert, qui comporte  $m$  lignes et une colonne, est également constituée de constantes 1.

**9.1.16 Exemple**

Le système de la figure 9.14 est composé de deux systèmes avec fonctions de transfert  $T_1$  et  $T_2$ , un sommateur, deux multiplicateurs et deux nœuds. Les équations

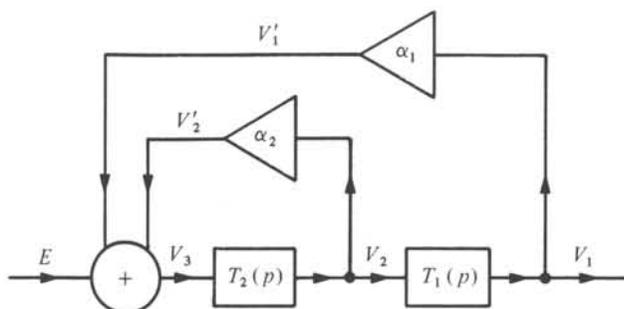


Fig. 9.14

(9.11) pour ces systèmes composants sont

$$V_1 = T_1 V_2 \quad (9.15)$$

$$V_2 = T_2 V_3 \quad (9.16)$$

$$V_3 = V_2' + V_1' + E \quad (9.17)$$

$$V_1' = \alpha_1 V_1 \quad (9.18)$$

$$V_2' = \alpha_2 V_2 \quad (9.19)$$

En éliminant  $V_1'$ ,  $V_2$ ,  $V_2'$ ,  $V_3$  liés aux entrées et sorties connectées, on obtient la fonction de transfert  $T$  du système composé

$$T(p) = V_1(p)/E(p) = \frac{T_1(p) T_2(p)}{1 - \alpha_1 T_1(p) T_2(p) - \alpha_2 T_2(p)} \quad (9.20)$$

### 9.1.17 Synthèse des systèmes composés par les filtres à transfert de tension

On se propose de synthétiser par des circuits RC-actifs tous les systèmes qui sont composés de sous-systèmes avec fonction de transfert biquadrique et de multiplicateurs, sommateurs et nœuds. Alors que la connexion de systèmes, ainsi que le système nœud sont synthétisés par une simple liaison de fils, et que le multiplicateur avec coefficient supérieur ou égal à 1 est synthétisé par l'amplificateur de tension de la figure 9.3 et le suiveur de tension de la figure 9.4, il manque encore une synthèse des autres multiplicateurs et des sommateurs. Comme on le verra au paragraphe 9.1.20, il n'est pas plus difficile de synthétiser un *sommateur pondéré* défini par

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t) \quad (9.21)$$

qu'un sommateur simple. D'autre part, on obtient le sommateur pondéré en connectant à chaque entrée d'un sommateur simple la sortie d'un multiplicateur. Dans le souci d'économiser des éléments dans la synthèse d'un système composé, on cherchera donc à grouper les multiplicateurs avec les sommateurs en sommateurs pondérés. Seuls les multiplicateurs qui ne peuvent ni être groupés avec un sommateur, ni être absorbé dans une cellule, sont à synthétiser. Le multiplicateur est d'ailleurs le cas particulier  $n = 1$  du sommateur pondéré, et sa synthèse générale est donc également donnée au paragraphe 9.1.20.

**9.1.18 Définition : amplificateur sommateur**

Un *amplificateur sommateur* est un  $(N + 1)$  - pôle qui satisfait l'équation

$$V_N = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i V_i \tag{9.22}$$

**9.1.19 Commentaire**

Un  $(N + 1)$  - pôle est normalement décrit par  $N$  équations entre les  $2N$  variables  $V_i, I_i$ . Le système (9.22) se résume à une seule relation, parce que les autres équations, qui peuvent changer suivant la réalisation, n'interviennent pas dans l'application à la synthèse du paragraphe 9.1.17.

**9.1.20 Synthèse de l'amplificateur sommateur**

Le  $(m + n + 2)$  - pôle de la figure 9.15 satisfait l'équation, obtenue par la méthode du paragraphe 9.1.6,

$$V = \frac{G^-}{G_0^-} \sum_{i=1}^m \frac{G_i^+}{G^+} V_i^+ - \sum_{i=1}^n \frac{G_i^-}{G_0^-} V_i^- \tag{9.23}$$

où

$$G^+ = \sum_{i=0}^m G_i^+ \tag{9.24}$$

$$G^- = \sum_{i=0}^n G_i^- \tag{9.25}$$

l'équation (9.23) est de la forme

$$V = \sum_{i=1}^m \beta_i V_i^+ - \sum_{i=1}^n \gamma_i V_i^-, \quad \beta_i > 0; \quad \gamma_i > 0 \tag{9.26}$$

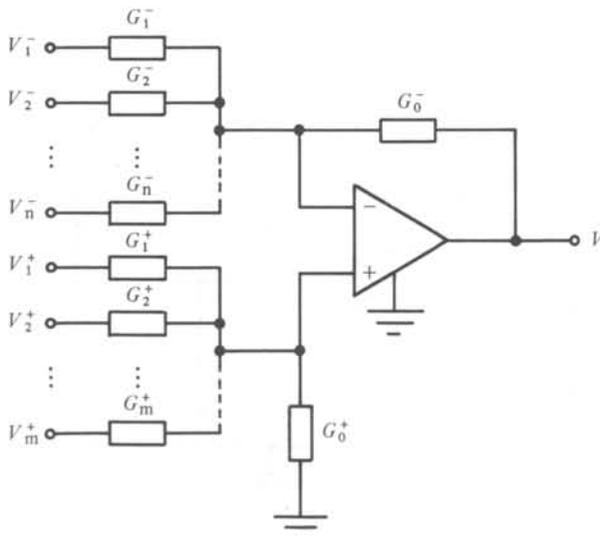


Fig. 9.15

Il s'agit donc bien d'un amplificateur sommateur. Dans la synthèse d'un système composé, il réalise le sommateur pondéré. Le point de départ d'une telle synthèse sont les coefficients  $\beta_i$  et  $\gamma_i$ ; les conductances du circuit de la figure 9.15 s'en déduisent par

$$G_i^+ = \frac{\beta_i}{1 + \sum_{i=1}^n \gamma_i - \sum_{i=1}^m \beta_i} G_0^+ \quad (9.27)$$

$$G_i^- = \gamma_i G_0^- \quad (9.28)$$

où  $G_0^+$  et  $G_0^-$  peuvent être choisies librement.

Si  $m = 0$ , il suffit de connecter l'entrée "+" de l'amplificateur opérationnel à la terre, et (9.26) avec  $V_i^+ = 0$  et (9.28) restent valables.

Si  $n = 0$ , il suffit de connecter les entrées  $V_i^-$  à la terre et par conséquent de remplacer  $G_1^-, \dots, G_n^-$  par leur mise en parallèle  $G^- - G_0^-$ . Ainsi (9.26) reste valable avec  $V_i^- = 0$  et (9.27) avec  $(1 + \sum_{i=1}^n \gamma_i)$  remplacé par  $G^-/G_0^-$ . Ce rapport est un paramètre libre pour autant que l'on satisfasse  $G^-/G_0^- \geq \sum_{i=1}^n \beta_i$ . Dans le cas général,  $G_i^+$ , résultant de (9.27), n'est positif que si  $1 + \sum_{i=1}^n \gamma_i \geq \sum_{i=1}^n \beta_i$ . Si tel n'est pas le cas, un amplificateur de tension doit être inséré avant l'entrée positive de l'amplificateur opérationnel.

### 9.1.21 Exemple

Le système composé de la figure 9.14 est synthétisé par le circuit de la figure 9.16 si  $\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha_2 < 0$  et  $|\alpha_2| > \alpha_1$ .

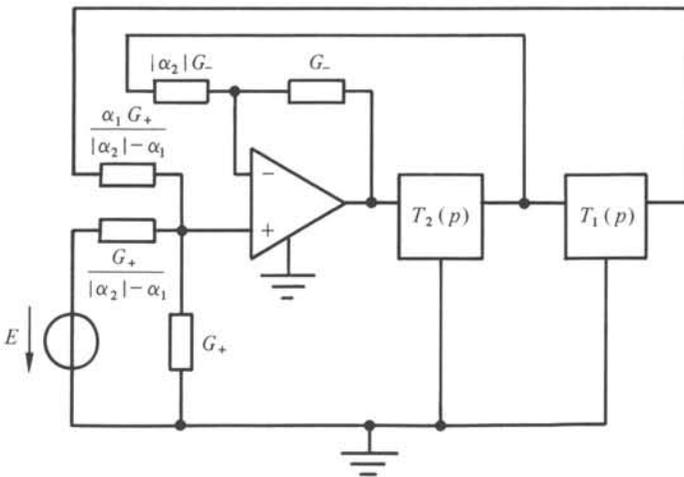


Fig. 9.16

## 9.2 CELLULES BIQUADRATIQUES

### 9.2.1 Choix d'une cellule biquadratique

Comme il a été exposé au paragraphe 9.1.12, les cellules biquadratiques sont les composants des filtres à transfert de tension. La littérature mentionne une telle foule de ces cellules que l'ingénieur qui doit choisir les sous-circuits pour son filtre, se trouve assez déconcerté.

Afin de faciliter l'élimination de cellules à mauvaises performances ou inadaptées à l'application envisagée, des classifications de cellules à un [36] et deux [37] amplificateurs opérationnels ont été données. Malheureusement, ces classifications ne permettent pas de trancher de façon simple et nette dans la masse des cellules proposées. Nous laissons de côté toute discussion à ce sujet parce que la place disponible ne permettrait pas un traitement suffisamment nuancé.

En plus, c'est seulement dans la connexion cascade que les propriétés (sensibilité, stabilité) des cellules individuelles se traduisent directement en propriétés du filtre entier. On verra plus loin qu'une cellule relativement performante dans un filtre cascade peut engendrer des performances médiocres si elle est insérée dans un filtre LF.

On se limitera à présenter trois exemples de cellules, avec un, deux et trois amplificateurs opérationnels respectivement, qui sont en général peu sensibles. Elles permettent de réaliser toutes les fonctions de transfert biquadratiques stables, y compris les fonctions avec pôles sur l'axe imaginaire dont on a besoin pour la synthèse des filtres LF.

### 9.2.2 Paramétrisation de la fonction de transfert

Une fonction de transfert biquadratique peut être caractérisée par plusieurs jeux de paramètres.

Dans la représentation (9.29), les coefficients du numérateur et du dénominateur jouent le rôle de paramètres. On peut montrer qu'ils s'expriment comme formes multilinéaires en fonction des éléments passifs. De ce fait, ce sont des paramètres commodes pour la synthèse ainsi que pour le calcul des sensibilités.

Par contre, le comportement d'une fonction de transfert biquadratique est plus directement caractérisé par les deux zéros et pôles ainsi que par le facteur d'échelle.

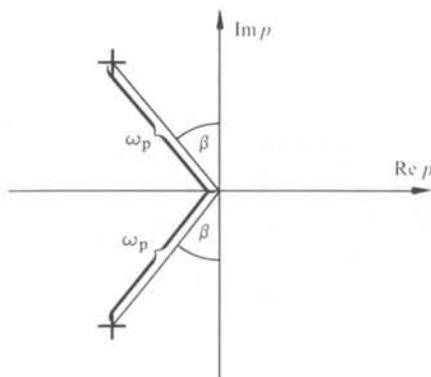


Fig. 9.17

La représentation (9.44), qui est très largement utilisée, constitue un compromis entre la paramétrisation par coefficients et par pôles. Ses paramètres sont le *facteur d'échelle*  $K$ , la *pulsation de résonance*  $\omega_p(\omega_z)$  et le *facteur de qualité*  $Q_p(Q_z)$  de la paire de pôles (zéros). Les expressions des coefficients en fonction de ces paramètres se déduisent directement de (9.44). Si les pôles (zéros) sont complexes conjugués, alors  $\omega_p, Q_p(\omega_z, Q_z)$  permettent de les repérer directement. Dans le cas des pôles,  $\omega_p$  est la distance depuis l'origine et  $Q_p = 1/2 \sin \beta$  où  $\beta$  est l'angle entre l'axe imaginaire et le rayon vecteur représenté à la figure 9.17. Donc,  $Q_p > 1/2$  correspond à deux pôles complexes conjugués. Avec  $Q_p$  croissant, les pôles s'approchent de l'axe imaginaire pour l'atteindre quand  $Q_p = \infty$ . Les mêmes règles valent pour les zéros.

### 9.2.3 Exemple : cellule de Deliyannis-Friend

La fonction de transfert de la cellule représentée à la figure 9.18 peut être calculée par la méthode du paragraphe 9.1.6. Le résultat est

$$T = \frac{n_2 p^2 + n_1 p + n_0}{d_2 p^2 + d_1 p + d_0} \quad (9.29)$$

avec

$$n_2 = G_5 C_1 C_2 \quad (9.30)$$

$$n_1 = [G_5(G_3 + G_4 + G_8) - (G_1 + G_2)(G_6 + G_7)] C_1 + [G_5(G_3 + G_8) - (G_1 + G_2)G_6] C_2 \quad (9.31)$$

$$n_0 = (G_4 + G_7) [G_5(G_3 + G_8) - (G_1 + G_2)G_6] \quad (9.32)$$

$$d_2 = (G_2 + G_5) C_1 C_2 \quad (9.33)$$

$$d_1 = [(G_2 + G_5)G_8 - G_1(G_3 + G_4 + G_6 + G_7)] C_1 + [(G_2 + G_5)G_8 - G_1(G_3 + G_6)] C_2 \quad (9.34)$$

$$d_0 = (G_4 + G_7) [(G_2 + G_5)G_8 - G_1(G_3 + G_6)] \quad (9.35)$$

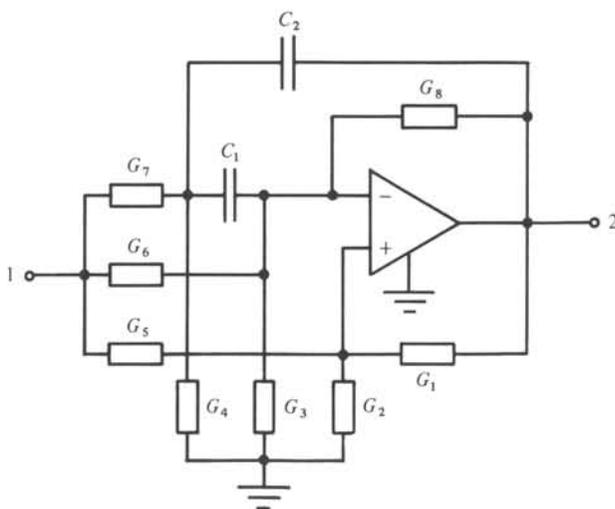


Fig. 9.18

En vue de la synthèse, il faut exprimer les valeurs des éléments en fonction des paramètres de la fonction de transfert. Celle-ci ne dépend pas de six mais seulement de cinq paramètres :  $\hat{n}_1 = n_1/d_2$ ,  $\hat{d}_1 = d_1/d_2$  et  $\hat{d}_0 = d_0/d_2$ . Par division dans (9.30) à (9.35), on obtient des expressions pour ces paramètres en fonction des dix éléments  $C_i, G_i$ . Il reste donc cinq paramètres libres que nous choisissons :

$$C_1, C_2, G_1, k_1 = G_1/(G_2 + G_5) \text{ et } k_2 = G_6/(G_3 + G_6).$$

Avec ces paramètres et la grandeur auxiliaire

$$G = \frac{C_2}{2k_1} \left\{ -\hat{d}_1 + \left[ \hat{d}_1^2 + 4 \left( 1 + \frac{C_1}{C_2} \right) \hat{d}_0 k_1 \right]^{1/2} \right\} \tag{9.36}$$

les équations de synthèse prennent la forme

$$G_5 = \frac{\hat{n}_2}{k_1} G_1 \tag{9.37}$$

$$G_2 = \frac{1}{k_1} G_1 - G_5 \tag{9.38}$$

$$G_7 = \frac{G\hat{n}_2 + \left( 1 + \frac{C_1}{C_2} \right) \hat{n}_0 \frac{C_2^2}{G} - \hat{n}_1 C_2}{1 + k_1} \tag{9.39}$$

$$G_4 = G - G_7 \tag{9.40}$$

$$G_6 = \frac{k_2 C_1 C_2 (\hat{n}_0 - \hat{d}_0 \hat{n}_2)}{G(1 + k_1) (\hat{n}_2 - k_2)} \tag{9.41}$$

$$G_3 = \left( \frac{1}{k_2} - 1 \right) G_6 \tag{9.42}$$

$$G_8 = \frac{\hat{d}_0 C_1 C_2}{G} + \frac{k_1}{k_2} G_6 \tag{9.43}$$

On peut montrer que n'importe quelle fonction de transfert biquadratique avec facteur d'échelle  $0 < n_2/d_2 < 1$  et avec les pôles en dehors de l'axe réel positif est synthétisable avec des éléments positifs.

Il est important de noter que la fonction de transfert ne détermine la cellule que partiellement. En effet, on a cinq paramètres libres qu'on peut faire varier entre certaines limites qu'impose la positivité des éléments. Pour arriver à des filtres performants, il est indispensable de se servir de ces degrés de liberté pour optimiser la sensibilité et la dynamique, le bruit et la valeur des éléments. La démarche à suivre dépend de la structure dans laquelle la cellule est insérée (sect. 9.7). Cette remarque s'applique pour les deux autres exemples.

### 9.2.4 Exemple : cellule de Fleischer-Tow

Comme la cellule représentée à la figure 9.19 utilise trois amplificateurs opérationnels, elle n'est pas concurrentielle pour des applications où le coût et surtout la consommation de puissance sont de première importance. Par contre, insérée dans un

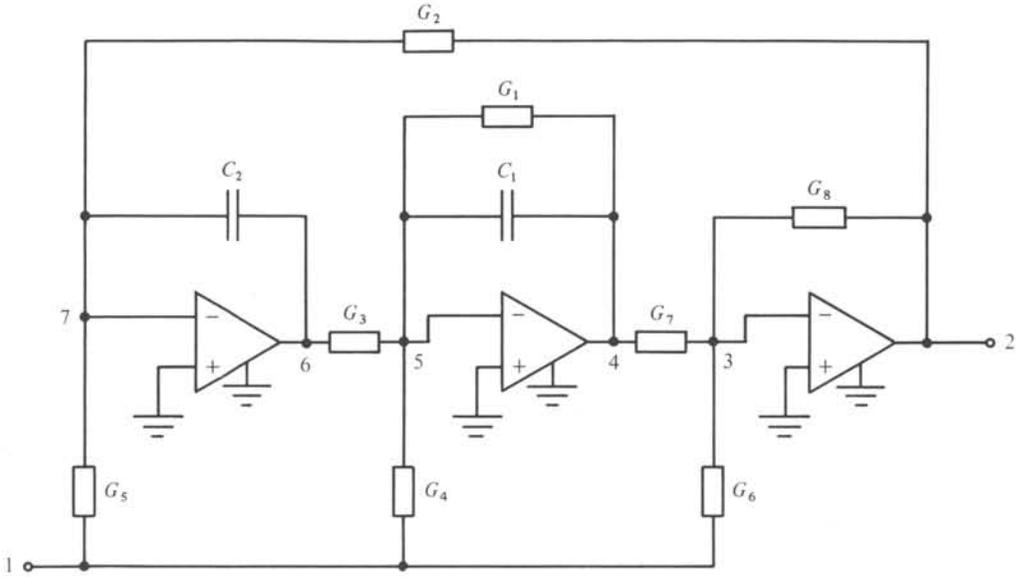


Fig. 9.19

filtre LF, elle est moins sensible que la cellule de Deliyannis-Friend. Ses propriétés les plus remarquables sont une grande souplesse à l'utilisation et un réglage aisé.

L'analyse de la cellule par la méthode du paragraphe 9.1.6 fournit

$$T = K \frac{p^2 + \frac{\omega_z}{Q_z} p + \omega_z^2}{p^2 + \frac{\omega_p}{Q_p} p + \omega_p^2} \quad (9.44)$$

où

$$K = -\frac{G_6}{G_8} \quad (9.45)$$

$$\omega_z = \sqrt{\frac{G_3 G_5 G_7}{G_6 C_1 C_2}} \quad (9.46)$$

$$Q_z = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \cdot \sqrt{\frac{G_3 G_5 G_7}{G_1^2 G_6}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{G_4 G_7}{G_1 G_6}} \quad (9.47)$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{G_2 G_3 G_7}{G_8 C_1 C_2}} \quad (9.48)$$

$$Q_p = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \cdot \sqrt{\frac{G_2 G_3 G_7}{G_1^2 G_8}} \quad (9.49)$$

Comme dans le cas de la cellule à un amplificateur opérationnel, on a 10 éléments et par conséquent 5 paramètres libres qu'on choisira comme étant :

$C_1, C_2, G_8, k_1 = G_2/\omega_p C_2$  et  $k_2 = G_2 G_3/\omega_p^2 C_1 C_2$ . Les équations de synthèse sont alors

$$G_1 = \frac{C_1 \omega_p}{Q_p} \quad (9.50)$$

$$G_2 = k_1 C_2 \omega_p \quad (9.51)$$

$$G_3 = \frac{k_2}{k_1} C_1 \omega_p \quad (9.52)$$

$$G_4 = -k_2 C_1 K \left( \frac{\omega_p}{Q_p} - \frac{\omega_z}{Q_z} \right) \quad (9.53)$$

$$G_5 = -k_1 C_2 \frac{K \omega_z^2}{\omega_p} \quad (9.54)$$

$$G_6 = -K G_8 \quad (9.55)$$

$$G_7 = \frac{G_8}{k_2} \quad (9.56)$$

Les équations (9.50) à (9.56) montrent que toute fonction de transfert avec  $K < 0$  et des pôles dans le demi-plan de gauche, frontière comprise, peut être réalisée par des éléments positifs pour autant que  $\omega_p/Q_p \geq \omega_z/Q_z$ . Cette condition signifie, dans le cas de zéros et pôles complexes conjugués, que les zéros se situent à droite des pôles dans le plan complexe. Pour la plupart des applications, ceci ne constitue pas une restriction.

Les fonctions de transfert stables avec un seul ou aucun zéro sont aussi synthétisables. Si ce zéro se situe sur l'axe réel négatif, il faut prendre le nœud 4 ou 6 comme nœud de sortie (fig. 9.19).

Les équations (9.44) à (9.49) montrent qu'un changement de valeur de certaines conductances fait changer seulement une partie des paramètres; par exemple  $G_4$  n'influence que  $Q_z$ , et  $G_2$  que  $\omega_p$  et  $Q_p$ . En changeant certaines résistances, on peut donc facilement réaliser plusieurs fonctions de transfert à la fois. Cette souplesse d'utilisation peut être avantageuse dans certaines applications, par exemple dans des instruments de mesure.

Pour la même raison, la cellule est facile à régler. Si l'on règle dans cet ordre :  $\omega_p$  par  $G_2$ ,  $Q_p$  par  $G_1$ ,  $K$  par  $G_6$ ,  $\omega_z$  par  $G_5$  et  $Q_z$  par  $G_4$ , alors chaque réglage ne perturbe plus le réglage précédent. Par contre, le réglage de la cellule de Deliyannis-Friend est beaucoup plus compliqué.

### 9.2.5 Exemple: cellule dérivée du convertisseur d'impédances

Il y a une cellule à deux amplificateurs opérationnels dont les sensibilités sont similaires à celles de la cellule de Fleischer-Tow. Son utilisation est donc indiquée pour des filtres très sélectifs, surtout en connexion LF, dans le cas où le coût et la consommation de puissance jouent un rôle important.

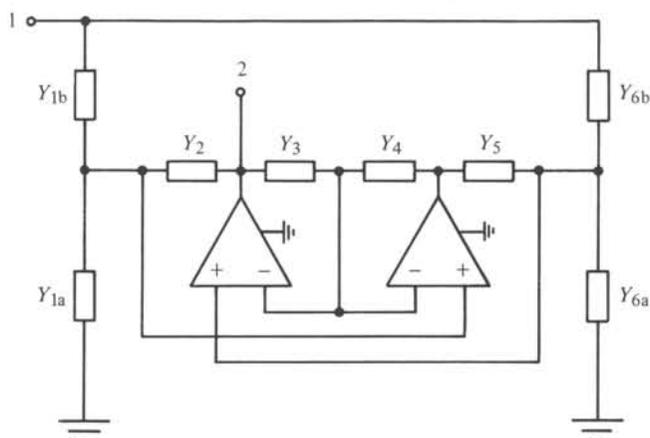


Fig. 9.20

Dans la structure générale représentée à la figure 9.20, on peut mettre en évidence un convertisseur d'impédances qui sera décrit à la section 9.3. La fonction de transfert du nœud 1 au nœud 2 peut être exprimée, en fonction des admittances des branches, comme suit :

$$T = \frac{Y_{1b}(Y_3 Y_5 - Y_4 Y_{6a}) + Y_4 Y_{6b}(Y_{1a} + Y_2)}{Y_1 Y_3 Y_5 + Y_2 Y_4 Y_6} \quad (9.57)$$

où

$$Y_1 = Y_{1a} + Y_{1b} \quad (9.58)$$

$$Y_6 = Y_{6a} + Y_{6b} \quad (9.59)$$

En utilisant deux capacités et pour le restant des  $Y_j$  des conductances, on peut réaliser presque toutes les fonctions de transfert avec pôles dans le demi-plan de gauche et avec facteur d'échelle  $0 \leq K \leq 1$ . Partant de l'expression (9.57), il n'est pas difficile de déterminer les emplacements des capacités qui permettent la synthèse d'une configuration donnée de pôles et zéros. On se limitera ici à la présentation des cas dont on a besoin pour la synthèse des filtres LF.

La fonction de transfert de la cellule représentée à la figure 9.21 a des pôles et des zéros situés sur l'axe imaginaire :

$$T = \frac{G_{1b} C_1 C_2 p^2 + G_4 [G_{6b}(G_{1a} + G_2) - G_{1b} G_{6a}]}{G_1 C_1 C_2 p^2 + G_2 G_4 G_6} \quad (9.60)$$

Inversément, la synthèse d'une fonction de transfert

$$T = K \frac{p^2 + \omega_z^2}{p^2 + \omega_p^2}, \quad 0 \leq K \leq 1 \quad (9.61)$$

s'obtient moyennant les expressions

$$G_{1a} = \frac{1-K}{K} G_{1b} \quad (9.62)$$

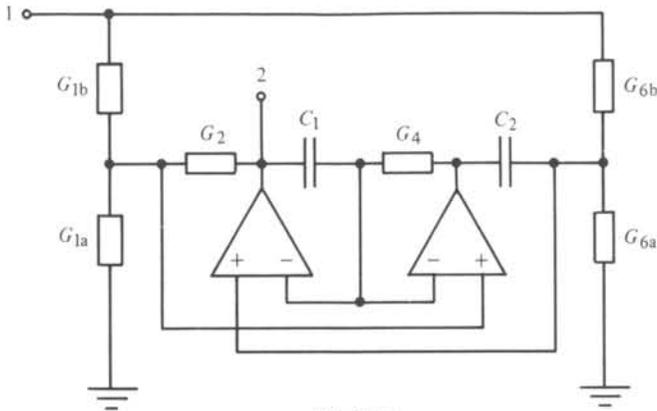


Fig. 9.21

$$G_4 = \frac{C_1 C_2 G_{1b}}{G_2 G_{6b}} \cdot \frac{G_{1b} \omega_p^2 + K \omega_z^2 G_2}{G_{1b} + K G_2} \quad (9.63)$$

$$G_{6a} = \frac{G_{6b}}{K} \cdot \frac{G_{1b} (1 - K) \omega_p^2 + K G_2 (\omega_p^2 - K \omega_z^2)}{G_{1b} \omega_p^2 + K \omega_z^2 G_2} \quad (9.64)$$

où  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $G_{1b}$ ,  $G_2$  et  $G_{6b}$  peuvent être choisis librement.

La fonction de transfert de la cellule représentée à la figure 9.22 a des zéros situés sur l'axe imaginaire et des pôles dans le demi-plan de gauche :

$$T = \frac{G_3 C_1 C_2 p^2 + (G_1 + G_2) G_4 G_6}{G_3 C_1 C_2 p^2 + G_1 G_3 C_2 p + G_2 G_4 G_6} \quad (9.65)$$

Inversément, la synthèse d'une fonction de transfert

$$T = \frac{p^2 + \omega_z^2}{p^2 + \frac{\omega_p}{Q_p} p + \omega_p^2} \quad (9.66)$$

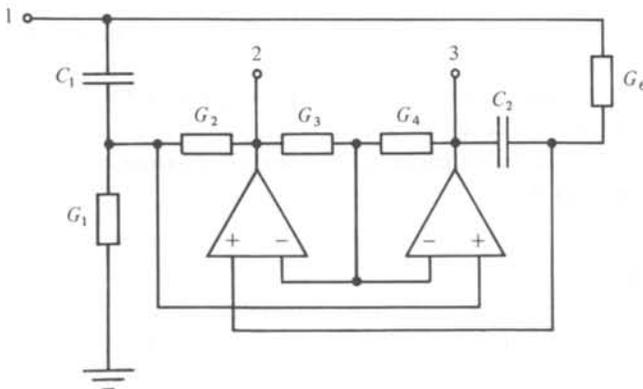


Fig. 9.22

avec  $\omega_z^2 > \omega_p^2$ , s'obtient moyennant les expressions

$$G_1 = \frac{\omega_p}{Q_p} C_1 \quad (9.67)$$

$$G_2 = \frac{\omega_p^3}{\omega_z^2 - \omega_p^2} \cdot \frac{C_1}{Q_p} \quad (9.68)$$

$$G_6 = \frac{G_3 C_2}{G_4} \cdot \frac{\omega_z^2 - \omega_p^2}{\omega_p} Q_p \quad (9.69)$$

où  $C_1, C_2, G_3, G_4$  peuvent être choisis librement. Les fonctions de transfert de la forme (9.66), mais avec  $\omega_p^2 > \omega_z^2$  peuvent être synthétisées en utilisant le circuit de la figure 9.22, mais avec la borne 3 au lieu de 2 comme sortie.

### 9.3 SOUS-CIRCUITS POUR LES FILTRES DE SIMULATION LC DIRECTE

#### 9.3.1 Définition : convertisseur d'impédances

Un *convertisseur d'impédances* est un tripôle qui satisfait l'équation

$$\frac{U_1}{I_1} = -\alpha(p) \frac{U_2}{I_2} \quad (9.70)$$

où le *facteur de conversion*  $\alpha(p)$  est une fonction rationnelle de  $p$  dans la forme irréductible. Le symbole que nous utiliserons est donné à la figure 9.23.

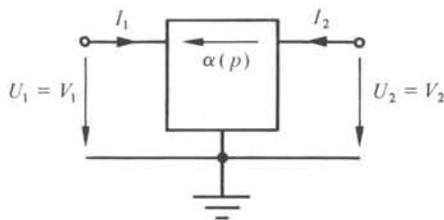


Fig. 9.23

Si les signes des coefficients du numérateur d'une part et du dénominateur d'autre part sont identiques, on dit qu'il s'agit d'un *convertisseur d'impédances positif (négatif)* lorsque ces deux signes sont identiques (opposés). Ceci en supposant une représentation irréductible de  $\alpha$ .

Si la troisième borne n'est pas la terre, c'est un *convertisseur d'impédances (positif, négatif) flottant*.

#### 9.3.2 Commentaires

Un tripôle est normalement défini par deux relations entre les quatre variables  $V_1, I_1, V_2, I_2$ . A titre d'exemple, le circuit de la figure 9.24 implique, en plus de (9.70), l'équation  $V_1 = V_2$ . Il s'agit donc d'un *convertisseur de courant*. Ce fait ne joue pourtant aucun rôle pour les applications.

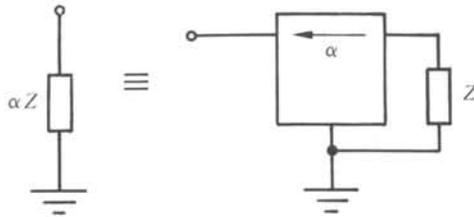


Fig. 9.24

En fermant l'accès 2 sur une impédance  $Z$ , on obtient entre 1 et la terre l'impédance  $\alpha Z$  (fig. 9.24), ce qui justifie le signe négatif dans (9.70), compte tenu de l'orientation de  $I_1$  et  $I_2$ . La relation (9.70) lie les impédances d'entrée et de sortie, sans faire aucune hypothèse sur le type de terminaison.

### 9.3.3 Synthèse du convertisseur d'impédances négatif

Le tripôle de la figure 9.25 est une réalisation RC-active d'un convertisseur d'impédances négatif, où  $Y_1$  et  $Y_2$  peuvent être les admittances de bipôles RC quelconques. En effet, il satisfait les équations

$$V_1 = V_2 \quad (9.71)$$

$$I_1 = \frac{Y_1}{Y_2} I_2 \quad (9.72)$$

Le facteur de conversion est donc  $\alpha = -Y_2/Y_1$ .

Un convertisseur d'impédances négatif flottant s'obtient en utilisant, dans le circuit de la figure 9.25, un amplificateur opérationnel flottant.

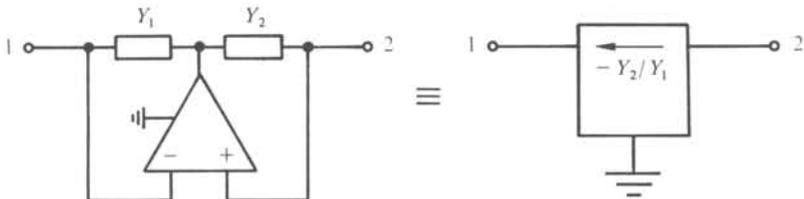


Fig. 9.25

### 9.3.4 Synthèse de la résistance négative

En fermant un convertisseur négatif avec facteur de conversion constant sur une résistance, on obtient une résistance négative. La synthèse d'une résistance négative avec une borne à la terre nécessite par conséquent un amplificateur opérationnel et trois résistances (fig. 9.26).

La résistance négative flottante peut être synthétisée soit par un convertisseur négatif flottant, soit par deux convertisseurs avec une borne à la terre (fig. 9.27). La première possibilité emploie un amplificateur opérationnel flottant, tandis que la deuxième nécessite deux amplificateurs opérationnels normaux.

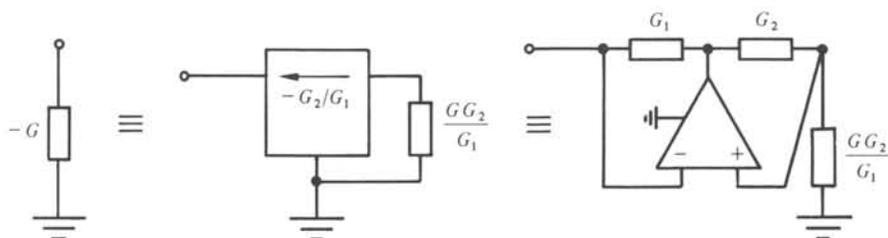


Fig. 9.26

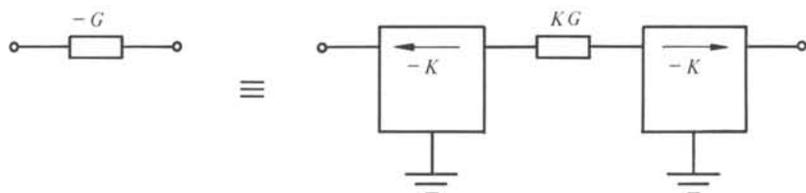


Fig. 9.27

Comme dans la synthèse des cellules biquadratiques, les paramètres libres  $G_1$  et  $G_2$  du circuit de la figure 9.26 doivent être choisis judicieusement.

### 9.3.5 Synthèse du convertisseur d'impédances positif

Deux convertisseurs négatifs en cascade sont équivalents à un convertisseur positif (fig. 9.28). Avec le schéma de la figure 9.25 pour les convertisseurs négatifs, on obtient donc le convertisseur positif de la figure 9.29. Remarquons que les entrées des amplificateurs opérationnels forcent les égalités  $V_1 = V_2 = V_3$ . Ceci reste vrai en les connectant suivant la figure 9.30. Ce convertisseur permet d'éviter l'instabilité des filtres que l'on rencontre en utilisant le convertisseur de la figure 9.29.

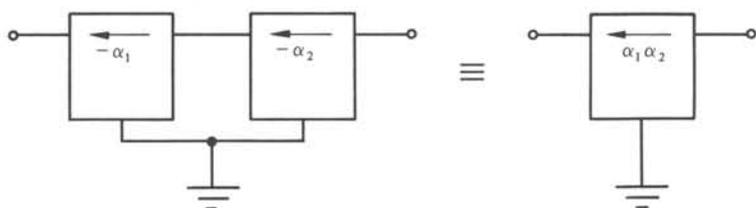


Fig. 9.28

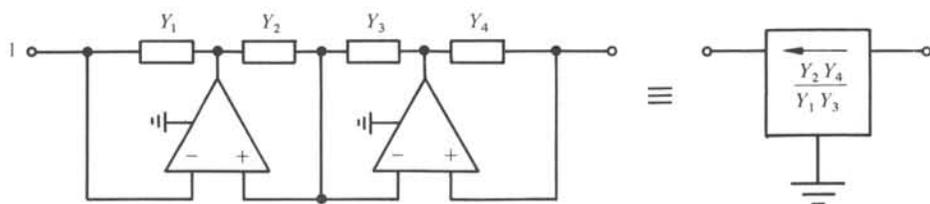


Fig. 9.29

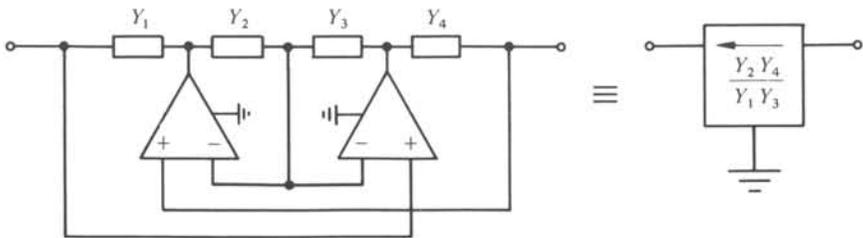


Fig. 9.30

L'emploi d'amplificateurs opérationnels flottants fournit de nouveau un convertisseur positif flottant.

Les facteurs de conversion les plus importants sont  $p/\omega_n$  et  $(p/\omega_n)^2$ , où  $\omega_n$  est une pulsation de normalisation arbitraire. Les convertisseurs correspondants sont représentés aux figures 9.31 et 9.32.

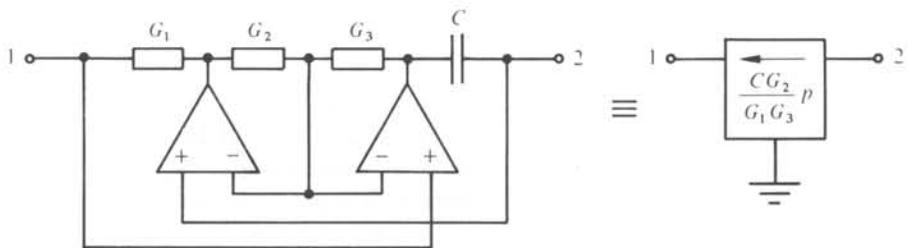


Fig. 9.31

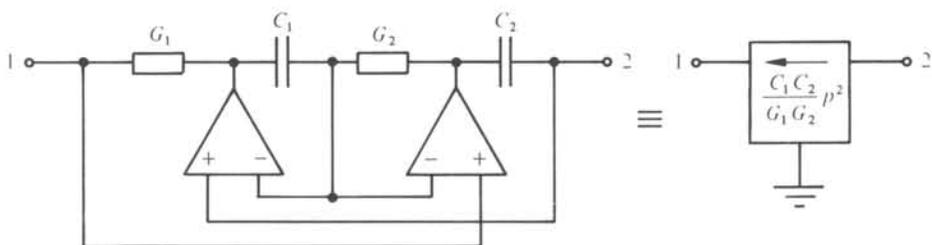


Fig. 9.32

### 9.3.6 Synthèse du FDNC, du FDNR et de l'inductance

En fermant les convertisseurs positifs des figures 9.31 et 9.32 sur une résistance ou une capacité, on obtient un FDNC, un FDNR ou une inductance avec une borne à la terre (fig. 9.33 à 9.35).

Comme dans le cas de la résistance négative, l'élément flottant s'obtient soit en utilisant un convertisseur flottant, soit en utilisant deux convertisseurs avec une borne à la terre.

Dans chaque synthèse, on dispose de quatre paramètres libres pour une optimisation. Une discussion à ce propos sera effectuée au paragraphe 9.7.12.

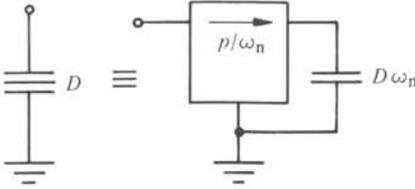


Fig. 9.33

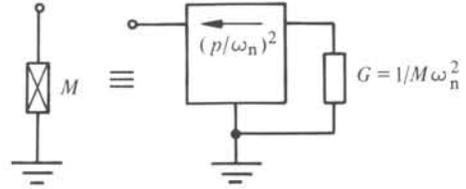


Fig. 9.34

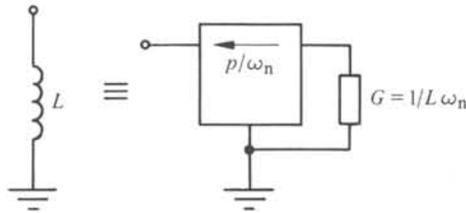


Fig. 9.35

### 9.3.7 Commentaires

On a vu à la section 8.3 qu'il serait important de pouvoir disposer de FDNC flottants. D'après les paragraphes 9.3.3 à 9.3.6, il y a deux possibilités pour synthétiser des éléments flottants, chacune avec ses désavantages propres. D'une part, l'emploi d'amplificateurs opérationnels flottants serait une solution intéressante, mais seulement si de tels amplificateurs étaient produits en masse sous forme intégrée, avec un coût et une consommation de puissance comparable à ceux des amplificateurs opérationnels normaux, ce qui n'est pas le cas à présent. D'autre part, l'emploi de quatre amplificateurs opérationnels pour un seul FDNC flottant est également une solution qui coûte cher et qui gaspille de la puissance. Cette situation nous a amenés à ne considérer que des FDNC et FDNR contre terre à la section 8.3.

Il existe des synthèses de FDNC et FDNR avec un seul amplificateur opérationnel. Elles ne sont pourtant pas adaptées à la simulation de filtres LC parce que des imprécisions sur les éléments passifs causent l'équivalent de pertes (ou de gains) dans le filtre LC. Leur utilisation est de ce fait compromise dans des filtres très sélectifs où précisément les simulations de filtres LC sont intéressantes.

### 9.3.8 Synthèse du gyrateur

Le biporte de la figure 9.36 a la matrice d'admittances

$$Y = \begin{pmatrix} G_1 - \frac{G_2 G_4}{G_5} & \frac{G_2 G_4}{G_5} \\ -G_2 & G_2 - \frac{G_3 G_6}{G_7} \end{pmatrix} \quad (9.73)$$

Si

$$G_2 = G_1 \quad (9.74)$$

$$G_5 = G_4 \quad (9.75)$$

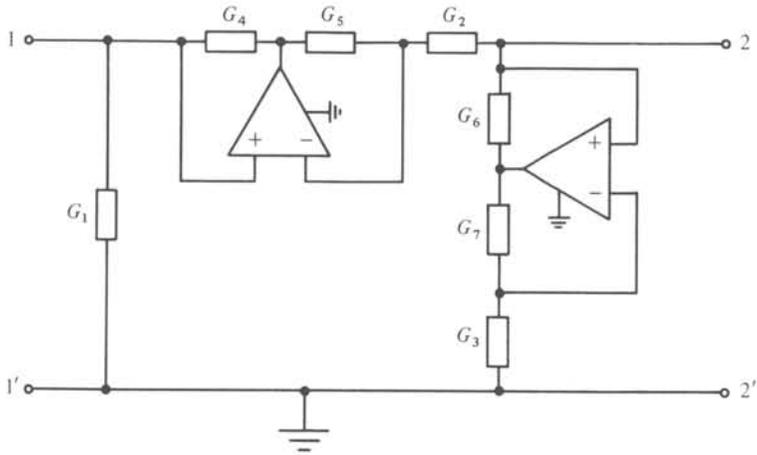


Fig. 9.36

$$\frac{G_3 G_6}{G_7} = G_1 \quad (9.76)$$

le gyrateur a alors une conductance de gyration  $G_1$ . On reconnaît dans le circuit de la figure 9.36 deux convertisseurs négatifs avec facteur de conversion constant, dont un pour réaliser une résistance négative parallèle.

Un autre schéma pour le gyrateur est engendré par l'inductance simulée des figures 9.31 et 9.35, comme d'ailleurs pour la plupart des inductances simulées par un bipôle RC-actif avec une seule capacité. On transforme le bipôle en biporte en remplaçant la capacité par un accès. Cette transformation, appliquée au bipôle de la figure 9.35, réalisé par le convertisseur de la figure 9.31, engendre le biporte de la figure 9.37. Sa matrice d'admittances est

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & \frac{G_1 G_3}{G_2} \\ -G_4 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.77)$$

si

$$G_4 = G_1 G_3 / G_2 \quad (9.78)$$

c'est un gyrateur avec conductance de gyration  $-G_1 G_3 / G_2$ .

### 9.3.9 Commentaire

Le circuit de la figure 9.37 est un quadripôle dont le comportement en biporte n'est pas garanti. L'égalité des courants entrant dans 2 et sortant de 2' doit être assurée par le circuit connecté à cet accès. Ceci est bien le cas si l'accès 2 est fermé sur une capacité pour simuler une inductance. Par contre, ce gyrateur est inutilisable dans les structures des figures 8.25 et 8.26.

Les éléments diagonaux de la matrice d'admittances du gyrateur de la figure 9.37 sont nuls, indépendamment des valeurs des résistances. Les imprécisions sur les valeurs

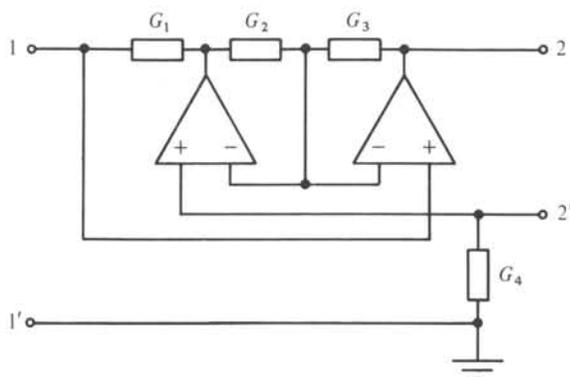


Fig. 9.37

des résistances auront donc un effet moins important dans ce gyrateur que dans celui de la figure 9.36. Davantage de détails à ce sujet seront donnés au paragraphe 9.7.14.

Ces deux exemples de gyrateurs sont typiques de l'ensemble des gyrateurs RC-actifs que l'on trouve dans la littérature. Soit les éléments diagonaux de la matrice d'admittances ne sont nuls que pour des valeurs précises des résistances, soit le gyrateur n'est pas un tripôle, mais un quadripôle qui ne fonctionne pas forcément comme biporte [38].

## 9.4 FILTRES CASCADE

### 9.4.1 Définition : filtre cascade

Un filtre RC-actif à transfert de tension, dont les cellules constitutantes sont connectées selon la figure 9.38, est appelé *filtre cascade*.

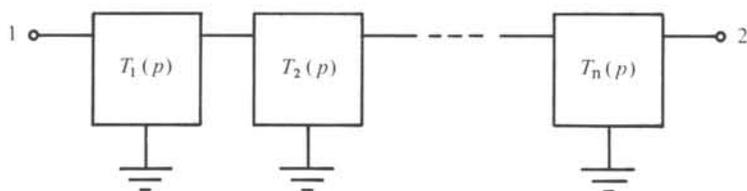


Fig. 9.38

### 9.4.2 Synthèse du filtre cascade

Par définition, la fonction de transfert du filtre cascade est le produit des fonctions de transfert de cellules constitutantes.

La synthèse du filtre cascade est par conséquent très simple. Etant donné une fonction de transfert de degré  $2n$ , on décompose son dénominateur en  $n$  facteurs quadratiques. Le numérateur est également à décomposer en  $n$  facteurs mais ils peuvent avoir les degrés 0, 1 ou 2. En groupant les facteurs du dénominateur avec les facteurs du numérateur par paires, on obtient  $n$  fonctions de transfert que l'on synthétise par des cellules biquadratiques. Leur mise en cascade complète la synthèse.

### 9.4.3 Exemple

On propose de synthétiser dans une structure cascade une fonction de transfert d'un filtre passe-bas de degré 8. L'affaiblissement nominal de ce filtre satisfait aux exigences de la figure 1.2 avec une ondulation égalisée dans la bande passante de 0,0044 dB et des minima égalisés à 46 dB dans la bande coupée (fig. 9.39). Il n'y a pas de pôles d'affaiblissement à l'infini.

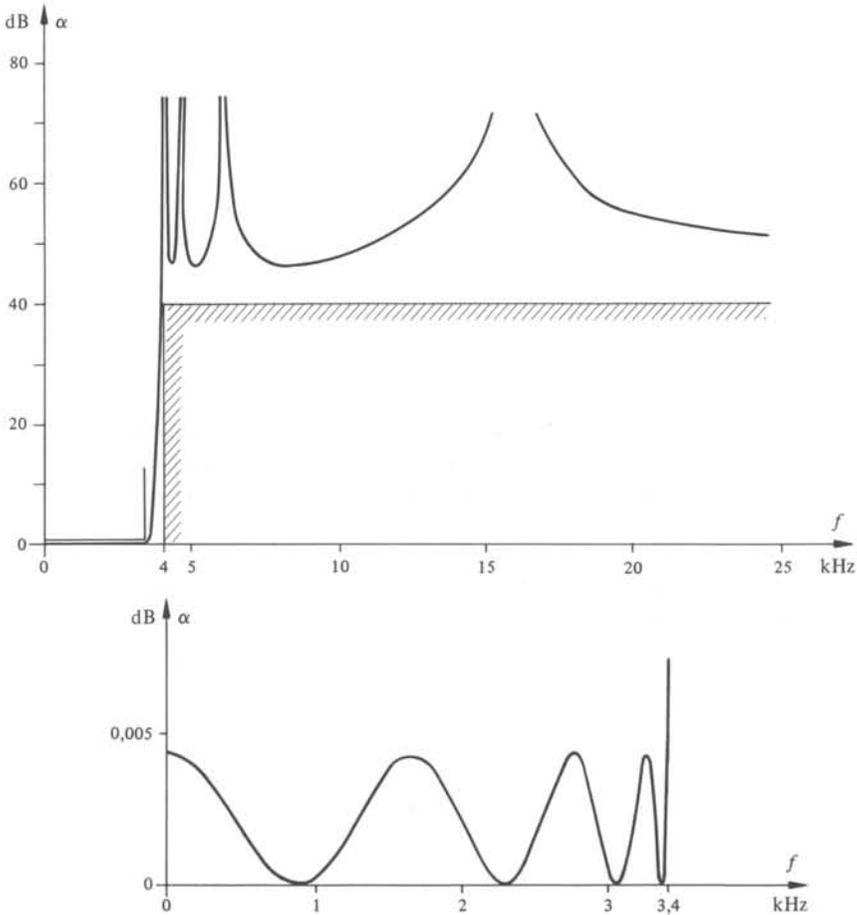


Fig. 9.39

Le filtre comporte quatre cellules biquadratiques; la structure est identique à celle de la figure 9.38 pour  $n = 4$ . Les cellules sont de type Deliyannis-Friend définies au paragraphe 9.2.3. Les facteurs d'échelle  $K$  de chaque cellule sont choisis tels que le module du gain maximum entre l'entrée du filtre et la sortie de chaque cellule soit borné à l'unité dans la bande passante.

On a groupé les pôles et les zéros et choisi la séquence d'extraction des cellules de façon à minimiser l'indice de sensibilité.

Pour chaque cellule, on donne au tableau 9.40 les valeurs des paramètres et des éléments. Les identificateurs des éléments se réfèrent à ceux de la figure 9.18.

Tableau 9.40

Cellule No.	1	2	3	4
$K$	0,0339	0,2998	0,6227	0,7912
$\omega_z$	97 184 rad/s	37 304 rad/s	27 881 rad/s	25 381 rad/s
$\omega_p$	17 900 rad/s	20 427 rad/s	22 001 rad/s	22 583 rad/s
$Q_p$	0,5657	1,183	3,164	12,67
$C_1$	56 nF	5,6 nF	5,6 nF	5,6 nF
$C_2$	5,6 nF	56 nF	56 nF	56 nF
$R_1$	50 k $\Omega$	10 k $\Omega$	10 k $\Omega$	10 k $\Omega$
$R_2$	103,5 $\Omega$	142,8 $\Omega$	7,951 k $\Omega$	14,37 k $\Omega$
$R_3$	216,9 $\Omega$	4,847 k $\Omega$	25,41 k $\Omega$	69,83 k $\Omega$
$R_4$	2,378 k $\Omega$	16,81 k $\Omega$	4,500 k $\Omega$	3,488 k $\Omega$
$R_5$	2,950 k $\Omega$	333,6 $\Omega$	4,818 k $\Omega$	3,792 k $\Omega$
$R_6$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$R_7$	5,028 k $\Omega$	710,8 $\Omega$	634,7 $\Omega$	506,5 $\Omega$
$R_8$	5,833 k $\Omega$	10,95 k $\Omega$	10,39 k $\Omega$	13,33 k $\Omega$

#### 9.4.4 Commentaire

Un filtre cascade de degré  $2n$  nécessite au moins  $n$  amplificateurs opérationnels. Cependant, il y a des méthodes de synthèse qui se contentent d'un seul amplificateur pour le filtre entier. Mais leur mise en œuvre est largement compromise par une très haute sensibilité.

Ce n'est pas seulement la sensibilité relativement basse qui a rendu le filtre cascade très populaire, mais aussi sa modularité et sa synthèse facile. Pour des exigences de filtrage qui ne sont pas trop sévères, c'est souvent le meilleur choix. Ceci suppose naturellement que la cellule biquadratique choisie soit performante dans la mise en cascade, par exemple la cellule de la figure 9.18.

Pour des filtres plus sélectifs, la structure cascade est encore trop sensible et des filtres à contre-réactions multiples doivent être envisagés, comme par exemple les filtres LF ou FLF.

### 9.5 FILTRES À TRANSFERT DE TENSION EN CONNEXION "LEAPFROG"

#### 9.5.1 Equations de branches d'un circuit en échelle

Les courants des branches série et les tensions des branches parallèles d'un circuit en échelle (fig. 9.41) satisfont les équations suivantes :

$$(E - U_2) Y_1 = I_1 \quad (9.79)$$

$$(I_1 - I_3) Z_2 = U_2 \quad (9.80)$$

$$\vdots$$

$$(U_{2n-2} - U_{2n}) Y_{2n-1} = I_{2n-1} \quad (9.81)$$

$$I_{2n-1} \cdot Z_{2n} = U_{2n} \quad (9.82)$$

On peut présenter ce système d'équations par le système de la figure 9.42.

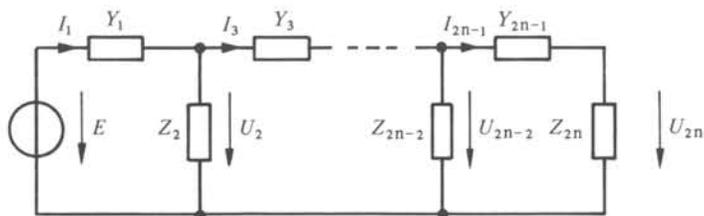


Fig. 9.41

En particulier, on s'intéresse à un filtre LC passe-bande de classe 12 et de degré  $4n$  (fig. 9.43). Les admittances et impédances des bras sont alors

$$Y_1 = K_1 \frac{p}{p^2 + \frac{\hat{\omega}_1}{Q_1} p + \hat{\omega}_1^2} \quad (9.83)$$

$$Z_{2j} = \frac{K_{2j}}{p} \cdot \frac{p^2 + \omega_{2j}^2}{p^2 + \hat{\omega}_{2j}^2} \quad (9.84)$$

$$Y_{2j+1} = K_{2j+1} \cdot p \frac{p^2 + \omega_{2j+1}^2}{p^2 + \hat{\omega}_{2j+1}^2} \quad (9.85)$$

$$Z_{2n} = K_{2n} \frac{p}{p^2 + \frac{\hat{\omega}_{2n}}{Q_{2n}} p + \hat{\omega}_{2n}^2} \quad (9.86)$$

$j = 1, \dots, n-1$

avec

$$K_1 = \frac{1}{L_1} \quad (9.87)$$

$$\hat{\omega}_1^2 = \frac{1}{L_1 C_1} \quad (9.88)$$

$$Q_1 = G_1 \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \quad (9.89)$$

$$K_{2j} = \frac{1}{C_{2j}} \quad (9.90)$$

$$\hat{\omega}_{2j}^2 = \omega_{2j}^2 + \frac{1}{L_{2j} C_{2j}} \quad (9.91)$$

$$K_{2j+1} = \frac{C_{2j+1}}{1 + L_{2j+1} \cdot C_{2j+1} \cdot \omega_{2j+1}^2} \quad (9.92)$$

$$\hat{\omega}_{2j+1}^2 = \frac{\omega_{2j+1}^2}{1 + L_{2j+1} \cdot C_{2j+1} \cdot \omega_{2j+1}^2} \quad (9.93)$$

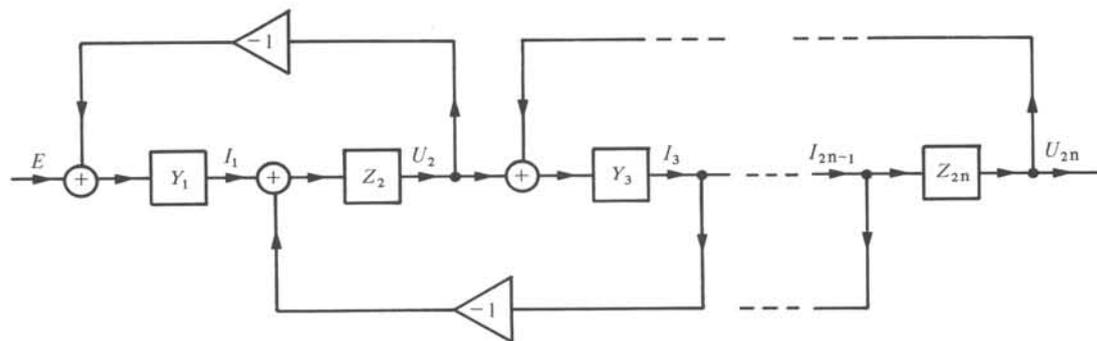


Fig. 9.42

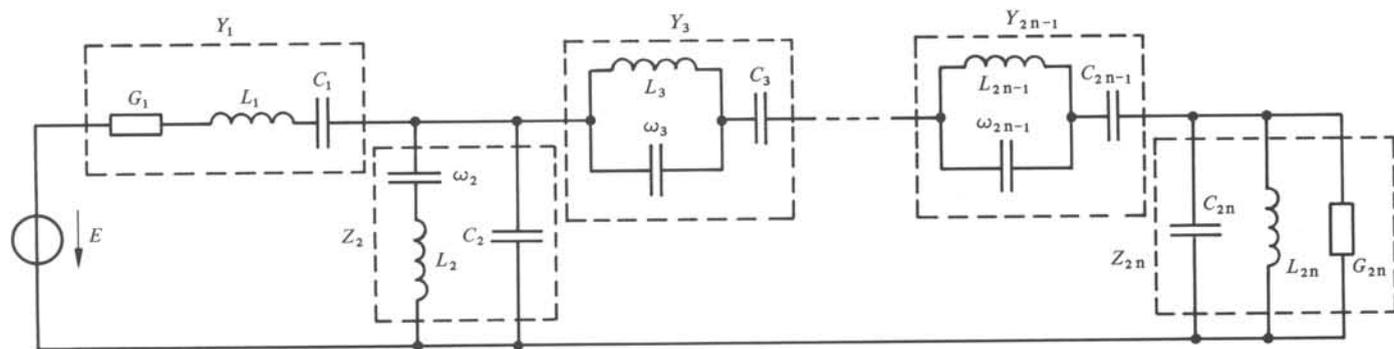


Fig. 9.43

$$K_{2n} = \frac{1}{C_{2n}} \quad (9.94)$$

$$\hat{\omega}_{2n}^2 = \frac{1}{L_{2n}C_{2n}} \quad (9.95)$$

$$Q_{2n} = \frac{1}{G_{2n}} \sqrt{\frac{C_{2n}}{L_{2n}}} \quad (9.96)$$

### 9.5.2 Définition : filtre "leapfrog"

Un filtre "leapfrog" (ou *filtre LF*) est un filtre RC-actif à transfert de tension dont le système associé a la structure de la figure 9.42.

### 9.5.3 Commentaire

La structure particulière des boucles de contre-réaction, dans le système de la figure 9.42, est à l'origine du nom anglais "leapfrog", dont l'équivalent français est "saute-mouton".

### 9.5.4 Synthèse du filtre LF

Le système de la figure 9.42 peut être synthétisé selon la méthode du paragraphe 9.1.17. Les fonctions de transfert des cellules sont alors  $Z_{2j}$  et  $Y_{2j+1}$ . Dans le cas du filtre LC de la figure 9.43, elles sont de degré trois, à l'exception de  $Y_1$  et  $Z_{2n}$ . Le troisième degré provient uniquement d'un facteur  $p$  au numérateur ou au dénominateur. Il est possible de l'éliminer en récrivant le système d'équations (9.79) à (9.82); on remplace  $Y_{2j+1}$  par  $Y_{2j+1}/C_0p$ ,  $Z_{2j}$  par  $Z_{2j}C_0p$  et  $I_{2j+1}$  par  $I_{2j+1}/C_0p$ , où  $C_0$  est une capacité de normalisation arbitraire. Le système correspondant est représenté à la figure 9.44; sa synthèse conduit à un filtre à transfert de tension avec cellules biquadratiques.

### 9.5.5 Commentaires

Le passage du système de la figure 9.42 à celui de la figure 9.44 équivaut à la multiplication de toutes les impédances dans le circuit de la figure 9.41 ou 9.43 par  $p$ . C'est donc une transformation du type utilisé pour les filtres à FDNC/FDNR, à la section 8.3.

Notons que non seulement les zéros de cellules biquadratiques dans le filtre LF, mais aussi les pôles des cellules (sauf les deux cellules extrêmes), sont situés sur l'axe imaginaire, contrairement au cas des filtres cascade.

La méthode n'est pas limitée aux filtres LC de la figure 9.43. Chaque filtre en échelle est transformable en filtre LF de cette manière, mais l'utilisation des éléments actifs n'est pas toujours aussi efficace.

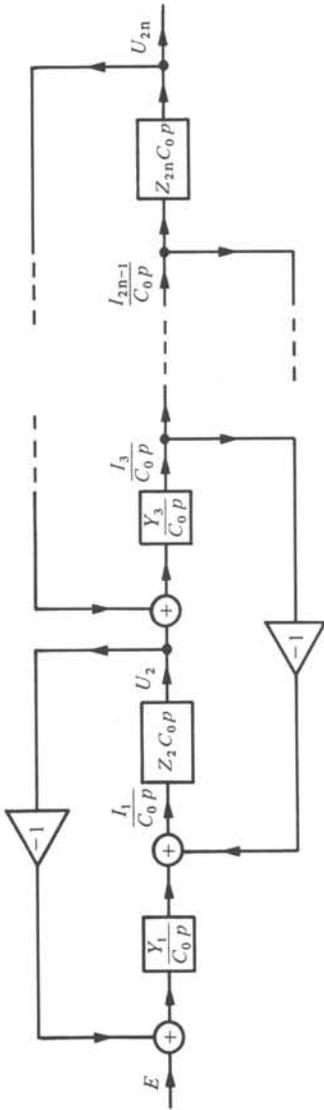


Fig. 9.44

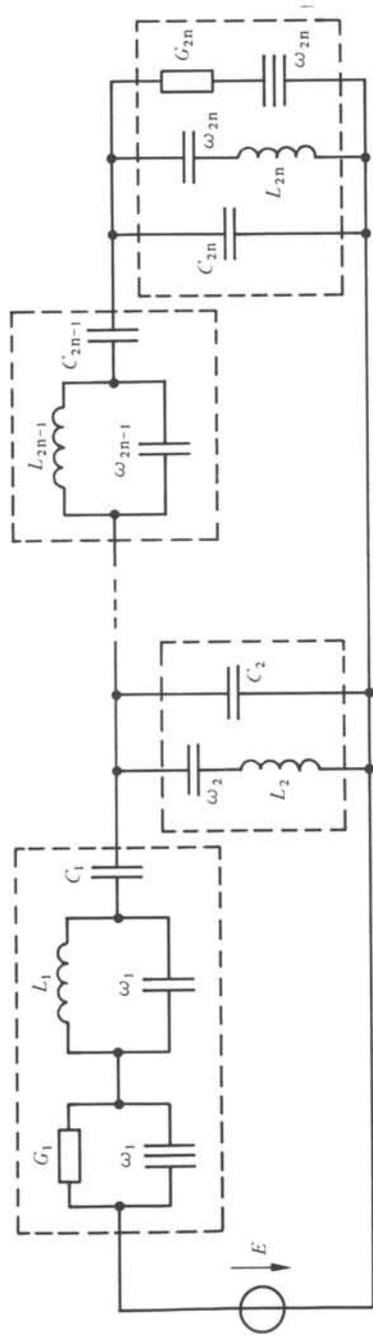


Fig. 9.45

### 9.5.6 Synthèse de filtres LF dérivés de filtres LC entre terminaisons généralisées

On peut aller encore un pas plus loin. Toutes les branches du filtre LC de la figure 9.43 réalisent une paire de pôles d'affaiblissement finis, sauf les deux branches extrêmes qui réalisent chacune un pôle en zéro et à l'infini. Cette exception peut être éliminée en utilisant des terminaisons qui dépendent de la fréquence.

En effet, les immittances des branches extrêmes du circuit représenté à la figure 9.45 sont

$$\frac{Y_1}{C_0 p} = K_1 \frac{p^2 + \omega_1^2}{p^2 + \frac{\hat{\omega}_1}{Q_1} p + \hat{\omega}_1^2} \quad (9.97)$$

$$Z_{2n} \cdot C_0 p = K_{2n} \frac{p^2 + \omega_{2n}^2}{p^2 + \frac{\hat{\omega}_{2n}}{Q_{2n}} p + \hat{\omega}_{2n}^2} \quad (9.98)$$

où  $K_1 C_0$ ,  $\hat{\omega}_1$  et  $K_{2n}/C_0$ ,  $\hat{\omega}_{2n}$  sont donnés par les équations (9.92), (9.93) et (9.90), (9.91), en posant  $j = 0$  et  $j = n$ , respectivement, et

$$Q_1 = \frac{G_1}{C_1 \hat{\omega}_1} \quad (9.99)$$

$$Q_{2n} = \frac{\hat{\omega}_{2n}}{K_{2n} G_{2n}} \quad (9.100)$$

Le filtre RC-actif que l'on déduit du système de la figure 9.44, ne contient bien que des cellules biquadratiques.

Le circuit de la figure 9.45 est un biporte non dissipatif, placé entre des terminaisons non réactives qui dépendent de la fréquence. L'analyse et la synthèse de ce genre de structure ont été décrits aux paragraphes 8.3.16 à 8.3.26. La remarque du paragraphe 8.3.15 concernant la sensibilité est également applicable.

Dans la terminologie du paragraphe 8.3.23,  $j\omega_1$  et  $j\omega_{2n}$  sont des pôles d'affaiblissement créés par le biporte et les terminaisons conjointement, et les fréquences 0 et  $\infty$  sont des pôles d'affaiblissement du biporte qui sont détruits par les terminaisons. Par conséquent, pour l'approximation, il n'est pas nécessaire de prévoir des pôles de réflexion en  $j\omega_1$  et  $j\omega_{2n}$  et la caractéristique n'a pas de pôle d'affaiblissement à l'origine ni à l'infini, ce qui est un avantage supplémentaire, déjà mentionné au paragraphe 8.3.24.

En conclusion, les cellules biquadratiques extrêmes sont employées de façon plus efficace qu'au paragraphe 9.5.4.

### 9.5.7 Exemple

On propose de synthétiser dans une structure LF la fonction de transfert passe-bande de degré dix définie pour l'exemple du paragraphe 8.3.25.

Le filtre comporte cinq cellules biquadratiques. Le système correspondant est celui de la figure 9.44 pour  $n = 5$ . On utilisera les cellules dérivées du convertisseur d'impédance définies au paragraphe 9.2.4.

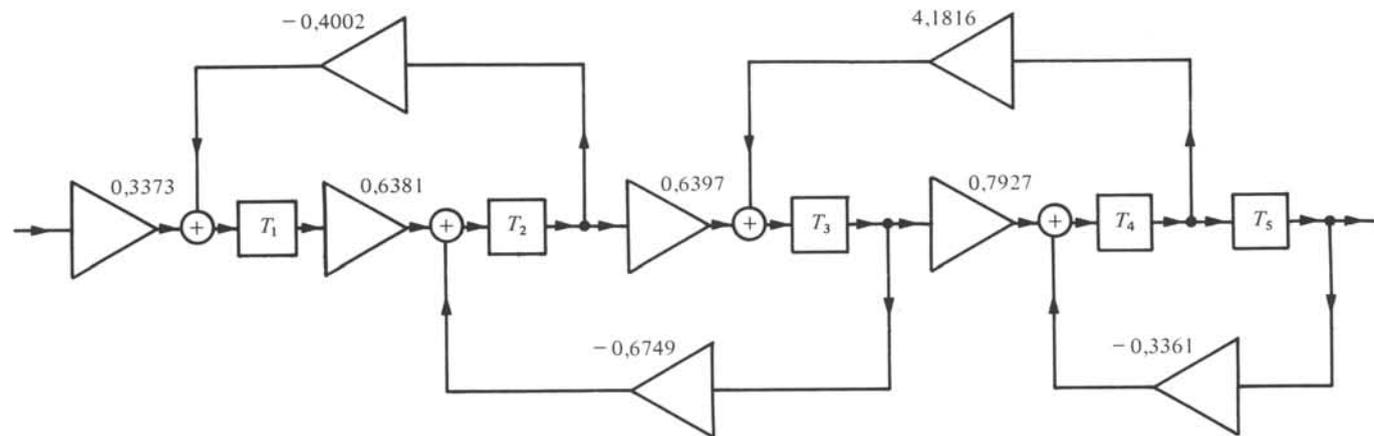


Fig. 9.46

Pour optimiser la dynamique, les coefficients des multiplicateurs ont été ajustés et des multiplicateurs supplémentaires ont été introduits de façon à maintenir borné à l'unité le module des fonctions de transfert entre l'entrée du filtre et la sortie de chaque cellule biquadratique. De plus, le coefficient du multiplicateur connecté entre le nœud entre les cellules 4 et 5 et le sommateur entre les nœuds 2 et 3 ont été changés de signe afin de permettre de changer les signes des facteurs d'échelle des cellules 4 et 5. Autrement, ces facteurs d'échelle seraient négatifs et par conséquent irréalisables par les cellules des figures 9.21 et 9.22. Le système résultant est représenté à la figure 9.46.

On a cherché l'ordre d'extraction des pôles d'affaiblissement donnant l'indice de sensibilité minimum.

Pour chaque cellule, on donne au tableau 9.47 les valeurs des paramètres et des composants ainsi que les composants du sommateur qui précède la cellule. Les identificateurs des composants se réfèrent aux figures 9.21, 9.22 et 9.15.

Tableau 9.47

Cellule No.	1	2	3	4	5
$K$	1	0,6795	0,6931	0,1209	1
$\omega_z$	45 993 rad/s	102 828 rad/s	71 370 rad/s	67 534 rad/s	170 950 rad/s
$\omega_p$	88 208 rad/s	88 525 rad/s	80 231 rad/s	79 054 rad/s	82 213 rad/s
$Q_p$	6,814	$\infty$	$\infty$	$\infty$	2,963
$C_1$	10 nF				
$C_2$	10 nF				
$R_1$	7,725 k $\Omega$				3,604 k $\Omega$
$R_{1a}$		10 k $\Omega$	10 k $\Omega$	10 k $\Omega$	
$R_{1b}$		4,717 k $\Omega$	4,429 k $\Omega$	72,69 k $\Omega$	
$R_2$	562,5 $\Omega$	3,205 k $\Omega$	3,069 k $\Omega$	8,791 k $\Omega$	11,98 k $\Omega$
$R_3$	1 k $\Omega$				10 k $\Omega$
$R_4$	10 k $\Omega$	1,130 k $\Omega$	1,246 k $\Omega$	1,265 k $\Omega$	1 k $\Omega$
$R_6$	228,5 $\Omega$				1,235 k $\Omega$
$R_{6a}$		5,595 k $\Omega$	3,286 k $\Omega$	1,413 k $\Omega$	
$R_{6b}$		1,415 k $\Omega$	2,008 k $\Omega$	12,09 k $\Omega$	
$R_0^+$	10 k $\Omega$	10 k $\Omega$	10 k $\Omega$	10 k $\Omega$	
$R_1^+$	31,51 k $\Omega$	16,25 k $\Omega$	18,43 k $\Omega$	6,855 k $\Omega$	
$R_2^+$			2,819 k $\Omega$		
$R_0^-$	10 k $\Omega$	10 k $\Omega$	10 k $\Omega$	10 k $\Omega$	
$1/(G^- - G_0^-)$			2 k $\Omega$		
$R_1^-$	24,99 k $\Omega$	14,82 k $\Omega$		29,75 k $\Omega$	

### 9.5.8 Commentaires

Bien que les filtres LF et les filtres à FDNC/FDNR simulent tous les deux des filtres LC et bien que les procédés de synthèse soient en partie identiques, il y a une différence fondamentale : aux tensions et courants du filtre LC correspondent des tensions et des courants du filtre à FDNC/FDNR, tandis que le filtre LF simule les deux par des tensions. C'est pour cette raison que le filtre LF n'est pas classé comme filtre de simulation LC directe.

Les avantages de la version du paragraphe 9.5.6 ont été mentionnés. Les arguments en faveur de la version du paragraphe 9.5.4 sont que la synthèse du prototype LC est une synthèse classique et qu'on peut placer le maximum de points d'insensibilité (zéros) sur, et non seulement proche, de l'axe imaginaire.

Comme c'est le cas des filtres à FDNC/FDNR, les filtres LF héritent des filtres LC leur faible sensibilité, pour autant que la cellule biquadratique utilisée soit adaptée à la simulation. Ce point sera repris au paragraphe 9.7.15.

## 9.6 FILTRES À TRANSFERT DE TENSION EN CONNEXION "FOLLOW THE LEADER FEEDBACK"

### 9.6.1 Définition : filtre "follow the leader feedback"

Un filtre "follow the leader feedback" (ou *filtre FLF*) est un filtre RC-actif à transfert de tension dont le système associé a la structure de la figure 9.48.

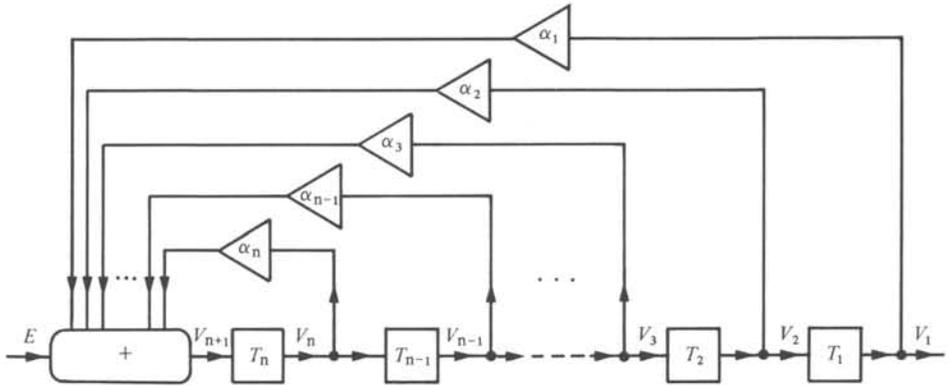


Fig. 9.48

### 9.6.2 Commentaires

Les filtres FLF ont montré en pratique des propriétés de sensibilité assez bonnes sans qu'on puisse pour autant le justifier, comme c'était le cas des filtres LF, par l'équivalence avec un filtre LC.

Remarquons que le système de la figure 9.14 est le cas particulier  $n = 2$  de celui de la figure 9.48. Sa synthèse (fig. 9.16) est donc un filtre FLF.

### 9.6.3 Analyse de filtres FLF

Les équations suivantes peuvent être lues directement de la figure 9.48 :

$$V_i = V_{n+1} \prod_{j=i}^n T_j, \quad i = 1, \dots, n \quad (9.101)$$

$$V_{n+1} = E + \sum_{i=1}^n \alpha_i V_i \quad (9.102)$$

d'où l'expression pour la fonction de transfert

$$T = \frac{V_1}{E} = \frac{\prod_{j=1}^n T_j}{1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \prod_{j=i}^n T_j} \quad (9.103)$$

### 9.6.4 Synthèse des filtres FLF

Etant donné une fonction de transfert  $T$  de degré  $2n$ , et  $n$  nombres réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  quelconques, on cherche les fonctions de transfert biquadratiques  $T_1, \dots, T_n$  telles que  $T$  est réalisé comme  $V_1/E$  par le système de la figure 9.48. La solution s'obtient de façon récursive.

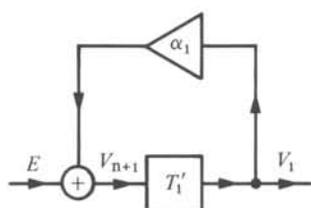


Fig. 9.49

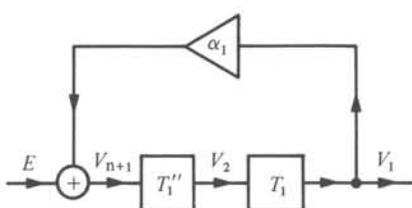


Fig. 9.50

Dans un premier pas, on synthétise  $T$  par le système de la figure 9.49. D'après (9.103), pour  $n = 1$ , il faut donc que

$$T = \frac{T'_1}{1 - \alpha_1 T'_1} \quad (9.104)$$

ce qui est vérifié par

$$T'_1 = \frac{T}{1 + \alpha_1 T} \quad (9.105)$$

Ensuite on factorise  $T'_1$  en un produit d'une fonction biquadratique  $T_1$  et d'une fonction rationnelle de degré  $(2n - 2)$   $T''_1$  (fig. 9.50).

Le second pas est une répétition du premier, mais avec  $T''_1$  au lieu de  $T$ , et  $\alpha_2$  au lieu de  $\alpha_1$ . Le système résultant est celui de la figure 9.51.

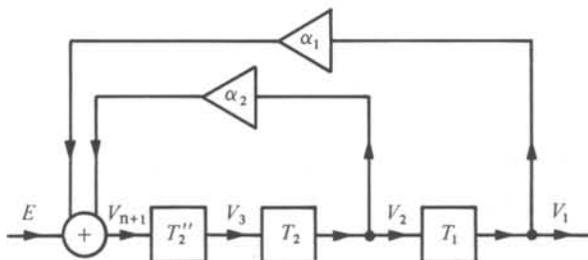


Fig. 9.51

En répétant le procédé  $n$  fois, on arrive au système de la figure 9.48.

### 9.6.5 Commentaire

Comme il résulte du procédé de synthèse du paragraphe 9.6.4, les coefficients de contre-réaction peuvent être librement choisis, y compris leur signe. On les utilisera principalement pour minimiser la sensibilité, ce qui sera décrit au paragraphe 9.7.18.

### 9.6.6 Exemple

On propose de synthétiser la fonction de transfert de passe-bas de degré 8, introduite au paragraphe 9.4.3 par un filtre FLF. Le filtre comporte quatre cellules biquadratiques de type Deliyannis-Friend (fig. 9.18). Le meilleur ordre des pôles d'affaiblissement du point de vue sensibilités a été adopté. Les coefficients des multiplicateurs ont été choisis dans le but d'optimiser la sensibilité et la dynamique. Ils sont représentés à la figure 9.52. Les paramètres et les valeurs des éléments de chaque cellule sont rapportés dans le tableau 9.53. Les valeurs des résistances du sommateur se trouvent en bas du tableau 9.53. Ce filtre est à comparer avec le filtre cascade du paragraphe 9.4.3, qui comporte un amplificateur opérationnel en moins mais qui est moins performant en ce qui concerne les sensibilités (§ 9.7.10 et § 9.7.19).

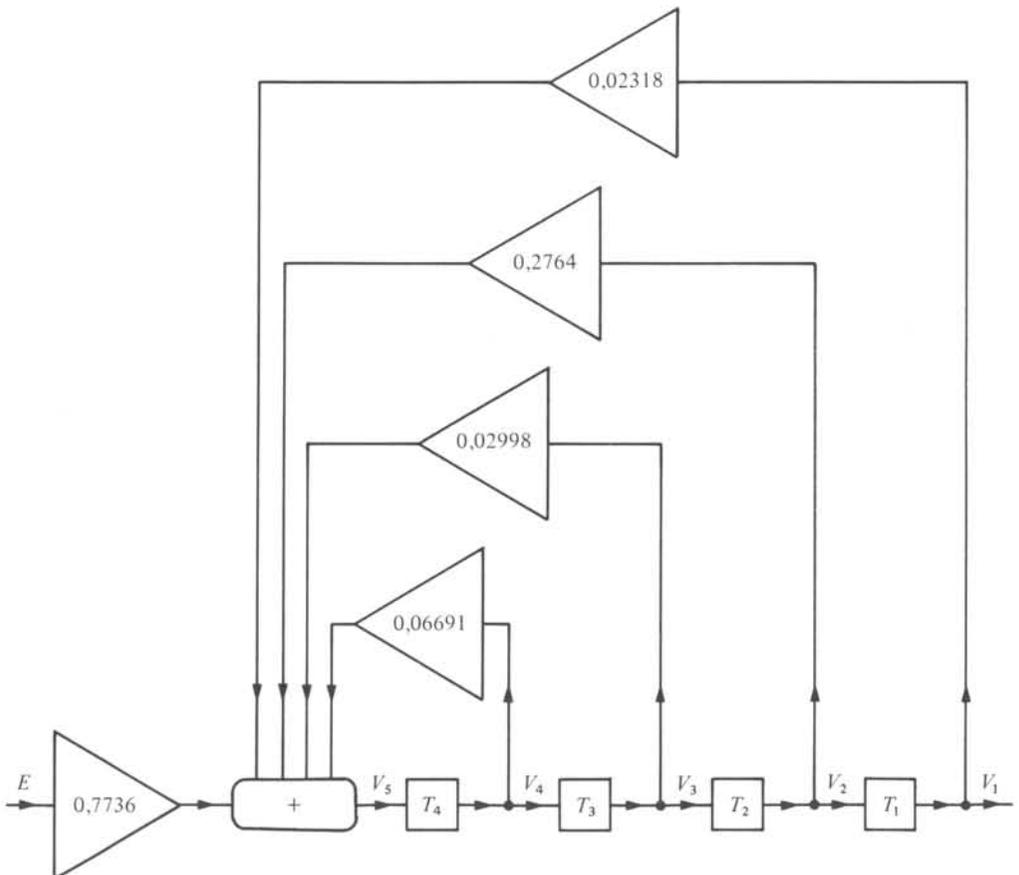


Fig. 9.52

Tableau 9.53

Cellule No.	1	2	3	4
$K$	0,0774	0,4165	0,2494	0,7435
$\omega_z$	97 184 rad/s	37 304 rad/s	27 881 rad/s	25 381 rad/s
$\omega_p$	18 482 rad/s	22 233 rad/s	21 287 rad/s	22 688 rad/s
$Q_p$	0,5748	1,225	5,686	8,026
$C_1$	5,6 nF	5,6 nF	5,6 nF	56 nF
$C_2$	56 nF	56 nF	5,6 nF	5,6 nF
$R_1$	20 k $\Omega$	20 k $\Omega$	10 k $\Omega$	10 k $\Omega$
$R_2$	108,4 $\Omega$	171,4 $\Omega$	266,4 $\Omega$	389,9 $\Omega$
$R_3$	226,3 $\Omega$	10,74 k $\Omega$	50,52 k $\Omega$	188,6 k $\Omega$
$R_4$	4,929 k $\Omega$	17,94 k $\Omega$	272,1 $\Omega$	560,2 $\Omega$
$R_5$	1,291 k $\Omega$	240,1 $\Omega$	802,0 $\Omega$	134,5 $\Omega$
$R_6$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$R_7$	172,5 $\Omega$	734,5 $\Omega$	4,083 k $\Omega$	2,273 k $\Omega$
$R_8$	46,86 k $\Omega$	34,95 k $\Omega$	19,22 k $\Omega$	5,299 k $\Omega$
sommateur: $R_0^- = 1/(G^- - G_0^-) = 10 \text{ k}\Omega$ , $R_0^+ = 1 \text{ k}\Omega$ , $R_E^+ = 1,073 \text{ k}$				
$R_i^+$	35,80 k $\Omega$	3,003 k $\Omega$	27,68 k $\Omega$	12,40 k $\Omega$

## 9.7 SENSIBILITÉ DES FILTRES RC-ACTIFS

### 9.7.1 Généralités

Comme les composants d'un filtre classique, les composants d'un filtre RC-actif sont affectés d'imprécisions et d'effets parasites qui déforment sa caractéristique. Beaucoup de filtres RC-actifs ont dû être abandonnés parce qu'après réalisation, leurs caractéristiques s'écartaient trop des caractéristiques idéales.

Les imperfections les plus importantes sont :

- les valeurs des résistances et des capacités différentes des valeurs nominales;
- le gain fini et dépendant de la fréquence de l'amplificateur opérationnel;
- la dépendance de la température et le vieillissement des éléments passifs et des amplificateurs opérationnels.

Ces trois points seront brièvement discutés aux paragraphes 9.7.2 à 9.7.4. On pourrait allonger la liste, notamment par

- les capacités parasites;
- les résistances d'entrée finies et la résistance de sortie non nulle de l'amplificateur opérationnel,

mais leur influence sur la caractéristique du filtre est normalement moindre.

Par contre le bruit produit par les résistances et les amplificateurs opérationnels constitue un facteur important et parfois décisif qui ne sera pas discuté dans ce volume.

L'importance des différents effets varie beaucoup selon

- la caractéristique du filtre (sélectivité, fréquences critiques, etc.);
- la structure du filtre;
- la technologie des composants (éléments discrets, technologies hybrides, etc.).

La discussion du troisième point se situe en dehors de la matière de ce livre. Elle nécessiterait beaucoup de place et elle risquerait de perdre rapidement son actualité, car les technologies évoluent très vite. Nous référons le lecteur à [36].

Le but de cette section est de donner les outils mathématiques dont l'application aux filtres réels permettra de juger l'incidence des imperfections des composants sur leur comportement. Il suffira d'adapter les développements pour les filtres LC du chapitre 7, aux filtres RC-actifs.

### 9.7.2 Sensibilités aux valeurs des résistances et des capacités (sensibilités passives)

Comme dans les filtres LC, la valeur  $x_i$  d'un élément passif, ainsi que sa déviation relative

$$\delta x_i = \frac{x_i - \bar{x}_i}{\bar{x}_i} \quad (9.106)$$

de la valeur nominale  $\bar{x}_i$  peuvent être considérées comme variables aléatoires. Les propriétés probabilistes des  $\delta x_i$  dépendent fortement de la technologie employée pour fabriquer les composants, y compris du réglage.

En plus, il faut tenir compte d'un éventuel réglage de la fonction de transfert, qui introduit de fortes dépendances des  $\delta x_i$  entre elles. Dans la suite, on négligera cet aspect complètement et on considère les sensibilités du filtre avant ce réglage. Ce sont d'ailleurs précisément ces sensibilités qui devraient entrer en ligne de compte pour l'établissement d'une procédure de réglage efficace.

Il faut distinguer essentiellement deux classes de composants. La première comprend les composants discrets, et la discussion est la même que dans le cas du filtre LC. Les  $\delta x_i$  peuvent être supposées indépendantes et devraient être de moyenne nulle. Les indices de sensibilité pour cette classe sont donnés au paragraphe 7.1.8.

La deuxième classe comprend des éléments qui, en plus des imprécisions individuelles, ont une imprécision commune à tous qui est souvent encore plus importante. C'est typiquement le cas des éléments intégrés où, aux imprécisions de type géométrique, s'ajoutent des imprécisions propres à la couche du matériau qui compose les éléments. Cette situation est modélisée par

$$\delta x_i = \xi + \xi_i \quad (9.107)$$

où  $\xi_i$  sont les variables aléatoires qui décrivent les erreurs individuelles, indépendantes entre elles et indépendantes de  $\xi$  qui décrit l'erreur commune. L'approximation de la déviation relative du module de la fonction de transfert jusqu'au premier ordre est alors, par (7.4) et (7.16)

$$\delta |T| = \frac{|T| - |\bar{T}|}{|\bar{T}|} = \sum_i \operatorname{Re} S(T, x_i) (\xi + \xi_i) \quad (9.108)$$

$$\delta |T| = \left[ \sum_i \operatorname{Re} S(T, x_i) \right] \xi + \left[ \sum_i \operatorname{Re} S(T, x_i) \right] \xi_i \quad (9.109)$$

Par conséquent, l'indice de sensibilité du cas le plus défavorable est

$$\nu(|T|) = \left| \sum_i \operatorname{Re} S(T, x_i) \right| a + \left[ \sum_i |\operatorname{Re} S(T, x_i)| \right] b \quad (9.110)$$

et l'indice de sensibilité statistique par

$$\rho(|T|)^2 = \left[ \sum_i \operatorname{Re} S(T, x_i) \right]^2 c + \left[ \sum_i (\operatorname{Re} S(T, x_i)) \right]^2 d \quad (9.111)$$

où  $a, b, c, d$  sont les facteurs de pondération qui expriment l'importance relative des bornes (variances) de  $\xi$  et des  $\xi_i$ .

### 9.7.3 Commentaire

D'un point de vue purement formel, la présence d'une erreur commune à tous les éléments revient au même que la présence d'un élément supplémentaire, dont la sensibilité est égale à la somme des sensibilités par rapport à tous les éléments.

Il est important de distinguer entre les deux classes d'éléments. A titre d'exemple, des éléments avec une erreur individuelle limitée par 1% et une erreur commune limitée par 4%, perturbent la fonction de transfert moins que des éléments sans erreur commune, mais avec une erreur individuelle limitée à 5%. Ce fait sera illustré au paragraphe 9.7.4.

Il est évident qu'on peut généraliser les développements du paragraphe 9.7.2, par exemple au cas où les  $\xi_i$  ont des distributions de probabilité différentes, au cas où seulement une partie des éléments ont une erreur commune, etc.

### 9.7.4 Exemple

Le filtre cascade, synthétisé au paragraphe 9.4.3, est considéré deux fois, avec des hypothèses différentes concernant la précision des éléments passifs. Dans chaque cas, on se propose de calculer  $\sigma_{\Delta\alpha}$ , l'écart type de la déviation absolue de l'affaiblissement, à la fréquence limite de la bande passante, 3,4 kHz, où le filtre est le plus sensible. Les valeurs de  $\rho(|T|)$  et  $\psi(|T|)$  qui interviennent dans ce calcul sont 11,0 et 1,18, respectivement.

Premièrement, on suppose que les éléments passifs ont une erreur individuelle de 5%, avec distribution uniforme. Cela revient à dire que les variables aléatoires  $\delta x_i$  sont indépendantes et qu'elles ont une densité de probabilité constante de valeur 10 dans l'intervalle  $(-0,05, +0,05)$  et nulle ailleurs. Par conséquent,  $\sigma_x = 0,029$ . En multipliant  $\sigma_x$  par  $\rho(|T|) = 11,0$ , on obtient  $\sigma_{\Delta\alpha} = 0,32 \text{ Np} = 2,76 \text{ dB}$ .

En deuxième lieu, on suppose que l'erreur de 5% se décompose en une erreur individuelle des éléments de 1% et une erreur commune de 4%, les deux avec distribution uniforme. Selon le paragraphe 9.7.2, ceci revient à considérer des variables aléatoires  $\xi_i$  et  $\xi$  avec distribution de probabilité uniforme dans  $(-0,01, +0,01)$  et  $(-0,04, +0,04)$ , respectivement, qui sont mutuellement indépendantes. L'écart type de  $\xi_i$  ( $\xi$ ) est 0,0058 (0,023). Il s'ensuit que l'écart type  $\sigma_{\Delta\alpha}$  de l'affaiblissement à 3,4 kHz est donné par  $\sigma_{\Delta\alpha}^2 = (11,0)^2 (0,0058)^2 + (1,18)^2 (0,023)^2 = 0,0048$ , d'où  $\sigma_{\Delta\alpha} = 0,069 \text{ Np} = 0,60 \text{ dB}$ . On constate que ce chiffre est plus que quatre fois inférieur à l'écart type  $\sigma_{\Delta\alpha}$  du premier cas.

### 9.7.5 Amplificateur opérationnel réel : définitions

L'amplificateur opérationnel que l'on achète ou que l'on monte au laboratoire s'écarte inévitablement de son modèle idéal, introduit au paragraphe 9.1.3. Les imper-

fections principales sont (fig. 9.54) :

- un facteur d'amplification fini  $A(p)$ , qui dépend de la fréquence;
- une résistance d'entrée finie  $R_e$ ;
- une résistance de sortie non nulle  $R_s$ ;
- des capacités parasites  $C_d, C_+, C_-$ .

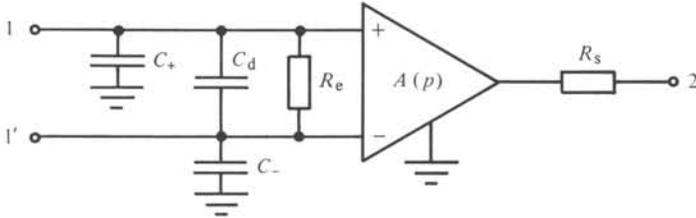


Fig. 9.54

Pour fixer les idées, le facteur d'amplification de l'amplificateur opérationnel du type 741, qui est couramment utilisé pour les filtres RC-actifs, a la forme

$$A(p) = \frac{A_0 \omega_0}{p + \omega_0} = \frac{\omega_T}{p + \omega_0} \quad (9.112)$$

où le gain de tension continue  $A_0 \cong 2 \cdot 10^5$ , la fréquence du pôle  $\omega_0/2\pi \cong 5\text{Hz}$  et le produit gain-bande passante  $\omega_T/2\pi \cong 1\text{MHz}$ . L'amplitude (gain) et la phase de cette fonction  $A(p)$  sont représentées à la figure 9.55. On remarque que le gain descend de  $A_0$  en  $\omega = 0$  à 1 en  $\omega = \omega_T$ . De ce fait, le domaine de fréquences où un filtre RC-actif fonctionne correctement est certainement limité vers le haut par  $\omega_T$ . En réalité, la limite se situe bien en dessous de  $\omega_T$ ; une bande passante située aux environs de  $\omega_T/100$  risque déjà d'être bien déformée par le fait que le gain est de 100 au lieu de l'infini. Le calcul de cette déformation fait l'objet du paragraphe 9.7.6.

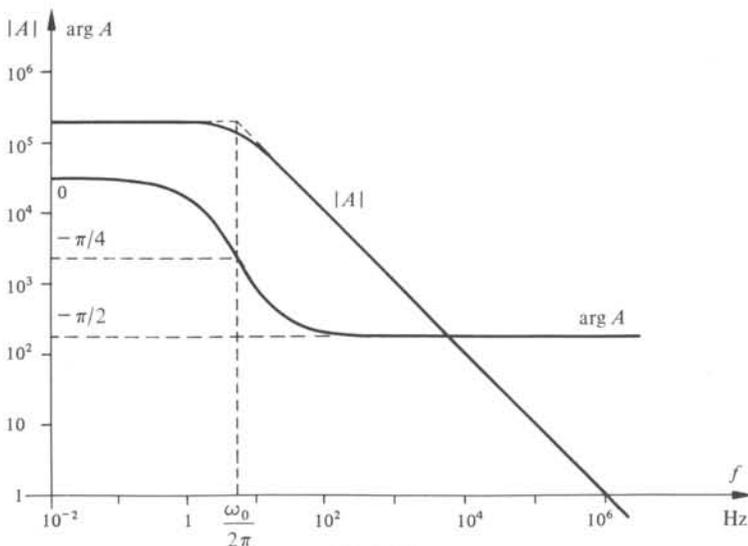


Fig. 9.55

Cette dépendance du gain par rapport à la fréquence déforme non seulement la fonction de transfert du filtre, mais elle introduit aussi des fréquences propres supplémentaires. De telles fréquences pourraient se situer dans le demi-plan de droite et rendre le filtre instable. Souvent, il est possible de ramener ces fréquences propres au demi-plan de gauche en changeant la polarité de quelques amplificateurs opérationnels, ce qui ne modifie pas le comportement idéal du filtre.

D'autres fréquences propres peuvent être introduites dans le demi-plan de droite par les capacités parasites des amplificateurs opérationnels ou du circuit en général. Ce qui est impossible dans le cas des filtres passifs devient ici un danger réel : *l'adjonction d'un élément passif peut déstabiliser un circuit actif.*

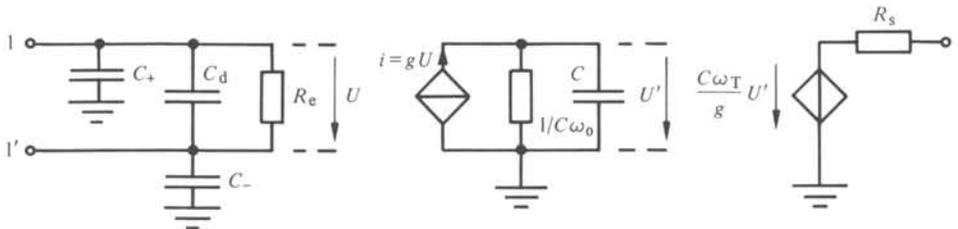


Fig. 9.56

Des valeurs typiques pour les autres parasites de l'amplificateur opérationnel de type 741 sont  $C_d \cong C_+ \cong C_- \cong 3\text{pF}$ ,  $R_e \cong 1\text{M}\Omega$ ,  $R_s \cong 80\Omega$ . A la figure 9.56, ce modèle pour l'amplificateur opérationnel est représenté sous une forme directement utilisable pour le programme d'analyse SPICE.

### 9.7.6 Sensibilités aux facteurs d'amplification des amplificateurs opérationnels

Soit  $T(p, 1/A_1, 1/A_2, \dots)$  la fonction de transfert d'un filtre RC-actif dont la dépendance des facteurs d'amplification des amplificateurs opérationnels est explicitée. Cette expression peut être calculée par la méthode du paragraphe 9.1.7. La déviation de la fonction de transfert due à ces facteurs d'amplification finis se calcule par développement de Taylor autour du point nominal  $(p, 0, 0, \dots)$ . Par (7.29), on a

$$\delta |T| = -\Delta\alpha \tag{9.113}$$

et par un raisonnement analogue à celui du paragraphe 7.5.9

$$\Delta\alpha \cong \sum_i \text{Re} \left[ S' \left( \alpha, \frac{1}{A_i} \right) \frac{1}{A_i} \right] \tag{9.114}$$

en utilisant (7.4), ceci conduit à

$$\delta |T| \cong \sum_i \text{Re} S' \left( T, \frac{1}{A_i} \right) \text{Re} \left( \frac{1}{A_i} \right) - \sum_i \text{Im} S' \left( T, \frac{1}{A_i} \right) \text{Im} \left( \frac{1}{A_i} \right) \tag{9.115}$$

Avec le modèle (9.112) pour  $A_i(p)$ , on obtient, pour  $p = j\omega$

$$\delta |T| \cong \left[ \sum_i \text{Re} S' \left( T, \frac{1}{A_i} \right) \right] \frac{1}{A_0} - \left[ \sum_i \text{Im} S' \left( T, \frac{1}{A_i} \right) \right] \frac{\omega}{\omega_T} \tag{9.116}$$

Toutes les sensibilités sont à calculer au point nominal  $(j\omega, 0, 0, \dots)$ .

### 9.7.7 Commentaires

La quantité  $(-S'(T, 1/A))$  est souvent appelée *produit gain-sensibilité* à cause de la relation

$$-S' \left( T, \frac{1}{A} \right) = -\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial (1/A)} = \frac{A^2}{T} \frac{\partial T}{\partial A} = AS(T, A) \quad (9.117)$$

Dans la plupart des cas,  $S(T, A) \rightarrow 0$  quand  $A \rightarrow 0$ , tandis que  $S'(T, 1/A)$  tend vers une limite finie.

Normalement, les limites de bande passante d'un filtre RC-actif, où sont les sensibilités les plus grandes, se situent bien au delà de  $\omega_0$ . Comme  $1/A_0 = \omega_0/\omega_T$ , le premier terme dans (9.116) est négligeable vis-à-vis du second, à moins que  $\Sigma_i \text{Re } S'(T, 1/A_i)$  soit beaucoup plus grand que  $\Sigma_i \text{Im } S'(T, 1/A_i)$ .

Le gain des amplificateurs opérationnels est approximativement connu à l'avance et on peut essayer de compenser son influence sur la fonction de transfert. C'est donc un effet de nature différente que la déviation des valeurs des éléments passifs. La compensation du gain est très importante en pratique. Elle s'effectue soit en recalculant les éléments passifs, soit en les réglant.

### 9.7.8 Sensibilité par rapport à la température

La dépendance de la température dans le cas des filtres LC a été discutée au paragraphe 7.1.12. Les filtres RC-actifs peuvent être traités exactement de la même façon. La déviation de la fonction de transfert par degré est, au premier ordre,

$$\delta T \cong \left[ \sum_i S(T, C_i) \right] t_C + \left[ \sum_i S(T, R_i) \right] t_R \quad (9.118)$$

et avec les expressions du tableau 7.6 pour les sommes de sensibilités

$$\delta T \cong S(T, p) (t_C + t_R) \quad (9.119)$$

Il est possible de fabriquer des résistances et capacités avec un coefficient de température de même grandeur, mais de signe opposé, ce qui annule l'expression (9.119). Il ne reste donc que l'effet résiduel dû à une répartition de la température non uniforme et à des variations du coefficient de température d'élément en élément. Un des avantages des circuits intégrés est précisément que ces effets sont très faibles.

Le gain des amplificateurs opérationnels dépend fortement de la température. L'influence de cet effet sur la fonction de transfert peut être estimée par (9.115) en considérant  $1/A_i$  comme fonction de la température.

### 9.7.9 Sensibilité des filtres cascade

Soit  $T_c = \Pi_i T_i$ , la fonction de transfert d'un filtre cascade composé de cellules biquadratiques avec fonctions de transfert  $T_i$ . Si  $y$  est la valeur d'un élément passif ou un paramètre d'un amplificateur opérationnel appartenant à la cellule  $i$ , on a

$$S(T_c, y) = S(T_i, y) \quad (9.120)$$

Pour les filtres cascade, l'étude des sensibilités se réduit donc à l'étude des sensibilités des cellules biquadratiques qui le composent.

En représentant les fonctions biquadratiques sous la forme

$$T = K \frac{p^2 + \frac{\omega_z}{Q_z} p + \omega_z^2}{p^2 + \frac{\omega_p}{Q_p} p + \omega_p^2} \quad (9.121)$$

on trouve

$$S(T, y) = S(T, K) \cdot S(K, y) + S'(T, 1/Q_z) \cdot S(1/Q_z, y) + \dots + S(T, \omega_p) \cdot S(\omega_p, y) \quad (9.122)$$

Les sensibilités  $S(T, K)$ ,  $S'(T, 1/Q_z)$ , ...,  $S(T, \omega_p)$  sont des fonctions universelles, la réalisation RC-active n'intervenant que dans  $S(K, y)$ ,  $S(1/Q_z, y)$ , ...,  $S(\omega_p, y)$ . Par un calcul élémentaire, on obtient

$$S(T, K) = 1 \quad (9.123)$$

$$S'(T, 1/Q_p) = - \frac{\omega_p \cdot p}{p^2 + \frac{\omega_p}{Q_p} p + \omega_p^2} \quad (9.124)$$

$$S(T, \omega_p) = - \frac{\frac{\omega_p}{Q_p} p + 2\omega_p^2}{p^2 + \frac{\omega_p}{Q_p} p + \omega_p^2} \quad (9.125)$$

$S'(T, 1/Q_z)$  et  $S(T, \omega_z)$  sont les mêmes expressions que  $(-S'(T, 1/Q_p))$  et  $(-S(T, \omega_p))$  avec  $\omega_p, Q_p$  remplacés par  $\omega_z, Q_z$ .

En séparant parties réelle et imaginaire pour  $p = j\omega$ , et en remplaçant  $\omega$  par la variable  $\Omega = \omega/\omega_p - \omega_p/\omega$ , on obtient

$$\text{Re } S'(T, 1/Q_p) = - \frac{1/Q_p}{\Omega^2 + (1/Q_p)^2} \quad (9.126)$$

$$\text{Im } S'(T, 1/Q_p) = \frac{\Omega}{\Omega^2 + (1/Q_p)^2} \quad (9.127)$$

$$\text{Re } S(T, \omega_p) = \frac{\Omega \sqrt{\Omega^2 + 4} - \Omega^2 - (1/Q_p)^2}{\Omega^2 + (1/Q_p)^2} \quad (9.128)$$

$$\text{Im } S(T, \omega_p) = \frac{(1/Q_p) \sqrt{\Omega^2 + 4}}{\Omega^2 + (1/Q_p)^2} \quad (9.129)$$

et les expressions correspondantes pour  $S'(T, 1/Q_z)$ ,  $S(T, \omega_z)$ .

Ces fonctions sont représentées, pour différentes valeurs de  $Q_p$ , aux figures 9.57 à 9.60. On constate que pour de grandes valeurs de  $Q_p$ , les quatre fonctions atteignent des valeurs importantes dans un voisinage de  $\Omega = 0$  ( $\omega = \omega_p$ ), mais ce voisi-

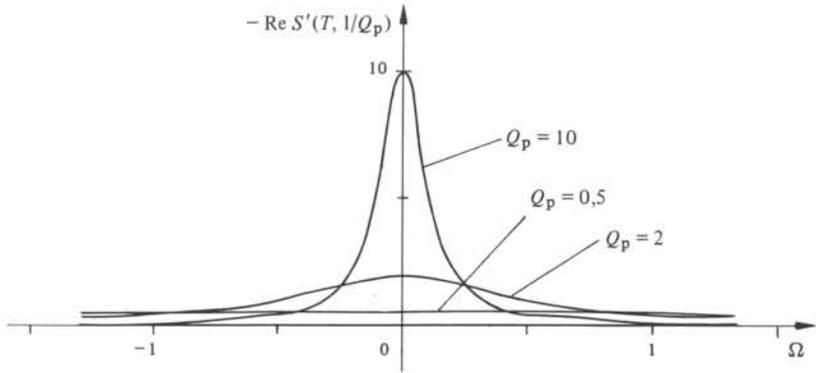


Fig. 9.57

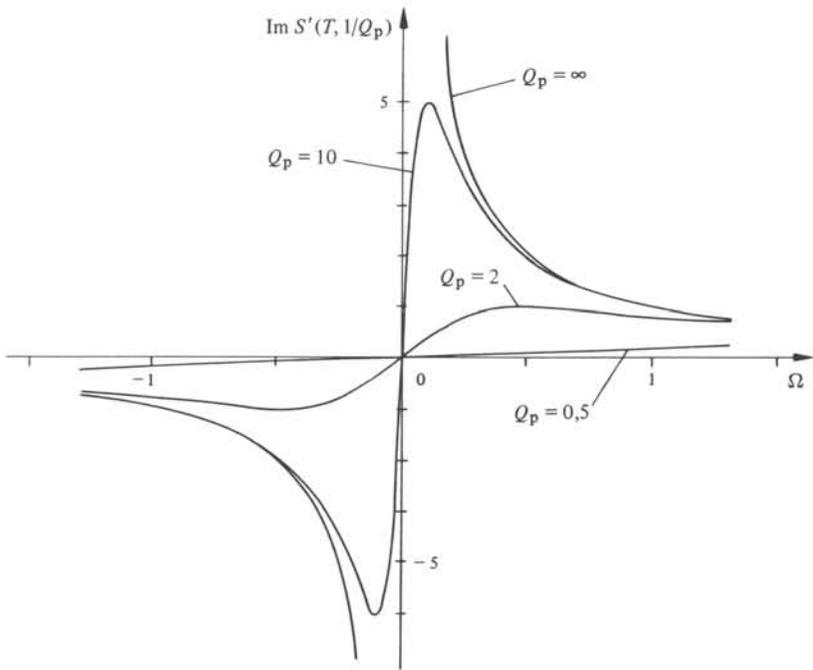


Fig. 9.58

nage est d'autant plus petit que  $Q_p$  est grand pour  $\text{Re } S'(T, 1/Q_p)$  et  $\text{Im } S(T, \omega_p)$ , ce qui n'est pas le cas de  $\text{Im } S'(T, 1/Q_p)$  et  $\text{Re } S(T, \omega_p)$ .

Un filtre sélectif a typiquement des zéros avec un facteur de qualité infini, et un pôle avec facteur de qualité élevé, près de chaque fréquence de coupure. On rencontre donc des valeurs élevées de  $S(T, \omega_z)$  et  $S'(T, 1/Q_z)$  dans un voisinage des pôles d'affaiblissement, et de  $S(T, \omega_p)$  et  $S'(T, 1/Q_p)$  aux limites de la bande passante. Rappelons que  $\Delta\alpha = 'S(\alpha, y) \delta y = \text{Re}(S(T, y) \delta y)$  est la déviation *absolue* de l'affaiblissement  $\alpha$  en fonction de la déviation relative du paramètre  $y$ . Une grande valeur de  $S(T, y)$  en bande coupée est donc beaucoup moins critique qu'en bande passante.

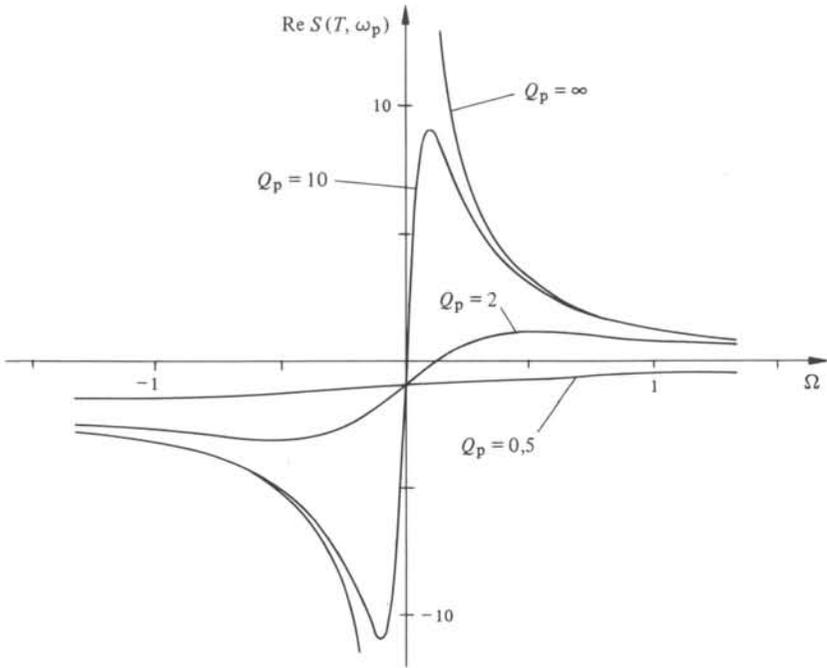


Fig. 9.59

On en conclut que les sensibilités les plus critiques sont  $\text{Im } S'(T, 1/Q_p)$  et  $\text{Re } S(T, \omega_p)$ , associées aux pôles les plus proches de l'axe imaginaire.

Si  $y$  est la valeur d'un élément passif,  $S(|T|, y) = \text{Re } S(T, y)$  et c'est la partie réelle de (9.122) qui nous intéresse. Elle ne contient que les parties réelles de  $S(T, K)$ , ...,  $S(T, \omega_p)$ , car  $S(K, y)$ , ...  $S(\omega_p, y)$  sont réelles.

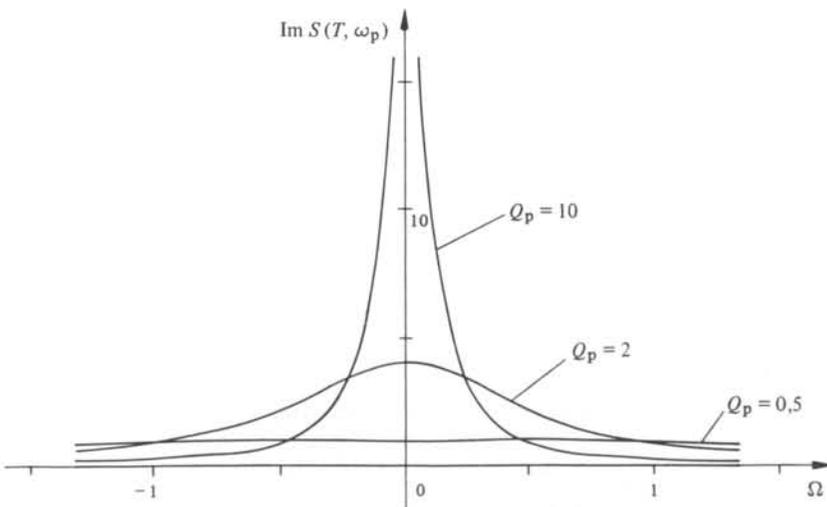


Fig. 9.60

Le calcul des sensibilités actives par l'intermédiaire des paramètres  $K, Q_z, \omega_z, Q_p, \omega_p$  nécessite quelques mots d'explication. En introduisant un modèle pour le gain des amplificateurs opérationnels, tel que (9.112), on augmente le degré de la fonction de transfert et il faut, en principe, plus que cinq paramètres pour la caractériser. Cependant, dans le but de calculer  $\delta |T|$  à une fréquence donnée, le gain peut être traité comme une constante complexe dont l'introduction dans la fonction de transfert ne modifie pas son degré. Les paramétrisations du paragraphe 9.2.2 sont donc à nouveau applicables et les paramètres  $K, Q_z, \omega_z, Q_p, \omega_p$  produisent des termes correctifs dus au gain fini des amplificateurs opérationnels. Ces termes dépendent pourtant de la fréquence et ils ne sont en général pas réels, contrairement aux termes correctifs dus aux imprécisions des éléments passifs. De ce fait, leur signification n'est plus aussi immédiate qu'au paragraphe 9.2.2. Néanmoins, ce procédé un peu arbitraire a l'avantage de permettre un traitement uniforme des sensibilités passives et actives. Remarquons que le passage de (9.124), (9.125) à (9.126) - (9.129) reste valable, car les valeurs nominales des paramètres ne changent pas et restent donc réelles.

Le calcul de la déviation  $\delta |T|$  due au gain fini des amplificateurs opérationnels, s'effectue par (9.115) et, plus spécifiquement, par (9.116). A des fréquences bien supérieures au pôle des amplificateurs, ce sont les sensibilités  $\text{Im} S'(T, 1/A_i)$  qui importent. Elles peuvent être calculées par la partie imaginaire de (9.122), en remplaçant  $S(T, y)$  par  $S'(T, 1/A_i)$  et  $S(K, y)$ ,  $S(1/Q_z, y)$  par  $S'(K, 1/A_i)$ ,  $S'(1/Q_z, 1/A_i)$ , ... . Ces dernières sensibilités sont toutes réelles, car un gain réel impliquerait des paramètres réels. L'exemple du paragraphe 9.1.8 illustre ce fait. Par conséquent, ce sont les parties imaginaires de  $S(T, K)$ , ...,  $S(T, \omega_p)$  qui contribuent à  $\delta |T|$ .

En résumé, le terme le plus important pour le calcul des sensibilités passives est  $\text{Re} S(T, \omega_p)$ , et pour les sensibilités actives normalement  $\text{Im} S'(T, 1/Q_p)$ . Par conséquent, le choix et l'optimisation d'une cellule biquadratique insérée dans un filtre cascade relativement sélectif doivent être dictés en premier lieu par les sensibilités passives de  $\omega_p$  et les sensibilités actives de  $Q_p$ .

Malheureusement, les sensibilités de  $\omega_p$  par rapport aux éléments passifs ne peuvent être rendues arbitrairement faibles. En effet, la pulsation  $\omega_p$  d'une cellule biquadratique avec deux capacités  $C_1, C_2$ , est toujours inversement proportionnelle à  $\sqrt{C_1 C_2}$ . Par conséquent

$$S(\omega_p, C_1) = S(\omega_p, C_2) = -\frac{1}{2} \quad (9.130)$$

Ce fait, combiné avec les valeurs (9.128) pour  $\text{Re} S(T, \omega_p)$ , constitue une limitation fondamentale pour la sélectivité d'un filtre cascade, en fonction de la précision individuelle des éléments passifs.

### 9.7.10 Exemple

Reprenons le filtre cascade synthétisé au paragraphe 9.4.3. Dans le tableau 9.61, on a représenté ses sensibilités, évaluées aux fréquences critiques de la bande passante. Comme il s'agit d'un filtre actif, l'ensemble des fréquences critiques comprend non seulement les maxima, mais également les minima de l'affaiblissement. L'indice de sensibilité  $\rho(|T|)$  est défini au paragraphe 7.1.9.

Tableau 9.61

Fréquence kHz	Affaiblissement		Sensibilité passive $\rho ( T )$
	Nominal dB	Avec amplificateurs à gain fini: $\omega_T = 1 \text{ MHz},$ $\omega_0 = 5 \text{ Hz}$ dB	
0	0,004	0,014	2,6
0,879	0	-0,003	2,8
1,663	0,004	0,047	3,1
2,290	0	0,149	3,5
2,752	0,004	0,226	4,2
3,065	0	0,238	5,6
3,261	0,004	0,220	7,6
3,366	0	0,193	9,9
3,400	0,004	0,197	11,0

La déviation de l'affaiblissement due au gain fini des amplificateurs opérationnels peut en principe être compensée par un choix adéquat de valeurs pour les éléments passifs. Cette compensation, très utile en pratique, ne peut être complète, car le produit gain - bande passante varie beaucoup d'amplificateur en amplificateur.

### 9.7.11 Sensibilités des filtres RC-actifs simulant un filtre LC

Les imperfections des éléments passifs et actifs d'un filtre RC-actif qui simule un filtre LC simulent elles-mêmes des éléments parasites dans le filtre LC. Ces éléments sont de type réactif ou résistif et des éléments actifs ne sont pas exclus. D'après le chapitre 7, l'influence des parasites réactifs, en particulier des valeurs imprécises des réactances, est faible en bande passante, tandis que les sensibilités par rapport aux parasites résistifs, en particulier aux pertes des réactances, peuvent être importantes.

On peut perdre l'insensibilité propre aux filtres LC en utilisant des sous-circuits RC-actifs mal adaptés à la simulation d'éléments passifs. Dans le choix et l'optimisation d'un sous-circuit qui simule un élément passif, on essaie donc en premier lieu de réduire les parasites résistifs. C'est le thème des paragraphes 9.7.12 à 9.7.15.

### 9.7.12 Sensibilités des filtres avec FDNC et FDNR

Nous limitons la discussion à la réalisation des FDNC, qui peut être adaptée aux autres cas.

Aux éléments réactifs (résistifs) d'un filtre LC correspondent les éléments résistifs (réactifs) du filtre avec FDNC/FDNR. Une bonne réalisation d'un FDNC a donc de petits éléments parasites réactifs.

Si le FDNC est réalisé en fermant la borne 1 du convertisseur de la figure 9.31 sur une capacité  $\hat{C}$ , alors sa valeur est  $D = C\hat{C}G_2/G_1G_3$  et par conséquent, les imprécisions des éléments passifs ne peuvent que changer la valeur de  $D$ , sans engendrer des éléments réactifs. Ceci se traduit par la nullité des parties imaginaires des sensibilités

passives. Plus précisément

$$S(D, C) = S(D, \hat{C}) = S(D, G_2) = -S(D, G_1) = -S(D, G_3) = 1 \quad (9.131)$$

Comme les sensibilités passives ne dépendent pas des valeurs des éléments, les degrés de liberté dont on dispose pour la synthèse peuvent être utilisés pour optimiser les sensibilités actives.

Avec le modèle (9.112) pour les amplificateurs opérationnels, et à des fréquences bien supérieures au pôle des amplificateurs, les parasites réactifs (résistifs) engendrés dans un FDNC par les amplificateurs sont donnés, d'après la relation (9.116), par la partie réelle (imaginaire) de  $[S'(D, 1/A_1) + S'(D, 1/A_2)]$ . En appliquant la méthode du paragraphe 9.1.7, on trouve

$$G_2 S'(D, 1/A_1) = G_3 - G_2 + G_3 \frac{G_1}{\hat{C}_p} - G_2 \frac{\hat{C}_p}{G_1} = G_3 S'(D, 1/A_2) \quad (9.132)$$

La partie réelle de (9.132), pour  $p = j\omega$ , est annulée à toute fréquence par

$$G_2 = G_3 \quad (9.133)$$

La partie imaginaire de (9.132), pour  $p = j\omega$ , est rendue minimum en module à une fréquence  $\hat{\omega}$  en posant

$$\frac{G_1}{\hat{C}} \sqrt{\frac{G_3}{G_2}} = \hat{\omega} \quad (9.134)$$

Avec (9.133) et (9.134), on obtient

$$S'(D, 1/A_1) + S'(D + 1/A_2) = -j \left( \frac{\hat{\omega}}{\omega} + \frac{\omega}{\hat{\omega}} \right) \quad (9.135)$$

Normalement, on choisira  $\hat{\omega}$  en bande passante, le même pour tous les FDNC d'un filtre.

En conclusion, la réalisation des FDNC selon la figure 9.31 et la figure 9.33 est bien adaptée à la simulation de filtres LC entre terminaisons résistives; en observant l'égalité (9.133), les éléments parasites réactifs s'annulent en première approximation.

Ajoutons que le convertisseur de la figure 9.32 n'atteint pas les performances de celui de la figure 9.31. Les parasites réactifs engendrés par les éléments actifs ne peuvent être annulés qu'à une fréquence.

### 9.7.13 Exemple

Les sensibilités du filtre passe-bas à FDNC, décrit au paragraphe 8.3.7, sont représentées au tableau 9.62.

Les FDNC ont été synthétisés par le circuit de la figure 9.31 en observant les règles exposées au paragraphe 9.7.12 pour réduire l'influence du gain fini des amplificateurs opérationnels, notamment (9.133) et (9.134) avec  $\hat{\omega} \cong 3,4$  kHz. Comme on peut le constater, ce procédé donne des résultats excellents. Cependant, le gain fini n'est pas la seule imperfection de l'amplificateur opérationnel. Si l'on adopte le modèle pour un amplificateur de type 741, donné au paragraphe 9.7.5, on obtient un affaiblissement de 0,08 dB à 3,4 kHz. Ceci est meilleur que les 0,42 dB du filtre LC correspondant, que l'on obtient en supposant un facteur de qualité de 200 à 3 kHz pour

Tableau 9.62

Fréquence kHz	Affaiblissement		Sensibilité passive $\rho ( T )$	
	Nominal dB	Avec amplificateurs à gain fini: $\omega_T = 1 \text{ MHz},$ $\omega_0 = 5 \text{ Hz}$ dB	RC	LC
0	0	0,000	0	0
1,033	0,044	0,041	0,09	0,04
1,918	0	0,001	0	0
2,580	0,044	0,045	0,22	0,12
3,035	0	0,003	0	0
3,241	0,017	0,024	0,41	0,20
3,362	0	0,008	0	0
3,400	0,017	0,059	0,63	0,32

les inductances. Ceci confirme l'avantage de bons filtres RC-actifs à basse fréquence.

Au tableau 9.62, on a ajouté les sensibilités positives du filtre LC du paragraphe 6.3.16 dont le filtre à FDNC est déduit par dualité et transformation d'impédances. Bien que ces transformations ne changent point les sensibilités relatives de la fonction de transfert en tension, les sensibilités du filtre à FDNC sont à peu près le double de celles du filtre LC. Ceci provient du fait que chaque FDNC est composé de 5 éléments passifs et, dans une moindre mesure, que les sensibilités par rapport aux terminaisons doivent être ajoutées, puisqu'elles sont incorporées au filtre à FDNC. On constate qu'aux zéros d'affaiblissement les sensibilités passives s'annulent, conformément au théorème d'Orchard-Fettweis du paragraphe 1.1.15. Ceci n'est pas tout à fait vrai dans le cas du filtre RC-actif, car la fonction de transfert  $T$  est liée à  $S_{21}$  par (1.1). Par conséquent, les sensibilités de  $T$  par rapport aux terminaisons diffèrent de celles de  $S_{21}$  par la constante  $\pm 1/2$ . Cependant, cette différence des sensibilités se traduit par une différence d'affaiblissement constante qui ne perturbe pas le filtrage et qui peut toujours être compensé ailleurs dans la chaîne de transmission. Pour cette raison, on a fait abstraction de la constante  $\pm 1/2$  dans le tableau 9.62.

La comparaison des tableaux 9.61 et 9.62 montre que les sensibilités du filtre à FDNC sont nettement plus basses que celles du filtre cascade, comme prévu.

#### 9.7.14 Sensibilités des filtres à gyrateurs

Calculons les pertes (ou gains) d'un gyrateur RC-actif. La puissance active dissipée dans un biporte de matrice d'admittance  $Y$  est ( $p = j\omega$ ):

$$P = \text{Re}(U_1^* I_1 + U_2^* I_2) \tag{9.136}$$

$$P = \text{Re}(U_1^* Y_{11} U_1 + U_1^* Y_{12} U_2 + U_2^* Y_{21} U_1 + U_2^* Y_{22} U_2) \tag{9.137}$$

$$P = \text{Re}(Y_{11}) |U_1|^2 + \text{Re}(Y_{22}) |U_2|^2 + (\text{Re}(Y_{12}) + \text{Re}(Y_{21})) \text{Re}(U_1^* U_2) - (\text{Im}(Y_{12}) - \text{Im}(Y_{21})) \text{Im}(U_1^* U_2) \tag{9.138}$$

D'après l'expression (9.73), des valeurs imprécises de résistances dans le gyrateur de la figure 9.36 engendrent les premiers trois termes de la puissance dissipée (9.138). Le

calcul selon la méthode du paragraphe 9.1.7 montrerait que le dernier terme est engendré par le gain fini des amplificateurs opérationnels. Par contre, dans le gyrateur de la figure 9.37, les deux premiers termes s'annulent. Néanmoins, il reste le troisième terme et par conséquent, même un filtre qui utilise ce dernier gyrateur est en général très sensible aux valeurs des éléments passifs, ce qui défavorise les filtres à gyrateurs en général.

Toutefois, il faut excepter les filtres qui n'utilisent le gyrateur que pour simuler des inductances contre terre. Si un gyrateur est fermé sur une capacité, alors, en première approximation,  $\text{Re}(U_1^* U_2) = 0$  et le troisième terme de la puissance (9.138) disparaît. Une inductance simulée par le gyrateur de la figure 9.37 ne dissipe donc pas de puissance si les éléments passifs sont affligés d'imprécisions. En plus, on peut montrer que le choix  $G_2 = G_3$  élimine en première approximation même les pertes (ou gains) dues aux amplificateurs opérationnels de façon analogue au paragraphe 9.7.11. Cette réalisation d'une inductance contre terre est donc bien adaptée à la simulation de filtres LC entre terminaisons résistives.

### 9.7.15 Sensibilités des filtres LF

Si un filtre LF est déduit d'un filtre LC en échelle selon la méthode de la section 9.5, alors la partie réelle (imaginaire) de la fonction de transfert d'une cellule biquadratique provient de la partie imaginaire (réelle) de l'impédance d'une branche parallèle ou de l'admittance d'une branche série.

Considérons une cellule à l'intérieur du filtre LF. Sa fonction de transfert idéale est réelle, ce qui correspond à  $Q_p = Q_z = \infty$ . La déviation relative de la fonction de transfert en fonction de la variation d'un paramètre  $y$  est, en premier ordre,

$$\delta T \cong S(T, y) \delta y \quad (9.139)$$

$S(T, y)$  peut être exprimé par (9.122). Remarquons que  $S'(T, 1/Q_p)$ ,  $S'(T, 1/Q_z)$  sont imaginaires et  $S(T, \omega_p)$  et  $S(T, \omega_z)$  réelles pour  $Q_p = Q_z = \infty$ , par (9.126) et (9.129).

Si  $y$  est la valeur d'un élément passif, alors  $\delta y$  est réel et la déviation correspondant aux pertes du filtre LC est :

$$\text{Im} \delta T \cong \text{Im}[S(T, y)] \delta y \quad (9.140)$$

$$= [\text{Im} S'(T, 1/Q_z) S(1/Q_z, y) + \text{Im} S'(T, 1/Q_p) S(1/Q_p, y)] \delta y \quad (9.141)$$

Remarquons que dans une réalisation par la cellule de Fleischer-Tow, ou par la cellule dérivée du convertisseur d'impédances,  $Q_z$  et  $Q_p$  restent infinies même avec des valeurs des éléments passifs imprécises, ce qui implique  $S'(1/Q_z, y) = S'(1/Q_p, y) = 0$ . Pour cette raison, ces cellules sont mieux adaptées aux filtres LF que la cellule de Deliyannis-Friend.

Si  $y$  est le gain d'un amplificateur opérationnel, on écrit à la place de (9.139) :

$$\delta T \cong S'(T, 1/A) 1/A \quad (9.142)$$

Avec le modèle (9.112) pour  $A$ , et à des fréquences bien supérieures au pôle de l'amplificateur,  $A$  est imaginaire et la déviation correspondant aux pertes du filtre LC est :

$$\text{Im} \delta T \cong \text{Re}[S'(T, 1/A)] \frac{\omega}{\omega_T} \quad (9.143)$$

$$= [S'(K, 1/A) + \operatorname{Re}(T, \omega_z) S'(\omega_z, 1/A) + \operatorname{Re}(T, \omega_p) S'(\omega_p, 1/A)] \frac{\omega}{\omega_T} \quad (9.144)$$

Les mêmes remarques qu'au paragraphe 9.7.9, concernant la dépendance des paramètres  $K$ ,  $\omega_z$ ,  $\omega_p$  du gain, s'appliquent ici.

Puisque les branches extrêmes du filtre LC englobent les terminaisons résistives, les cellules extrêmes du filtre LF ont une fonction de transfert idéale à valeurs complexes. Pour cette raison, il n'est pas évident que c'est aux déviations imaginaires ou que c'est aux déviations réelles de la fonction de transfert ou à une combinaison des deux qu'il faut attacher la plus grande importance. Néanmoins, l'expérience montre que le choix d'une cellule selon les critères valables pour les cellules à l'intérieur du filtre est tout aussi bon pour les cellules aux extrémités.

### 9.7.16 Commentaire

On peut se demander pourquoi les arguments développés pour les filtres cascade ne sont plus applicables aux filtres LF, étant donné qu'ils font intervenir les fonctions universelles (9.126) à (9.129). La raison est que l'équation (9.122) doit être remplacée par

$$S(T, y) = \sum_i S(T, T_i) [S(T_i, K_i) S(K_i, y) + \dots + S(T_i, \omega_p) S(\omega_p, y)] \quad (9.145)$$

où  $i$  désigne l'appartenance à la cellule  $i$ . Ce sont les facteurs  $S(T, T_i)$  qui changent la situation car leurs parties réelles et imaginaires ne sont pas du même ordre de grandeur, surtout aux limites de la bande passante.

### 9.7.17 Exemple

Les sensibilités du filtre LF, synthétisé au paragraphe 9.5.7, sont représentées dans le tableau 9.63. Il est intéressant de les comparer avec celles du filtre LC du paragraphe 6.3.17, qui satisfait aux mêmes exigences, mais avec une caractéristique différente. Les valeurs de  $\rho(|T|)$  à 11,95 kHz et à 15,4 kHz sont, respectivement, 6,0 et 4,7, ce qui n'est guère inférieur aux valeurs pour le filtre LF.

Grâce au théorème de Fettweis-Orchard, les sensibilités, par rapport aux éléments passifs des cellules centrales, s'annulent aux zéros d'affaiblissement. Ceci n'est pas vrai pour les cellules extrémales puisqu'elles incorporent les terminaisons. Le théorème de Fettweis-Orchard ne s'applique pas non plus aux résistances des sommateurs.

La déviation due au gain fini des amplificateurs opérationnels est du même ordre de grandeur que la déviation due aux pertes dans le filtre LC, telle qu'elle est représentée à la figure 6.26, alors qu'on a choisi un amplificateur avec produit gain-bande passante de 10 MHz, dix fois plus grand qu'au paragraphe 9.7.13. Ceci confirme la règle générale que plus la fréquence est élevée, moins le filtre RC-actif se compare favorablement avec le filtre LC.

Les sensibilités actives du filtre à FDNC/FDNR, synthétisées au paragraphe 8.3.25, qui a la même fonction de transfert que le filtre LF, sont plus faibles. Avec le

Tableau 9.63

Fréquence kHz	Affaiblissement		Sensibilité passive $\rho ( T )$
	Nominal dB	Avec amplificateurs à gain fini: $\omega_T = 10 \text{ MHz}$ , $\omega_o = 10 \text{ rad/s}$ dB	
12,00	0,086	0,843	8,8
12,04	0	0,668	3,0
12,18	0,086	0,504	6,4
12,43	0	0,329	3,3
12,82	0,086	0,245	3,7
13,35	0	0,130	3,0
13,98	0,086	0,121	3,0
14,58	0	-0,060	2,9
15,04	0,086	0,115	4,8
15,31	0	-0,057	3,2
15,40	0,086	0,029	7,0

même modèle pour les amplificateurs opérationnels, on obtient un affaiblissement de 0,06 dB et 0,15 dB à 12 kHz et 15,4 kHz, respectivement.

### 9.7.18 Optimisation des sensibilités pour les filtres FLF

On ne connaît pas, à présent, d'arguments simples qui pourraient mener à des critères pour le choix et l'optimisation des cellules biquadratiques dans un filtre FLF.

Un type de cellules étant choisi, on procède à une optimisation numérique. Les paramètres libres dont on dispose pour l'optimisation sont à la fois les coefficients de rétroaction  $\alpha_k$  et les paramètres libres de chaque cellule. Le nombre de paramètres est donc proportionnel au degré du filtre ce qui rend lourde, pour un filtre de degré élevé, une optimisation globale par l'une des méthodes de l'analyse numérique, sans que le succès soit garanti. Heureusement, le caractère récursif de la méthode de synthèse décrite au paragraphe 9.6.4 permet la décomposition en une suite d'optimisations avec un petit nombre de paramètres.

Considérons le premier pas de synthèse qui conduit au système de la figure 9.49. Le coefficient  $\alpha_1$  détermine la fonction de transfert  $T_1$  et, ni  $\alpha_1$ , ni  $T_1$  ne sont affectés par les étapes successives de la synthèse. Par conséquent, les sensibilités par rapport à  $\alpha_1$  et aux éléments passifs et actifs de la cellule qui réalise  $T_1$ , ne dépendent que de la fonction de transfert globale et des paramètres libres de la cellule. Elles aussi ne changent plus par la suite de la synthèse. Une optimisation peut donc s'effectuer pendant la première étape de la synthèse, en n'utilisant que ces degrés de liberté. De façon analogue, on optimisera pendant le deuxième pas de synthèse les sensibilités par rapport à  $\alpha_2$  et les éléments passifs et actifs de la cellule qui réalise  $T_2$ , en jouant sur  $\alpha_2$  et les paramètres libres de cette cellule.

En continuant de cette manière, il faut donc faire autant de petites optimisations qu'il y a de cellules. Il est clair qu'on n'atteint en général pas exactement l'optimum global par cette méthode, car l'optimisation de  $\alpha_k$  et de la  $k$ -ième cellule dé-

pend des valeurs de  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ . L'expérience montre pourtant que de bons résultats peuvent être obtenus par cette méthode peu onéreuse en temps de calcul.

### 9.7.19 Exemple

Les sensibilités du filtre FLF, synthétisé au paragraphe 9.6.6, sont représentées au tableau 9.64, ce qui est à comparer avec les tableaux 9.61 et 9.62. Par rapport au filtre cascade, on constate que l'utilisation d'un amplificateur opérationnel et de quelques résistances en plus, pour réaliser le sommateur, se paie par un indice de sensibilité quadratique plus faible. On obtient même une déviation de l'affaiblissement, due au gain fini des amplificateurs, moins grande. Par contre, le filtre FLF est loin d'atteindre les performances du filtre à FDNC. Cependant, ce dernier nécessite sept au lieu de cinq amplificateurs opérationnels, y compris le suiveur de tension à la sortie du filtre.

Tableau 9.64

Fréquence kHz	Affaiblissement		Sensibilité passive $\rho$ (1%)
	Nominal dB	Avec amplificateurs à gain fini: $\omega_T = 1$ MHz, $\omega_0 = 5$ Hz dB	
0	0,004	0,005	3,3
0,879	0	-0,021	3,4
1,663	0,004	-0,008	3,8
2,290	0	0,030	4,4
2,752	0,004	0,057	5,0
3,065	0	0,052	4,9
3,261	0,004	-0,003	4,3
3,366	0	-0,116	4,6
3,400	0,004	-0,158	4,9



## ADAPTATION À LARGE BANDE

## 10.1 ÉNONCÉ DU PROBLÈME

## 10.1.1 Introduction

Le problème de l'*adaptation à large bande* est apparu en même temps que les premiers circuits analogiques de télécommunications. En général, toute charge présente une partie réactive. Aussi l'ingénieur est-il confronté au problème d'adapter des impédances complexes sur une bande de fréquences lors de la conception d'équipements de télécommunications, d'appareils de mesure, d'amplificateurs à large bande, d'antennes ou de composants électroniques. Le but de l'adaptation à large bande est de déterminer un biporte non dissipatif  $Q'$  appelé *égaliseur* tel que la fonction *gain*  $F(\omega^2)$  entre le générateur d'impédance interne  $Z_G$  et l'impédance de charge passive  $Z_L$  soit maximisée dans un intervalle de fréquences, appelé *bande de fréquences*  $B$  (fig. 10.1). L'impédance  $Z_{IN}$  ( $Z_{OUT}$ ) est égale à l'impédance vue depuis l'entrée (la sortie) de l'égaliseur lorsque son autre accès est fermé sur la charge  $Z_L$  (sur l'impédance  $Z_G$ ). Le gain  $F(\omega^2)$  est égal au rapport  $P_L/P_G$  où  $P_G$  est égal au maximum de puissance active qui peut être délivrée par ce générateur et  $P_L$  est la puissance active dissipée dans la charge. La valeur numérique du gain est donc comprise entre zéro et l'unité dans le cas d'un égaliseur passif. La qualité de l'égaliseur est évaluée, en général, par la valeur minimale du gain dans la bande de fréquences à adapter.



Fig. 10.1

## 10.1.2 Adaptation conjuguée à une fréquence donnée

Soit un générateur de tension sinusoïdale de valeur efficace  $E$ , de pulsation  $\omega_0$  et d'impédance interne  $Z_G$ , et une charge passive  $Z_L$ . L'adaptation d'impédance conjuguée est réalisée à la pulsation  $\omega_0$  si la puissance active dissipée dans la charge est égale au maximum de puissance active que peut délivrer le générateur (§ IV.6.3.9); la fonction gain  $F(\omega^2)$  est alors égale à l'unité. Dans un tel cas, on obtient :

$$Z_G(j\omega_0) = Z_L(-j\omega_0) \quad (10.1)$$

### 10.1.3 Adaptation conjuguée sur une large bande

#### Théorème

L'adaptation d'impédance conjuguée peut être réalisée sur une bande de fréquences  $B$  si et seulement si les impédances de la charge et de la source sont des résistances de même valeur.

#### Démonstration

On suppose que la condition d'adaptation conjuguée (10.1) soit satisfaite pour toutes les pulsations appartenant à la bande considérée :

$$Z_G(j\omega) = Z_L(-j\omega) \quad \omega \in B \quad (10.2)$$

On exprime les impédances  $Z_G$  et  $Z_L$  sous une forme irréductible en fonction de leurs parties réelles et imaginaires :

$$Z_G(j\omega) = \frac{N_1(\omega^2) + j\omega N_2(\omega^2)}{D_G(\omega^2)} \quad (10.3)$$

$$Z_L(j\omega) = \frac{N_3(\omega^2) + j\omega N_4(\omega^2)}{D_L(\omega^2)} \quad (10.4)$$

Quelle que soit la pulsation dans  $B$ , la relation (10.2) est équivalente à :

$$N_1(\omega^2)D_L(\omega^2) - N_3(\omega^2)D_G(\omega^2) = 0 \quad \omega \in B \quad (10.5)$$

$$N_2(\omega^2)D_L(\omega^2) + N_4(\omega^2)D_G(\omega^2) = 0 \quad \omega \in B \quad (10.6)$$

Les relations (10.5) et (10.6) doivent être vérifiées en une infinité de pulsations appartenant à la bande  $B$ . Les parties réelles et imaginaires des impédances  $Z_G$  et  $Z_L$  sont de degrés finis en  $\omega$ . Ceci entraîne que les relations (10.5) et (10.6) sont vérifiées quelle que soit la pulsation  $\omega$  réelle d'où

$$Z_G(j\omega) = Z_L(-j\omega) \quad \omega \in R \quad (10.7)$$

Si l'on considère les transformées de Fourier inverses  $z_G(t)$  et  $z_L(t)$  des impédances  $Z_G(j\omega)$  et  $Z_L(j\omega)$  [39], la relation (10.7) entraîne que

$$z_G(t) = z_L(-t) \quad (10.8)$$

Comme les fonctions  $z_G(t)$  et  $z_L(t)$  sont des fonctions causales, l'équation (10.8) ne peut être vérifiée que si  $z_G(t)$  et  $z_L(t)$  sont des distributions de Dirac. Ceci entraîne que  $Z_G(j\omega)$  et  $Z_L(j\omega)$  sont des résistances de même valeur, de même que  $Z_G(p)$  et  $Z_L(p)$  par prolongement analytique au plan complexe.

### 10.1.4 Adaptation conjuguée d'une charge purement résistive

Si l'impédance du générateur et l'impédance de la charge sont respectivement égales à des résistances  $R_G$  et  $R_L$  alors l'adaptation conjuguée peut être réalisée à n'importe quelle fréquence à l'aide d'un transformateur idéal de rapport de transformation  $(R_G / R_L)^{0,5}$ .

### 10.1.5 Définitions de la fonction gain et de l'ondulation

Si l'impédance interne  $Z_G$  du générateur est définie par

$$Z_G(j\omega) = R_G(\omega) + jX_G(\omega) \quad (10.9)$$

alors la fonction gain  $F(\omega^2)$  est égale à

$$F(\omega^2) = \frac{P_L(\omega)}{P_G(\omega)} = \frac{4R_G(\omega)P_L(\omega)}{E^2} \quad (10.10)$$

où  $P_G(\omega)$  est égal au maximum de puissance active qui peut être délivrée par le circuit équivalent de Thévenin du générateur, de valeur efficace  $E$ , et où  $P_L(\omega)$  est égal à la puissance active dissipée dans la charge passive.

Le minimum absolu et le maximum absolu de la fonction gain dans la bande de fréquences  $B$  à adapter sont dénotés respectivement par  $F_m$  et  $F_M$ . L'ondulation  $D$  dans  $B$  est exprimée en décibels par

$$D = 10 \log_{10}\left(\frac{F_M}{F_m}\right) \quad (10.11)$$

### 10.1.6 Adaptation à large bande

D'après la figure 10.1, le gain peut s'écrire sous la forme

$$F(\omega^2) = 1 - \frac{|Z_G(j\omega) - Z_{IN}(-j\omega)|^2}{|Z_G(j\omega) + Z_{IN}(j\omega)|^2} = 1 - \frac{|Z_L(j\omega) - Z_{OUT}(-j\omega)|^2}{|Z_L(j\omega) + Z_{OUT}(j\omega)|^2} \quad (10.12)$$

On a montré que le gain ne peut pas être égal à 1 à toutes les fréquences d'une bande  $B$  si les impédances ( $Z_{IN}$ ,  $Z_G$ ) ou ( $Z_{OUT}$ ,  $Z_L$ ) ne sont pas des résistances de même valeur. En général, l'impédance du générateur et/ou l'impédance de la charge ne sont pas purement résistives; il est donc impossible de réaliser une adaptation parfaite sur une bande fixée.

### 10.1.7 Critère d'optimisation

Le critère d'optimisation est identique à celui choisi par Carlin [40]. Le but recherché est la maximisation du minimum absolu  $F_m$  de la fonction gain dans la bande de fréquences  $B$  à adapter pour un nombre fixé d'éléments de l'égaliseur ou un degré fixé de la fonction gain. Bien entendu, en pratique on peut également souhaiter contrôler l'ondulation  $D$  dans la bande. Dans ce qui suit, nous ne nous sommes pas fixé explicitement cet objectif. Néanmoins, on constatera que l'ondulation est faible pour les exemples traités dans ce chapitre bien qu'elle ne soit pas prise en compte lors de la recherche de l'égaliseur optimal. Ceci peut être expliqué en se référant aux contraintes intégrales de Fano [41].

Si la fonction gain  $F(\omega^2)$  est constante dans  $B$  et nulle en dehors, Fano [41] a calculé la valeur optimale du gain idéal constant  $F_I$ . A partir des contraintes intégrales de Fano, on montrera que plus la désadaptation est forte en dehors de la bande, plus la fonction gain se rapproche du gain idéal constant dans  $B$ , et plus  $F_m$  augmente.

### 10.1.8 Problème de filtrage sous contraintes

Selon l'équivalence de Darlington, toute impédance passive est équivalente à l'impédance terminée d'entrée d'un biporte non dissipatif fermé sur une résistance.

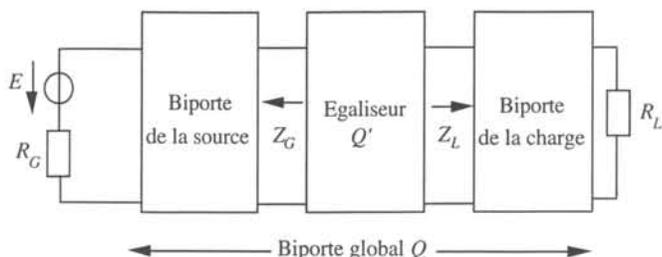


Fig. 10.2

L'impédance de la charge (de la source) peut être représentée par un biporte non dissipatif appelé *biporte de la charge (source)*. Le filtre  $Q$ , appelé *biporte global*, correspond à la mise en cascade du biporte de la source, de l'égaliseur et du biporte de la charge (fig. 10.2).

Le but de l'adaptation à large bande est de déterminer l'égaliseur tel que la fonction gain  $F(\omega^2)$  associée au biporte global  $Q$  soit aussi proche que possible du gain idéal constant dans la bande  $B$  et aussi proche que possible de zéro en dehors de cette bande. Il s'agit donc d'un problème de filtrage sous contraintes. En d'autres mots, la spécification traditionnelle du problème sous l'intitulé «adaptation à large bande» peut induire en erreur : il ne s'agit pas de concevoir un égaliseur qui adapte dans la bande la plus large possible une charge et une source; il s'agit de définir une partie d'un filtre qui réalise une adaptation aussi bonne que possible dans une certaine bande et une désadaptation aussi radicale que possible ailleurs.

### 10.1.9 Simple ou double adaptation d'impédance à large bande

L'adaptation est appelée *simple* lorsque l'impédance interne du générateur et/ou l'impédance de la charge sont purement résistives. L'adaptation est appelée *double* lorsque ces deux impédances ne sont pas purement résistives.

### 10.1.10 Problème dégénéré ou non dégénéré

Le problème est dit *dégénéré* du côté de la charge lorsque le dernier élément réactif de l'égaliseur est du même type que le premier élément du biporte de la charge. Si la charge est une impédance  $RC$  formée de la mise en parallèle d'une résistance  $R$  et d'une capacité  $C$ , le cas dégénéré du côté de la charge est tel que le dernier élément réactif de l'égaliseur soit une capacité shunt. Une définition analogue vaut pour la source.

## 10.2 CONTRAINTES INTÉGRALES

### 10.2.1 Introduction

En 1945, Bode détermine la contrainte intégrale dans le cas de la simple adaptation de la charge  $RC$ . En 1950, Fano [41] étend la méthode de Bode à d'autres types de charges. Dans cette section, on explique la méthode qui permet de déterminer les contraintes intégrales à l'aide du formalisme polynomial [42]. Ces contraintes sont ensuite déterminées dans le cas des charges  $RC$ ,  $RL$ , et  $RLC$ , ou encore du générateur  $RL$ .

### 10.2.2 Formalisme polynomial

On considère un biporte réciproque et non dissipatif  $Q$  (fig. 10.3) placé entre des terminaisons purement résistives  $R_G$  et  $R_L$ . Les résistances de normalisation d'entrée et de sortie associées à la matrice de répartition  $s$  du biporte  $Q$  sont égales à  $R_G$  et  $R_L$ . D'après le paragraphe 2.3.12, le biporte  $Q$  est caractérisé par trois polynômes ( $f$ ,  $g$ ,  $h$ ) tels qu'ils soient liés par la relation d'unitarité (2.66), que  $f$  soit pair ou impair, et que  $g$  soit strictement hurwitzien. Le *facteur de parité*, qui est égal à 1 (-1) si  $f$  est pair (impair), est désigné par  $\varepsilon$ .

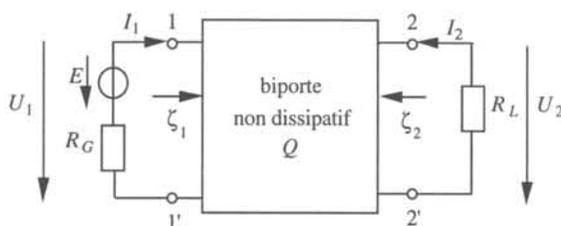


Fig. 10.3

A l'aide de  $\varepsilon$ , l'expression (2.70) de la matrice de répartition  $s$  d'un biporte réciproque et non dissipatif devient :

$$s = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} h & f \\ f & -\varepsilon h^* \end{pmatrix} \quad (10.13)$$

La fonction gain  $F(\omega^2)$  est égale à :

$$F(\omega^2) = |s_{21}(j\omega)|^2 = 1 - |s_{22}(j\omega)|^2 \quad (10.14)$$

ce qui entraîne

$$F(\omega^2) = \frac{|f(j\omega)|^2}{|g(j\omega)|^2} = 1 - \frac{|h(j\omega)|^2}{|g(j\omega)|^2} \quad (10.15)$$

A l'aide du facteur de parité  $\varepsilon$ , les expressions (2.88) et (2.89) des impédances terminées et (6.4) de la matrice de transfert  $\theta$  d'un biporte réciproque et non dissipatif prennent la forme :

$$\zeta_1 = \frac{R_G (g + h)}{(g - h)} \quad (10.16)$$

$$\zeta_2 = \frac{R_L (g - \varepsilon h^*)}{(g + \varepsilon h^*)} \quad (10.17)$$

$$\theta = \frac{1}{f} \begin{pmatrix} \varepsilon g^* & h \\ \varepsilon h^* & g \end{pmatrix} \quad (10.18)$$

### 10.2.3 Equivalence de Darlington

Le cas de la simple adaptation est considéré (fig. 10.4). L'équivalence de Darlington permet de représenter la charge passive  $Z_L$  par l'impédance terminée d'entrée  $\zeta''_1$  d'un biporte non dissipatif  $Q''$  fermé sur une résistance  $R_L$  (fig. 10.5). L'impédance  $\zeta''_2$  est égale à l'impédance terminée de sortie de l'égaliseur  $Q'$ . Les résistances de normalisation d'entrée et de sortie associées aux matrices de répartition  $s$ ,  $s'$  et  $s''$  des biportes  $Q$ ,  $Q'$  et  $Q''$



Fig. 10.4

sont respectivement égales à  $(R_G, R_L)$ ,  $(R_G, R_L)$  et  $(R_L, R_L)$ . Les polynômes associés à  $s$ ,  $s'$  et  $s''$  sont respectivement égaux à  $(f, g, h)$ ,  $(f', g', h')$  et  $(F'', G'', H'')$ . Le but de ce paragraphe est de déterminer les polynômes  $(F'', G'', H'')$  du biporte de la charge  $Q''$  tels qu'ils soient liés par la relation d'unitarité (2.66), que  $G''$  soit strictement hurwitzien, et que  $F''$  soit pair ou impair.

L'impédance  $Z_L$  est donnée sous la forme irréductible  $R_L N''/D''$ . Les polynômes  $N''$  et  $D''$  sont hurwitziens du fait des propriétés de  $Z_L$ . D'après (10.16),  $Z_L$  peut aussi s'écrire sous la forme

$$Z_L = \zeta_1'' = \frac{R_L (g'' + h'')}{(g'' - h'')} \quad (10.19)$$

Les polynômes  $g''$  et  $h''$  sont alors égaux à :

$$g'' = \frac{N'' + D''}{2} \quad h'' = \frac{N'' - D''}{2} \quad (10.20)$$

Le polynôme  $g''$  est strictement hurwitzien car s'il existait une racine de  $g''$  dans le demi-plan de droite fermé du plan complexe, alors la valeur de  $Z_L$  serait égale à  $-R_L$  en cette racine, ce qui est contraire au fait que  $Z_L$  est une fonction positive réelle [43]. Le polynôme  $f''$  est obtenu à partir de la relation d'unitarité appliquée à  $Q''$  qui s'écrit

$$f'' f''^* = g'' g''^* - h'' h''^* \quad (10.21)$$

Du fait que le biporte  $Q''$  est non dissipatif, toute racine du membre de droite de (10.21) située sur l'axe imaginaire est de multiplicité paire. En effet, s'il existait une racine de multiplicité simple sur l'axe imaginaire, alors, pour  $p = j\omega$ , le membre de droite de (10.21) changerait de signe en cette racine. Ceci est impossible car le module du coefficient de réflexion  $h''/g''$  du biporte  $Q''$  pour  $p = j\omega$  est compris entre 0 et 1.

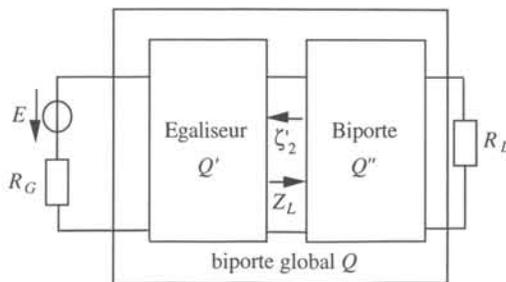


Fig. 10.5

Les relations (10.20) et (10.21) entraînent que

$$f''f''_* = \frac{N''D''_* + N''_*D''}{2} \quad (10.22)$$

Le membre de droite de (10.22) est égal à

$$\frac{N''D''_* + N''_*D''}{2} = (P_2P_{2*})(P_3P_{3*})^2(P_4P_{4*}) \quad (10.23)$$

où les racines des polynômes  $P_2$  et  $P_3$  appartiennent au demi-plan de droite ouvert et les racines de  $P_2$  sont de multiplicité simple. Les racines de  $P_4$  sont situées sur l'axe imaginaire. Avec ces notations, le polynôme  $f''$  est défini par

$$f'' = P_2(P_3P_{3*})P_4 \quad (10.24)$$

On constate que  $f''$  est directement pair ou impair si  $P_2=1$ ; c'est-à-dire si toutes les racines de  $f''f''_*$  situées en dehors de l'axe imaginaire sont en symétrie quadrangulaire et de multiplicité paire. Dans ce cas,  $f''$  est pair (impair) si la multiplicité de la racine en  $p=0$  est paire (impaire). En revanche, si  $P_2$  est différent de l'unité,  $f''$  n'est pas pair ou impair. Il faut alors définir les polynômes ( $F''$ ,  $G''$ ,  $H''$ ) par les relations :

$$F'' = P_{2*}f'' = (P_2P_{2*})(P_3P_{3*})P_4 \quad (10.25)$$

$$G'' = P_{2*}g'' \quad (10.26)$$

$$H'' = P_{2*}h'' \quad (10.27)$$

On vérifie que  $F'' = f''$ ,  $g'' = G''$  et  $h'' = H''$  si  $f''$  est directement pair ou impair.

#### 10.2.4 Utilisation de l'équivalence de Darlington

A l'aide de l'équivalence de Darlington, la matrice de transfert  $\theta$  du biporte global  $Q$  (fig. 10.5) est égale à :

$$\theta = \theta'\theta'' \quad (10.28)$$

Cette dernière relation entraîne :

$$f = f'F'' \quad (10.29)$$

$$g = g'G'' + \varepsilon' h'_* H'' \quad (10.30)$$

$$h = h'G'' + \varepsilon' g'_* H'' \quad (10.31)$$

D'après la relation (10.29), l'ensemble des zéros de transmission du biporte global  $Q$  est égal à l'union des zéros de transmission des biportes  $Q'$  et  $Q''$  et  $\varepsilon = \varepsilon'\varepsilon''$ .

#### 10.2.5 Principe de base

A partir des relations (10.29) à (10.31), on montre que [42] :

$$s_{21} = \frac{f}{g} = \frac{s'_{21} s''_{21}}{1 - s''_{11} s'_{22}} \quad (10.32)$$

$$s_{22} = \frac{-\varepsilon h_*}{g} = s''_{22} + \frac{s'_{22} (s''_{21})^2}{1 - s''_{11} s'_{22}} \quad (10.33)$$

Fano [41] a également déterminé ces deux relations sans utiliser le formalisme polynomial. D'après (10.32), le coefficient de transmission  $s_{21}$  de  $Q$  est nul en tout zéro de transmission du biporte de la charge  $Q''$  si le dénominateur  $d = (1 - s''_{11} s'_{22})$  ne s'annule pas en ce zéro de transmission (cas non dégénéré du côté de la charge). D'après (10.33), les coefficients de réflexion de sortie des biportes  $Q$  et  $Q''$  ainsi que leurs  $(2m - 1)$  premières dérivées sont égaux en tout zéro de transmission de multiplicité  $m$  du biporte  $Q''$  si le dénominateur  $d$  ne s'annule pas en ce zéro de transmission. Ceci entraîne l'égalité des  $2m$  premiers coefficients du développement en série de Taylor de  $s_{22}$  et de  $s''_{22}$  en un zéro de transmission de  $Q''$  de multiplicité  $m$ .

### 10.2.6 Cas de la charge RC

Dans le cas de la charge  $R_L C_L$  (fig. 10.6), le zéro de transmission de  $s''_{21}$  se trouve à l'infini et est de multiplicité simple. Le dénominateur  $d$  s'annule à l'infini si les biportes  $Q'$  et  $Q''$  présentent à leur accès commun des capacités shunt  $C'$  et  $C_L$ ; ce cas correspond par définition au cas dégénéré du côté de la charge. On peut se ramener au cas non dégénéré en déplaçant la capacité  $C'$  de l'égaliseur dans le biporte  $Q''$  : c'est-à-dire en remplaçant  $C'$  par un circuit ouvert et  $C_L$  par  $C = C' + C_L$ . A l'infini, la relation (10.33) implique que

$$\ln \left( \frac{-1}{s_{22}(p)} \right) = \frac{2}{R_L(C_L + C')p} + 0(p^{-2}) \quad (10.34)$$

La relation (10.34) assure que le dernier élément de  $Q$ , du côté de la résistance  $R_L$ , est une capacité shunt. La contrainte intégrale due à la charge  $R_L C_L$  est obtenue en utilisant l'intégrale de Cauchy. Les racines du numérateur de  $s_{22}$  qui appartiennent au demi-plan de droite ouvert du plan complexe sont dénotées par  $\mu_i$ . On rappelle que le numérateur de  $s_{22}$  est égal au polynôme  $-\varepsilon h^* = -\varepsilon h(-p)$ . La fonction  $K_2(p)$ , qui est définie par

$$K_2(p) = \ln \left( \frac{\prod_i (p - \mu_i)}{\prod_i (p + \mu_i)} \frac{-1}{s_{22}(p)} \right) \quad (10.35)$$

ne présente pas de singularités dans le demi-plan de droite ouvert. La fonction  $K_2(p)$  est intégrée sur le contour fermé  $C_1$  formé par l'axe imaginaire et un demi-cercle de rayon

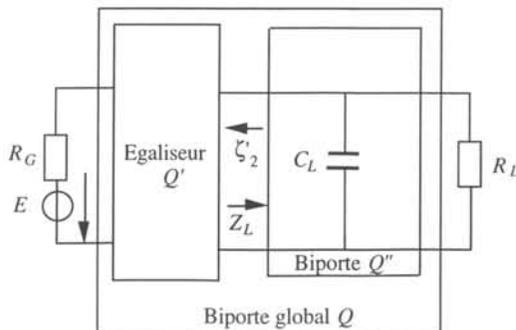


Fig. 10.6

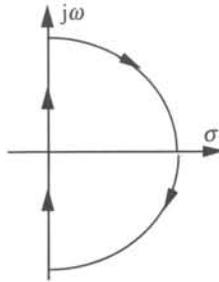


Fig. 10.7

infini appartenant au demi-plan de droite (fig. 10.7). Ce contour présente des dentelures sur l'axe imaginaire autour des racines du numérateur de  $s_{22}$  qui appartiennent à l'axe imaginaire. En utilisant les relations (10.14) et (10.34), cette intégration implique que

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \ln \frac{1}{1 - F(\omega^2)} d\omega = 2\pi \left( \frac{1}{R_L(C_L + C')} - \sum_i \mu_i \right) \quad (10.36)$$

Dans le cas dégénéré (non dégénéré) du côté de la charge, la capacité  $C'$  est plus grande que (égale à) zéro. Bode a déterminé la relation (10.36) dans le cas non dégénéré. Cette contrainte est ici généralisée aux cas dégénéré et non dégénéré.

On suppose que la relation (10.34) soit vérifiée par  $s_{22}$ . Dans ce cas, la relation (10.36) est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction rationnelle  $F(\omega^2)$  à coefficients réels telle que  $F(\omega^2)$  soit inférieure ou égale à l'unité corresponde à la fonction gain d'un biporte non dissipatif  $Q$ , fermé sur une résistance  $R_L$ , dont le dernier élément est une capacité shunt de valeur  $(C_L + C')$  si les racines  $\mu_i$  correspondent aux racines de  $h(-p)$  qui appartiennent au demi-plan de droite ouvert.

### 10.2.7 Position des racines du polynôme $h(p)$

On suppose que la relation (10.34) soit vérifiée. On choisit une fonction gain  $F(\omega^2)$ . En remplaçant  $\omega^2$  par  $-p^2$ , on effectue un prolongement analytique de  $F(\omega^2)$  au plan complexe pour déterminer les polynômes  $g(p)$  et  $f(p)$ . Le degré de  $g(p)$  est dénoté par  $n$ . Le degré de  $f(p)$  est inférieur ou égal à  $n-1$  du fait du zéro de transmission à l'infini dû à la capacité shunt de la charge. Le degré de  $h(p)$  est égal à  $n$  d'après la relation d'unitarité appliquée à  $Q$ . Cette relation permet de déterminer les  $2n$  racines de  $h(p)h(-p)$ . Il existe plusieurs distributions possibles des  $n$  racines de  $h(p)$  parmi ces  $2n$  racines. D'après la relation (10.36), on peut énoncer le théorème suivant.

#### Théorème

Si les racines de  $h(p)$  sont choisies égales aux racines de  $h(p)h(-p)$  qui appartiennent au demi-plan de droite (de gauche), c'est-à-dire si  $h(p)$  est *anti-hurwitzien* (hurwitzien), alors la constante de temps  $R_L(C_L + C')$  est maximisée (minimisée).

### 10.2.8 Cas de la charge $RL$ par dualité

Pour la charge  $RL$  (fig. 10.8), le cas dégénéré (non dégénéré) est considéré si le dernier élément de l'égaliseur, du côté de la charge, est (n'est pas) une inductance série  $L'$ .

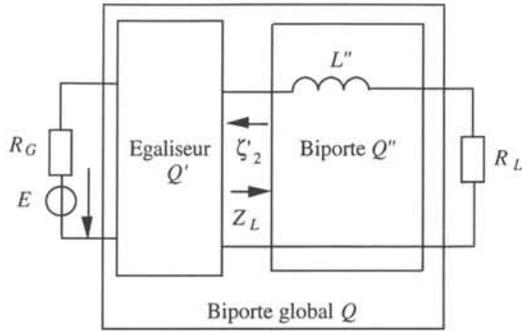


Fig. 10.8

La charge  $RL$  est l'impédance duale de la charge  $RC$ . On appelle *quadripôle terminé* (§ IV.6.2.14) un circuit constitué d'un quadripôle, qui fonctionne en biporte, dont les accès sont fermés sur les terminaisons résistives. Le circuit formé du biport global  $Q$ , associé à la charge  $RL$  et terminé aux deux accès, peut être considéré comme le quadripôle terminé dual d'un biport global  $Q$ , associé à la charge  $RC$  et terminé aux deux accès. Les matrices de répartition de deux quadripôles terminés duaux l'un de l'autre sont identiques au signe près (§ IV.6.3.5). D'après (10.13), il suffit donc de remplacer  $h$  et  $f$  par  $-h$  et  $-f$  et de ne pas changer  $g$  pour obtenir les polynômes associés au quadripôle terminé dual. D'après (10.34), à l'infini, la relation qui assure que le dernier élément de  $Q$  est une inductance série s'écrit donc

$$\ln \left( \frac{1}{s_{22}(p)} \right) = \frac{2R_L}{(L' + L'') p} + 0(p^{-2}) \quad (10.37)$$

D'après (10.36), la contrainte intégrale due à la charge  $RL$  s'exprime par

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \ln \frac{1}{1 - F(\omega^2)} d\omega = 2\pi \left( \frac{R_L}{(L' + L'')} - \sum_i \mu_i \right) \quad (10.38)$$

Dans le cas dégénéré (non dégénéré) du côté de la charge, l'inductance  $L'$  est plus grande que (égale à) zéro.

### 10.2.9 Cas de la charge $RLC$

Dans le cas de la charge  $RLC$  (fig. 10.9), le zéro de transmission de  $s''_{21}$  se trouve à l'infini et est de multiplicité double. Le cas dégénéré du côté de la charge correspond à la situation où les biportes  $Q'$  et  $Q''$  présentent à leur accès commun des inductances série  $L'$  et  $L''$ . A l'infini, la relation (10.33) implique que

$$\ln \left( \frac{-1}{s_{22}(p)} \right) = \frac{2}{R_L C_L p} - \frac{2}{p^3} \left( \frac{1}{(L' + L'') R_L C_L^2} - \frac{1}{3 R_L^3 C_L^3} \right) + 0(p^{-4}) \quad (10.39)$$

La relation (10.39) garantit que le dernier et l'avant-dernier élément de  $Q$  correspondent respectivement à une capacité shunt et à une inductance série. Les contraintes intégrales [42] sont déterminées à partir de (10.39) et des intégrales de Cauchy. Elles

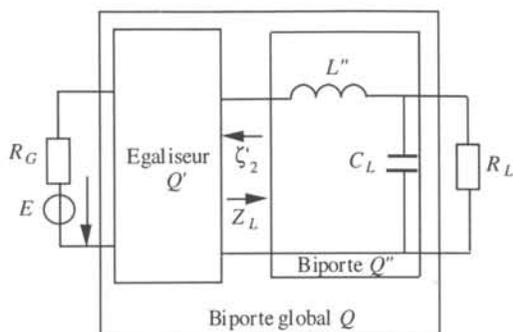


Fig. 10.9

s'écrivent :

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \ln \frac{1}{1 - F(\omega^2)} d\omega = 2\pi \left( -\frac{1}{R_L C_L} - \sum_i \mu_i \right) \quad (10.40)$$

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \omega^2 \ln \frac{1}{1 - F(\omega^2)} d\omega = \frac{2\pi}{(L' + L'')R_L C_L^2} - \frac{2\pi}{3R_L^3 C_L^3} + \frac{2\pi}{3} \sum_i \mu_i^3 \quad (10.41)$$

Dans le cas dégénéré (non dégénéré) du côté de la charge, l'inductance  $L'$  est plus grande que (égale à) zéro. Fano [41] a déterminé les relations (10.40) et (10.41) dans le cas non dégénéré.

### 10.2.10 Cas du générateur $RL$ par réciprocité

Pour le générateur  $R_G L_G$  (fig. 10.10), le cas dégénéré (non dégénéré) est considéré si le premier élément de l'égaliseur, du côté du générateur, est (n'est pas) une inductance série  $L_{10}$ .

D'après l'expression (10.13) de la matrice de répartition, on constate qu'une permutation des accès de  $Q$  revient à remplacer le polynôme  $h$  par  $-\epsilon h^*$  et à conserver les

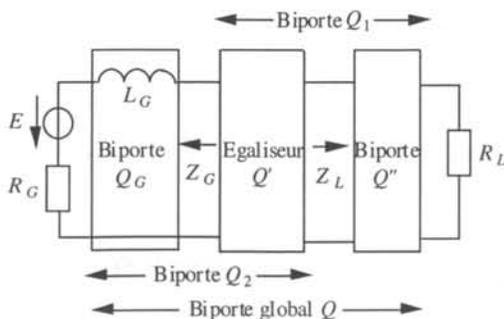


Fig. 10.10

polynômes  $f$  et  $g$ . Les résistances de normalisation d'entrée et de sortie sont respectivement égales à  $R_L$  et à  $R_G$  du fait de la permutation des accès. Le biporte, constitué des mêmes éléments que ceux de  $Q$  mais avec les accès permutés, est dénoté par  $Q_p$ . Les éléments  $R_G$  et  $L_G$  correspondent à la résistance de sortie et au dernier élément de  $Q_p$  du côté de  $R_G$ . Les contraintes dues au générateur  $R_G L_G$  peuvent donc être déduites directement des relations (10.37) et (10.38). On obtient :

$$\ln \left( \frac{1}{s_{11}(p)} \right) = \frac{2R_G}{(L_G + L_{10})p} + 0(p^{-2}) \quad (10.42)$$

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \ln \frac{1}{1 - F(\omega^2)} d\omega = 2\pi \left( \frac{R_G}{L_G + L_{10}} - \sum_i \delta_i \right) \quad (10.43)$$

Dans le cas dégénéré (non dégénéré) du côté du générateur, l'inductance  $L_{10}$  est plus grande que (égale à) zéro. Les variables  $\delta_i$  correspondent aux racines de  $h(p)$  qui appartiennent au demi-plan de droite ouvert. La relation (10.43) permet d'énoncer le théorème suivant pour une fonction gain donnée.

### Théorème

La constante de temps  $(L_G + L_{10})/R_G$  est maximisée (minimisée) si  $h(p)$  est hurwitzien (anti-hurwitzien).

#### 10.2.11 Zéros de transmission à des fréquences finies

La bande  $B$  à adapter est égale à  $[\omega_1, \omega_2]$ . Les bandes coupées sont donc égales à  $[0, \omega_1[$  et  $]\omega_2, +\infty[$ . Dans le cas de la charge  $RC$ , la contrainte (10.36) montre que le minimum du gain  $F_m$  dans  $B$  est maximisé si  $C'$  est nul (cas non dégénéré), si  $\Sigma \mu_i$  est nul ( $h(-p)$  hurwitzien), et si  $F(\omega^2)$  décroît rapidement dans les bandes coupées. Montrons pourquoi  $F(\omega^2)$  doit décroître rapidement. Si l'on pose que  $C'$  est nul et que  $h(-p)$  est hurwitzien, la contrainte (10.36) devient

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \ln \frac{1}{1 - F(\omega^2)} d\omega = \frac{2\pi}{R_L C_L}$$

A l'aide de la relation

$$-\ln(1 - F(\omega^2)) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i} (F(\omega^2))^i \text{ pour } F(\omega^2) < 1$$

on obtient :

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i} (F(\omega^2))^i d\omega = \frac{2\pi}{R_L C_L}$$

Ainsi, pour un problème spécifié par les valeurs de  $R_L$  et de  $C_L$  :

$$0 \leq \int_0^{+\infty} F(\omega^2) d\omega < \frac{2\pi}{R_L C_L} \quad (10.44)$$

La relation (10.44) montre que la meilleure adaptation est obtenue dans la bande  $B$  lorsque la plus forte désadaptation est réalisée en dehors de cette bande. Ainsi, pour réaliser une bonne adaptation dans  $B$ , il est judicieux de placer des zéros de transmission dans les deux bandes coupées à des pulsations  $\omega_R$  proches de  $\omega_1$  ou de  $\omega_2$ . L'égaliseur correspondant contient des circuits résonants ou antirésonants. D'une manière similaire, on peut montrer que la même propriété peut se généraliser aux autres charges comme par exemple les impédances  $RL$  et  $RLC$  [42], [44].

## 10.3 GAIN IDÉAL CONSTANT ET MINIMUM ABSOLU

### 10.3.1 Introduction

A partir des contraintes intégrales déterminées dans le cas de la simple adaptation d'une charge  $RC$  ou  $RLC$ , le premier objectif de cette section est de calculer le gain idéal constant maximal  $F_1$  si  $F(\omega^2)$  est supposé idéalement constant dans la bande  $B$  à adapter et nul en dehors de cette bande. Le deuxième objectif de cette section est de montrer que, quelle que soit la fonction gain  $F(\omega^2)$  considérée, le minimum absolu  $F_m$  de cette fonction dans  $B$  ne peut jamais être supérieur à  $F_1$ .

### 10.3.2 Gain idéal constant dans le cas de la charge $RC$

La simple adaptation de la charge  $RC$  est considérée. Si  $F(\omega^2)$  est idéalement constant dans la bande  $B = [\omega_1, \omega_2]$  à adapter et nul en dehors de cette bande, alors la relation (10.36) entraîne que

$$F(\omega^2) = 1 - \exp \left[ -\frac{2\pi}{(\omega_2 - \omega_1)} \left( \frac{1}{R_L(C_L + C')} - \sum_i \mu_i \right) \right] \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]$$

Le membre de droite de cette dernière relation est maximisé dans le cas non dégénéré ( $C'$  nul) et si  $h(-p)$  est hurwitzien ( $\sum \mu_i$  nul), et donc si  $h(p)$  est anti-hurwitzien. Dans  $B$ ,  $F(\omega^2)$  est alors égal au gain idéal constant  $F_1$  défini par

$$F_1 = 1 - \exp \left[ -\frac{2\pi}{(\omega_2 - \omega_1)R_L C_L} \right] \quad (10.45)$$

Ainsi, plus la largeur de bande  $(\omega_2 - \omega_1)$  est grande devant la pulsation  $2\pi/R_L C_L$ , plus  $F_1$  est petit. En pratique, la fonction gain peut tendre vers  $F_1$  lorsque le nombre d'éléments contenus dans l'égaliseur tend vers l'infini.

### 10.3.3 Exemples numériques dans le cas de la charge $RC$

D'après (10.45), on obtient pour les deux exemples suivants que :

- exemple 1 :  $R_L = 1 \Omega$ ,  $C_L = 5 \text{ F}$ ,  $B = [0, 1 \text{ rad/s}]$ ,  $F_1 = 0,715390$ ;
- exemple 2 :  $R_L = 1 \Omega$ ,  $C_L = 1,2 \text{ F}$ ,  $B = [0, 1 \text{ rad/s}]$ ,  $F_1 = 0,994678$ .

### 10.3.4 Gain idéal constant et minimum absolu dans le cas de la charge $RC$

#### Théorème

On considère la simple adaptation de la charge  $RC$ . Quelles que soient la fonction gain considérée et la bande  $B$  à adapter égale à  $[\omega_1, \omega_2]$ , le minimum absolu  $F_m$  de cette fonction dans  $B$  ne peut jamais être supérieur à  $F_1$  défini par la relation (10.45).

**Démonstration**

S'il existait une fonction gain telle que son minimum absolu dans  $B$  soit supérieur à  $F_1$ , alors

$$F_1 < F(\omega^2) \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]$$

ce qui entraînerait

$$\frac{2\pi}{R_L C_L} < \int_0^{+\infty} \ln \frac{1}{1 - F(\omega^2)} d\omega$$

Ceci est impossible d'après la contrainte intégrale (10.36).

**10.3.5 Gain idéal constant dans le cas de la charge RLC**

On considère la simple adaptation de la charge RLC. Le gain  $F(\omega^2)$  est supposé idéalement constant dans la bande de pulsations  $B = [\omega_1, \omega_2]$  à adapter et nul en dehors de cette bande. La largeur de bande  $(\omega_2 - \omega_1)$  est dénotée par  $\Delta\omega$ . A partir des relations (10.40) et (10.41), on peut montrer [42] que deux cas doivent être considérés.

- Cas 1 :  $L''/R_L \leq 3R_L C_L / (1 + (\omega_2 - \omega_1)^2 R_L^2 C_L^2)$

Le gain idéal constant maximal  $F_1$  est exprimé par (10.45). Le polynôme  $h(p)$  est anti-hurwitzien. Le dernier élément de l'égaliseur, du côté de la charge, est une inductance série  $L'$  calculée par

$$L' = \frac{3R_L^2 C_L}{1 + (\omega_2 - \omega_1)^2 R_L^2 C_L^2} - L'' \quad (10.46)$$

- Cas 2 :  $3R_L C_L / (1 + (\omega_2 - \omega_1)^2 R_L^2 C_L^2) < L''/R_L$

Le gain idéal constant  $F_1$  est maximisé si  $L'$  est nul (cas non dégénéré) et si la seule racine de  $h(-p)$  qui soit située dans le demi-plan de droite ouvert correspond à la racine réelle du polynôme  $P(\sigma_1)$  qui s'écrit

$$P(\sigma_1) = \sigma_1^3 + (\Delta\omega)^2 \sigma_1 + \frac{1}{R_L C_L} \left( \frac{3}{L'' C_L} - \frac{1}{R_L^2 C_L^2} - (\Delta\omega)^2 \right) \quad (10.47)$$

On peut montrer que les conditions imposées aux coefficients de  $P(\sigma_1)$  entraînent que deux de ses racines sont complexes conjuguées et appartiennent au demi-plan de gauche ouvert, et que la troisième racine est réelle et strictement positive. Le gain idéal constant  $F_1$  est calculé par

$$F_1 = 1 - \exp \left[ \frac{-2\pi}{(\omega_2 - \omega_1)} \left( \frac{1}{R_L C_L} - \sigma_1 \right) \right] \quad (10.48)$$

**10.3.6 Gain idéal constant et minimum absolu dans le cas de la charge RLC****Théorème**

On considère la simple adaptation de la charge RLC. Quelles que soient la fonction gain considérée et la bande  $B$  à adapter égale à  $[\omega_1, \omega_2]$ , le minimum absolu  $F_m$  de cette

fonction dans  $B$  ne peut jamais être supérieur à  $F_1$  défini par (10.45) dans le cas 1 ou par (10.48) dans le cas 2.

### Démonstration

La démonstration de ce théorème est explicitée dans [42].

## 10.4 CONTRAINTES NON INTÉGRALES

### 10.4.1 Introduction

Le but de cette section est de rappeler les expressions des polynômes associés à l'égaliseur  $Q'$  en fonction des polynômes du biporte global  $Q$  et du biporte de la charge  $Q''$  [39], [43]. Les contraintes non intégrales sont ensuite déterminées dans le cas des charges  $RC$ ,  $RL$  et  $RLC$  ou encore du générateur  $RL$  [45]. On montre comment déterminer le nombre minimal de contraintes pour extraire la charge du biporte global  $Q$ .

En 1964, Youla [46] adopte une autre approche analytique pour déterminer des contraintes non intégrales. Cette technique est basée sur le développement en série de Taylor des différents paramètres du système autour des zéros de transmission imposés par la charge. Elle ne permet pas toujours de trouver le nombre minimal de contraintes comme le montre Chen [47] dans le cas de la charge  $RLC$ .

### 10.4.2 Polynômes associés à l'égaliseur

La matrice de transfert associée à l'égaliseur (fig. 10.5) est égale à

$$\theta' = \theta \theta'^{-1} \quad (10.49)$$

Cette relation entraîne que les polynômes de  $Q'$  sont égaux à [43] :

$$f' = \frac{f}{F''} \quad (10.50)$$

$$g' = \frac{(\varepsilon'' g G''_* - \varepsilon h_* H'')}{F''^2} \quad (10.51)$$

$$h' = \frac{(\varepsilon'' h G''_* - \varepsilon g_* H'')}{F''^2} \quad (10.52)$$

Montrons que si les fonctions  $(f', g', h')$  sont des polynômes, alors ils jouissent des propriétés des polynômes d'un biporte réciproque et non dissipatif rappelées au paragraphe 10.2.2. Le polynôme  $f'$  est pair ou impair puisque  $f$  et  $F''$  sont pairs ou impairs; le facteur de parité  $\varepsilon'$  est égal à  $\varepsilon\varepsilon''$ . La stricte hurwitzité du polynôme  $g'$  est démontré dans [43]. Du fait que  $(f, g, h)$  et  $(F'', G'', H'')$  sont liés par la relation d'unitarité, on peut montrer (§ 6.1.9), qu'il en est de même pour  $(f', g', h')$ .

### Théorème

On considère une charge telle que le polynôme  $F''$  ne soit pas une constante; alors la fonction  $h'$  est un polynôme si  $g'$  est un polynôme.

### Démonstration

La fonction  $g'$  exprimée par (10.51) est un polynôme si et seulement si son numérateur  $N_1(p)$  est divisible par  $F''^2$ . Le numérateur de la fonction  $h'$  exprimée par (10.52) est dénoté par  $N_2(p)$ . Le polynôme  $F''^2$  est pair car  $F''$  est pair ou impair. Soit  $p_0$  une racine quelconque de  $F''^2$ , alors si  $g'$  est un polynôme,  $p_0$  est aussi une racine de  $N_1(p)$

et donc

$$\frac{\varepsilon'' G''^*(p_0)}{H''(p_0)} = \frac{\varepsilon h^*(p_0)}{g(p_0)}$$

D'autre part, d'après la relation d'unitarité appliquée à  $(F'', G'', H'')$ ,

$$F'' F''^* = \varepsilon'' F''^2 = G'' G''^* - H'' H''^*$$

et donc, puisque  $p_0$  est une racine de  $F''^2$ ,

$$\frac{G''^*(p_0)}{H''(p_0)} = \frac{H''^*(p_0)}{G''(p_0)}$$

Donc si  $p_0$  est une racine de  $F''^2$  et de  $N_1(p)$  alors

$$\frac{\varepsilon h^*(p_0)}{g(p_0)} = \frac{\varepsilon'' H''^*(p_0)}{G''(p_0)}$$

ce qui est équivalent à

$$\varepsilon'' h^*(p_0) G''(p_0) - \varepsilon H''^*(p_0) g(p_0) = 0$$

car les facteurs de parité  $\varepsilon$  et  $\varepsilon''$  sont égaux à 1 ou à  $-1$ .

Le membre de gauche de la dernière égalité est égal à  $N_{2^*}(p_0)$ . Cette égalité est vérifiée quelle que soit la racine  $p_0$  de  $F''^2$ . Le polynôme  $N_{2^*}(p)$  est donc divisible par  $F''^2$ ; c'est-à-dire qu'il existe un polynôme  $P$  tel que

$$N_{2^*} = P F''^2$$

Du fait que  $F''^2$  est pair, il suit que

$$N_2 = P^* F''^2$$

La fonction  $h' = N_2 / F''^2$  est donc un polynôme.

Les degrés en  $p$  des polynômes  $g$ ,  $g'$  et  $G''$  sont dénotés par  $n$ ,  $n'$  et  $n''$ . Le polynôme  $g$  s'exprime en fonction des polynômes de  $Q'$  et de  $Q''$  par la relation (10.30). Du fait de la relation d'unitarité appliquée à  $Q'$  (à  $Q''$ ), le degré de  $h^*$  (de  $H''$ ) est inférieur ou égal au degré de  $g'$  (de  $G''$ ). Dans le cas non dégénéré, c'est-à-dire lorsque le dernier élément de  $Q'$  et le premier élément de  $Q''$  ne sont pas du même type (capacité shunt, inductance série, etc) alors, d'après (10.30), le degré de  $g'$  est égal à

$$n' = n - n'' \tag{10.53}$$

Dans le cas dégénéré, le degré de  $g'$  est tel que

$$n - n'' < n' \tag{10.54}$$

### 10.4.3 Cas d'une charge quelconque

On considère une charge telle que  $F''$  ne soit pas une constante. On suppose que toutes les racines de  $F''$  sont des racines de  $f$  pour que la fonction  $f'$ , exprimée par (10.50), soit un polynôme. La condition nécessaire et suffisante pour permettre l'extraction de la charge du bipôle global  $Q$  est que la fonction  $g'$ , exprimée par la relation (10.51), soit un polynôme. Les contraintes qui lient les éléments de la charge aux polynômes de  $Q$  sont obtenues en posant cette condition. Le numérateur de la fonction  $g'$  doit donc être divisible par  $F''^2$ ; c'est-à-dire que ce numérateur et la dérivée de ce numérateur par rapport à la

variable  $p$  doivent être divisibles par  $F''$ . D'autre part, soit  $x$  une racine de  $F''$  qui ne soit pas réelle alors  $x^*$  est une racine de  $F''$  car  $F''$  est un polynôme à coefficients réels. Donc pour que la fonction  $g'$  soit un polynôme, il faut et il suffit que son numérateur et la dérivée de son numérateur par rapport à  $p$  soient divisibles par les racines de  $F''$  dont la partie imaginaire est supérieure ou égale à zéro.

Dans le cas d'une charge telle que  $F''$  soit une constante, l'extraction de la charge est garantie en posant une condition sur le degré en  $p$  de  $g'$ , comme on va l'expliquer dans le cas des charges  $RC$ ,  $RL$  ou  $RLC$ .

#### 10.4.4 Cas de la charge $RC$

On considère la simple adaptation de la charge  $R_L C_L$  (fig. 10.6). Le cas dégénéré (non dégénéré) est considéré si le dernier élément de l'égaliseur, du côté de la charge, est (n'est pas) une capacité shunt  $C'$ . A l'aide de l'équivalence de Darlington (§ 10.2.3), les polynômes de  $Q''$  sont égaux à :

$$G'' = g'' = 1 + \frac{R_L(C_L + C')p}{2} \quad H'' = h'' = \frac{-R_L(C_L + C')p}{2} \quad (10.55)$$

$$F'' = f'' = 1 \quad (10.56)$$

Dans le cas dégénéré (non dégénéré), la capacité  $C'$  est plus grande que (égale à) zéro. Dans les deux cas, après avoir éventuellement déplacé la capacité  $C'$  de l'égaliseur dans le biporte  $Q''$ , on peut poser que le degré de  $g'$  est égal à

$$n' = \text{degré}(g) - \text{degré}(G'') = n - 1 \quad (10.57)$$

Les relations (10.51) et (10.52) montrent que les fonctions  $g'$  et  $h'$  sont polynomiales puisque  $F''$  est égal à l'unité. D'après la relation d'unitarité pour  $Q'$ , le degré de  $h'$  est inférieur ou égal au degré de  $g'$ , et donc à  $n-1$  si la condition (10.57) est satisfaite.

La fonction gain  $F(\omega^2)$  est nulle à l'infini du fait de la capacité shunt de la charge. Ceci entraîne que le degré de  $f$  est inférieur ou égal à  $n-1$  et que, d'après la relation d'unitarité pour  $Q$ , le degré de  $h$  est égal à  $n$ . Les coefficients réels de  $p^k$  dans  $h$  et  $g$  (dans  $h'$  et  $g'$ ) sont désignés par  $h_k$  et  $g_k$  (par  $h'_k$  et  $g'_k$ ). Les coefficients réels de  $p^k$  dans  $H''$  et  $G''$  sont désignés par  $H''_k$  et  $G''_k$ . D'après la relation (10.51), les coefficients  $g'_{n+1}$  et  $g'_n$  sont égaux à :

$$g'_{n+1} = -g_n G''_1 - \varepsilon (-1)^n h_n H''_1 \quad (10.58)$$

$$g'_n = g_n G''_0 - g_{n-1} G''_1 - \varepsilon (-1)^{n-1} h_{n-1} H''_1 \quad (10.59)$$

Les valeurs des coefficients de  $G''$  et  $H''$  sont obtenues par la relation (10.55). Les coefficients  $g'_{n+1}$  et  $g'_n$  doivent être nuls pour que la condition (10.57) soit remplie; ceci entraîne que :

$$\frac{g_n}{h_n} = \varepsilon (-1)^n \quad (10.60)$$

$$R_L(C_L + C') = \frac{2g_n}{g_{n-1} + \varepsilon (-1)^n h_{n-1}} \quad (10.61)$$

La capacité  $C'$  est supérieure à zéro (est nulle) dans le cas dégénéré (non dégénéré). Ces deux contraintes avaient été déterminées dans [39] pour le cas non dégénéré et une

résistance  $R_L$  unitaire. La contrainte (10.60) assure que le dernier élément de  $Q$ , du côté de la résistance  $R_L$ , est une capacité shunt  $C$ . La contrainte (10.61) garantit que la constante de temps  $R_L C$  associée au dernier élément de  $Q$  est supérieure ou égale à la constante de temps  $R_L C_L$  de la charge. La méthode de Youla [42], [46] permet aussi d'obtenir deux contraintes équivalentes aux relations (10.60) et (10.61) mais elles sont déterminées d'une manière plus directe par le formalisme polynomial.

Les racines des polynômes  $g$  et  $h$  sont respectivement dénotées par  $p_i$  et  $q_i$ . Les sommes des racines peuvent s'exprimer par  $\sum p_i = -g_{n-1} / g_n$  et  $\sum q_i = -h_{n-1} / h_n$ . Il suit qu'en utilisant la relation (10.60) dans (10.61), on obtient :

$$R_L(C_L + C') = \frac{-2}{\sum_{i=1}^n p_i + \sum_{i=1}^n q_i} \quad (10.62)$$

Les contraintes peuvent donc s'exprimer par la relation (10.60) et la condition (10.61) ou (10.62). La relation (10.62) permet également de démontrer le théorème du paragraphe 10.2.7.

#### 10.4.5 Cas de la charge $RL$ par dualité

La charge  $RL$  (fig. 10.8) est l'impédance duale de la charge  $RC$ . Les contraintes pour la charge  $RL$  sont donc obtenues en remplaçant  $h$  par  $-h$  dans les contraintes (10.60) et (10.61) relatives à la charge  $RC$  comme cela est expliqué au paragraphe 10.2.8. On obtient :

$$\frac{g_n}{h_n} = \varepsilon (-1)^{n-1} \quad (10.63)$$

$$\frac{L' + L''}{R_L} = \frac{2g_n}{g_{n-1} + \varepsilon (-1)^{n-1} h_{n-1}} \quad (10.64)$$

Dans le cas dégénéré (non dégénéré), l'inductance  $L'$  est plus grande que (égale à) zéro. La contrainte (10.64) peut aussi s'exprimer en fonction des racines  $p_i$  de  $g$  et  $q_i$  de  $h$  en utilisant la relation (10.63) dans (10.64) :

$$\frac{L' + L''}{R_L} = \frac{-2}{\sum_{i=1}^n p_i + \sum_{i=1}^n q_i} \quad (10.65)$$

#### 10.4.6 Cas de la charge $RLC$

On considère la simple adaptation de la charge  $RLC$  (fig. 10.9). Le cas dégénéré (non dégénéré) correspond à la situation où le dernier élément de l'égaliseur, du côté de la charge, est (n'est pas) une inductance série  $L'$ . Dans les deux cas, après avoir éventuellement déplacé l'inductance  $L'$  de l'égaliseur dans le biporte  $Q''$ , on peut poser que le degré de  $g'$  est égal à

$$n' = \text{degré}(g) - \text{degré}(G'') = n - 2 \quad (10.66)$$

On peut montrer [42], [45] que la condition (10.66) est équivalente aux trois relations suivantes :

$$\frac{g_n}{h_n} = \varepsilon (-1)^n \quad (10.67)$$

$$R_L C_L = \frac{2g_n}{g_{n-1} + \varepsilon(-1)^n h_{n-1}} \quad (10.68)$$

$$\frac{L' + L''}{R_L} = \frac{2g_{n-1} - R_L C_L g_{n-2} + R_L C_L \varepsilon(-1)^n h_{n-2}}{g_{n-2} - R_L C_L g_{n-3} + \varepsilon(-1)^n h_{n-2} + R_L C_L \varepsilon(-1)^{n-1} h_{n-3}} \quad (10.69)$$

L'expression (10.68) de  $R_L C_L$  est utilisée dans (10.69) d'où

$$\frac{L' + L''}{R_L} = \frac{2g_{n-1}(g_{n-1} + \varepsilon(-1)^n h_{n-1}) - 2g_n(g_{n-2} + \varepsilon(-1)^{n-1} h_{n-2})}{(g_{n-2} + \varepsilon(-1)^n h_{n-2})(g_{n-1} + \varepsilon(-1)^n h_{n-1}) - 2g_n(g_{n-3} + \varepsilon(-1)^n h_{n-3})} \quad (10.70)$$

Dans le cas dégénéré (non dégénéré), l'inductance série  $L'$  est supérieure à zéro (est nulle). Les contraintes qui lient les polynômes de  $Q$  aux éléments de la charge sont exprimées par (10.67), (10.68) et (10.70). La contrainte (10.70) assure que l'avant-dernier élément de  $Q$  est une inductance série  $L$  et que la constante de temps  $L/R_L$  est supérieure ou égale à  $L''/R_L$ .

La contrainte (10.67) ne dépend pas des valeurs des éléments de la charge. Il existe donc deux contraintes qui dépendent à la fois des valeurs des éléments de la charge et des polynômes de  $Q$ . Ce nombre de contraintes est logique car le zéro de transmission à l'infini du biporte de la charge est de multiplicité double. En revanche, la méthode de Youla [46], utilisée par Chen [47], ne permet pas de déterminer le nombre minimal de conditions nécessaires et suffisantes qui assurent l'extraction de la charge du biporte global  $Q$ . En effet, Chen détermine trois contraintes qui dépendent à la fois des valeurs des éléments de la charge et de  $Q$ . Il montre que ce nombre de contraintes peut être réduit à deux pour une fonction gain de Tchebycheff ou de Butterworth mais il ne le démontre pas pour toute fonction. Cette remarque met en évidence l'intérêt d'utiliser le formalisme polynomial.

#### 10.4.7 Cas d'une charge constituée de capacités shunt et d'inductances série

La charge est formée d'un circuit en échelle, fermé sur une résistance  $R_L$ , et constitué au total de  $n''$  capacités shunt et inductances série. Le degré du polynôme  $G''$  est donc égal à  $n''$ . Dans le cas dégénéré, le premier élément du biporte de la charge et le dernier élément de l'égaliseur sont du même type (capacité shunt ou inductance série); on peut se ramener au cas non dégénéré en déplaçant le dernier élément de l'égaliseur dans le biporte de la charge. Ceci implique que le degré de  $g'$  est égal à

$$n' = \text{degré}(g) - \text{degré}(G'') = n - n'' \quad (10.71)$$

A partir de la condition (10.71), on peut énoncer le théorème suivant.

#### Théorème

Il existe  $n''+1$  conditions nécessaires et suffisantes qui garantissent que les derniers éléments du biporte global  $Q$  correspondent aux éléments réactifs de la charge. La première condition fixe le signe du rapport des coefficients d'ordre  $n$  de  $g$  et de  $h$ . Elle assure que le dernier élément de  $Q$  est du type souhaité (inductance série ou capacité shunt). Les  $n''$  contraintes supplémentaires permettent d'exprimer chacune des  $n''$  constantes de temps  $R_L C_i$  et  $L_i/R_L$  de la charge en fonction des coefficients d'ordre  $n$  à  $n - 2n''+1$  de  $g$  et des coefficients d'ordre  $n - 1$  à  $n - 2n''+1$  de  $h$ .

### Démonstration

Les  $n''+1$  conditions sont obtenues par l'extraction successive des  $n''$  éléments réactifs de la charge du biporte global  $Q$ . La démonstration détaillée de ce théorème est disponible dans [42].

#### 10.4.8 Cas du générateur $RL$ par réciprocité

Les contraintes dues au générateur  $R_G L_G$  (fig. 10.10) sont déduites directement des conditions (10.63) et (10.64) déterminées dans le cas de la charge  $RL$  par la méthode du paragraphe 10.2.10 qui revient à remplacer  $h$  par  $-\varepsilon h^*$ . On obtient :

$$\frac{g_n}{h_n} = 1 \quad (10.72)$$

$$\frac{L_G + L_{10}}{R_G} = \frac{2g_n}{g_{n-1} - h_{n-1}} \quad (10.73)$$

Dans le cas dégénéré (non dégénéré), l'inductance série  $L_{10}$  est supérieure à zéro (est nulle).

## 10.5 MÉTHODE DE TCHEBYCHEFF

### 10.5.1 Introduction

On considère la fonction gain de Tchebycheff. D'autres auteurs tels que Matthaei [48] et Chen [47] ont également considéré cette fonction. Dans cette section, le polynôme  $h(p)$  du biporte global  $Q$  est choisi anti-hurwitzien. D'après le paragraphe 4.1.6, ce choix entraîne que le facteur de réflexion  $s_{22}(p)$  de  $Q$  est à déphasage minimal. La structure correspondante de l'égaliseur ne contient pas de cellule de Brune. On considère comme exemple la simple adaptation de la charge  $RC$ . Cette méthode peut être étendue à la simple adaptation de la charge  $RLC$  ou encore à la double adaptation de la charge  $RLC$  ( $RC$ ) et du générateur d'impédance interne  $RL$  [42].

### 10.5.2 Fonction gain de Tchebycheff

On considère la fonction gain, de degré  $2n$  en  $\omega$ , de la forme

$$F(\omega^2) = \frac{M}{1 + \tau^2 T_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)} \quad (10.74)$$

Le paramètre  $M$  désigne la *facteur d'échelle*, qui est compris entre zéro et l'unité,  $\tau$  est le *facteur d'ondulation*, qui est strictement positif,  $\omega_c$  est la *pulsation de coupure* qui correspond à la plus grande pulsation telle que  $T_n^2$  soit égal à l'unité, et  $T_n$  est le polynôme de Tchebycheff d'ordre  $n$  défini par :

$$T_n\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = \cos\left(n \arccos\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)\right) \quad \text{si } \left|\frac{\omega}{\omega_c}\right| \leq 1$$

$$T_n\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = \cosh\left(n \operatorname{arccosh}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)\right) \quad \text{si } 1 < \left|\frac{\omega}{\omega_c}\right|$$

Cette fonction gain est également considérée au paragraphe 4.4.5 pour  $M$  égal à l'unité. Dans le cadre de l'adaptation à large bande, on introduit un paramètre libre supplémentaire  $M$  pour maximiser le minimum absolu  $F_m$  du gain.

### 10.5.3 Polynômes associés au biporte global $Q$

La relation d'unitarité appliquée à  $Q$  et le prolongement analytique au plan complexe de (10.74) entraînent :

$$\tau 2^{n-1} f(p) = \sqrt{M} \quad (10.75)$$

$$\tau^2 2^{2n-2} g(p) g(-p) = 1 + \tau^2 T_n^2 \left( \frac{-jP}{\omega_c} \right) \quad (10.76)$$

$$\tau^2 2^{2n-2} h(p) h(-p) = 1 - M + \tau^2 T_n^2 \left( \frac{-jP}{\omega_c} \right) \quad (10.77)$$

Le polynôme  $f(p)$  est pair. Les racines de  $g(p)$  sont déterminées univoquement par (10.76) car  $g(p)$  est strictement hurwitzien. Cette propriété entraîne que tous ses coefficients sont du même signe; ils sont choisis positifs. Parmi les  $2n$  racines du membre de droite de (10.77), il faut choisir  $n$  racines qui correspondent aux racines de  $h(p)$ . Dans cette section, on suppose que  $h(p)$  est anti-hurwitzien afin de déterminer analytiquement ses coefficients.

### 10.5.4 Contraintes imposées par la charge $RC$

On considère la simple adaptation de la charge  $RC$ . Comme  $f(p)$  est pair, la contrainte (10.60) s'écrit

$$h_n = (-1)^n g_n \quad (10.78)$$

Les paramètres  $a$  et  $b$  sont définis par :

$$a = \frac{1}{n} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{\tau}\right) \quad (10.79)$$

$$b = \frac{1}{n} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\sqrt{1-M}}{\tau}\right) \quad (10.80)$$

D'après les formules de Green rappelées par Chen [47] et les relations (10.76) à (10.78), les coefficients d'ordre  $n$  et  $n-1$  de  $g(p)$  et de  $h(p)$  sont égaux à :

$$g_n = \frac{1}{\omega_c^n} \quad g_{n-1} = \frac{\sinh(a)}{\omega_c^{n-1} \sin(\pi/2n)} \quad (10.81)$$

$$h_n = \frac{(-1)^n}{\omega_c^n} \quad h_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1} \sinh(b)}{\omega_c^{n-1} \sin(\pi/2n)} \quad (10.82)$$

Les relations (10.81) et (10.82) sont utilisées dans (10.61); on obtient :

$$R_L (C_L + C') \omega_c = \frac{2 \sin(\pi/2n)}{\sinh(a) - \sinh(b)} \quad (10.83)$$

Cette contrainte est identique à celle obtenue par Chen à l'aide de la méthode de Youla mais elle vient d'être déterminée d'une manière plus directe. D'après (10.83), la valeur maximale du facteur d'ondulation est atteinte lorsque  $M$  est égal à l'unité. Elle est exprimée par

$$\tau' = \frac{1}{\sinh\left[n \operatorname{arcsinh}\left(\frac{2 \sin(\pi/2n)}{R_L (C_L + C') \omega_c}\right)\right]} \quad (10.84)$$

### 10.5.5 Maximisation du minimum du gain

La bande  $B$  à adapter est égale à  $[0, \omega_B]$ . On suppose que  $\omega_B$  est égal à la pulsation de coupure  $\omega_c$  afin d'égaliser tous les minima du gain dans  $B$ . Cette hypothèse entraîne que le minimum absolu du gain dans  $B$  est égal à

$$F_m = \frac{M}{1 + \tau^2} \quad (10.85)$$

En utilisant (10.83) pour exprimer  $M$  en fonction de  $\tau$ , on trouve que

$$F_m = \frac{1}{1 + \tau^2} - \frac{\tau^2}{1 + \tau^2} \sinh^2 \left[ n \operatorname{arcsinh} \left[ \sinh \left( \frac{1}{n} \operatorname{arcsinh} \left( \frac{1}{\tau} \right) \right) - \frac{2 \sin(\pi/2n)}{R_L (C_L + C')} \omega_c \right] \right] \quad (10.86)$$

A l'aide de (10.86), on peut énoncer le théorème suivant.

#### Théorème

Le minimum du gain  $F_m$  est maximisé dans le cas non dégénéré; c'est-à-dire si  $C'$  est nul.

#### Démonstration

##### • Cas 1 : $M = 1$

D'après (10.86),  $F_m$  est maximisé si  $C'$  est nul et si  $\tau$  est égal à

$$\tau_{\text{sup}} = \frac{1}{\sinh \left[ n \operatorname{arcsinh} \left( \frac{2 \sin(\pi/2n)}{R_L C_L \omega_c} \right) \right]} \quad (10.87)$$

La valeur correspondante du minimum du gain est dénotée par  $F_{m1}$ .

##### • Cas 2 : $M < 1$

Considérons que  $C'$  soit non nul. Alors, d'après (10.86),  $\tau$  doit être inférieur à  $\tau'$  exprimé par (10.84). D'après (10.86), quel que soit le facteur d'ondulation  $\tau$  inférieur ou égal à  $\tau_{\text{sup}}$ , la plus grande valeur de  $F_m$  est obtenue si  $C'$  est nul. Pour un facteur d'ondulation  $\tau$  supérieur à  $\tau_{\text{sup}}$  et inférieur à  $\tau'$ ,  $F_m$  est inférieur à  $F_{m1}$  qui correspond au cas 1.

Le théorème ci-dessus et celui du paragraphe 10.2.7 permettent d'énoncer le théorème suivant.

#### Théorème

Soit la simple adaptation de la charge  $RC$  par une fonction gain de Tchebycheff. Le minimum  $F_m$  est maximisé dans le cas non dégénéré et pour  $h(p)$  anti-hurwitzien.

Il reste à montrer comment trouver la valeur maximale de  $F_m$ . Elle est déterminée de la manière suivante. Le facteur d'ondulation qui maximise  $F_m$  est déterminé à l'aide du programme Mathematica dans le cas 2 et pour  $C'$  nul; la valeur correspondante du minimum est dénotée par  $F_{m2}$ . On compare le cas 1 au cas 2 en calculant  $\text{Sup}(F_{m1}, F_{m2})$  qui correspond à la valeur maximale de  $F_m$ .

### 10.5.6 Eléments de l'égaliseur

Les éléments réactifs de  $Q$  sont numérotés de 1 à  $n$  comme cela est indiqué à la figure 10.11. La capacité  $C_1$  est égale à la somme de  $C_L$  et de  $C'$ . Les éléments de l'égaliseur sont

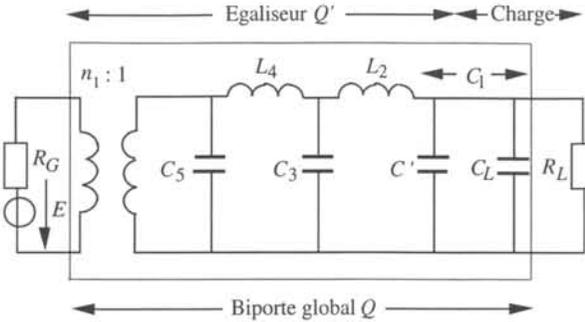


Fig. 10.11

calculés par les relations explicites de Weinberg qui s'écrivent :

$$s_k = 2 \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \quad (10.88)$$

$$b_k(\sinh(a), \sinh(b)) = \sinh^2(a) + \sinh^2(b) + \sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) - 2\sinh(a)\sinh(b)\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad (10.89)$$

$$R_L C_1 \omega_c = \frac{2 \sin(\pi/2n)}{\sinh(a) - \sinh(b)} \quad (10.90)$$

$$C_{2k-1} L_{2k} \omega_c^2 = \frac{s_{4k-3} s_{4k-1}}{b_{2k-1}(\sinh(a), \sinh(b))} \quad (10.91)$$

$$C_{2k+1} L_{2k} \omega_c^2 = \frac{s_{4k-1} s_{4k+1}}{b_{2k}(\sinh(a), \sinh(b))} \quad (10.92)$$

Si  $n$  est pair, alors le rapport  $n_1$  du transformateur idéal est tel que

$$\frac{R_G}{n_1^2} = \frac{L_n \omega_c (\sinh(a) + \sinh(b))}{2 \sin(\pi/2n)} \quad (10.93)$$

Si  $n$  est impair, alors  $n_1$  est tel que

$$\frac{R_G}{n_1^2} = \frac{2 \sin(\pi/2n)}{C_n \omega_c (\sinh(a) + \sinh(b))} \quad (10.94)$$

### 10.5.7 Exemples numériques

La bande  $B$  à adapter est égale à  $[0, 1 \text{ rad/s}]$ . Les résistances  $R_G$  et  $R_L$  du générateur et de la charge sont égales à  $1 \Omega$  pour les deux exemples présentés. Le degré  $n$  de  $g(p)$  est choisi égal à 5.

Soit la charge  $RC$  telle que  $C_L = 5 \text{ F}$ . D'après la relation (10.45), le gain idéal constant  $F_1$  est égal à 0,715390. On rappelle que le minimum absolu  $F_m$  dans  $B$  de toute fonction gain ne peut jamais être supérieur à  $F_1$ . La valeur maximale de  $F_m$ , la valeur correspondante de  $\tau^2$ , la valeur de l'ondulation  $D$ , exprimée par la relation (10.11), et les éléments de l'égaliseur (fig. 10.11) sont égaux à :

$$\begin{aligned} F_m &= 0,666964, \tau^2 = 0,0416074, D = 0,1770 \text{ dB}, \\ n_1 &= 1,862669, C_5 = 2,59556 \text{ F}, L_4 = 0,399544 \text{ H}, \\ C_3 &= 5,97084 \text{ F}, L_2 = 0,471159 \text{ H}, C' = 0 \text{ F}. \end{aligned}$$

Soit la charge  $RC$  telle que  $C_L = 1,2$  F. Le gain idéal constant  $F_1$  est égal à 0,994678. Les résultats sont égaux à :

$$\begin{aligned} F_m &= 0,987952, \tau^2 = 0,00395379, D = 0,01714 \text{ dB}, \\ n_1 &= 1,094696, C_5 = 0,753864 \text{ F}, L_4 = 1,06645 \text{ H}, \\ C_3 &= 1,86404 \text{ F}, L_2 = 1,22986 \text{ H}, C' = 0 \text{ F}. \end{aligned}$$

## 10.6 MÉTHODE DES PARAMÈTRES-IMAGE

### 10.6.1 Introduction

Dans cette section, on propose une nouvelle méthode basée sur la théorie des paramètres-image de Zobel exposée au chapitre 3. Seul Matthaei [48] explique brièvement que cette technique peut être utilisée pour l'adaptation à large bande. Cette méthode permet d'établir des relations simples entre, d'une part, les caractéristiques du filtre, comme la largeur de bande et les terminaisons, et d'autre part, les valeurs des éléments. Pour cette raison, elle convient parfaitement au problème de l'adaptation à large bande qui fixe la largeur de bande à adapter et la valeur de certains composants du biporte global  $Q$  proches des accès. Elle permet de concevoir un égaliseur sans utiliser des algorithmes numériques compliqués. On considérera la simple adaptation de la charge  $RC$  [49]. On montrera comment choisir l'égaliseur pour qu'il corresponde à une partie de la chaîne-image. Cette méthode peut être étendue à la simple adaptation de la charge  $RLC$  ou encore à la double adaptation de la charge  $RLC$  ( $RC$ ) et du générateur d'impédance interne  $RL$  [42]. Dans cette section, le gain  $F(\omega^2)$  est appelé *gain effectif* pour le distinguer du gain-image.

### 10.6.2 Énoncé du problème

La pulsation-image de coupure est dénotée par  $\omega_C$ . La *bande-image* est égale à  $[0, \omega_C[$ . La bande passante à adapter  $B$  est égale à  $[0, \omega_B]$ . Dans cette section, elle est appelée *bande prescrite* pour la distinguer de la bande-image. On considère la simple adaptation de la charge  $RC$ . Sans perte de généralité, la résistance de la charge est normalisée à l'unité. La charge  $RC$  est partiellement incorporée dans la chaîne-image en divisant la capacité  $C_L$  en deux parties égales à  $(1-a)C_L$  et  $C_2$  avec

$$C_2 = a C_L \quad 0 < a \leq 1 \quad (10.95)$$

La capacité  $C_2$  est égale à la capacité de la cellule à  $k$ -constant. L'inductance  $L_1$  de cette cellule et les éléments de la cellule en  $m$ -dérivé sont égaux à

$$L_1 = \frac{1}{\omega_C^2 a C_L} \quad (10.96)$$

$$L = \frac{m}{\omega_C^2 a C_L} \quad C = \left(\frac{1-m^2}{m}\right) a C_L \quad C_1 = m a C_L \quad (10.97)$$

L'égaliseur  $Q'$  est tel que le biporte  $Q_{IM}$ , constitué de  $Q'$  en cascade avec  $C_2$ , corresponde à une chaîne-image. Deux exemples sont représentés aux figures 10.12 et 10.13. L'objectif de la méthode proposée est de déterminer les paramètres  $a$  et  $m$ , la pulsation-image de coupure  $\omega_C$  et le rapport  $n_1$  qui maximisent le minimum absolu  $F_m$  de  $F(\omega^2)$  dans  $B$ . Le nombre d'inconnues est donc égal à quatre quel que soit le degré de

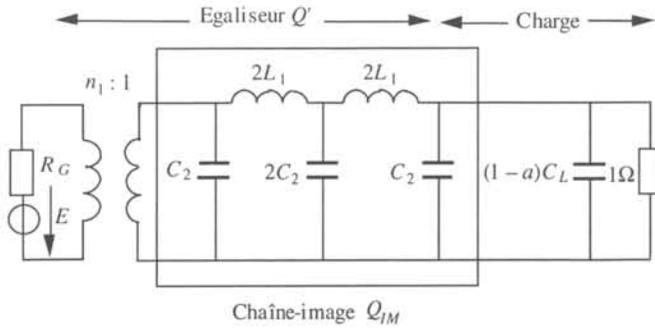


Fig. 10.12 Circuit 1.

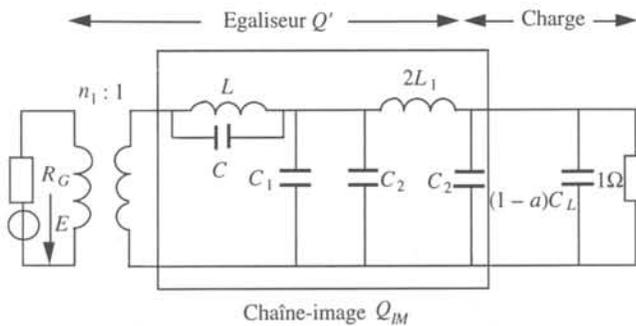


Fig. 10.13 Circuit 2.

l'égaliseur. Les terminaisons de sortie  $Z(j\omega)$  et d'entrée  $R$  de la chaîne-image sont égales à

$$Z(j\omega) = \frac{1}{1 + (1-a)^2 C_L^2 \omega^2} + \frac{j(a-1)C_L \omega}{1 + (1-a)^2 C_L^2 \omega^2} \quad (10.98)$$

$$R = \frac{R_G}{n_1^2} \quad (10.99)$$

Tout d'abord, on montrera sous quelles conditions une bonne adaptation-image peut être réalisée, à l'entrée et à la sortie de la chaîne-image, dans la bande  $B$ . Ces conditions détermineront un sous-espace qui contient les paramètres-image qui maximisent  $F_m$ . On rappelle (§ 3.2.1, § 3.2.4) que l'affaiblissement-image  $\delta$  est nul dans  $[0, \omega_C[$ . Pour réaliser une bonne adaptation-image dans  $B$ , on supposera que

$$\omega_B < \omega_C \quad (10.100)$$

### 10.6.3 Paramètres $(a, \omega_C)$ par l'adaptation-image de sortie

Dans la bande-image  $[0, \omega_C[$ , l'impédance-image de sortie de la chaîne-image (fig. 10.12 et 10.13) est égale à :

$$W_2(j\omega) = \frac{1}{a C_L \omega_C} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_C^2}}} \quad (10.101)$$

Pour réaliser une bonne adaptation-image de sortie dans  $B$ , les paramètres  $(a, \omega_C)$  sont sélectionnés de telle manière que la différence entre  $W_2(j\omega)$  et la partie réelle de  $Z(j\omega)$  soit petite dans  $B$ . Cette condition détermine un sous-espace qui contient les paramètres  $(a, \omega_C)$  qui maximisent  $F_m$ .

#### 10.6.4 Paramètres $(\omega_C, n_1, m)$ par l'adaptation-image d'entrée

Soit premièrement, la chaîne-image représentée à la figure 10.12. Les impédances-image d'entrée et de sortie sont toutes deux égales à  $W_2(j\omega)$  qui est une fonction croissante à valeurs réelles dans la bande-image. Pour réaliser une bonne adaptation-image d'entrée dans  $B$ ,  $n_1$  doit être choisi afin que la résistance équivalente  $R$  soit comprise entre  $W_2(0)$  et  $W_2(j\omega_B)$ , et  $\omega_C$  doit être tel que  $W_2(j\omega_B)$  ne soit pas trop grand devant  $W_2(0)$ . Ces conditions déterminent un sous-espace qui contient les paramètres  $(\omega_C, n_1)$  qui maximisent  $F_m$ .

Soit deuxièmement, la chaîne-image représentée à la figure 10.13. Dans la bande-image, l'impédance-image d'entrée est égale à

$$W_1(j\omega) = \frac{1}{a C_L \omega_C} \frac{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_C^2}}}{(m^2 - 1) \frac{\omega^2}{\omega_C^2} + 1} \quad (10.102)$$

Si  $m^2 < 0,5$ , on peut montrer que  $W_1(j\omega)$  présente un maximum égal à

$$W_1(j\omega_{\max}) = \sqrt{\frac{L}{C_1}} \frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}} = \frac{1}{a C_L \omega_C} \frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}} \quad (10.103)$$

On fait l'hypothèse que

$$W_1(j\omega_B) = W_1(0) \quad \text{avec} \quad m < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (10.104)$$

Cette contrainte est équivalente à

$$m^2 = 1 - \frac{\omega_C^2}{\omega_B^2} + \frac{\omega_C}{\omega_B} \sqrt{\frac{\omega_C^2}{\omega_B^2} - 1} \quad \text{avec} \quad \omega_B < \omega_C \quad (10.105)$$

Pour réaliser une bonne adaptation-image d'entrée,  $n_1$  doit être choisi afin que  $R$  soit compris entre  $W_1(0)$  et  $W_1(j\omega_{\max})$ , et  $\omega_C$  doit être tel que  $W_1(j\omega_{\max})$  ne soit pas trop grand devant  $W_1(0)$ .

#### 10.6.5 Chaîne-image symétrique

Soit une chaîne-image formée de cellules à  $k$ -constant. On suppose que les terminaisons de la chaîne-image sont des résistances unitaires. Dans ce cas, le paramètre  $a$  et la résistance  $R_L$  de la charge sont donc unitaires. Si la résistance  $R_G$  du générateur n'est pas égale à l'unité, il suffit d'introduire un transformateur idéal de rapport  $n_1 = (R_G)^{0,5}$  entre le générateur et l'entrée de la chaîne-image.

On utilise la formule de décomposition de Zobel (§ 3.3.4). Les impédances-image réduites sont égales à  $w_2 = W_2 / 1 \Omega$ . Dans la bande-image, les relations (3.64) et (3.65)

impliquent que

$$\frac{4 W_2^2}{(1 + W_2^2)^2} \leq F(\omega^2) \leq 1 \quad (10.106)$$

L'enveloppe inférieure  $E_S(W_2)$  est égale à

$$E_S(W_2) = \frac{4 W_2^2}{(1 + W_2^2)^2} \quad (10.107)$$

La fonction  $W_2(j\omega)$  est une fonction croissante de  $\omega$  dans la bande-image. La fonction  $E_S(W_2)$  est une fonction strictement croissante (décroissante) de  $W_2$  si  $W_2$  est plus petit (grand) que l'unité. Dans la bande prescrite  $B$ , on peut montrer que le minimum absolu de  $E_S(W_2)$  est maximisé si  $E_S(W_2(j0))$  est égal à  $E_S(W_2(j\omega_B))$ . Afin de maximiser ce minimum, on fait les hypothèses suivantes :

$$W_2(j0) = \sqrt{\frac{L_1}{C_L}} < 1 \quad (10.108)$$

$$E_S(W_2(j0)) = E_S(W_2(j\omega_B)) \quad (10.109)$$

La relation (10.109) entraîne que

$$\omega_B = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_L}} \sqrt{1 - \frac{L_1^2}{C_L^2}} \quad (10.110)$$

D'après (10.108) et (10.109), le minimum de l'enveloppe dans  $B$  est égal à

$$E_S(W_2(j0)) = \frac{4 L_1 C_L}{(L_1 + C_L)^2} \quad (10.111)$$

Pour une valeur fixée de  $C_L$ , (10.110) et (10.111) impliquent respectivement que  $\omega_B$  décroît et que  $E_S(W_2(j0))$  augmente si  $L_1$  augmente tout en restant plus petit que  $C_L$ . Dans le cas de l'adaptation à large bande, la bande prescrite  $B$  est fixée. Sans perte de généralité, elle est normalisée à  $[0, 1 \text{ rad/s}]$ . Comme  $\omega_B$  doit être égal à  $1 \text{ rad/s}$ , (10.110) entraîne que  $L_1$  (fig. 10.14) s'exprime par

$$L_1 = \frac{C_L}{2} (\sqrt{C_L^4 + 4} - C_L^2) \quad (10.112)$$

D'après (10.111) et (10.112), la fonction  $\text{Inf}(F_m) = E_S(W_2(j0))$ , qui est représentée en trait plein à la figure 10.15, est égale à

$$\text{Inf}(F_m) = \frac{2 (\sqrt{C_L^4 + 4} - C_L^2)}{(1 + 0,5 (\sqrt{C_L^4 + 4} - C_L^2))^2} \leq F_m \quad (10.113)$$

Pour une valeur fixée de  $C_L$ , si l'inductance  $L_1$  de la cellule à  $k$ -constant est plus grande (petite) que la valeur exprimée par (10.112), alors (10.110) et (10.111) impliquent que  $\omega_B$  et  $E_S(W_2(j0))$  deviennent respectivement plus petit (grand) que  $1 \text{ rad/s}$  et plus grand (petit) que  $\text{Inf}(F_m)$ . La figure 10.14 illustre la principale conclusion de cette étude. Le plan  $(L_1, C_L)$  est divisé en deux parties : au dessus de la courbe, une bonne adaptation à large bande est réalisée dans une bande étroite; sous la courbe, l'opposé est vrai. La courbe représente un bon compromis.

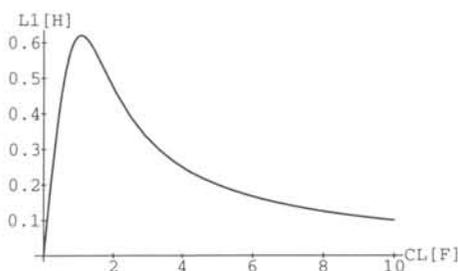


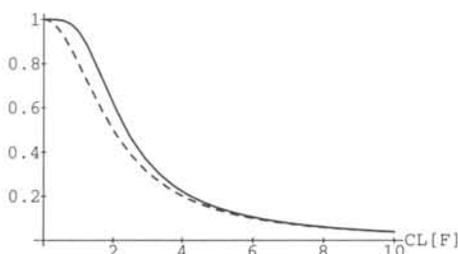
Fig. 10.14

### 10.6.6 Problème bien ou mal conditionné

La bande  $B$ , et les résistances  $R_L$  et  $R_G$  sont respectivement normalisées à  $[0, 1 \text{ rad/s}]$  et à  $1 \Omega$ . Sans égaliseur, le minimum absolu du gain dans  $B$ , représenté en pointillés à la figure 10.15, est atteint en  $1 \text{ rad/s}$ . Il est égal à  $F_1(1)$  défini par

$$F_1(1) = \frac{4}{4 + C_L^2} \quad (10.114)$$

Considérons le cas de la chaîne-image symétrique du paragraphe 10.6.5.

Fig. 10.15  $\text{Inf}(F_m)$  (trait plein) et  $F_1(1)$  (pointillés).

Si  $C_L$  est plus petit que  $1,5 \text{ F}$ ,  $\text{Inf}(F_m)$  est supérieur à  $0,798340$  et  $F_1(1)$  décroît rapidement. Le minimum du gain  $F_m$  est plus grand que  $0,798340$ . Le problème est dit *bien conditionné*.

Si  $C_L$  est plus grand que  $3 \text{ F}$ ,  $\text{Inf}(F_m)$  est plus petit que  $0,356521$ . Les fonctions  $\text{Inf}(F_m)$  et  $F_1(1)$  deviennent très proches. Le problème est dit *mal conditionné*.

### 10.6.7 Solution d'un problème bien conditionné

Soit la simple adaptation de la charge  $RC$  telle que :

$$B = [0, \omega_B] = [0, 1 \text{ rad/s}], R_G = 1 \Omega, R_L = 1 \Omega, C_L = 1,2 \text{ F}.$$

D'après la relation (10.45), le gain idéal constant  $F_1$  est égal à  $0,994678$ . Sans égaliseur, le minimum  $F_1(1)$  est égal à  $0,735294$ .

### Chaîne-image de cellules à $k$ -constant

Le circuit 1 de l'égaliseur est représenté à la figure 10.12. Les paramètres  $a$  et  $n_1$  sont choisis égaux à l'unité. L'inductance  $L_1$  est calculée à l'aide de (10.112). Les résultats sont

égaux à :

$$F_m = 0,9249, D = 0,3391 \text{ dB}, L_1 = 0,6146805 \text{ H}, \omega_C = 1,164353 \text{ rad/s}.$$

Supposons à présent que  $a$  soit plus petit que l'unité. L'inductance  $L_1$  est calculée en remplaçant  $C_L$  par  $C_2 = aC_L$  dans (10.112) d'où

$$L_1 = \frac{a C_L}{2} (\sqrt{a^4 C_L^4 + 4 - a^2 C_L^2}) \quad (10.115)$$

Le minimum  $F_m$  est déterminé pour différentes valeurs de  $a$  afin de trouver celle qui maximise  $F_m$ . Les résultats sont égaux à :

$$F_m = 0,9711, D = 0,1274 \text{ dB}, L_1 = 0,606510 \text{ H}, \omega_C = 1,353505 \text{ rad/s}, a = 0,75.$$

Cet exemple montre que le problème d'optimisation se réduit à la recherche unidimensionnelle de la valeur de  $a$ , qui maximise  $F_m$ . Pour les cas bien conditionnés, la méthode se résume à :

- partager la capacité  $C_L$  entre la terminaison de sortie de la chaîne-image et la chaîne-image;
- de la valeur de la capacité  $C_2$  de la chaîne-image, calculer  $L_1$  à l'aide de (10.115);
- construire une chaîne-image à  $k$ -constant à l'aide de la cellule qui vient d'être déterminée;
- déterminer la valeur de  $F_m$  qui correspond à ce choix du paramètre  $a$ .

### Chaîne-image de cellules en $m$ -dérivé et à $k$ -constant

Comparons les résultats obtenus par le circuit 1 (fig. 10.12) et par le circuit 2 (fig. 10.13). Pour calculer le rapport de transformation  $n_1$ , on pose que :

$$\frac{R_G}{n_1^2} = \sqrt{W_1(0) W_1(j\omega_{\max})} = \frac{1}{a C_L \omega_C} \sqrt{\frac{1}{2 m \sqrt{1 - m^2}}} \quad \text{avec } m < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (10.116)$$

Le paramètre  $m$  et les éléments de la cellule en  $m$ -dérivé sont respectivement calculés par (10.105) et (10.97). Premièrement, choisissons  $a$  égal à l'unité. L'inductance  $L_1$  est calculée par (10.112). Les résultats sont égaux à :

$$\begin{aligned} F_m &= 0,9687, D = 0,1375 \text{ dB}, \\ n_1 &= 1,165921, L_1 = 0,6146805 \text{ H}, \\ \omega_C &= 1,164353 \text{ rad/s}, m = 0,5820022. \end{aligned}$$

Ainsi, si  $a$  est égal à l'unité, le minimum  $F_m$  du circuit 2 est plus grand que celui du circuit 1. Ce résultat est dû à la cellule en  $m$ -dérivé qui permet d'obtenir une adaptation-image d'entrée meilleure pour le circuit 2 que pour le circuit 1. De plus, du fait du circuit antirésonant de pulsation  $\omega_R$  proche de  $\omega_B$ , le gain effectif  $F(\omega^2)$  du circuit 2 décroît plus vite que celui du circuit 1 dans  $]\omega_B, +\infty[$  ce qui favorise l'augmentation de  $F_m$  (§ 10.2.11).

Deuxièmement, considérons que  $a$  soit plus petit que l'unité. L'inductance  $L_1$  est calculée par (10.115). La meilleure valeur de  $a$ , qui maximise  $F_m$ , est telle que :

$$\begin{aligned} F_m &= 0,9759, D = 0,0912 \text{ dB}, \\ n_1 &= 1,130972, L_1 = 0,6201555 \text{ H}, \\ \omega_C &= 1,239239 \text{ rad/s}, m = 0,609357, a = 0,875. \end{aligned}$$

### 10.6.8 Solution d'un problème mal conditionné

Soit la simple adaptation de la charge  $RC$  telle que :

$$B = [0, \omega_B] = [0, 1 \text{ rad/s}], R_G = 1 \Omega, R_L = 1 \Omega, C_L = 5 \text{ F.}$$

D'après la relation (10.45), le gain idéal constant  $F_1$  est égal à 0,715390. Sans égaliseur, le minimum  $F_1(1)$  est égal à 0,137931.

#### Chaîne-image de cellules à $k$ -constant

Le circuit 1 de l'égaliseur est représenté à la figure 10.12. Le rapport de transformation  $n_1$  est choisi égal à l'unité. L'inductance  $L_1$  est calculée par (10.115). La meilleure valeur de  $a$ , qui maximise  $F_m$ , est telle que :

$$F_m = 0,3005, D = 5,222 \text{ dB}, L_1 = 0,283835 \text{ H}, \omega_C = 1,003305 \text{ rad/s}, a = 0,70.$$

Cette faible valeur de  $F_m$  est due au fait que les adaptations-image d'entrée et de sortie sont mauvaises car la pulsation-image de coupure  $\omega_C$  est très proche de  $\omega_B$ . Le minimum  $F_m$  peut être augmenté si l'on considère le problème d'optimisation comme la recherche bidimensionnelle des paramètres  $(a, \omega_C)$  qui maximisent  $F_m$ . Pour les cas mal conditionnés, la méthode se résume à :

- calculer l'inductance  $L_1$  de la cellule à  $k$ -constant par la relation

$$L_1 = \frac{1}{a C_L \omega_C^2} \quad (10.117)$$

- construire une chaîne-image à  $k$ -constant à l'aide de la cellule qui vient d'être déterminée;
- introduire à l'entrée de l'égaliseur un transformateur idéal de rapport  $n_1$  tel que :

$$\frac{R_G}{n_1^2} = \sqrt{W_2(0) W_2(j\omega_B)} = \frac{1}{a C_L \omega_C} \sqrt{\frac{\omega_C}{\sqrt{\omega_C^2 - 1}}} \quad \text{avec } \omega_B = 1 \text{ rad/s} \quad (10.118)$$

- déterminer la valeur de  $F_m$  qui correspond à ces valeurs de  $a$  et de  $\omega_C$ .

La méthode précédente est appliquée. Les résultats sont égaux à :

$$\begin{aligned} F_m &= 0,6145, D = 1,302 \text{ dB}, \\ n_1 &= 1,552061, L_1 = 0,2572016 \text{ H}, \\ \omega_C &= 1,20 \text{ rad/s}, a = 0,54. \end{aligned}$$

#### Chaîne-image de cellules en $m$ -dérivé et à $k$ -constant

Comparons les résultats obtenus par le circuit 1 (fig. 10.12) et par le circuit 2 (fig. 10.13). Comme pour le circuit 1, le problème d'optimisation se réduit à la recherche des paramètres  $(a, \omega_C)$  qui maximisent  $F_m$ . Le paramètre  $m$ , les éléments de la cellule en  $m$ -dérivé, le rapport de transformation  $n_1$  et l'inductance  $L_1$  sont respectivement calculés à l'aide de (10.105), (10.97), (10.116) et (10.117). Les résultats sont égaux à :

$$\begin{aligned} F_m &= 0,6715, D = 0,2375 \text{ dB}, \\ n_1 &= 1,889497, L_1 = 0,2430724 \text{ H}, \\ \omega_C &= 1,10 \text{ rad/s}, m = 0,5422945, a = 0,68. \end{aligned}$$

On constate à nouveau que l'introduction d'une cellule en  $m$ -dérivé permet d'augmenter  $F_m$ .

### 10.6.9 Structure optimale de l'égaliseur

Dans le cas de la simple adaptation, et pour un degré fixé du gain effectif, on vient de montrer aux paragraphes 10.6.7 et 10.6.8 que la méthode des paramètres-image permet de déterminer la structure optimale de l'égaliseur. Elle est telle que le premier élément réactif de l'égaliseur, du côté du générateur, correspond à un circuit antirésonant suivi alternativement d'une capacité shunt et d'une inductance série. De plus, le nombre d'éléments contenus dans l'égaliseur est minimal.

Cette structure est en accord avec la propriété du paragraphe 10.2.11 qui montre que l'emploi de zéros de transmission à des fréquences finies favorise l'augmentation du minimum absolu  $F_m$  par rapport à une structure dépourvue de tels zéros.

### 10.6.10 Détermination aléatoire des paramètres-image optimaux

Des hypothèses ont été faites aux paragraphes 10.6.7 et 10.6.8 pour passer de la recherche de quatre paramètres-image à celle d'un seul ou de deux paramètres suivant que le problème est bien ou mal conditionné. Ces hypothèses entraînent que les paramètres-image calculés précédemment ne sont pas optimaux. Avant d'appliquer l'algorithme d'optimisation [49], [50], le minimum  $F_m$ , déterminé par la méthode précédente, doit être comparé au gain idéal constant  $F_1$ . Par exemple, si  $F_m$  est éloigné de moins de 1 % de  $F_1$ , alors il n'est pas nécessaire d'utiliser cet algorithme.

Le but de l'algorithme d'optimisation est de déterminer le vecteur  $X_{opt}$  qui correspond à la valeur optimale  $F_{opt}$  du minimum dans le cas d'un filtre à paramètres-image (fig. 10.12 et 10.13). Ce vecteur inconnu est égal à

$$X_{opt} = (a, m, \omega_C, n_1)^T$$

Les valeurs initiales des paramètres  $(a, m, \omega_C, n_1)$  sont obtenues par la méthode des paragraphes 10.6.7 et 10.6.8. A la première itération, les composantes du vecteur  $X(0)$  correspondent à ces valeurs; la valeur correspondante du minimum  $F_m(0)$  est déterminée. Les valeurs initiales de  $X_{opt}$  et de  $F_{opt}$  sont égales à

$$X_{opt} = X(0) \text{ et } F_{opt} = F_m(0)$$

A la deuxième itération, le nouveau vecteur  $X(1)$  est égal à

$$X(1) = (I_N + \eta A) X_{opt} \quad (10.119)$$

La matrice  $A$  est une matrice diagonale dont l'ordre est égal au nombre  $N$  d'inconnues; c'est-à-dire à quatre. La matrice  $I_N$  est la matrice identité d'ordre  $N$ . Le facteur  $\eta$  est positif et plus petit que l'unité; il reste fixe pendant la recherche aléatoire. Les différentes composantes de la diagonale de  $A$  sont dénotées par  $a_{ii}$ . A chaque itération, les composantes  $a_{ii}$  varient aléatoirement et elles ne sont pas identiques. Leur distribution suit la distribution normale de probabilité de Laplace-Gauss égale à

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (10.120)$$

Le minimum du gain  $F_m(1)$ , qui correspond à  $X(1)$ , est déterminé et comparé à  $F_{opt}$ . Le réel  $F_{opt}$  et le vecteur  $X_{opt}$  sont modifiés si et seulement si  $F_m(1)$  est plus grand que  $F_{opt}$ ; ils deviennent alors égaux à

$$X_{opt} = X(1) \text{ et } F_{opt} = F_m(1)$$

Cette procédure, qui est répétée à chaque itération, est arrêtée à l'itération  $n_{maxi}$ . A la fin des itérations, les paramètres-image optimaux sont égaux aux composantes de  $X_{opt}$ . Ce processus peut aussi être stoppé avant l'itération  $n_{maxi}$  si, par exemple, la valeur de  $F_{opt}$  est augmentée de moins de 0,0001 % lorsque  $F_{opt}$  est modifié.

Le facteur  $\eta$  et le nombre maximal  $n_{maxi}$  d'itérations seront respectivement choisis égaux à 0,03 et à  $10^4$  pour les exemples présentés.

### 10.6.11 Détermination aléatoire des éléments optimaux

L'égaliseur n'est plus supposé être un filtre à paramètres-image pendant la détermination aléatoire. L'algorithme d'optimisation aléatoire [50] est appliqué pour trouver les éléments optimaux de l'égaliseur qui maximisent  $F_m$ . La procédure utilisée pour déterminer ces éléments est la même que celle employée pour trouver les paramètres-image optimaux excepté que l'ordre des matrices  $A$  et  $I_N$  est maintenant égal au nombre d'éléments contenus dans l'égaliseur. Par exemple, le nombre d'inconnues est égal à cinq pour les circuit 3 et 4 représentés aux figures 10.16 et 10.17.

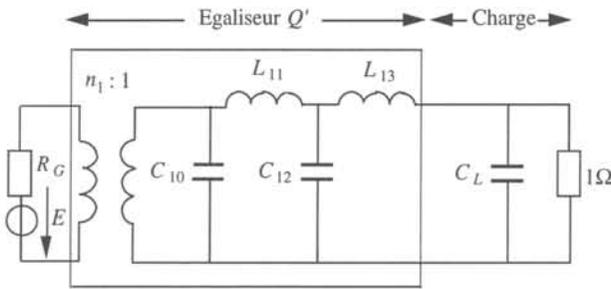


Fig. 10.16 Circuit 3.

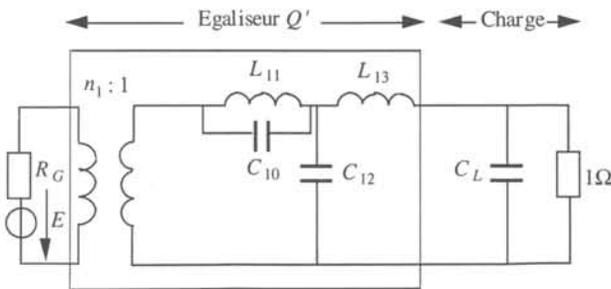


Fig. 10.17 Circuit 4.

Les éléments (paramètres-image) optimaux sont déterminés en un nombre raisonnable d'itérations car les valeurs des éléments obtenues par les différentes méthodes sont proches les unes des autres du fait qu'il existe plusieurs optima locaux. Parmi ces méthodes, on peut citer la *technique des fréquences réelles* de Carlin [40], la *méthode paramétrique* de Fettweis, Pandel et Yarman [51], la *technique stochastique* de Dedieu [50] et la *méthode des minima égalisés* [45].

### 10.6.12 Détermination aléatoire dans un cas bien conditionné

On considère la simple adaptation de la charge  $RC$  telle que :

$$B = [0, \omega_B] = [0, 1 \text{ rad/s}], R_G = 1 \Omega, R_L = 1 \Omega, C_L = 1,2 \text{ F}, F_1 = 0,994678.$$

Soient les circuits 1 et 3 représentés respectivement aux figures 10.12 et 10.16. Les conditions initiales sont identiques pour ces deux circuits; elles correspondent à  $F_m$  égal à 0,9711. Les résultats de la détermination aléatoire des paramètres-image optimaux du circuit 1, et des éléments optimaux du circuit 3 sont respectivement égaux à :

$$F_m = 0,9832, D = 0,0736 \text{ dB}, n_1 = 1,050196, \\ \omega_C = 1,242793 \text{ rad/s}, a = 0,83255975$$

et

$$F_m = 0,9885, D = 0,0327 \text{ dB}, n_1 = 1,101554, \\ C_{10} = 0,7168421 \text{ F}, L_{11} = 1,061956 \text{ H}, \\ C_{12} = 1,89271 \text{ F}, L_{13} = 1,22822 \text{ H}.$$

Soient les circuits 2 et 4 représentés respectivement aux figures 10.13 et 10.17. Les conditions initiales sont identiques pour ces deux circuits; elles correspondent à  $F_m$  égal à 0,9759. Les résultats de la détermination aléatoire des paramètres-image optimaux du circuit 2, et des éléments optimaux du circuit 4 sont respectivement égaux à :

$$F_m = 0,9871, D = 0,0211 \text{ dB}, n_1 = 1,120240, \\ \omega_C = 1,3659068 \text{ rad/s}, a = 0,7750409, m = 0,7399771$$

et

$$F_m = 0,9904, D = 0,0252 \text{ dB}, n_1 = 1,084532, \\ C_{10} = 1,194350 \text{ F}, L_{11} = 0,4281367 \text{ H}, \\ C_{12} = 1,638961 \text{ F}, L_{13} = 1,304899 \text{ H}.$$

### 10.6.13 Détermination aléatoire dans un cas mal conditionné

On considère la simple adaptation de la charge  $RC$  telle que :

$$B = [0, \omega_B] = [0, 1 \text{ rad/s}], R_G = 1 \Omega, R_L = 1 \Omega, C_L = 5 \text{ F}, F_1 = 0,715390.$$

Soient les circuits 1 et 3 représentés respectivement aux figures 10.12 et 10.16. Les conditions initiales sont identiques pour ces deux circuits; elles correspondent à  $F_m$  égal à 0,6145. Les résultats de la détermination aléatoire des paramètres-image optimaux du circuit 1, et des éléments optimaux du circuit 3 sont respectivement égaux à :

$$F_m = 0,6498, D = 0,9498 \text{ dB}, n_1 = 1,718903, \\ \omega_C = 1,133357 \text{ rad/s}, a = 0,6158472$$

et

$$F_m = 0,6707, D = 0,5165 \text{ dB}, n_1 = 1,900812, \\ C_{10} = 2,615947 \text{ F}, L_{11} = 0,4088121 \text{ H}, \\ C_{12} = 6,283442 \text{ F}, L_{13} = 0,4756095 \text{ H}.$$

Soient les circuits 2 et 4 représentés respectivement aux figures 10.13 et 10.17. Les conditions initiales sont identiques pour ces deux circuits ; elles correspondent à  $F_m$  égal à 0,6715. Les résultats de la détermination aléatoire des paramètres-image optimaux du

circuit 2, et des éléments optimaux du circuit 4 sont respectivement égaux à :

$$F_m = 0,6806, D = 0,3154 \text{ dB}, n_1 = 1,85773, \\ \omega_C = 1,0548602 \text{ rad/s}, a = 0,69519, m = 0,4477519$$

et

$$F_m = 0,6870, D = 0,4364 \text{ dB}, n_1 = 1,861781, \\ C_{10} = 4,637175 \text{ F}, L_{11} = 0,1431979 \text{ H}, \\ C_{12} = 5,142526 \text{ F}, L_{13} = 0,5129002 \text{ H}.$$

#### 10.6.14 Egalisation des minima

On constate que les minima du gain effectif sont quasiment égalisés dans  $B$  si l'on trace les courbes du gain des circuits 1 à 4 [42], [49] relatifs aux exemples de simple adaptation de la charge  $RC$  qui viennent d'être étudiés. La même constatation peut être faite pour les exemples de simple adaptation de la charge  $RLC$  ou de double adaptation de la charge  $RLC$  et du générateur  $RL$  présentés dans [42], [44] et [50]. Cette remarque a donné lieu au développement de la méthode des minima égalisés qui est expliquée dans [45] et le chapitre 6 de [42].

### 10.7 MÉTHODE DE GAUSS-NEWTON STOCHASTIQUE

#### 10.7.1 Introduction

Cette section est consacrée à la méthode stochastique d'optimisation de Dedieu [50] appelée la méthode *RSE* (*Recursive Stochastic Equalization method*). Deux autres méthodes numériques ont été développées auparavant : la méthode des fréquences réelles de Carlin [40] et la méthode paramétrique de Pandel et Fettweis, pour la simple adaptation, et de Yarman et Fettweis [51], pour la double adaptation. Ces techniques numériques ne nécessitent pas de connaître les modèles électriques équivalents des impédances de la charge et du générateur. Il suffit de mesurer ces deux impédances à des fréquences discrètes.

Pour la méthode *RSE*, la structure de l'égaliseur est choisie au départ; les inconnues sont directement les valeurs des éléments de l'égaliseur. Cette méthode comporte deux étapes qui sont l'algorithme de Gauss-Newton stochastique et la détermination aléatoire de l'égaliseur optimal.

#### 10.7.2 Initialisation des éléments de l'égaliseur

A l'aide de plusieurs conditions initiales, on constate que la méthode *RSE* est peu sensible aux valeurs initiales des éléments de l'égaliseur. Dans le cas de la simple ou de la double adaptation d'un générateur et d'une charge passe-bas, la valeur initiale du rapport du transformateur idéal peut être choisie pour que le gain à l'origine  $F(0)$  soit égal au gain idéal constant  $F_1$  calculé par les contraintes intégrales. Un filtre à paramètres-image peut être choisi comme condition initiale si la structure de l'égaliseur correspond à un tel filtre.

### 10.7.3 Algorithme de Gauss-Newton stochastique

Les parties réelles et imaginaires des impédances du générateur et de la charge sont mesurées en  $S$  pulsations équiréparties dans la bande  $B$  à adapter. Ces  $S$  pulsations correspondent aux éléments de l'ensemble  $M_0$ . La structure de l'égaliseur est choisie. Le nombre d'éléments de l'égaliseur est noté par  $N$ . Les valeurs des éléments de l'égaliseur correspondent aux composantes du vecteur  $X$ . Dans cette section, la fonction gain est notée par  $F(\omega^2, X)$  car d'une part, elle est paire par rapport à la pulsation  $\omega$ , et d'autre part, elle dépend des éléments de l'égaliseur. Un gain constant  $F_0$  compris entre zéro et l'unité est choisi. Le but de l'algorithme de Gauss-Newton est de déterminer le vecteur inconnu  $X_{\text{opt}}$  qui minimise l'erreur quadratique moyenne  $C(X)$  définie par :

$$C(X) = \sum_{i=1}^S \frac{(F_0 - F(\omega_i^2, X))^2}{2S} \quad (10.121)$$

Cette fonction est appelée la *fonction coût*. Une minimisation directe de  $C(X)$  est difficile par un algorithme déterministe car il faut calculer les dérivées du gain, par rapport aux éléments de l'égaliseur, en chacune des  $S$  pulsations de  $M_0$ .

L'algorithme de Gauss-Newton stochastique [50] est appliqué pour minimiser  $C(X)$ . A chaque itération  $i$ , une pulsation  $\omega(i)$  est tirée au hasard dans  $M_0$  suivant une loi de probabilité uniforme. L'algorithme est donc stochastique dans la mesure où  $\omega(i)$  est choisi aléatoirement. Les dérivées du gain par rapport aux éléments de l'égaliseur ne sont calculées qu'à cette pulsation. A la différence de la méthode des fréquences réelles et de la technique paramétrique, il ne faut pas calculer ces dérivées pour toutes les pulsations de  $M_0$ . La fonction  $e$  et le vecteur  $\psi$  sont définis par :

$$e(i, \omega(i), X(i-1)) = F_0 - F(\omega(i)^2, X(i-1)) \quad (10.122)$$

$$\psi(i, \omega(i), X(i-1)) = \frac{\partial F(\omega(i)^2, X(i-1))}{\partial X} \quad (10.123)$$

A chaque itération, le vecteur  $X$  est modifié par

$$X(i) = X(i-1) + e(i, \omega(i), X(i-1))R^{-1}(i)\psi(i, \omega(i), X(i-1)) \quad (10.124)$$

$$R(i) = \lambda R(i-1) + [\psi(i, \omega(i), X(i-1))][\psi(i, \omega(i), X(i-1))]^T \quad (10.125)$$

La variable  $\lambda$ , appelée *facteur d'oubli*, désigne un réel plus grand que zéro et plus petit que l'unité. La matrice  $I_N$  et la variable  $R_0$  désignent respectivement la matrice identité d'ordre  $N$  et une constante réelle. Comme condition initiale, on pose que

$$R(0) = R_0 I_N$$

On peut montrer [50] que le résultat de cet algorithme est le vecteur  $X_{\text{opt}}$  qui minimise  $C(X)$  mais qui ne maximise pas forcément  $F_m$ . Pour cette raison, à chaque itération  $i$ , le minimum absolu  $F_m(i)$  du gain associé au vecteur  $X(i)$  est déterminé. Au cours des itérations, on garde en mémoire le vecteur  $X_m$  qui maximise  $F_m$ . A la fin des itérations, le vecteur  $X$  qui maximise  $F_m$  est égal à  $X_m$ .

### 10.7.4 Détermination aléatoire de l'égaliseur optimal

La détermination aléatoire des éléments de l'égaliseur est nécessaire pour d'une part, devenir peu sensible au choix de  $F_0$ , et d'autre part, maximiser directement  $F_m$ .

L'algorithme utilisé est le même que celui du paragraphe 10.6.11. Les valeurs initiales des éléments de l'égaliseur sont égales aux composantes du vecteur  $X_m$  obtenu par l'algorithme de Gauss-Newton stochastique.

### 10.7.5 Dérivées du gain par la matrice de chaîne

Les dérivées du gain par rapport aux éléments de l'égaliseur vont être calculées analytiquement à partir de la matrice de chaîne (sect. 7.2). Elles peuvent aussi être déterminées à partir du réseau adjoint comme expliqué dans [50]. Les modèles électriques équivalents des impédances de la charge et du générateur doivent être connus pour calculer ces dérivées par la matrice de chaîne; ces modèles ne sont pas nécessaires si la méthode du réseau adjoint est employée. L'équivalence de Darlington est appliquée à la charge et au générateur pour déterminer le biporte global  $Q$  (fig. 10.2). Les transformées de Laplace des tensions et courants aux deux accès de  $Q$  sont désignées par  $U_1(p)$ ,  $U_2(p)$ ,  $I_1(p)$  et  $I_2(p)$  (fig. 10.3). La matrice de chaîne  $T$  de  $Q$  (§ IV.6.1.20) est définie par :

$$T = \begin{pmatrix} A(p) & B(p) \\ C(p) & D(p) \end{pmatrix} \quad (10.126)$$

$$\begin{pmatrix} U_1(p) \\ I_1(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(p) & B(p) \\ C(p) & D(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2(p) \\ -I_2(p) \end{pmatrix} \quad (10.127)$$

L'impédance d'une branche série de l'égaliseur est désignée par  $Z(p)$ . Le biporte global  $Q$  correspond à la mise en cascade des biportes réciproques et non dissipatifs  $Q_A$ ,  $Q_Z$  et  $Q_B$  (fig. 10.18). La relation (7.52) entraîne que

$$\frac{\partial s_{21}(p)}{\partial Z} = \frac{-s_{21}(p)}{Z(p) + \zeta_A(p) + \zeta_B(p)} \quad (10.128)$$

Si l'impédance  $Z(p)$  correspond à un circuit antirésonant formé de la mise en parallèle de l'inductance  $L$  et de la capacité  $C$ , elle est égale à

$$Z(p) = \frac{Lp}{1 + LCp^2}$$

Les dérivées partielles de  $s_{21}$  par rapport à  $L$  et à  $C$  sont égales à :

$$\frac{\partial s_{21}(p)}{\partial L} = \frac{\partial s_{21}(p)}{\partial Z} \frac{\partial Z(p)}{\partial L} = \frac{-s_{21}(p)}{Z(p) + \zeta_A(p) + \zeta_B(p)} \frac{p}{(1 + LCp^2)^2} \quad (10.129)$$

$$\frac{\partial s_{21}(p)}{\partial C} = \frac{\partial s_{21}(p)}{\partial Z} \frac{\partial Z(p)}{\partial C} = \frac{s_{21}(p)}{Z(p) + \zeta_A(p) + \zeta_B(p)} \frac{L^2 p^3}{(1 + LCp^2)^2} \quad (10.130)$$

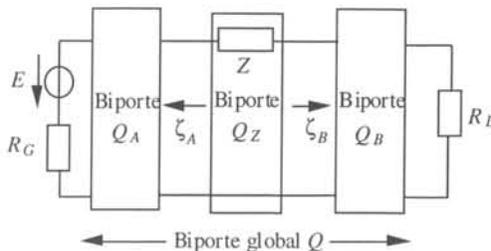


Fig. 10.18

Le même développement peut être suivi si  $Z(p)$  correspond à une inductance série ou à une capacité série.

L'admittance d'une branche parallèle de l'égaliseur est désignée par  $Y(p)$ . A l'aide de la relation (7.53), les dérivées partielles de  $s_{21}$  par rapport aux éléments de  $Y(p)$  peuvent être déterminées par la même méthode que celle employée pour  $Z(p)$ .

Le rapport de transformation du transformateur idéal de l'égaliseur est désigné par  $n_1$ . La relation (7.41) entraîne que

$$\frac{\partial s_{21}(p)}{\partial n_1} = -2\sqrt{\frac{R_G}{R_L}} \frac{\partial D_1(p)}{\partial n_1} \frac{1}{(D_1(p))^2}$$

$$D_1(p) = A(p) + \frac{B(p)}{R_L} + C(p)R_G + \frac{D(p)R_G}{R_L} \quad (10.131)$$

Un élément quelconque de l'égaliseur est désigné par  $X_i$ ; il correspond à une capacité, à une inductance ou au rapport  $n_1$  du transformateur idéal. Les dérivées partielles de  $F(\omega^2)$  par rapport aux éléments  $X_i$  sont déterminées de la manière suivante. La représentation d'Euler permet d'exprimer  $s_{21}(p)$  par

$$s_{21}(p) = R \exp(j\varphi)$$

La dérivée partielle de  $s_{21}(p)$  par rapport à un élément  $X_i$  est égale à

$$\frac{\partial s_{21}(p)}{\partial X_i} = \frac{s_{21}(p)}{R} \left( \frac{\partial R}{\partial X_i} + jR \frac{\partial \varphi}{\partial X_i} \right)$$

La dérivée partielle de  $R$  par rapport à  $X_i$  est donc égale à

$$\frac{\partial R}{\partial X_i} = \operatorname{Re} \left( \frac{R}{s_{21}(p)} \frac{\partial s_{21}(p)}{\partial X_i} \right)$$

Cette dernière relation entraîne que

$$\frac{\partial F(\omega^2)}{\partial X_i} = \frac{\partial |s_{21}(j\omega)|^2}{\partial X_i} = 2|s_{21}(j\omega)|^2 \operatorname{Re} \left( \frac{1}{s_{21}(j\omega)} \frac{\partial s_{21}(j\omega)}{\partial X_i} \right) \quad (10.132)$$

## 10.8 MODE D'EMPLOI

### 10.8.1 Introduction

L'objectif de cette section est de guider le lecteur afin de concevoir rapidement un égaliseur à large bande. Le problème de la double adaptation a été abordé rapidement dans ce chapitre; la personne confrontée à une telle situation pourra consulter [42] pour de plus amples renseignements. Le cas pour lequel les modèles électriques équivalents des impédances de la charge et du générateur sont connus sera distingué de celui où ces modèles n'ont pas été déterminés.

Ce mode d'emploi fera référence à la méthode des minima égalisés. Cette technique a été mentionnée dans ce chapitre sans en expliquer les détails. Tout élément réactif du biporte global  $Q$  doit être une capacité shunt ou une inductance série pour pouvoir appliquer cette méthode. Les minima relatifs du gain, dans la bande  $B$  à adapter, sont automatiquement égalisés par cette technique; le minimum absolu  $F_m$  est directement optimisé. Le lecteur intéressé par cette méthode pourra consulter [45] ainsi que le chapitre 6 de [42].

### 10.8.2 Modèles de la charge et du générateur connus

On suppose que les modèles électriques équivalents des impédances de la charge et du générateur sont connus. On effectue une transformation de fréquences du passe-haut en passe-bas des éléments de la charge et du générateur, et de la bande  $B$  à adapter, si cette bande est du type passe-haut. On rappelle que  $F_1$  est égal à la limite supérieure du minimum absolu  $F_m$  dans  $B$  de toute fonction gain  $F(\omega^2)$ . Pour concevoir un égaliseur, la méthode proposée est la suivante :

- On applique l'équivalence de Darlington (§ 10.2.3) pour déterminer les polynômes des biportes  $Q''$  de la charge et  $Q_G$  du générateur.
- On détermine les contraintes intégrales dues à la charge et au générateur (sect. 10.2).
- On calcule soit le gain idéal constant  $F_1$  (sect. 10.3), soit une limite supérieure  $F_{lim}$  de  $F_1$  si le calcul de  $F_1$  est impossible du fait du trop grand nombre de contraintes intégrales [42].
- On choisit le degré  $n$  du polynôme  $g$  associé au biporte global  $Q$ .
- Si la bande  $B$  à adapter est égale à  $[0, \omega_B]$ , on choisit une structure de l'égaliseur qui soit un filtre à paramètres-image. On rappelle que l'utilisation de cellules en  $m$ -dérivé permet de maximiser  $F_m$ . On applique la méthode des paramètres-image pour déterminer les paramètres-image optimaux (sect. 10.6).
- Si  $F_m$  est proche de  $F_1$  (par exemple à moins de 3 %), on arrête les recherches.
- Si  $F_m$  est éloigné de  $F_1$  (par exemple à plus de 3 %), on effectue une détermination aléatoire des éléments optimaux de l'égaliseur (sect. 10.6) qui n'est plus supposé être un filtre à paramètres-image. La condition initiale correspond au meilleur filtre à paramètres-image.
- Si  $F_m$  est proche de  $F_1$ , on arrête les recherches. Dans le cas contraire, on continue.
- Si tous les éléments des biportes  $Q''$  et  $Q_G$  sont des capacités shunt et des inductances série, on détermine les contraintes non intégrales dues à la charge et au générateur (sect. 10.4).
- Si le nombre d'éléments dans  $Q''$  ou  $Q_G$  est inférieur ou égal à deux et qu'ils sont du type capacité shunt ou inductance série, on applique la méthode de Tchebycheff (sect. 10.5). Si  $F_m$  est proche de  $F_1$ , on arrête les recherches. Si  $F_m$  est éloigné de  $F_1$ , on applique la méthode des minima égalisés. Si  $F_m$  est encore trop éloigné de  $F_1$ , on applique la méthode stochastique *RSE* (sect. 10.7) après avoir choisi la structure de l'égaliseur. On rappelle qu'il est judicieux que cette structure contienne des circuits résonants ou antirésonants pour maximiser  $F_m$ . Si  $F_m$  est proche de  $F_1$ , on arrête les recherches. Si  $F_m$  est toujours trop éloigné de  $F_1$ , on augmente le degré  $n$  de  $g$  puis on recommence les différentes étapes exposées ci-dessus.
- Si le nombre d'éléments dans  $Q''$  ou  $Q_G$  est supérieur à deux et qu'ils sont du type capacité shunt ou inductance série, on applique directement la méthode des minima égalisés puis on suit la procédure exposée ci-dessus.
- Les méthodes de Tchebycheff et des minima égalisés ne peuvent pas être utilisées si des éléments de  $Q''$  ou de  $Q_G$  ne sont pas des capacités shunt ou des inductances série, ou si la bande  $B$  à adapter est du type passe-bande. Dans ces deux cas, on applique directement la méthode stochastique *RSE*. Si  $F_m$  est proche de  $F_1$ , on arrête les recherches. Si  $F_m$  est éloigné de  $F_1$ , on augmente le degré  $n$  de  $g$  puis on applique à nouveau la méthode stochastique *RSE*.

### 10.8.3 Mesures discrètes de la charge et du générateur

Les impédances de la charge et du générateur ont été mesurées à des fréquences discrètes. Les modèles électriques équivalents de ces impédances ne sont pas connus. Dans ce cas, la méthode stochastique *RSE* (sect. 10.7) est directement appliquée après avoir choisi la structure de l'égaliseur. Une deuxième façon de procéder consisterait à appliquer la procédure exposée au paragraphe 10.8.2 après avoir déterminé les modèles électriques de la charge et du générateur à partir des mesures effectuées.



## FILTRES DISCRETS

### 11.1 ANALYSE DES SIGNAUX ET SYSTÈMES DISCRETS

#### 11.1.1 Définitions. Signal discret, numérique

Un *signal discret* est une suite de nombres, complexes ou réels, dont l'indice prend toutes les valeurs entières entre  $-\infty$  et  $+\infty$ . La  $n$ -ième valeur du signal  $x$  sera désignée par  $x(n)$ . Si les valeurs d'un signal discret sont a priori limitées à un ensemble fini, il s'agit d'un *signal numérique*.

Afin de distinguer les signaux discrets des signaux à variable indépendante et à valeurs continues, dont il était question dans les autres chapitres de ce volume, ces derniers seront appelés *signaux analogiques* (§ XX.1.1.2).

#### 11.1.2 Commentaires

Souvent, un signal discret  $x$  est obtenu à partir d'un signal analogique  $\xi$ , en prenant la valeur à des intervalles réguliers :

$$x(n) = \xi(nT) \quad (11.1)$$

Ce procédé sera discuté à la section 11.2.

Un signal discret n'est pourtant pas obligatoirement lié à un signal analogique, ni à des intervalles de temps. Il peut représenter, par exemple, une mesure sur un produit industriel fabriqué en masse, ou le signe alphabétique dans un texte.

Seuls les éléments de la théorie du signal discret, strictement nécessaires pour la suite, seront décrits dans cette section. Le sujet est approfondi au volume XX.

#### 11.1.3 Définitions

Les signaux discrets suivants ont une importance particulière, comme dans le cas des signaux analogiques correspondants.

- *impulsion unité* (fig. 11.1)

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (11.2)$$

- *échelon unité* (fig. 11.2)

$$\epsilon(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (11.3)$$

- *signal exponentiel* (fig. 11.3)

$$x(n) = \exp(cn) \quad (11.4)$$

où  $c$  est un nombre réel ou complexe.

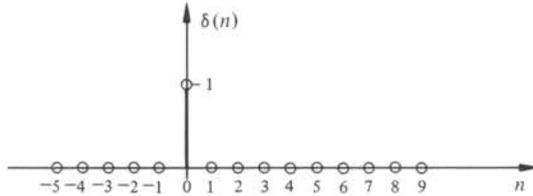


Fig. 11.1

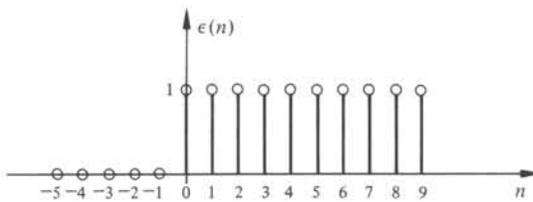


Fig. 11.2

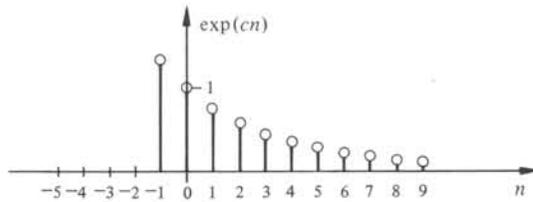


Fig. 11.3

#### 11.1.4 Opérations sur les signaux discrets

Des opérations sur les signaux discrets peuvent être définies par analogie avec celles des signaux continus, en particulier :

- les *opérations linéaires* :

$$(ax + by)(n) = ax(n) + by(n) \quad (11.5)$$

- la *convolution* :

$$(x * y)(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(n-m)y(m) \quad (11.6)$$

- la *transformée de Fourier* :

$$\tilde{X}(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\Omega n} \quad (11.7)$$

Elles ont aussi des propriétés analogues : par exemple, la convolution de deux signaux correspond au produit de leurs transformées de Fourier (§ XX.1.6.9), et l'im-

pulsion unité (11.2) est l'élément unité pour la convolution (§ XX.1.2.12) :

$$x * \delta = x \quad (11.8)$$

Remarquons que la variable  $\Omega$  de la transformée de Fourier n'a pas pour unité le rad/s mais le rad puisque n'a pas de dimension.

### 11.1.5 Propriété. Périodicité de la transformée de Fourier

La transformée de Fourier d'un signal discret est périodique de période  $2\pi$ . La démonstration à partir de (11.7) est évidente. Comme on le verra plus loin, cette périodicité constitue une limitation pour le traitement de signaux analogiques par des filtres discrets.

Cette propriété de la transformée de Fourier est une particularité des signaux discrets.

### 11.1.6 Définition. Transformée en $z$

Au lieu d'étendre la transformée de Fourier de l'axe imaginaire  $j\Omega$  au plan complexe  $p$ , c'est-à-dire à la transformée de Laplace, on préfère tenir compte de sa périodicité dans le cas des signaux discrets, et introduire la variable  $z = e^p$ .

La transformée en  $z$  d'un signal discret  $x$  est définie par

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} \quad (11.9)$$

La transformée de Fourier est identique à la transformée en  $z$  sur la circonférence unité :

$$\tilde{X}(\Omega) = X(e^{j\Omega}) \quad (11.10)$$

### 11.1.7 Domaine de convergence

La transformée en  $z$  peut être décomposée en une série de puissances de  $z^{-1}$  et une série de puissances de  $z$ . Le domaine de convergence de (11.9) est donc l'intersection du complément d'un cercle avec un cercle, ce qui donne un domaine annulaire dans le plan  $z$  (§ XX.2.2.3).

Ce domaine peut souvent être étendu par prolongement analytique. Dans le cas particulier important où la transformée en  $z$  est une fonction rationnelle, ce prolongement atteint le plan entier, à l'exception de singularités isolées, les pôles.

Si le signal discret s'annule pour les arguments négatifs, le domaine de convergence de (11.9) est le complément d'un cercle.

### 11.1.8 Calcul opérationnel

L'usage de la transformée en  $z$  est analogue à celui de la transformée de Laplace, décrite à la section IV.8.2. A partir d'un certain nombre de paires signal - transformée, regroupées dans un dictionnaire, on peut déduire un grand nombre d'autres paires en appliquant des règles qui sont rassemblées dans une grammaire.

11.1.9 Dictionnaire de la transformée en  $z$ 

Original	Transformée en $z$	Domaine de convergence
$\delta(n)$	$1$	$0 <  z  < \infty$
$\delta(n-k)$	$z^{-k}$	$0 <  z  < \infty$
$\epsilon(n)$	$\frac{z}{z-1}$	$1 <  z  < \infty$
$\exp(cn) \epsilon(n)$	$\frac{z}{z - \exp c}$	$\exp(\operatorname{Re} c) <  z  < \infty$
$\sin(\Omega_0 n) \epsilon(n)$	$\frac{z \sin \Omega_0}{z^2 - 2z \cos \Omega_0 + 1}$	$1 <  z  < \infty$
$\cos(\Omega_0 n) \epsilon(n)$	$\frac{z^2 - z \cos \Omega_0}{z^2 - 2z \cos \Omega_0 + 1}$	$1 <  z  < \infty$
$\exp(-an) \sin(\Omega_0 n) \epsilon(n)$	$\frac{z \exp(-a) \sin \Omega_0}{z^2 - 2z \exp(-a) \cos \Omega_0 + \exp(-2a)}$	$\exp(-a) <  z  < \infty$ a réel
$\exp(-an) \cos(\Omega_0 n) \epsilon(n)$	$\frac{z^2 - z \exp(-a) \cos \Omega_0}{z^2 - 2z \exp(-a) \cos \Omega_0 + \exp(-2a)}$	$\exp(-a) <  z  < \infty$ a réel

11.1.10 Grammaire de la transformée en  $z$ 

Original	Transformée en $z$	Domaine de convergence
$x(n)$	$X(z)$	$r_- <  z  < r_+$
$\sum_i c_i x_i(n)$	$\sum_i c_i X_i(z)$	à déterminer
$c^{-n} x(n)$	$X(cz)$	$\frac{r_-}{ c } <  z  < \frac{r_+}{ c }$
$x(n-k)$	$z^{-k} X(z)$	$r_- <  z  < r_+$
$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{r_+} <  z  < \frac{1}{r_-}$
$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	$r_- <  z  < r_+$
$(x * y)(n)$	$X(z) Y(z)$	à déterminer

## 11.1.11 Définitions. Système discret, numérique, analogique

La notion de système, introduite au chapitre IV.2, peut être adaptée aux domaines des signaux discrets et numériques.

Un *système discret (numérique)* est une application de l'ensemble des signaux discrets (numériques) dans lui-même. Afin de distinguer les systèmes discrets des systèmes qui transforment les signaux analogiques, on appelle ces derniers *systèmes analogiques*.

Presque toutes les définitions du chapitre IV.2 s'appliquent également aux systèmes discrets et numériques, en particulier les notions de système causal, linéaire,

invariant et stable. De même, les systèmes discrets multidimensionnels et leurs connexions peuvent être introduits en suivant les définitions du paragraphe 9.1.14.

### 11.1.12 Définitions. Réponse impulsionnelle, fonction de transfert

La réponse d'un système discret linéaire invariant à l'impulsion unité (11.2) est la *réponse impulsionnelle*. Sa transformée en  $z$  est la *fonction de transfert* du système.

Comme au paragraphe 9.1.14, ces définitions s'étendent sans difficulté aux systèmes multidimensionnels.

### 11.1.13 Commentaire

La réponse impulsionnelle discrète se distingue de son équivalent analogique par le fait que l'impulsion unité discrète (11.2) diffère de l'impulsion unité analogique (IV.7.3). De plus, la fonction de transfert d'un système discret est définie moyennant la transformée en  $z$  au lieu de la transformée de Laplace. Néanmoins, ces deux fonctions jouent le même rôle ici que les fonctions correspondantes dans la théorie des systèmes analogiques.

### 11.1.14 Propriété. Universalité de la réponse impulsionnelle et de la fonction de transfert

La réponse  $y$  d'un système discret linéaire invariant, à un signal  $x$ , peut être exprimée, soit à partir de la réponse impulsionnelle  $h$ , par

$$y = h * x \quad (11.11)$$

soit à partir de la fonction de transfert  $H$ , par

$$Y(z) = H(z) X(z) \quad (11.12)$$

(§ XX.1.6.5 et § XX.2.7.1). S'il s'agit d'un système multidimensionnel, (11.11) et (11.12) sont des équations matricielles, explicitées par (9.10) et (9.11), respectivement.

### 11.1.15 Propriétés

Un système discret linéaire invariant est causal ssi sa réponse impulsionnelle s'annule pour les arguments négatifs. Le domaine de convergence de sa fonction de transfert est alors le complément d'un cercle.

Un système discret linéaire invariant est stable, ssi sa réponse impulsionnelle  $h$  satisfait

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty \quad (11.13)$$

Une démonstration de cette propriété se trouve au paragraphe XX.1.6.21.

Si, en plus, le système est causal, et si sa fonction de transfert  $H$  est une fonction rationnelle, alors (11.13) est équivalent à la propriété que tous les pôles de  $H$  sont situés dans le cercle unité.

### 11.1.16 Définition. Retard

Aux systèmes particuliers multiplicateur, sommateur et nœud, dont la définition au paragraphe 9.1.15 s'applique également aux systèmes discrets, il faut ajouter le *retard* qui joue également un rôle privilégié. Par définition, sa réponse  $y$  à un signal  $x$  est :

$$y(n) = x(n - 1) \quad (11.14)$$

### 11.1.17 Propriétés

Le retard est, tout comme le multiplicateur, le sommateur et le nœud, un système linéaire, causal, invariant et stable. Sa réponse impulsionnelle est :

$$h(n) = \begin{cases} 1, n = 1 \\ 0, n \neq 1 \end{cases} \quad (11.15)$$

et sa fonction de transfert

$$H(z) = z^{-1} \quad (11.16)$$

C'est l'origine de son symbole, représenté à la figure 11.4.

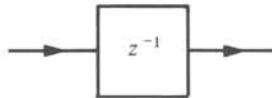


Fig. 11.4

### 11.1.18 Définition. Filtre discret

Un *filtre discret* est un système discret linéaire, invariant et causal, qui effectue un filtrage.

### 11.1.19 Classifications des filtres discrets

Il faut distinguer deux types de filtres discrets. Si la réponse impulsionnelle n'a des valeurs différentes de zéro que pour un nombre fini d'arguments, on parle d'un *filtre à réponse impulsionnelle finie*, autrement d'un *filtre à réponse impulsionnelle infinie*. Dans la littérature, on rencontre aussi la terminologie *filtre récursif (non récursif, transversal)* au lieu de filtre à réponse impulsionnelle infinie (finie). Toutefois, les adjectifs récursif et non récursif devraient être réservés pour la réalisation du filtre plutôt que pour le filtre lui-même. Cette classification sera reprise au paragraphe 11.3.1.

Une classification totalement différente se rapporte aux différentes caractéristiques de filtrage, introduites au paragraphe 1.2.1. La terminologie bande passante, bande coupée, etc., du chapitre 1, peut être transposée sans difficulté au domaine discret. Il faut se rappeler, cependant, que selon le paragraphe 11.1.5, la transformée de Fourier d'un signal discret est périodique, ce qui implique qu'une caractéristique de filtrage discret est également périodique en fréquence. Par conséquent, on se limite à l'intervalle de pulsations  $[0, \pi]$ , pour classier les filtres discrets en filtres passe-bas, passe-bande, passe-haut et coupe-bande. A titre d'exemple, un filtre passe-haut discret possède une bande coupée  $[0, \Omega_s]$ , et une bande passante  $[\Omega_c, \pi]$ , avec  $0 < \Omega_s < \Omega_c < \pi$ . Mais, si l'on considère le demi-axe entier des pulsations positives, ce filtre comporte en

fait une infinité de bandes coupées supplémentaires,  $[2k\pi - \Omega_s, 2k\pi + \Omega_s]$  avec  $k = 1, 2, \dots$ , et une infinité de bandes passantes,  $[2k\pi + \Omega_c, 2(k+1)\pi - \Omega_c]$ , avec  $k = 0, 1, \dots$ . Normalement, les filtres discrets sont étudiés en utilisant la fonction de transfert. D'après (11.10), celle-ci doit être considérée sur la circonférence unité, ce qui rend la limitation des pulsations positives à  $[0, \pi]$  spontanée.

## 11.2 ANALYSE D'UNE CHAÎNE DE FILTRAGE ANALOGIQUE CONTENANT UN FILTRE DISCRET

### 11.2.1 Introduction

Les filtres discrets sont souvent, mais non exclusivement, utilisés pour traiter des signaux analogiques. Pour cette classe d'applications, le filtre discret doit être précédé d'un dispositif qui effectue la conversion du signal analogique en signal discret et suivi d'un dispositif qui exécute l'opération inverse. Il est important de disposer d'un formalisme mathématique qui permette de mettre l'effet global de cette chaîne de transmission en relation avec la fonction de transfert du filtre discret. C'est le but de cette section.

La conversion d'un signal analogique en un signal discret sera décomposée en deux étapes. La première est effectuée par l'échantillonneur idéal dont la réponse reste un signal analogique, mais d'un type spécial. Il s'agit de combinaisons linéaires d'impulsions unité analogiques, appelées *signaux échantillonnés*. La deuxième étape consiste à transformer les signaux échantillonnés en signaux discrets.

La conversion de signaux discrets en signaux analogiques se fait de façon inverse, en passant tout d'abord par les signaux échantillonnés et en effectuant un filtrage analogique à la suite.

Il est évident que les signaux échantillonnés ne sont qu'un concept théorique et que par conséquent cette façon de concevoir la conversion analogique - discret ne peut correspondre à une réalité physique. En revanche, les formules qui en découlent sont très simples. Par ailleurs, on indiquera au paragraphe 11.2.9 comment les dispositifs physiques s'insèrent dans ce formalisme.

### 11.2.2 Définition. Échantillonneur idéal. Signal échantillonné

L'*échantillonneur idéal* avec période d'échantillonnage  $T$  est un système analogique dont la réponse  $y$  à un signal  $x$  est

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \delta(t - nT) \quad (11.17)$$

Au lieu de la période d'échantillonnage on peut aussi spécifier la *pulsation d'échantillonnage*  $\omega_e = 2\pi/T$  ou la *fréquence d'échantillonnage*  $f_e = 1/T$ .

Un *signal échantillonné* avec période d'échantillonnage  $T$ , est un signal analogique de la forme (11.17), c'est-à-dire une combinaison linéaire d'impulsions unité analogiques, décalées de multiples de  $T$ .

### 11.2.3 Commentaires

L'échantillonneur idéal est un système analogique linéaire, causal mais non invariant; il est seulement périodique. En effet, à un signal décalé d'une quantité différente d'un multiple de  $T$ , l'échantillonneur idéal ne fait pas correspondre la réponse décalée.

On peut récrire (11.17) par le paragraphe IV.7.1.32 :

$$y(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \quad (11.18)$$

L'échantillonneur idéal est donc un modulateur spécial qui multiplie le signal par le train d'impulsions  $\sum_n \delta(t-nT)$ . C'est ainsi qu'il est représenté à la figure 11.5.

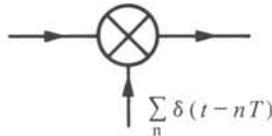


Fig. 11.5

### 11.2.4 Correspondance entre signaux échantillonnés et signaux discrets

Une période d'échantillonnage  $T$  étant donnée, l'ensemble des signaux échantillonnés  $\xi$  peut être identifié avec l'ensemble des signaux discrets  $x$  de la manière suivante

$$\xi(t) = \sum_n c_n \delta(t-nT) \iff x(n) = c_n \quad (11.19)$$

Dans (11.19), aucune référence n'est faite à un éventuel signal  $u(t)$  dont  $\xi(t)$  serait la réponse issue de l'échantillonneur idéal. Cependant, si tel était le cas, on aurait  $x(n) = u(nT)$ .

La correspondance (11.19) permet d'identifier un système discret  $N$  avec un système analogique spécial  $N'$ , à savoir un système qui transforme les signaux échantillonnés en signaux échantillonnés. En effet, soit  $h$  la réponse impulsionnelle d'un système discret  $N$ . La réponse  $y$  au signal  $x$  est, d'après (11.11):

$$y(n) = \sum_m h(n-m) x(m) \quad (11.20)$$

Cette réponse discrète est associée à un signal échantillonné

$$\eta(t) = \sum_n y(n) \delta(t-nT) \quad (11.21)$$

Le système analogique  $N'$ , correspondant à  $N$ , est celui qui transforme le signal  $\xi(t)$  de (11.19) en  $\eta(t)$ .

Il s'agit maintenant de mettre en relation les réponses impulsionnelles  $h$  et  $h'$  de  $N$  et  $N'$  ainsi que leurs fonctions de transfert  $H$  et  $H'$ .

Prendre comme signal échantillonné  $\xi(t)$  l'impulsion unité analogique  $\delta(t)$  revient à poser, dans (11.19):

$$c_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (11.22)$$

Par conséquent, le signal discret associé à  $\delta(t)$  est l'impulsion unité discrète  $\delta(n)$  de

(11.2). Par définition, la réponse à  $\delta(n)$  sous  $N$  est  $h(n)$ . Par (11.21), la relation entre les réponses impulsionnelles  $h$  et  $h'$  s'ensuit :

$$h'(t) = \sum_n h(n) \delta(t - nT) \tag{11.23}$$

La transformée de Laplace de (11.23) est

$$H'(p) = \sum h(n)e^{-pnT} \tag{11.24}$$

En comparant (11.24) avec la définition 11.1.6 de la transformée en  $z$ , on obtient la relation entre les fonctions de transfert de  $N$  et  $N'$  :

$$H'(p) = H(e^{pT}) \tag{11.25}$$

Les équations (11.23) et (11.25) permettent l'analyse de chaînes de transmission mixtes, comportant des systèmes analogiques et discrets. Dans la suite, on ne fera plus de distinction entre les systèmes  $N$  et  $N'$ .

**11.2.5 Propriété. Réponse en fréquence d'un échantillonneur idéal**

La réponse  $y$  d'un échantillonneur idéal à un signal  $x$  satisfait

$$Y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega - k\omega_e) \tag{11.26}$$

où  $X$  et  $Y$  sont les transformées de Fourier de  $x$  et  $y$  et  $\omega_e$  est la pulsation d'échantillonnage.

En effet, d'après (IV.7.139), la transformée de Fourier de  $\sum_n \delta(t - nT)$  est  $\omega_e \sum_k \delta(\omega - k\omega_e)$ . Alors, (11.18) et (IV.7.102) impliquent

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \omega_e \sum_k \delta(\omega - k\omega_e) \tag{11.27}$$

$$= \frac{1}{T} \sum_k X(\omega - k\omega_e) \tag{11.28}$$

Dans la figure 11.6, les quatre fonctions  $x, y, |X|, |Y|$  sont représentées pour un exemple.

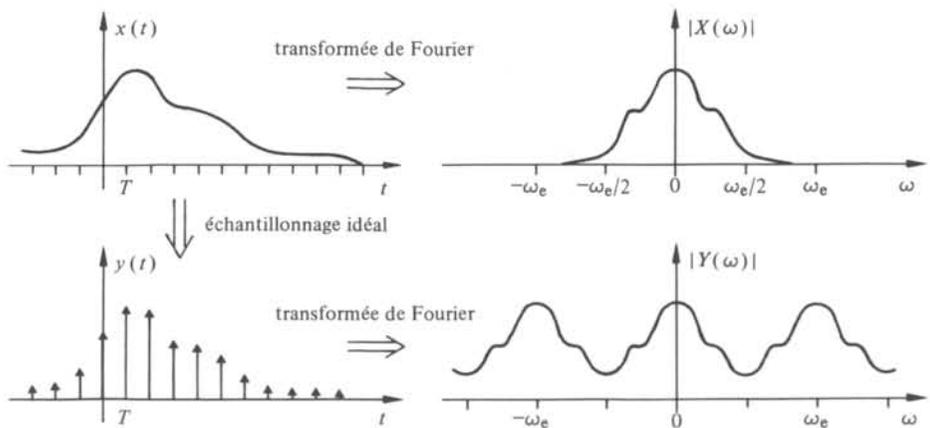


Fig. 11.6

### 11.2.6 Théorème d'échantillonnage

Soit  $y$  la réponse au signal  $x$  d'un échantillonneur idéal avec pulsation d'échantillonnage  $\omega_e$ . Si les pulsations de  $x$  sont limitées à  $\omega_e/2$ , c'est-à-dire si la transformée de Fourier de  $x$  satisfait

$$X(\omega) = 0 \quad \text{pour} \quad |\omega| > \omega_e/2 \quad (11.29)$$

alors  $x$  peut être reconstitué à un retard constant près à partir de  $y$  par un filtre passe-bas idéal (§ 4.2.1), dont la fréquence de coupure se situe à  $\omega_e/2$ .

En effet, si  $x$  satisfait (11.29), alors, d'après (11.26),  $Y(\omega) = X(\omega)$  pour  $|\omega| \leq \omega_e/2$ . En appliquant à  $y$  un filtre passe-bas idéal avec pulsation de coupure  $\omega_e/2$ , on obtient donc de nouveau  $x$ , au retard du filtre passe-bas idéal près.

Par contre, si  $X(\omega)$  n'obéit pas à (11.29), il apparaît dans (11.26) un effet de recouvrement qui empêche la récupération de  $X(\omega)$ .

### 11.2.7 Chaîne de filtrage

Le théorème d'échantillonnage est à la base du filtrage de signaux analogiques au moyen de filtres discrets, tant par ce qu'il permet que par ce qu'il ne permet pas.

Considérons une chaîne de filtrage composée d'un échantillonneur idéal suivi d'un filtre discret.

La première partie du théorème d'échantillonnage affirme qu'il suffit de faire suivre le filtre discret d'un filtre passe-bas idéal, avec pulsation de coupure  $\omega_e/2$ , pour convertir la réponse du filtre discret,  $\sum_n y(nT) \delta(t - nT)$ , en  $y(t)$ . Ce filtre est appelé *filtre de lissage* (ou de *reconstitution*).

La seconde partie montre que le filtrage analogique et le filtrage discret se ressemblent seulement s'ils sont limités aux signaux qui satisfont (11.29). Afin de respecter cette limitation, on fait précéder l'échantillonneur d'un filtre passe-bas idéal de pulsation de coupure  $\omega_e/2$ , comme le filtre de lissage. Il est appelé *filtre de garde*.

La chaîne complète, représentée à la figure 11.7, est un filtre analogique dont la fonction de transfert  $H_a$  est, d'après (11.25), liée à la fonction de transfert  $H_d$  du filtre discret par

$$H_a(j\omega) = \begin{cases} e^{-2j\omega\tau} H_d(e^{j\omega T}), & |\omega| \leq \omega_e/2 \\ 0, & |\omega| > \omega_e/2 \end{cases} \quad (11.30)$$

où  $\tau$  est le retard du filtre idéal passe-bas, défini au paragraphe 4.2.1.

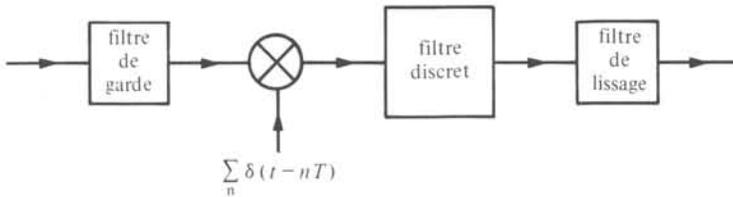


Fig. 11.7

### 11.2.8 Commentaires

A première vue, il semble aberrant de remplacer un filtre analogique par deux filtres analogiques et un filtre discret. Mais l'idée est d'attribuer la tâche principale de

filtrage au filtre discret, ce qui permet d'utiliser des filtres de garde et de lissage peu sélectifs et, par conséquent, faciles à réaliser. Ceci est possible en choisissant la fréquence d'échantillonnage suffisamment loin des limites de bande passante du filtre à réaliser pour que les caractéristiques des filtres analogiques soient aussi plates que possible dans la bande à transmettre.

L'intérêt des filtres discrets est de nature technologique. Il est possible de réaliser de tels filtres par des circuits entièrement intégrés dans une seule technologie, ce qui présente des avantages potentiels de coût, de miniaturisation et de fiabilité. C'est en particulier le cas des deux types de filtres qui seront introduits dans ce chapitre, le filtre à capacités commutées et le filtre numérique.

**11.2.9 Dispositifs de conversion entre signaux discrets et signaux analogiques**

En pratique, la conversion d'un signal discret  $y$  en un signal analogique à la sortie du filtre discret, ne fournit pas le signal échantillonné

$$\eta(t) = \sum_n y(n) \delta(t - nT) \tag{11.31}$$

mais le signal suivant, qui est constant pendant chaque période de longueur  $T$ :

$$\eta_1(t) = \sum_n y(n) \psi(t - nT) \tag{11.32}$$

où

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases} \tag{11.33}$$

Le signal  $\eta_1$  peut être représenté à partir de  $\eta$  en utilisant l'équation

$$f(t) * \delta(t - a) = f(t - a) \tag{11.34}$$

valable pour toute fonction  $f$  et tout nombre réel  $a$  (§ IV.7.2.10).

En effet,

$$\eta_1(t) = \sum_n y(n) [\psi(t) * \delta(t - nT)] \tag{11.35}$$

$$= \psi(t) * \sum_n y(n) \delta(t - nT) \tag{11.36}$$

$$= \psi(t) * \eta(t) \tag{11.37}$$

La transformation de  $\eta$  en  $\eta_1$  revient donc à l'action d'un système linéaire, causal et invariant dont la réponse impulsionnelle est  $\psi$  et que l'on appelle *système de maintien*. Sa fonction de transfert est

$$\psi(p) = e^{-pT/2} \frac{e^{pT/2} - e^{-pT/2}}{p} \tag{11.38}$$

Son amplitude sur l'axe imaginaire est représentée à la figure 11.8. La chaîne de transmission est à compléter selon la figure 11.9. La fonction de transfert globale est donc le produit des fonctions de transfert des trois filtres et de  $\psi$ . L'influence souvent néfaste du système de maintien peut, en principe, être compensée par les filtres.

La conversion analogique-discret n'introduit par contre aucune distorsion de principe. La réponse d'un échantillonneur réel dépend du dispositif particulier, mais

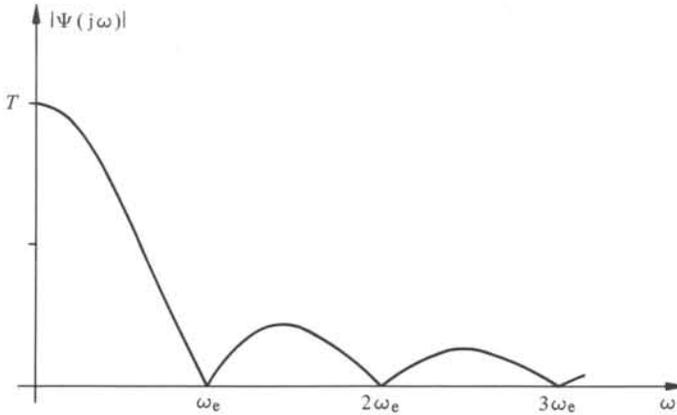


Fig. 11.8

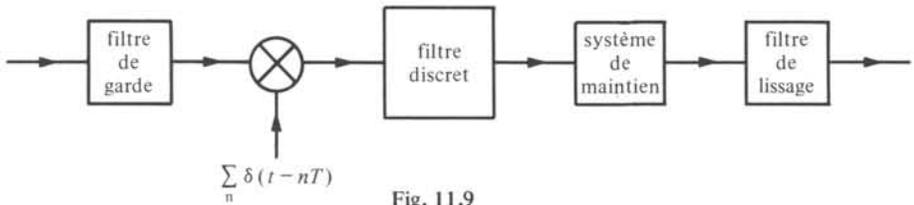


Fig. 11.9

souvent une bonne approximation est l'échantillonneur avec maintien qui transforme un signal  $x(t)$  en

$$y(t) = x(nT) \psi(t - nT) \quad (11.39)$$

Un exemple d'une paire de signaux  $x(t), y(t)$  est représenté à la figure 11.10.

Au signal (11.39) on fait correspondre le signal discret  $w(n) = x(nT)$ . A la fin, on se trouve donc avec le même signal discret qu'en utilisant l'échantillonneur idéal et la correspondance (11.19). Par conséquent, la chaîne de transmission de la figure 11.9 reste valable.

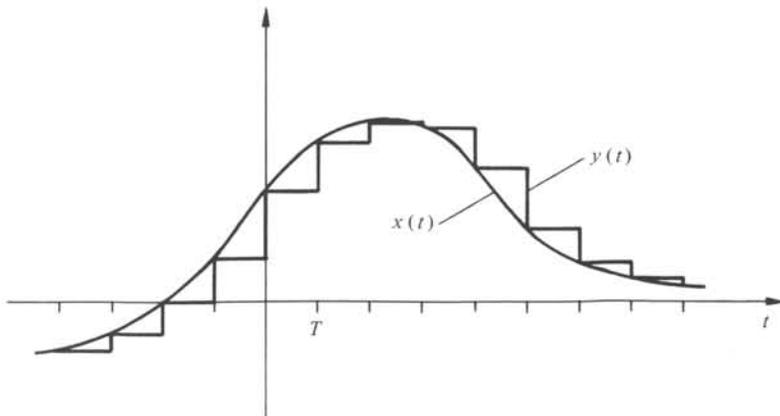


Fig. 11.10

### 11.2.10 Exemple

On se propose de réaliser un filtre analogique, dont les exigences sont celles de l'exemple 1.1.13, en utilisant un filtre discret. En premier lieu, il faut choisir une fréquence d'échantillonnage  $f_e$ . Comme la tâche principale de filtrage incombe au filtre discret, et non pas aux filtres de garde et de lissage,  $f_e$  ne doit pas être trop proche du début de la bande coupée. D'autre part, une valeur trop grande pour  $f_e$  entraîne un entassement des pôles et des zéros de transmission autour du point  $z = 1$ , et on est confronté avec un problème de précision pour le filtre discret.

Étudions les exigences que doivent satisfaire le filtre de garde et le filtre de lissage si  $f_e = 16$  kHz. Le problème d'approximation pour le filtre discret sera résolu au paragraphe 11.3.7. La compensation de la déformation par la fonction (11.38) normalement présente dans la conversion du signal discret en signal analogique, n'est prise en considération ni ici, ni dans le paragraphe 11.3.7.

Le filtre de garde doit limiter les contributions des spectres traduits  $X(\omega - k\omega_e)$  du signal d'entrée à la réponse du filtre global dans la bande utile du filtre discret, c'est-à-dire jusqu'à  $f_e/2 = 8$  kHz. Entre 4 kHz et 8 kHz, le filtre discret coupe le signal d'entrée, qu'il soit déformé ou non. Considérons (11.26) en fin de bande passante. A  $X(\omega_e)$ , il faut ajouter  $X(\omega_c - k\omega_e)$ . La plus petite parmi les fréquences  $|\omega_c - k\omega_e|/2\pi$ ,  $k \neq 0$ , se trouve à 12,6 kHz pour  $k = 1$ . Si, au lieu de  $\omega_c$ , une pulsation  $\omega$  quelconque de la bande passante est choisie, les fréquences  $|\omega - k\omega_e|/2\pi$  se situent toutes au delà de 12,6 kHz. Par conséquent, le filtre de garde doit posséder une bande passante s'étendant de 0 à 3,4 kHz et une bande coupée à partir de 12,6 kHz.

La tâche du filtre de lissage consiste à prolonger la première bande coupée du filtre discret, dont la caractéristique est périodique, jusqu'à l'infini. Il doit donc posséder une bande coupée à partir de 12 kHz, alors que la bande passante reste de 0 à 3,4 kHz.

L'intervalle de transition des deux filtres est donc relativement large et on les réalise normalement par de simples filtres RC-passifs. Suivant la technologie utilisée pour ces filtres, les exigences peuvent s'avérer encore trop sévères et on est amené à choisir une fréquence d'échantillonnage plus haute.

## 11.3 APPROXIMATION POUR FILTRES DISCRETS

### 11.3.1 Introduction

Le problème d'approximation pour les filtres discrets consiste à trouver une fonction rationnelle de la variable  $z$  qui satisfasse les exigences imposées sur la circonférence unité du plan  $z$ , et dont les pôles se trouvent dans le cercle unité. Cette dernière condition assure la stabilité (§ 11.1.15).

Une solution possible serait d'adapter les développements des chapitres 4 et 5. Cependant, par souci d'économie des efforts, ce sont les solutions plutôt que les méthodes, que l'on transpose du plan de la variable  $p$  au plan de la variable  $z$ .

De cette manière, on obtient exclusivement des filtres à réponse impulsionnelle infinie, car les filtres à réponse impulsionnelle finie n'ont pas d'équivalent analogique. Les filtres à réponse impulsionnelle infinie permettent une réalisation efficace des filtres sélectifs et nous nous limitons dans ce chapitre à cette classe de filtres. Le chapitre 12 traitera spécifiquement des filtres à réponse impulsionnelle infinie.

### 11.3.2 Transformation bilinéaire

La transformation bilinéaire suivante, appelée dans ce contexte tout simplement *transformation bilinéaire*, s'avère très utile pour mettre en relation les fonctions de transfert de filtres analogiques et celles de filtres discrets :

$$p = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad (11.40)$$

ou, de façon équivalente

$$z = \frac{1+pT/2}{1-pT/2} \quad (11.41)$$

Rappelons que  $z$  est une variable sans dimension tandis que  $p$  a la dimension 1/s. Une transformation de  $z$  en  $p$  nécessite donc bien une constante de temps  $T$ . Dans cette section,  $T$  n'a pas d'autre signification.

La transformation bilinéaire fait correspondre à l'axe imaginaire, au demi-plan de gauche, aux points  $0, \pm 2j/T, \infty$  du plan  $p$  respectivement la circonférence unité, le cercle unité, les points  $1, \pm j, -1$  du plan  $z$ . On peut expliciter la correspondance entre axe imaginaire et circonférence unité en posant, dans (11.40) et (11.41),  $z = e^{j\Omega}$  et  $p = j\omega$ , ce qui donne

$$\omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\Omega}{2} \quad (11.42)$$

et

$$\Omega = 2 \arctan \frac{\omega T}{2} \quad (11.43)$$

A la place de  $\Omega$ , on utilise souvent la pulsation  $\Omega' = \Omega/T$ . La relation entre  $\omega$  et  $\Omega'$  est représentée à la figure 11.11. On constate que  $\omega$  et  $\Omega'$  coïncident en première approximation à des pulsations petites par rapport à  $\pi/T$ .

Une autre propriété intéressante de la transformation bilinéaire est donnée aux paragraphes XX.5.4.8 et XX.5.4.9.

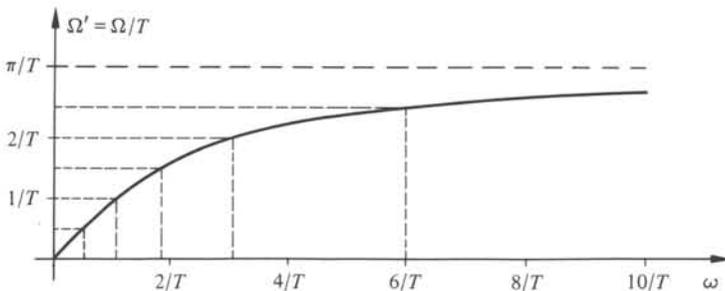


Fig. 11.11

### 11.3.3 Transformation de fonctions

La transformation (11.40) engendre une application de l'ensemble des fonctions à variable complexe en lui-même. L'image  $G$  d'une fonction  $F$  est définie par

$$G(z) = F[p(z)] = F\left(\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}\right) \quad (11.44)$$

De même, la transformation (11.41) engendre l'application inverse :

$$F(p) = G[z(p)] = G\left(\frac{1+pT/2}{1-pT/2}\right) \quad (11.45)$$

Il ressort de (11.44) et (11.45) qu'une fonction rationnelle  $F$  se transforme en fonction rationnelle  $G$ , et vice versa.

En appliquant (11.44) et (11.45) aux fonctions de transfert, on établit une correspondance biunivoque entre filtres analogiques et filtres discrets.

### 11.3.4 Commentaire

Il ne faut pas confondre la correspondance, entre filtres analogiques et discrets, engendrée par la transformation bilinéaire, avec celle du paragraphe 11.2.4, définie en connexion avec l'échantillonnage. Alors que la transformation bilinéaire n'est rien d'autre qu'une astuce théorique, qui sert à transposer les résultats du domaine analogique au domaine discret, l'échantillonnage est une méthode pratique qui permet d'utiliser les filtres discrets pour le filtrage analogique.

Remarquons encore que la transformation bilinéaire transforme le plan  $p$  en le plan  $z$  de façon biunivoque, et que la transformation biunivoque de fonctions, qu'elle engendre, fait correspondre la totalité des fonctions rationnelles en  $p$  à la totalité des fonctions rationnelles en  $z$ . Par contre, la correspondance (11.25) est limitée aux fonctions de transfert analogiques qui sont périodiques dans la partie imaginaire de  $p$ .

### 11.3.5 Solution du problème d'approximation

Supposons que des exigences pour un filtre discret soient données. Il s'agit de bornes pour les valeurs de la fonction  $H$  sur la circonférence unité. En appliquant la transformation bilinéaire (11.40), on obtient des exigences sur l'axe imaginaire du plan  $p$ . Par les méthodes des chapitres 4 et 5, on trouve une fonction de transfert  $F(p)$  qui satisfait ces exigences. Alors la fonction transformée,  $H(z) = F[(2/T)(z-1)/(z+1)]$ , satisfait les exigences d'où l'on est parti.

### 11.3.6 Commentaires

Les pôles et zéros des fonctions de transfert  $F$  et  $H$  sont aussi liés par la transformation bilinéaire. En particulier, si les pôles de  $F$  sont situés dans le demi-plan de gauche, alors les pôles de  $H$  se trouvent dans le cercle unité, et vice versa. Ceci implique que la transformation bilinéaire conserve la stabilité, et que le procédé du paragraphe 11.3.5 fournit automatiquement des fonctions de transfert stables.

La figure 11.11 montre que le passage des pulsations  $\omega$  aux pulsations  $\Omega/T$  est en effet une compression non linéaire des fréquences. Si l'on ne s'intéresse qu'à l'affaiblissement, cet effet n'a aucune importance. Par contre, si  $F$  a un déphasage approximativement linéaire en bande passante,

$$\phi(\omega) \cong K\omega \quad (11.46)$$

alors le déphasage  $\phi$  du filtre discret correspondant se comporte en bande passante

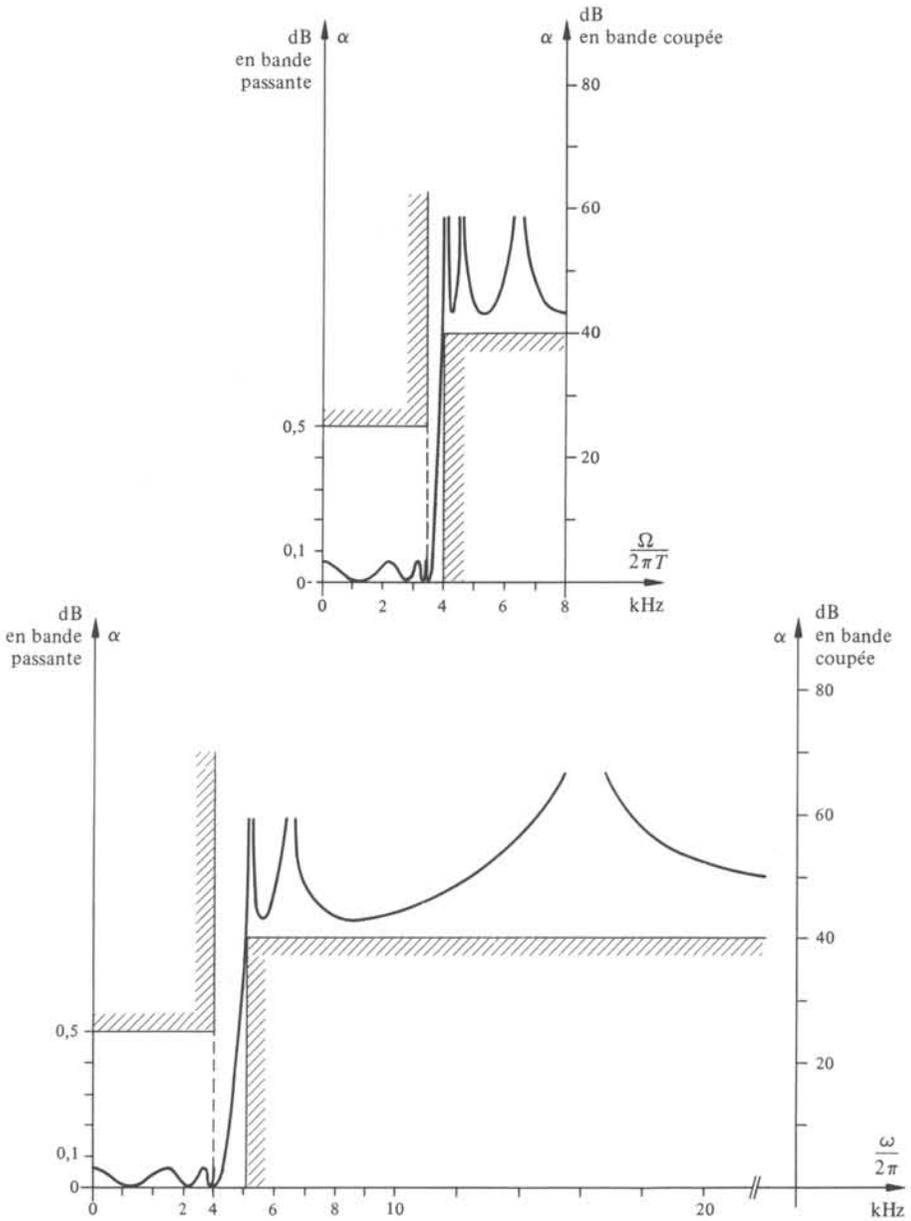


Fig. 11.12

comme

$$\phi(\Omega) \cong \frac{2k}{T} \tan \frac{\Omega}{2} \quad (11.47)$$

Il n'est approximativement linéaire que si la bande passante se limite à des fréquences relativement basses par rapport à  $\pi/T$ . C'est pour cette raison que, dans cer-

taines applications, d'autres correspondances entre les domaines analogique et discret sont utilisées. Elles ne conservent alors l'affaiblissement qu'approximativement.

Une autre méthode, pour réaliser un filtre à déphasage linéaire, consiste à choisir un filtre à réponse impulsionnelle finie. Comme on le démontre au paragraphe XX.5.3.2, de tels filtres peuvent même avoir un déphasage purement linéaire, ce qui est impossible dans le cas des filtres à réponse impulsionnelle infinie, ainsi que pour les filtres analogiques.

### 11.3.7 Exemple

On se propose de trouver une fonction de transfert  $H(z)$  qui satisfait les exigences représentées à la partie supérieure de la figure 11.12. Ce sont les exigences de l'exemple 1.1.13 limitées à 8 kHz et reportées sur la circonférence unité  $z = \exp(j\Omega)$  par la transformation  $z = \exp(j\omega T)$ , où  $T = (1/16000)$ s.

Ces exigences sont ensuite transformées par la transformation bilinéaire (11.40) et le résultat est représenté à la partie inférieure de la figure 11.12. On constate qu'elles sont différentes des exigences du paragraphe 1.1.13 dont on est parti et donc aussi de celles qu'on s'est proposé de réaliser à l'exemple 1.2.10. Ceci rejoint le commentaire 11.3.4.

La position des pôles et zéros de transmission ainsi que des zéros d'affaiblissement dans les plans  $p$  et  $z$  est représentée à la figure 11.13.

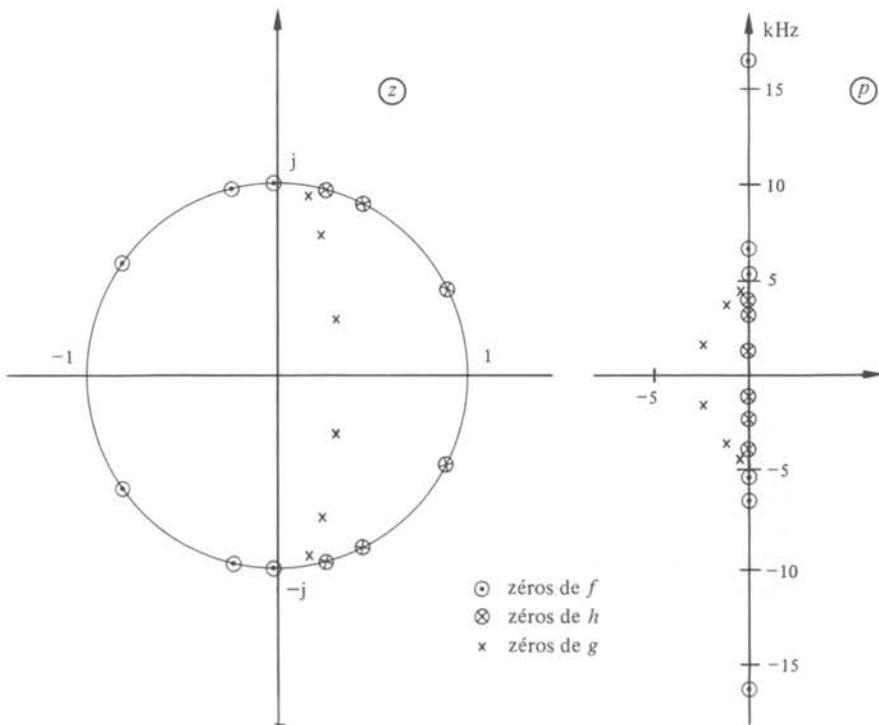


Fig. 11.13

## 11.4 FILTRES À CAPACITÉS COMMUTÉES

### 11.4.1 Définitions. Filtre à capacités commutées

Un *filtre à capacités commutées* est un tripôle composé de capacités, d'interrupteurs périodiques et d'amplificateurs opérationnels, et dont la fonction de transfert en tension à sortie ouverte représente une caractéristique de filtrage (fig. 11.14).

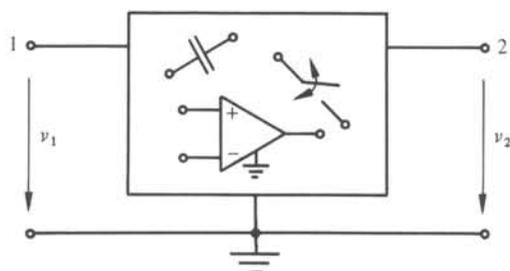


Fig. 11.14

### 11.4.2 Commentaire

Tel qu'il est défini, le filtre à capacités commutées est un circuit analogique non invariant, et son analyse, en tant que filtre, n'est a priori pas évidente. Toutefois, on lui associera un filtre discret, conforme à la définition 11.1.18. En conséquence, il peut être identifié avec une chaîne de filtrage du type traité à la section 11.2.

L'intérêt de cette classe de circuits est de nature technologique. Il n'est pas possible de fabriquer des éléments passifs d'un filtre RC-actif, avec des valeurs et de qualité convenables, dans la même technologie que les amplificateurs opérationnels. Pour la gamme de fréquences où l'amplificateur opérationnel fonctionne encore de façon satisfaisante, il n'est pas possible, en technologie MOS, de réaliser des produits  $RC$  suffisamment précis et grands. Par contre, dans le cas des filtres à capacités commutées, les produits  $RC$  sont fixés par des rapports de capacités et la période des interrupteurs. En technologie MOS, la précision et les valeurs de ces grandeurs se prêtent à la réalisation de filtres sélectifs.

Ainsi, même un filtre de degré relativement élevé devient un circuit intégré de dimensions très réduites, qui consomme peu de puissance et dont la fiabilité et le prix sont potentiellement plus favorables que ceux du filtre LC et RC-actif. En plus, aux filtres peuvent être joints, sur le même substrat, d'autres circuits logiques, ce qui ouvre des perspectives intéressantes pour la réalisation de systèmes entiers de traitement de signaux analogiques et discrets.

Toutefois, le développement des filtres à capacités commutées ne fait que débiter et ces dispositifs n'ont pas encore fait leur preuve en pratique. De plus, leur réalisation en circuits intégrés MOS recourt à un processus de fabrication relativement complexe et cher, ce qui ne se justifie que pour un volume de production important.

### 11.4.3 Limitation à des circuits à deux intervalles de temps

Par la suite, on se limitera à des interrupteurs qui changent d'état au début de chaque période  $T$  commandée par une horloge commune. On peut donc partager le

temps en intervalles, ouverts à gauche et fermés à droite,  $(mT, mT + T]$ , avec  $m = \dots, -1, 0, 1, \dots$ , pendant lesquels tous les interrupteurs maintiennent une position fixe. Comme chaque interrupteur revient à la même position après un temps  $2T$ , il faut distinguer deux types d'intervalles de temps, les *intervalles pairs*  $(2nT - T, 2nT]$  et les *intervalles impairs*  $(2nT - 2T, 2nT - T]$ , où  $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$ , ainsi que deux types d'interrupteurs, suivant qu'ils sont fermés pendant les intervalles pairs ou impairs. Le circuit à capacités commutées revient donc à considérer deux circuits différents composés exclusivement de capacités et d'amplificateurs opérationnels, valables pendant les intervalles pairs et impairs. Ils seront respectivement appelés *circuit pair* et *circuit impair*.

Il semble que ce choix ne soit pas très restrictif. Du moins, tous les circuits proposés jusqu'à présent sont analysables dans cette optique, même si, en pratique, des interrupteurs avec des périodes plus longues sont utilisés simultanément.

En pratique, un interrupteur nécessite un certain temps pour passer de l'état ouvert à l'état fermé et vice versa. Pour éviter que les deux types d'interrupteurs puissent conduire en même temps, on limite la fermeture des interrupteurs à une partie de l'intervalle  $(mT, mT + T]$ . Les deux types d'interrupteurs seront donc ouverts pendant le restant de la période. Ceci ne change en rien les tensions aux bornes des capacités en fin de période  $mT + T$ .

Pour représenter graphiquement un circuit à capacités commutées, le schéma du circuit pair avec les interrupteurs suffit; le circuit impair s'en déduit en changeant la position de tous les interrupteurs. Une autre simplification graphique, qui sera également appliquée aux figures de cette section, est l'utilisation de commutateurs qui remplacent deux interrupteurs, selon la figure 11.15.

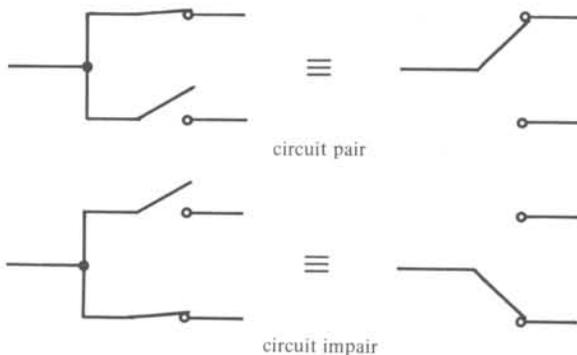


Fig. 11.15

#### 11.4.4 Analogie avec les circuits RC-actifs

Le filtre à capacités commutées est né d'une analogie avec le filtre RC-actif.

Considérons la capacité commutée de la figure 11.16. Supposons que les potentiels aux bornes de ce tripôle soient constants. Alors, la tension  $u$  aux bornes de la capacité passe après les instants  $2nT - T$  de la valeur  $u(2nT - T) = v_2$  à la valeur  $u(2nT) = v_1$ . Ceci implique un apport de charge  $q = C(v_1 - v_2)$  de la borne 1 vers la capacité. Après les instants  $2nT - 2T$ , la tension  $u$  passe de  $v_1$  à  $v_2$ , et la même charge

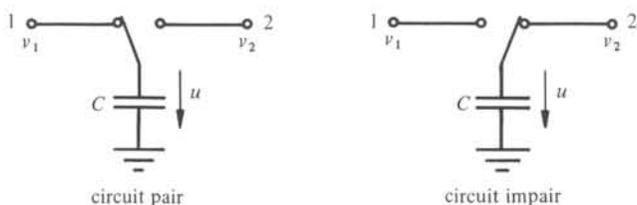


Fig. 11.16

$q$  passe de la capacité vers la borne 2. En faisant le bilan de charge sur une période  $2T$ , on s'aperçoit que la même charge  $q$  qui entre en 1, sort en 2. On peut y associer un courant moyen de 1 à 2 :

$$i = q/2T = C(v_1 - v_2)/2T \quad (11.48)$$

La relation entre le courant moyen et les potentiels (constants) est donc la même que celle d'une résistance de valeur  $2T/C$  connectée entre 1 et 2. De ce fait, la capacité commutée de la figure 11.16 devrait se comporter comme une telle résistance à des fréquences suffisamment faibles par rapport à  $1/T$ . Ceci fournit une méthode pour transformer des filtres RC en filtres à capacités commutées, avec le même comportement en basses fréquences : il suffit de remplacer les résistances par des tripôles de la figure 11.16. A titre d'exemple, l'intégrateur RC-actif de la figure 11.17 devient l'intégrateur à capacités commutées de la figure 11.18.

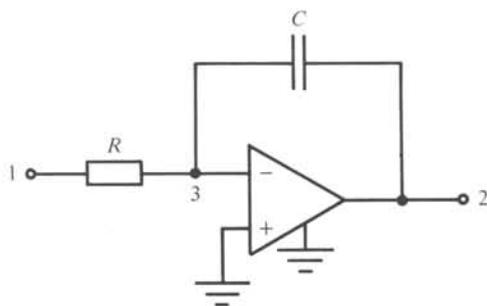


Fig. 11.17

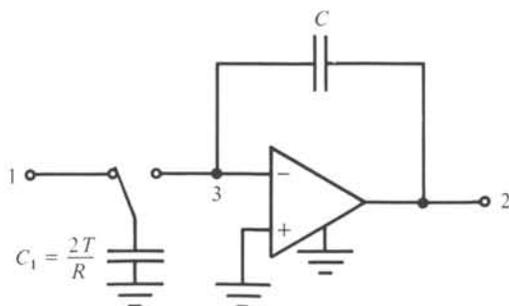


Fig. 11.18

En pratique, ce procédé a plusieurs défauts, et il sera nécessaire de faire une analyse plus précise des circuits à capacités commutées.

La relation (11.48) met pourtant une chose bien en évidence : la valeur d'une résistance simulée par une capacité commutée est donnée par la *valeur de la capacité et de la période d'horloge*. C'est ainsi que le filtre à capacités commutées parvient à simuler des produits  $RC$  de valeur convenable. De plus, en variant la période d'horloge  $T$ , on change les produits  $RC$  simulés, ce qui revient à une homothétie en fréquence sur la caractéristique de filtrage. Cette possibilité peut être intéressante pour certaines applications.

### 11.4.5 Paradoxe

L'analogie de la résistance avec la capacité commutée mène au paradoxe suivant : alors que la capacité et l'interrupteur sont des éléments non dissipatifs, ou approximativement non dissipatifs, la résistance dissipe une quantité de puissance bien définie.

Le paradoxe n'est qu'apparent. En effet, en introduisant des résistances série près des bornes du tripôle de la figure 11.16, les transferts de charge ne sont plus instantanés, mais ils suivent une loi exponentielle. L'analyse de ce circuit montre que l'énergie totale dissipée dans les résistances auxiliaires, pendant une période  $2T$ , est égale à l'énergie dissipée par la résistance, de valeur  $2T/C$  pendant la même période et placée entre les mêmes bornes. Elle ne dépend donc pas de la valeur des résistances auxiliaires, qui peuvent en conséquence être choisies arbitrairement petites. Ce genre de phénomène est d'ailleurs bien connu dans les réseaux à interrupteurs, étudiés au paragraphe IV.3.4.2.

### 11.4.6 Potentiels variables

Le fait que la capacité commutée de la figure 11.16 simule une résistance a été exposé en supposant que les potentiels  $v_1$  et  $v_2$  étaient constants. Il s'agit maintenant de généraliser.

La tension  $u$  aux bornes de la capacité dans la figure 11.16, suit pendant les intervalles pairs la tension  $v_1(t)$ , et pendant les intervalles impairs la tension  $v_2(t)$ . La charge apportée à la capacité pendant l'intervalle  $(2nT - T, 2nT]$  depuis la borne 1 est égale à la différence entre les charges se trouvant sur la capacité aux instants  $2nT$  et  $(2nT - T)$  :

$$q_{2n} = Cv_1(2nT) - Cv_2(2nT - T) \quad (11.49)$$

La charge transmise, pendant l'intervalle  $(2nT - 2T, 2nT - T]$ , depuis la capacité vers la borne 2, est, par le même raisonnement,

$$q_{2n-1} = Cv_1(2nT - 2T) - Cv_2(2nT - T) \quad (11.50)$$

Les équations (11.49) et (11.50) montrent deux choses :

- le transfert de charge ne dépend que des valeurs des potentiels aux instants  $nT$ . Les interrupteurs effectuent donc une sorte d'échantillonnage. De ce fait, il est naturel d'associer avec les tensions et les transferts de charge d'un circuit à capacités commutées, des signaux discrets;

- même en moyenne sur une période  $2T$ , le circuit de la figure 11.16 ne se comporte pas exactement comme une résistance, car  $q_{2n-1}$  n'est en général pas égal à  $q_{2n}$ . Ceci montre bien la nécessité d'un formalisme plus exact que l'analogie du paragraphe 11.4.4.

#### 11.4.7 Système discret associé à un filtre à capacités commutées

Soit un filtre à capacités commutées, où les nœuds du circuit pair sont numérotés de 1 à  $N$ , et ceux du circuit impair de 1 à  $M$ . Les nœuds d'entrée et de sortie qui sont *communs* aux deux circuits, sont numérotés par 1 et 2 respectivement.

Au potentiel du nœud  $i$  du circuit pair (impair), on associe le signal discret  $w_i$ , ( $\tilde{w}_i$ ) par

$$w_i(n) = v_i(2nT) \quad , \quad i = 1, \dots, N \quad (11.51)$$

$$\tilde{w}_i(n) = v_i(2nT - T) \quad , \quad i = 1, \dots, M \quad (11.52)$$

Comme le suggèrent les développements du paragraphe 11.4.6, et comme on le montrera au paragraphe 11.4.8 en toute généralité, la mise en équation d'un filtre à capacités commutées peut se limiter aux valeurs des potentiels aux instants  $kT$ , avec  $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$ . Il s'ensuit que le potentiel de sortie  $v_2(mT)$  est fonction uniquement des valeurs  $v_1(kT)$  du potentiel d'entrée. Il est donc légitime d'y associer un système discret. Grâce au fait que les valeurs  $v_1(kT)$  sont distribuées entre  $w_1$  et  $\tilde{w}_1$  et que la même chose est vraie pour  $v_2(kT)$ , il faut associer, à un filtre à capacités commutées, le *système à deux entrées et deux sorties* représenté à la figure 11.19. Sa matrice de transfert est définie, selon le paragraphe 9.1.14, par :

$$\begin{pmatrix} W_2(z) \\ \tilde{W}_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11}(z) & H_{12}(z) \\ H_{21}(z) & H_{22}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1(z) \\ \tilde{W}_1(z) \end{pmatrix} \quad (11.53)$$

où  $W_i$ ,  $\tilde{W}_i$  sont les transformées en  $z$  de  $w_i$ ,  $\tilde{w}_i$ .



Fig. 11.19

Contrairement au filtre à capacités commutées d'origine, le système discret qui en résulte est invariant. Pour atteindre cet objectif, on a dû accepter que le système soit bidimensionnel.

Les paragraphes 11.4.8 et 11.4.10 ont pour but de calculer la matrice de transfert de (11.53).

#### 11.4.8 Analyse temporelle

On se propose d'adapter la méthode des paragraphes 9.1.6 et 9.1.7, pour la mise en équations des circuits RC-actifs, aux filtres à capacités commutées.

Considérons le circuit pair. Pour chaque nœud qui n'est ni le nœud d'entrée ni la sortie d'amplificateur opérationnel, on écrit l'équation de Kirchhoff pour les courants incidents

$$\sum_k i_k = 0 \tag{11.54}$$

où l'indice  $k$  numérote les capacités connectées au nœud. En intégrant sur l'intervalle de temps  $(2nT - T, 2nT]$ , (11.54) devient, en suivant le raisonnement du paragraphe 11.4.6, l'équation de conservation de charge

$$\sum_k q_k(2nT) = \sum_k q_k(2nT - T) \tag{11.55}$$

où  $q_k$  désigne la charge de la capacité  $k$ . La charge  $q_k$  peut être exprimée en fonction des potentiels des nœuds auxquels la capacité est connectée. *A l'instant  $2nT$ , ce sont des nœuds du circuit pair, tandis qu'à l'instant  $(2nT - T)$ , ce sont les nœuds du circuit impair.* De cette manière, on obtient un système d'équations ne faisant intervenir que les signaux discrets  $w_i$  et  $\tilde{w}_i$  introduits au paragraphe 11.4.7.

A ces équations, il faut ajouter les contraintes imposées par les amplificateurs opérationnels. Si aux nœuds  $k, l$  et  $m$  du circuit pair sont connectées respectivement l'entrée +, l'entrée - et la sortie d'un amplificateur opérationnel, alors la contrainte est  $w_k(n) = w_l(n)$  dans le cas d'un amplificateur idéal, et  $w_m(n) = A[w_k(n) - w_l(n)]$  dans le cas d'un amplificateur avec gain fini  $A$ .

Ce système d'équations est complété par le système correspondant pour le circuit impair.

On obtient ainsi un système d'équations récursives qui font intervenir les variables  $w_i(n)$ ,  $\tilde{w}_j(n)$  et  $w_i(n - 1)$ .

### 11.4.9 Exemple

Considérons le tripôle à capacités commutées de la figure 11.18. Le circuit pair et le circuit impair, représentés à la figure 11.20, comportent trois nœuds qui peuvent être identifiés dans ce cas.

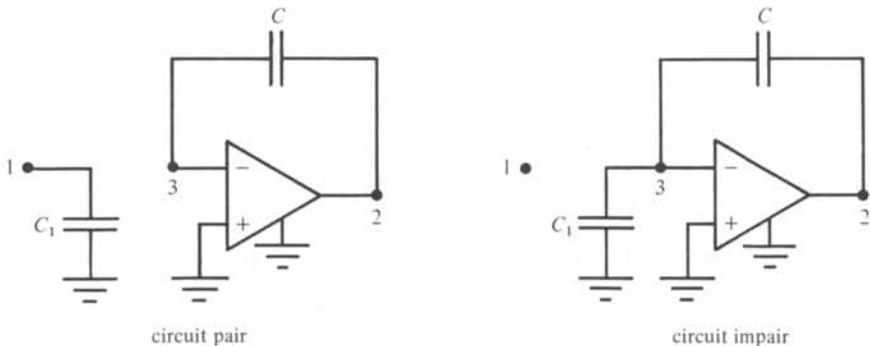


Fig. 11.20

L'équation de conservation de charge relative au nœud 3 du circuit pair est, en utilisant les notations (11.51) et (11.52),

$$C[w_2(n) - w_3(n)] = C[\tilde{w}_2(n) - \tilde{w}_3(n)] \tag{11.56}$$

L'équation de conservation de charge relative au nœud 3 du circuit impair est :

$$\begin{aligned} C[\tilde{w}_2(n) - \tilde{w}_3(n)] + C_1[0 - \tilde{w}_3(n)] &= \\ &= C[w_2(n-1) - w_3(n-1)] + C_1[0 - w_1(n-1)] \end{aligned} \quad (11.57)$$

Les contraintes imposées par un amplificateur opérationnel idéal sont

$$w_3(n) = 0 \quad (11.58)$$

$$\tilde{w}_3(n) = 0 \quad (11.59)$$

et par un amplificateur opérationnel de gain  $A$

$$w_2(n) = -Aw_3(n) \quad (11.60)$$

$$\tilde{w}_2(n) = -A\tilde{w}_3(n) \quad (11.61)$$

#### 11.4.10 Analyse fréquentielle

Appliquons la transformée en  $z$  au système d'équations récursives, obtenu par la méthode du paragraphe 11.4.8. De cette manière, il devient un système d'équations linéaires en les variables  $W_i(z)$ ,  $\tilde{W}_j(z)$ , les transformées en  $z$  de  $w_i$  et  $\tilde{w}_j$ , avec coefficients, soit constants, soit proportionnels à  $z^{-1}$ . Le facteur  $z^{-1}$  provient de la fonction de transfert du retard qui transforme  $w_i(n)$  en  $w_i(n-1)$  (§ 11.1.16).

On va montrer que le nombre d'équations, dans ce système, est égal au nombre de potentiels inconnus parmi  $W_i$  et  $\tilde{W}_j$ , ce qui permettra, par résolution du système d'équation linéaires, de les exprimer en fonction des potentiels d'entrée  $W_1$  et  $\tilde{W}_1$ .

Supposons que le filtre à capacités commutées ait  $K$  amplificateurs opérationnels, et que le circuit pair (impair) ait  $N(M)$  nœuds. Avec les mêmes hypothèses sur la connexion des amplificateurs opérationnels qu'au paragraphe 9.1.6, il y a  $[(N-K-1) + (M-K-1)]$  équations de conservation de charge, et  $2K$  équations dues aux amplificateurs opérationnels. Le nombre de potentiels inconnus, en ne comptant pas le potentiel du nœud d'entrée, est  $[(N-1) + (M-1)]$ , ce qui est bien égal au nombre total d'équations.

#### 11.4.11 Exemple

Reprenons l'exemple du paragraphe 11.4.9. Les transformées en  $z$  des équations (11.56) à (11.59) sont

$$C[W_2(z) - W_3(z)] = C[\tilde{W}_2(z) - \tilde{W}_3(z)] \quad (11.62)$$

$$C[\tilde{W}_2(z) - \tilde{W}_3(z)] + C_1[0 - \tilde{W}_3(z)] = Cz^{-1}[W_2(z) - W_3(z)] + C_1z^{-1}[0 - W_1(z)] \quad (11.63)$$

$$W_3(z) = 0 \quad (11.64)$$

$$\tilde{W}_3(z) = 0 \quad (11.65)$$

d'où

$$W_2(z) = \tilde{W}_2(z) = -\frac{C_1}{C} \frac{1}{z-1} W_1(z) \quad (11.66)$$

Si l'on tient compte d'un facteur d'amplification fini  $A$ , il faut remplacer (11.64) et (11.65) par les transformées en  $z$  de (11.60) et (11.61):

$$W_2(z) = -AW_3(z) \tag{11.67}$$

$$\tilde{W}_2(z) = -A\tilde{W}_3(z) \tag{11.68}$$

ce qui donne

$$W_2(z) = \tilde{W}_2(z) = -\frac{C_1}{C} \frac{W_1(z)}{z-1-\frac{1}{A} \left[ 1-z \left( 1+\frac{C_1}{C} \right) \right]} \tag{11.69}$$

### 11.4.12 Calcul de la matrice de transfert du système discret

Considérons un filtre à capacités commutées. Comme on l'a fait pour l'exemple du paragraphe 11.4.9, on applique la méthode des paragraphes 11.4.8 et 11.4.10 et on élimine du système d'équations obtenu tous les potentiels autres que ceux de l'entrée et de la sortie du filtre. Le résultat de cette analyse est une expression de  $W_2(z)$  et  $\tilde{W}_2(z)$  en fonction de  $W_1(z)$  et  $\tilde{W}_1(z)$ , ce qui permet de constituer la matrice de transfert (11.53) du système discret associé au filtre.

Pour l'exemple des paragraphes 11.4.9 et 11.4.11, on obtient, à partir de (11.66), dans le cas d'un amplificateur opérationnel idéal, la matrice de transfert

$$H(z) = \begin{pmatrix} -\frac{C_1}{C} \frac{1}{z-1} & 0 \\ -\frac{C_1}{C} \frac{1}{z-1} & 0 \end{pmatrix} \tag{11.70}$$

### 11.4.13 Filtre discret associé à un filtre à capacités commutées

On souhaite associer à un filtre à capacités commutées un filtre discret, c'est-à-dire un système discret à une entrée et une sortie, plutôt que le système à deux entrées et deux sorties, introduit au paragraphe 11.4.7. Bien que ceci ne soit pas possible en général, les filtres utilisés en pratique s'y prêtent facilement.

L'exemple de la figure 11.18 est un cas typique. Le fait que l'entrée n'est échantillonnée que pendant les intervalles pairs, implique que le potentiel de sortie ne dépend pas de  $\tilde{w}_1$ , et donc que  $H_{12} = H_{22} = 0$ , conformément à (11.70). De plus, pendant les intervalles pairs, il n'y a pas de transfert de charge de  $C_1$  à  $C$ , ce qui implique  $w_2 = \tilde{w}_2$  et  $H_{11} = H_{21}$ , conformément à (11.70). Il est donc naturel d'associer au filtre de la figure 11.18 le filtre discret avec fonction de transfert  $H_{11}$ .

En toute généralité, si le filtre n'échantillonne l'entrée qu'à des instants espacés de  $2T$ , et si la sortie satisfait soit  $v_2(2nT) = v_2(2nT - T)$ , soit  $v_2(2nT) = v_2(2nT + T)$ , alors deux fonctions de transfert  $H_{ij}$  sont nulles et les deux autres égales entre elles, à un éventuel facteur  $z^{-1}$  près. On prendra l'une ou l'autre des deux fonctions de transfert non nulles pour définir le filtre discret associé.

Si tel n'est pas le cas, on peut forcer le signal d'entrée et le signal de sortie à être constants pendant les intervalles de temps  $(2nT - 2T, 2nT]$ , en introduisant deux échantillonneurs avec maintien selon la figure 11.21. Une réalisation simple d'un tel échantillonneur est représentée à la figure 11.22; l'interrupteur près de l'entrée (sortie)

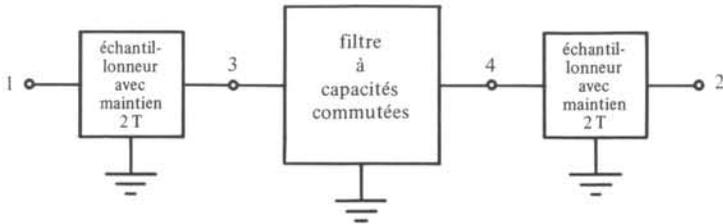


Fig. 11.21

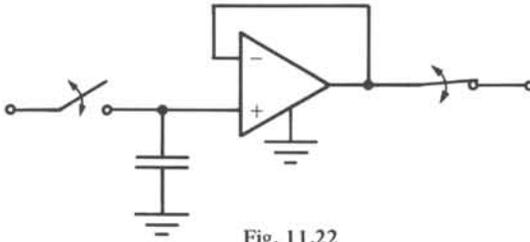


Fig. 11.22

n'est fermé (ouvert) que pendant une courte période autour de  $2nT$ , quand dans une réalisation pratique d'un filtre, tous les autres interrupteurs sont ouverts.

Les échantillonneurs, dans la figure 11.21, entraînent  $w_3 = \tilde{w}_3 = w_1$  et  $w_2 = \tilde{w}_2 = w_4$ . Par conséquent, la matrice de transfert du système associé au filtre sans échantillonneurs se transforme en le système associé au filtre composé, selon

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} H_{11} + H_{12} & 0 \\ H_{11} + H_{12} & 0 \end{pmatrix} \quad (11.71)$$

et l'on se trouve dans la situation précédente.

#### 11.4.14 Commentaire

On peut se demander si le formalisme du paragraphe 11.4.7, qui associe à chaque signal  $v(t)$  deux signaux discrets, n'est pas trop compliqué, étant donné qu'aux filtres intéressants, on peut toujours associer un système à une entrée et une sortie. Cependant, un seul signal discret par potentiel suffit uniquement si, en plus des conditions sur l'entrée et la sortie, les potentiels de tous les nœuds internes du filtre sont constants pendant une période  $2T$ .

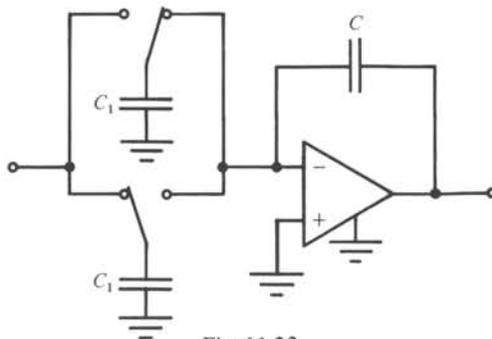


Fig. 11.23

Il faut encore mentionner le cas particulier des filtres qui sont des circuits périodiques de période  $T$ , et non plus de  $2T$ , grâce à une symétrie interne. Un exemple qui ressemble au circuit de la figure 11.18 est donné à la figure 11.23. On va évidemment associer à un potentiel  $v(t)$  le signal discret  $w(n) = v(nT)$ , ce qui conduit directement à un filtre discret.

#### 11.4.15 Evolution des potentiels pendant un intervalle de temps

Le circuit pair se décompose en sous-circuits qui ne sont liés entre eux que par la terre. Les potentiels du sous-circuit qui contient le nœud d'entrée varient pendant les intervalles pairs dans la mesure où la tension d'entrée varie. Par contre, les autres sous-circuits sont dépourvus de sources de tension indépendantes. Ils ne dépendent du reste du circuit que par le biais des conditions initiales sur les capacités. Par conséquent, ils sautent immédiatement de la valeur initiale à la valeur finale et restent ensuite constants.

La même propriété est valable, avec une décomposition différente, pour le circuit impair.

On conclut que si la sortie du filtre n'est liée à l'entrée par aucun chemin capacitif, ni dans le circuit pair, ni dans le circuit impair, alors la tension de sortie reste constante pendant chaque période de longueur  $T$ , même si la tension d'entrée varie de façon continue. Si cette hypothèse n'est pas satisfaite, alors un signal proportionnel au signal d'entrée va se superposer à la sortie. On peut toujours se prémunir contre ce phénomène en connectant un échantillonneur avec maintien (fig. 11.22), soit à l'entrée, soit à la sortie.

La propriété, selon laquelle les potentiels restent constants pendant un intervalle, provient naturellement d'une idéalisation. En tenant compte de la présence de résistances finies, le passage d'une valeur initiale à une valeur finale est exponentiel.

#### 11.4.16 Filtrage de signaux analogiques par un filtre à capacités commutées

On se propose d'étudier le comportement en fréquence d'un filtre à capacités commutées quand il est inséré dans une voie de transmission analogique. Il s'agit de déterminer dans quelle mesure les développements de la section 11.2 sont applicables à ce cas.

Pour les raisons exposées au paragraphe 11.4.15, on suppose qu'à aucun instant la sortie ne soit connectée à l'entrée par un chemin qui ne passe pas par la terre.

Traisons tout d'abord les filtres à capacités commutées qui admettent, selon le paragraphe 11.4.13, un filtre discret associé, avec une entrée et une sortie. Parmi les cas mentionnés au paragraphe 11.4.13, choisissons celui où le signal n'est échantillonné et où la réponse ne change de valeur qu'aux instants  $2nT$ . Les autres cas se traitent de façon analogue.

Le passage (11.51) du signal d'entrée  $v_1(t)$  au signal discret  $w_1(n)$  est celui décrit aux paragraphes 11.2.2 et 11.2.4, avec  $T$  remplacé par  $2T$ . La transformation de la réponse  $w_2(n)$  du filtre discret en la réponse  $v_2(t)$  du filtre à capacités commutées revient à un maintien, sauf que  $v_2(t)$  prend la valeur  $w_2(n)$  pendant l'intervalle qui précède l'instant  $2nT$  au lieu de l'intervalle qui suit  $2nT$ . Alors

$$v_2(t) = \sum w_2(n+1) \hat{\psi}(t-2nT) \tag{11.72}$$

où  $\hat{\psi}$  est défini par (11.33) après remplacement de  $T$  par  $2T$ . La relation (11.72) est modélisée par un maintien précédé d'une *avance*, c'est-à-dire un système discret dont la réponse  $y$  à un signal  $x$  est

$$y(n) = x(n+1) \quad (11.73)$$

Ce système effectue la transformation inverse du retard, défini au paragraphe 11.1.17. En effet, sa fonction de transfert est  $H(z) = z$ . Il est évident que ce système n'est pas causal. Néanmoins, il n'y a aucune contradiction avec la causalité du filtre à capacités commutées, car l'absence d'un chemin capacitif direct entre entrée et sortie engendre un retard dans le filtre discret associé.

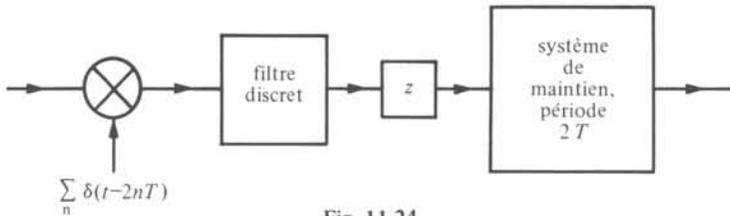


Fig. 11.24

En résumé, le filtre à capacités commutées est modélisé par le système de la figure 11.24. Complété par un filtre de garde et de lissage idéal avec pulsation de coupure  $\pi/2T$  et retard  $\tau$ , la relation entre les fonctions de transfert  $H_a$  et  $H_d$  du filtre à capacités commutées et du filtre discret s'écrit

$$H_a(j\omega) = \begin{cases} e^{2j(T-\tau)\omega} H_d(e^{2j\omega T}) \hat{\Psi}(j\omega) & |\omega| < \pi/2T \\ 0 & |\omega| > \pi/2T \end{cases} \quad (11.74)$$

où  $\hat{\Psi}$  est donné par (11.37) en remplaçant  $T$  par  $2T$ .

Considérons maintenant le cas d'un filtre à capacités commutées dont le filtre discret à deux entrées et deux sorties ne se simplifie pas. Il est modélisé par le système analogique de la figure 11.25. Entouré d'un filtre de garde et de lissage idéal avec pul-

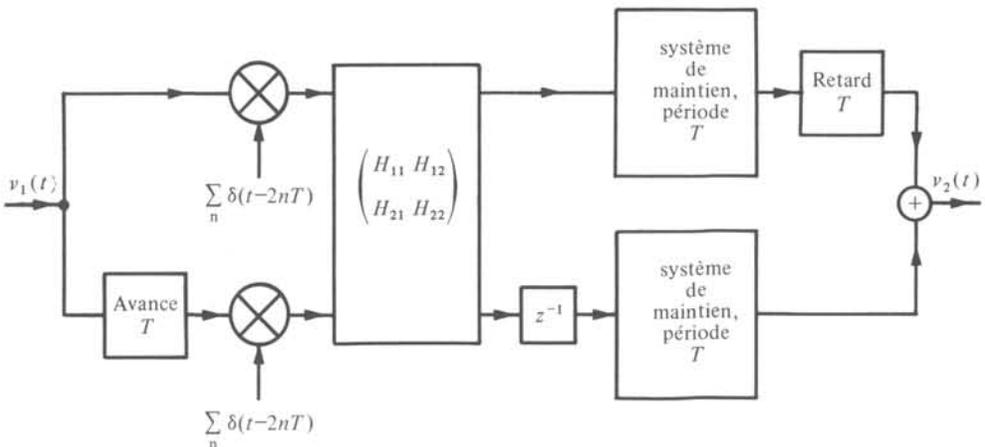


Fig. 11.25

sation de coupure  $\pi/2T$  et retard  $\tau$ , la fonction de transfert globale s'écrit, pour  $|\omega| < \pi/2T$ ,

$$H_a(j\omega) = e^{-2j\omega\tau} \hat{\Psi}(j\omega) [H_{11}(e^{2j\omega T}) e^{j\omega T} + H_{12}(e^{2j\omega T}) + H_{21}(e^{2j\omega T}) e^{2j\omega T} + H_{22}(e^{2j\omega T}) e^{j\omega T}] \quad (11.75)$$

et  $H_a(j\omega) = 0$  pour  $|\omega| > \pi/2T$ . Nous laissons l'établissement de ces résultats au lecteur.

#### 11.4.17 Capacités parasites

Alors que des rapports précis de capacités peuvent être réalisés en technologie MOS, la présence de capacités parasites importantes est inévitable.

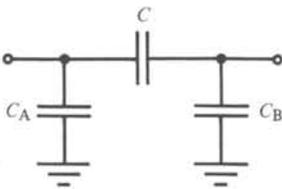


Fig. 11.26

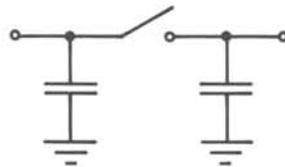


Fig. 11.27

En effet, le modèle pour le condensateur de capacité  $C$  est celui de la figure 11.26. Une des deux capacités parasites,  $C_A$  ou  $C_B$ , a une valeur d'environ 20-25% de  $C$ , l'autre est de l'ordre de grandeur de 0,5 pF. Les interrupteurs et les amplificateurs opérationnels sont aussi affligés de capacités parasites, selon les figures 11.27 et 11.28, dont les valeurs se situent aux environs de 0,5 pF. Comme l'ordre de grandeur convenable pour les capacités se situe autour du pF, aucune des capacités parasites des figures 11.26 à 11.28 ne peut être considérée comme négligeable. Par conséquent, dans un circuit à capacités commutées, il faut tenir compte à chaque nœud d'une capacité parasite contre terre non négligeable.

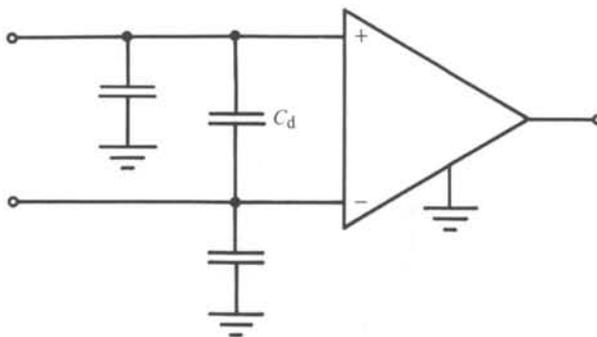


Fig. 11.28

Il serait vain de tenir compte des capacités parasites lors de la synthèse, car leur valeur précise échappe au contrôle. De plus, les capacités parasites des interrupteurs et

amplificateurs opérationnels sont non linéaires. Par contre, la structure d'un filtre doit être telle que l'influence des capacités parasites soit réduite au maximum.

#### 11.4.18 Filtres insensibles aux capacités parasites

Le but de ce paragraphe est d'énoncer une série de conditions suffisantes pour construire un circuit insensible à l'effet des capacités parasites. La structure du circuit représenté à la figure 11.29 est caractérisée par quatre règles, dont voici les deux premières :

- tous les amplificateurs opérationnels ont une borne d'entrée à la terre. Dès lors l'autre borne a un potentiel nul tout en étant distinct de la terre. On appelle un tel nœud *terre virtuelle*;
- les capacités sont connectées de façon que ni dans le circuit pair ni dans le circuit impair il n'existe de nœud auquel soient connectées seulement des capacités.

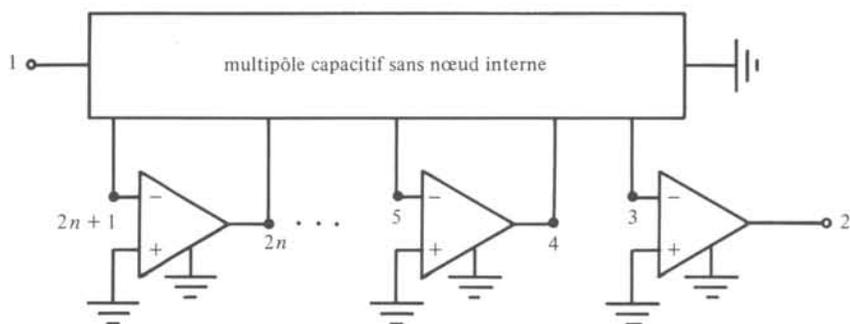


Fig. 11.29

Il résulte de ces deux premières conditions que les seuls nœuds dont le potentiel ne soit pas nul sont les sorties des amplificateurs opérationnels et le nœud d'entrée; on les appellera *nœuds de tension*. Les deux conditions suivantes sont relatives à la position des interrupteurs dans le circuit original :

- aucune borne de capacité n'est commutée entre une terre virtuelle et un nœud de tension;
- chaque interrupteur est placé entre une borne de capacité et soit la terre, soit une terre virtuelle, soit un nœud de tension. Il n'existe donc pas de nœud auquel soient connectés uniquement des interrupteurs.

La première condition implique que les capacités parasites des amplificateurs opérationnels ne jouent aucun rôle puisque toutes leurs bornes ont un potentiel nul. Si la deuxième condition n'était pas vérifiée, l'ensemble des capacités incidentes au nœud commun produirait une capacité parasite entre ce nœud et la terre qui interviendrait dans le membre de gauche de l'équation de conservation de charge (11.55) de ce nœud. Si la troisième condition n'était pas vérifiée, il y aurait des capacités parasites liées aux capacités qui se chargeraient à un nœud de tension et ensuite se déchargeraient dans une terre virtuelle. Par conséquent, elles contribueraient au membre de droite de l'équation de conservation de charge relative à cette terre virtuelle. La deuxième et la

troisième condition annulent donc ensemble l'influence des capacités propres aux capacités. Enfin, la dernière condition règle le cas des capacités des interrupteurs. L'une des capacités parasites est tout le temps connectée entre la terre et un même nœud, qui peut être la terre, une terre virtuelle ou un nœud de tension. De ce fait elle ne joue aucun rôle. L'autre capacité vient se placer en parallèle sur la capacité parasite de la capacité à laquelle est connecté l'interrupteur. Au même titre que cette dernière, elle n'intervient pas non plus.

Si une des quatre conditions n'est pas vérifiées, il y aura des contributions des capacités parasites aux équations de conservation de charge. On s'attend alors qu'elles interviennent également dans la fonction de transfert, qui est la solution de ces équations [52].

#### 11.4.19 Commentaires

A première vue, il semblerait que la classe du paragraphe 11.4.18 ne contienne que des circuits triviaux. Déjà, l'exemple de la figure 11.18 n'en fait pas partie, parce que la dernière condition est violée. En effet, les capacités parasites  $C_A$  de la capacité  $C_1$  et  $C_B$ ,  $C_C$  des interrupteurs, représentées à la figure 11.30, sont commutées de l'entrée du circuit pair à la terre virtuelle du circuit impair.

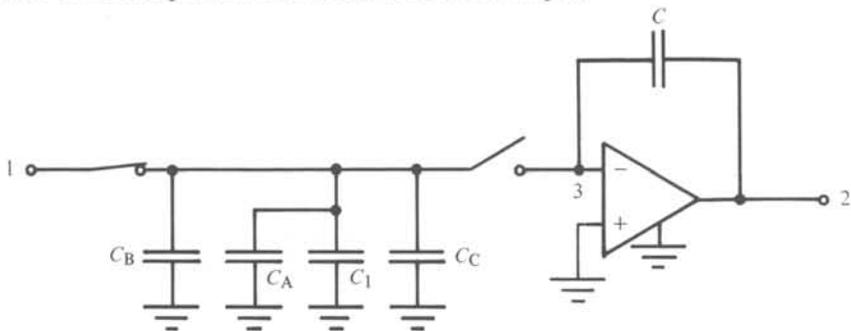


Fig. 11.30

Toutefois, la classe de circuits du paragraphe 11.4.18 est suffisante pour la synthèse de filtres avec une fonction de transfert rationnelle stable arbitraire. En particulier, le filtre de la figure 11.31 satisfait les hypothèses du paragraphe 11.4.18 et il a, au signe près, la même fonction de transfert que celui de la figure 11.18. La synthèse d'une fonction biquadrique générale est donnée au paragraphe 11.4.21.

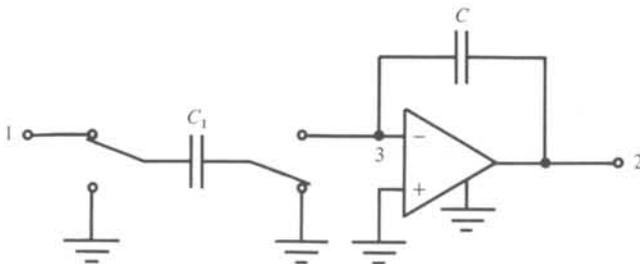


Fig. 11.31

En tenant compte d'un gain fini  $A$  des amplificateurs opérationnels, les charges sur les capacités parasites connectées aux terres virtuelles ne sont plus nulles, mais sont, comme les potentiels des terres virtuelles, proportionnelles à  $1/A$ . Les sensibilités de la fonction de transfert par rapport à ces capacités parasites ont en général le même comportement.

#### 11.4.20 Structures de filtres à capacités commutées

Les filtres à capacités commutées, publiés jusqu'à présent, peuvent être classés, comme les filtres RC-actifs, en filtres de simulation LC directe et en filtres à transferts de tension.

La première classe est composée de circuits qui simulent des bipôles et tripôles classiques. Aux relations entre les potentiels et courants, aux bornes des multipôles classiques, correspondent des relations entre potentiels et transferts de charge, aux bornes des multipôles à capacités commutées. Un tel circuit ne peut pourtant pas faire partie de la classe du paragraphe 11.4.18. En effet, un filtre appartenant à cette classe ne parvient pas à simuler l'équation de Kirchhoff des courants incidents en un nœud avec potentiel non nul, car les équations de conservation de charge ne sont valables que pour les terres virtuelles. Il n'est, par conséquent, pas surprenant que l'influence des capacités parasites impose des limitations sévères aux filtres de simulation LC directe et nous n'en parlerons pas davantage.

Il reste les filtres à transferts de tension. Nous allons donner des exemples de cellules biquadratiques et une méthode pour réaliser leurs connexions.

#### 11.4.21 Cellule biquadratique

Le tripôle de la figure 11.32 est un filtre dont la structure ressemble à celle de la cellule biquadratique RC-active de Fleischer-Tow, décrite au paragraphe 9.2.4. Il appartient à la classe des circuits insensibles aux capacités parasites du paragraphe 11.4.18. L'analyse selon la méthode des paragraphes 11.4.8 à 11.4.12 fournit la matrice de transfert du système discret associé :

$$H_{11}(z) = H_{21}(z) = (b'z + c)/(dz^2 + ez + f) \quad (11.76)$$

$$H_{12}(z) = H_{22}(z) = (az^2 + b''z)/(dz^2 + ez + f) \quad (11.77)$$

où

$$a = \hat{a}_5 b_1 - a_1 b_3 \quad (11.78)$$

$$b' = a_2 b_3 - \hat{a}_5 b_2 \quad (11.79)$$

$$b'' = a_1 b_4 - \hat{a}_6 b_1 \quad (11.80)$$

$$c = \hat{a}_6 b_2 - a_2 b_4 \quad (11.81)$$

$$d = a_3 b_3 - \hat{a}_5 \hat{b}_5 \quad (11.82)$$

$$e = \hat{a}_5 \hat{b}_6 + \hat{a}_6 \hat{b}_5 - a_3 b_4 - a_4 b_3 \quad (11.83)$$

$$f = a_4 b_4 - \hat{a}_6 \hat{b}_6 \quad (11.84)$$

et

$$\hat{a}_i = 1 + a_i \quad ; \quad i = 5, 6 \quad (11.85)$$

$$\hat{b}_i = 1 + b_i \quad ; \quad i = 5, 6 \quad (11.86)$$

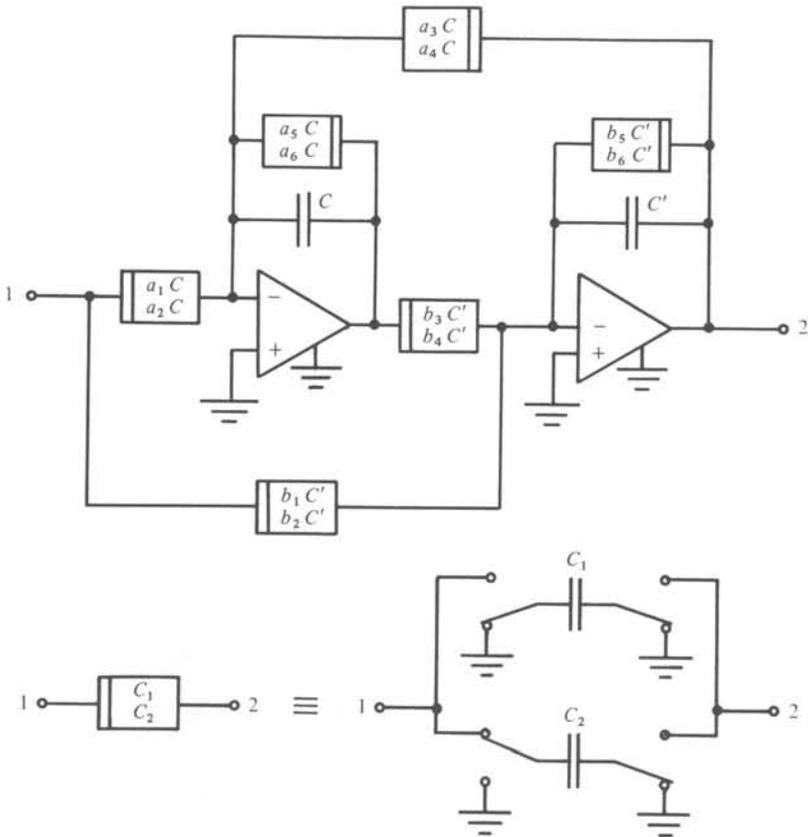


Fig. 11.32

Alors que la sortie de ce filtre reste constante pendant les intervalles de temps  $(2nT - 2T, 2nT]$ , elle dépend de  $v_1(2nT)$  et  $v_1(2nT - T)$ . Si  $v_1$  est également constant pendant les intervalles  $(2nT - 2T, 2nT]$ , alors, selon le paragraphe 11.4.13, un filtre discret avec la fonction de transfert

$$H(z) = H_{11}(z) + H_{12}(z) = [az^2 + (b' + b'')z + c]/(dz^2 + ez + f) \quad (11.87)$$

est associé au filtre à capacités commutées. La condition sur le signal d'entrée peut être satisfaite, par exemple, par adjonction d'un échantillonneur, tel que celui de la figure 11.22, ou en connectant l'entrée à la sortie d'une cellule du même type.

On peut montrer qu'une fonction biquadratique arbitraire peut être synthétisée par le filtre de la figure 11.32. On dispose même de plusieurs paramètres libres, ce qui permettra d'annuler différentes capacités. Un exemple sera donné au paragraphe 11.4.23.

#### 11.4.22 Connexion de cellules biquadratiques

La mise en cascade de cellules biquadratiques, dans le but de réaliser des filtres de degré plus élevé, ne pose pas de problème.

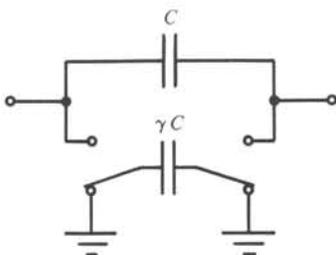


Fig. 11.33

Dans le but de synthétiser des systèmes plus compliqués, on pourrait suivre la démarche du paragraphe 9.1.17 pour les filtres RC-actifs. L'élément qui manque encore est l'amplificateur sommateur à capacités commutées. Il est possible d'adapter l'amplificateur sommateur RC-actif de la figure 9.15, en remplaçant les résistances par les tripôles à capacités commutées, de la figure 11.33. Toutefois, à part le fait que ce circuit entraîne une dépense relativement élevée en éléments, il ne satisfait les contraintes du paragraphe 11.4.18 que si tous les coefficients de sommation sont négatifs. Signalons un cas particulier intéressant : l'inverseur à capacités commutées représenté à la figure 11.34.

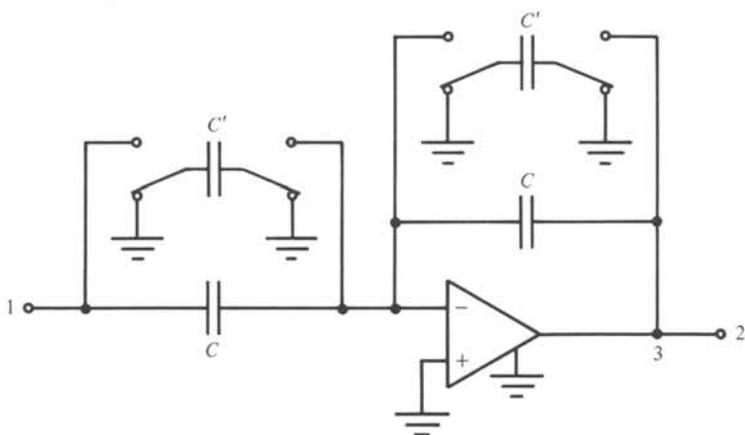


Fig. 11.34

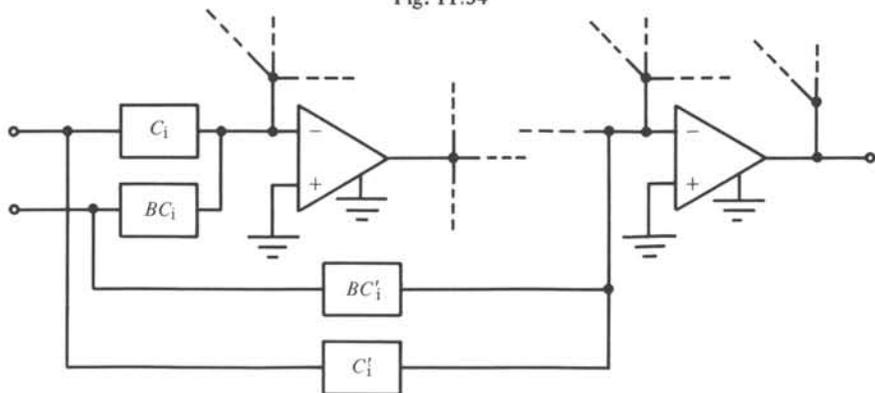


Fig. 11.35

Par contre, si tous les coefficients de sommation sont positifs, on peut sommer les potentiels en utilisant directement les amplificateurs opérationnels d'une cellule biquadratique. La cellule possède de cette manière plusieurs entrées qui doivent être liées à l'entrée de chaque amplificateur opérationnel par des bipôles de même structure dont les capacités correspondantes sont proportionnelles (fig. 11.35).

Il est souvent possible de se ramener au cas des coefficients de sommation positifs en changeant le signe du facteur d'échelle de certaines cellules. En particulier, le système correspondant à un filtre LF, représenté à la figure 9.43, peut être transformé en celui de la figure 11.36. La même méthode est applicable aux filtres FLF. Dans l'exemple du paragraphe 9.5.7, elle a été appliquée pour rendre tous les facteurs d'échelle des cellules biquadratiques positifs. Inversement, si le but est, comme à la figure 11.38, d'éliminer des coefficients de sommation de signe négatif, on sera en général obligé de synthétiser simultanément des cellules biquadratiques avec facteurs d'échelle positifs et négatifs.

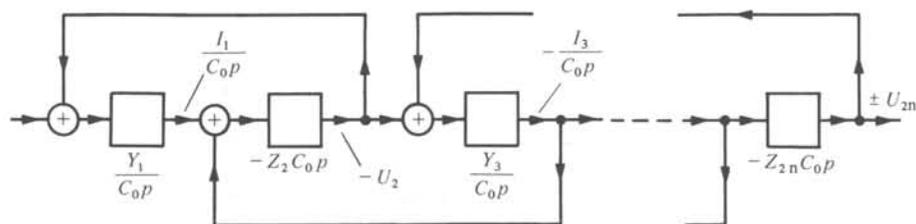


Fig. 11.36

#### 11.4.23 Cellules biquadratiques pour les filtres LF

Pour la synthèse de filtres LF à capacités commutées, la méthode de la transformation bilinéaire, de la section 11.3, peut être étendue. Après avoir transformé les exigences sur la circonférence unité du plan  $z$  à l'axe imaginaire du plan  $p$ , on cherchera non seulement une fonction rationnelle en  $p$  qui les satisfasse, mais encore le système de la figure 11.36 qui réalise cette fonction de transfert en suivant les méthodes de la section 9.5. La transformation bilinéaire conduit ensuite au système avec cellules biquadratiques en  $z$ .

L'intérêt des filtres LF provient à nouveau de leur faible sensibilité par rapport aux éléments passifs. Par les mêmes arguments qu'au paragraphe 9.7.15, il est important de disposer d'une cellule biquadratique dont le zéro et le pôle restent sur la circonférence unité, même si les valeurs et rapports des capacités sont imprécis. Sinon, on ne profite pas pleinement des faibles sensibilités de la structure LF.

Un cas particulier de la cellule du paragraphe 11.4.21 satisfait cette condition. En effet, avec

$$a_2 = a_5 = a_6 = b_3 = b_5 = b_6 = 0 \quad (11.88)$$

et

$$b_1 = b_2 \quad (11.89)$$

on obtient, à partir de (11.76) à (11.86) et de la transformation bilinéaire, dépendant de la pulsation de normalisation  $\omega_0$  arbitraire,

$$z = (1 + p/\omega_0)/(1 - p/\omega_0) \quad (11.90)$$

la fonction de transfert en  $p$

$$T(p) = \frac{(4b_1 - a_1b_4)(p/\omega_0)^2 + a_1b_4}{[(a_3 + a_4)b_4 - 4](p/\omega_0)^2 - 2a_4b_4(p/\omega_0) - (a_3 - a_4)b_4} \quad (11.91)$$

Le terme en  $p$  du numérateur de  $T$  s'annule donc indépendamment des valeurs  $a_1, a_3, b_4$  et la même chose est vraie au dénominateur si, à (11.88), on ajoute  $a_4 = 0$ . Par contre, l'égalité (11.89) requiert des valeurs exactes de capacités. Ce désavantage est éliminé si l'on remplace les deux capacités commutées, de valeur  $b_1C'$ , par une seule qui est commutée seulement d'un côté. La cellule résultante est représentée à la figure 11.37.

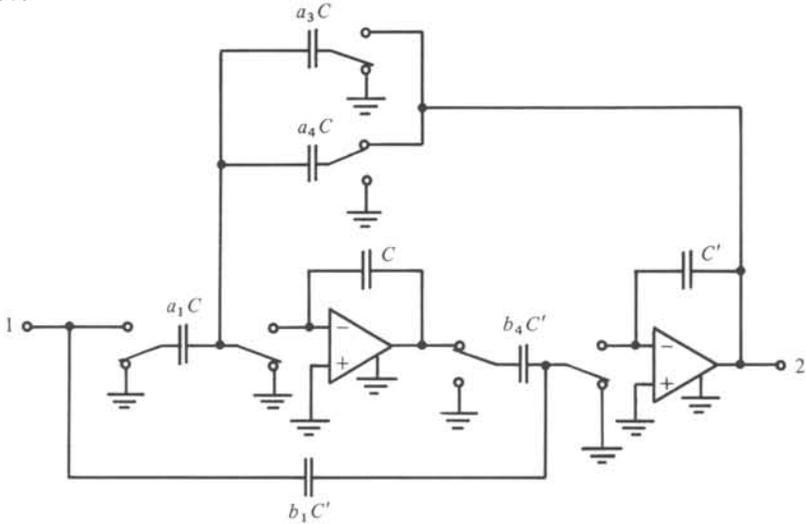


Fig. 11.37

Inversement, une fonction de transfert de la forme

$$T(p) = K(p^2 + \omega_z^2)/(p^2 + (\omega_p/Q_p)p + \omega_p^2) \quad (11.92)$$

est synthétisée par la cellule de la figure 11.37 avec les paramètres

$$a_3 = -a_1(\omega_0 \omega_p/Q_p + 2\omega_p^2)/2K\omega_z^2 \quad (11.93)$$

$$a_4 = -a_1\omega_0(\omega_p/Q_p)/2K\omega_z^2 \quad (11.94)$$

$$b_1 = -K(\omega_0^2 + \omega_z^2)/(\omega_0^2 + \omega_0\omega_p/Q_p + \omega_p^2) \quad (11.95)$$

$$b_4 = -4K\omega_z^2/[a_1(\omega_0^2 + \omega_0\omega_p/Q_p + \omega_p^2)] \quad (11.96)$$

où  $a_1$  est un paramètre libre de la cellule, et  $\omega_0$  la pulsation de normalisation libre de la transformation (11.90). Il ressort de ces équations de synthèse que n'importe quelle fonction de transfert, de la forme (11.92), avec  $K < 0$  est réalisable par des paramètres  $a_1, a_3, b_1, b_4$  positifs.

#### 11.4.24 Exemple

On se propose de réaliser la fonction de transfert du filtre passe-bas discret, obtenue au paragraphe 11.3.7, par un filtre à capacités commutées de structure LF.

Le système utilisé comme étape intermédiaire dans le procédé de synthèse est essentiellement celui de la figure 11.36 avec trois cellules biquadratiques. Comme dans l'exemple 9.5.7, une optimisation de la dynamique conduit à un système du type représenté à la figure 9.45.

Les facteurs d'échelle des cellules biquadratiques de la figure 11.36 s'avèrent, pour cet exemple, être tous de même signe. Par la méthode de la figure 11.35, il est donc possible d'effectuer les sommations directement par les amplificateurs opérationnels des cellules. De cette manière, les cellules biquadratiques deviennent des systèmes à deux entrées et une sortie (fig. 11.38). Les deux fonctions de transfert associées à chacun de ces systèmes sont proportionnelles. Si elles sont paramétrisées selon (11.92), elles ont les mêmes valeurs pour  $\omega_z$ ,  $\omega_p$  et  $Q_p$ , et seulement les facteurs d'échelle  $K$  des deux entrées diffèrent. Ces paramètres sont donnés à la figure 11.38, pour  $\omega_0 = 32\,000$  rad/s.

A la partie inférieure de la figure 11.38, le filtre à capacités commutées est représenté en entier. Les cellules biquadratiques y sont délimitées en trait interrompu. Les valeurs des capacités sont choisies en vue d'une réalisation en circuit intégré MOS.

#### 11.4.25 Sensibilité des filtres à capacités commutées

Les imperfections principales d'un filtre à capacités commutées sont

- la présence de capacités parasites;
- les valeurs imprécises des capacités;
- le gain fini des amplificateurs opérationnels;
- la dépendance des capacités en fonction de la température et du vieillissement;
- la présence de résistances parasites dans les interrupteurs;
- le bruit.

L'influence des capacités parasites a été discutée aux paragraphes 11.4.17 à 11.4.19.

Comme les capacités sont des éléments intégrés, leurs valeurs présentent deux types d'erreurs, qui ont été discutées, au paragraphe 9.7.2, dans le cadre des filtres RC-actifs. L'erreur commune à toutes les capacités peut facilement atteindre 15%, tandis que l'erreur individuelle géométrique peut être limitée à environ 0,1%. Comme la fonction de transfert  $H$  ne dépend pas du niveau d'impédance des capacités, l'erreur commune relative n'a aucune influence sur le comportement du filtre, *pour autant qu'elle reste constante sur tout le filtre*. Dans le formalisme du paragraphe 9.7.2, ce fait est exprimé par

$$\sum_i S(H, C_i) = 0 \tag{11.97}$$

L'influence des erreurs individuelles est identique à celle des éléments passifs discrets, et les propriétés des sensibilités passives des filtres RC-actifs, discutées à la section 9.7, sont également valables pour les filtres à capacités commutées.

Par contre, l'influence du gain fini  $A$  des amplificateurs opérationnels se manifeste différemment. Puisque pendant chaque intervalle de temps  $T$ , les potentiels sont constants, c'est la valeur du gain  $A$  en continu qui intervient. Celle-ci est une grandeur réelle et les arguments de la section 9.7, qui utilisent le fait que (9.92) est normalement imaginaire pur en bande passante, doivent être adaptés.

En supposant une température et un coefficient de température des capacités

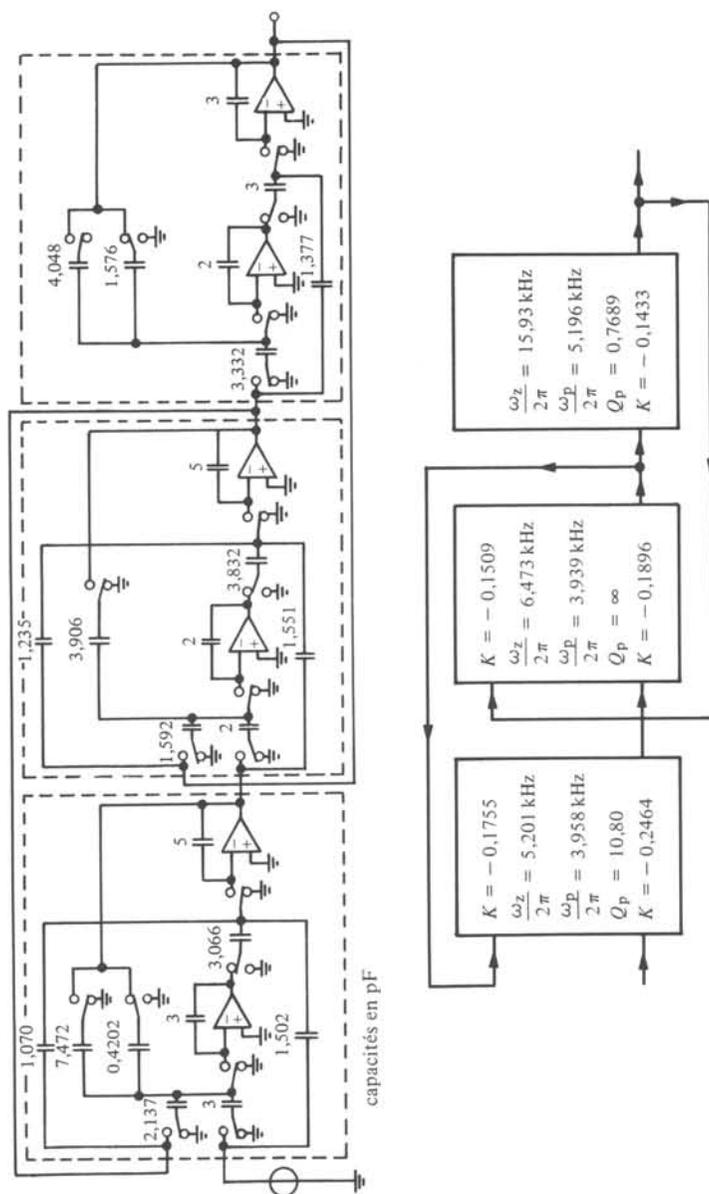


Fig. 11.38

uniformes à travers le filtre, on constate que, grâce à (9.116) et (11.97), les variations de température n'influencent pas le comportement du filtre. Une propriété analogue vaut pour le vieillissement. C'est un net avantage sur les filtres RC-actifs, où la même propriété nécessite des coefficients de température des résistances et des capacités opposés l'un à l'autre.

Grâce aux résistances résiduelles des interrupteurs fermés, la transition d'un état du circuit à l'état suivant n'est pas immédiate, mais exponentielle. Si l'on choisit une période d'horloge  $T$  trop courte, les capacités risquent de ne pas avoir atteint leur charge d'équilibre à la fin de l'intervalle  $T$ , ce qui constitue une erreur qui se propagera et modifiera la tension de sortie du filtre. Ces résistances des interrupteurs fermés étant de l'ordre de grandeur de 10 kΩ, et les capacités nominales se situant autour du pF les produits  $RC$  prennent des valeurs de  $10^{-8}$  à  $10^{-7}$  s, ce qui limite la fréquence d'horloge à environ 1 MHz.

Le bruit est un problème important qui sort du cadre de cet ouvrage.

## 11.5 FILTRES NUMÉRIQUES

### 11.5.1 Définition. Filtre numérique

Un *filtre numérique* est un système numérique qui effectue un filtrage. Il comporte une entrée et une sortie, et il est composé de retards, de sommateurs, de multiplicateurs et de nœuds.

### 11.5.2 Exemple

Considérons le filtre numérique de la figure 11.39. Les équations associées à ce système composé sont

$$x_1(n) = x(n-1) \tag{11.98}$$

$$x_2(n) = a_0 x(n) \tag{11.99}$$

$$x_3(n) = a_1 x_1(n) \tag{11.100}$$

$$x_4(n) = y(n-1) \tag{11.101}$$

$$x_5(n) = b_1 x_4(n) \tag{11.102}$$

$$y(n) = x_2(n) + x_3(n) + x_5(n) \tag{11.103}$$

En effectuant la transformée en  $z$ , on obtient

$$X_1(z) = X(z) z^{-1} \tag{11.104}$$

$$X_2(z) = a_0 X(z) \tag{11.105}$$

$$X_3(z) = a_1 X_1(z) \tag{11.106}$$

$$X_4(z) = Y(z) z^{-1} \tag{11.107}$$

$$X_5(z) = b_1 X_4(z) \tag{11.108}$$

$$Y(z) = X_2(z) + X_3(z) + X_5(z) \tag{11.109}$$

Après élimination de  $X_1$  à  $X_5$ , on arrive à la fonction de transfert

$$H(z) = Y(z)/X(z) = (a_0 z + a_1)/(z - b_1) \tag{11.110}$$

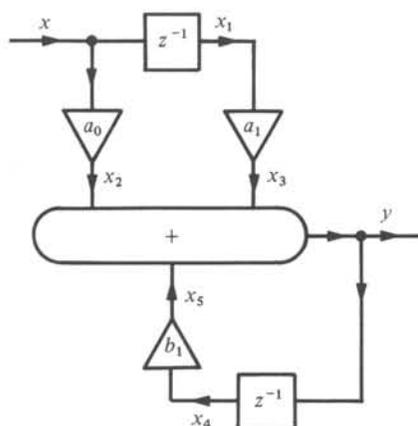


Fig. 11.39

### 11.5.3 Réalisation

La définition 11.5.1 du filtre numérique est plus abstraite que les définitions 9.1.11 et 11.4.1 pour le filtre RC-actif et le filtre à capacités commutées. Elle ne fait nulle part mention de la façon dont le système numérique est réalisé. En effet, des réalisations très variées sont possibles : par exemple, comme circuit logique spécial; comme programme d'ordinateur; comme réalisation impliquant un microprocesseur, ce qui constitue un compromis entre matériel et logiciel. Cependant, il est avantageux de traiter autant que possible les filtres numériques au sens de la définition 11.5.1, et de s'occuper ensuite des particularités d'une réalisation. Ce dernier point sort du cadre de cet ouvrage.

Toutefois, une propriété commune aux différentes réalisations va au-delà de la définition 11.5.1. Pour profiter du fait que les signaux numériques peuvent être trai-

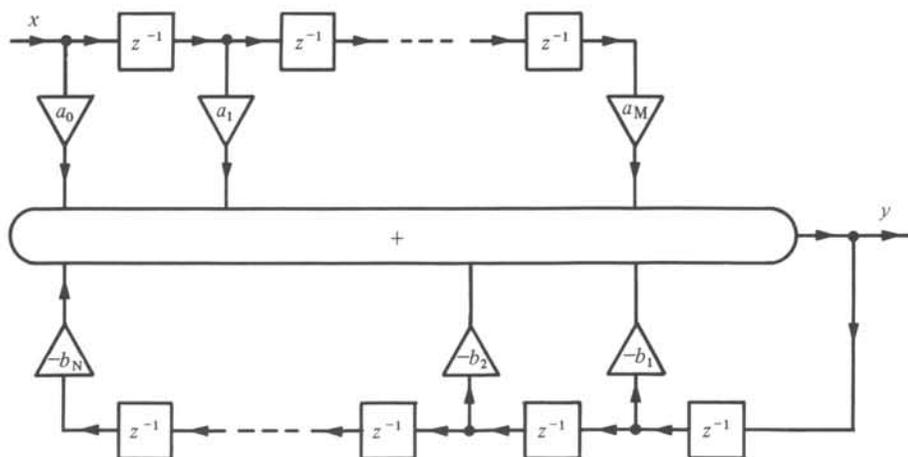


Fig. 11.40

tés et mémorisés, en principe, sans erreur, on fait fonctionner le filtre numérique comme une machine à calculer. En revanche, il faut un certain temps pour effectuer chaque opération, ce qui impose un ordre séquentiel des calculs.

Dans l'exemple du paragraphe 11.5.2, l'ordre séquentiel se présente de la manière suivante : étant donnés  $x(n-1)$ ,  $y(n-1)$  et  $x(n)$ , on calcule dans une première étape  $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$  et  $x_4(n)$  par (11.98), (11.99) et (11.101). Les résultats sont utilisés dans la seconde étape pour calculer  $x_3(n)$  et  $x_5(n)$  par (11.100) et (11.102). La troisième étape fournit  $y(n)$  par (11.103). Les valeurs  $x(n)$ ,  $y(n)$  et  $x(n-1)$  étant connues, le calcul peut être itéré. On s'aperçoit qu'au début de chaque itération, il faut disposer, en plus du signal  $x$ , de la valeur de  $x$  et  $y$  issues de l'itération précédente. Il est donc nécessaire de consacrer une place-mémoire à chacune de ces deux variables. Les deux mémoires correspondent aux deux retards dans la figure 11.41.

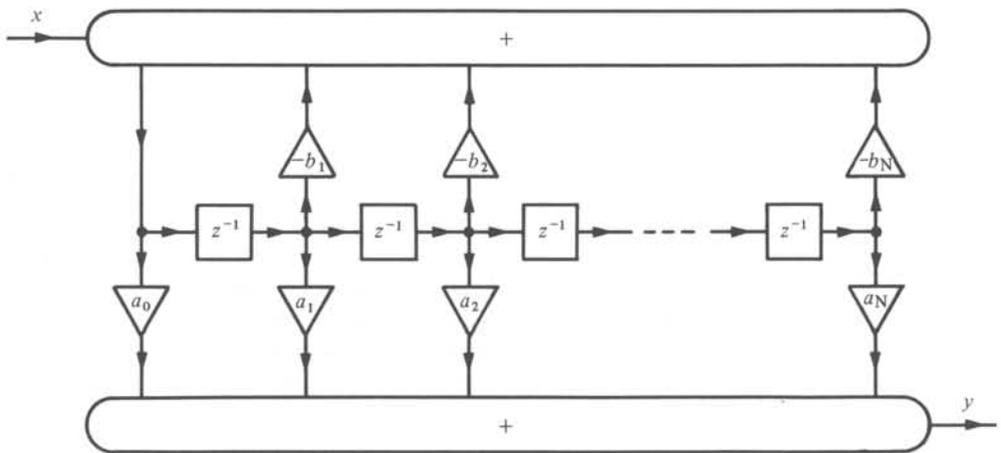


Fig. 11.41

On en déduit sans difficulté qu'en toute généralité les retards sont réalisés par des mémoires. Le nombre de retards ne constitue pourtant qu'une partie du nombre de places-mémoire nécessaires. Il faut en plus stocker les coefficients des multiplicateurs, les résultats de chaque étape de calculs, souvent des résultats intermédiaires d'une opération; il est même possible d'exécuter séquentiellement des opérations qui, en principe, pourraient s'effectuer en parallèle. Tout ceci dépend de la réalisation particulière. Son choix revient essentiellement à une pondération entre la rapidité de fonctionnement du filtre et la complexité de sa réalisation. Il doit être adapté à l'application envisagée.

Il n'est pas possible de réaliser tout filtre numérique, tel qu'il est défini au paragraphe 11.5.1, par une machine à calculer séquentielle. Ce point sera éclairci au paragraphe 11.5.5.

#### 11.5.4 Définitions. Chemin, boucle

Considérons un ensemble de systèmes interconnectés. A chaque connexion, ainsi qu'à chaque entrée et sortie non connectées, correspond un signal. Une suite  $x_1, \dots, x_n$  de ces signaux est un *chemin*, si  $x_i$  et  $x_{i+1}$  sont respectivement un signal d'entrée et une

réponse d'un même système,  $N_i$ , et ceci pour tous les  $i$  de 1 à  $n - 1$ ; ce qui revient encore à dire que tout signal  $x_i$  est à la fois un signal de sortie de  $N_{i-1}$  et un signal d'entrée de  $N_i$ . On dit que le chemin *passé par*  $N_i$ . Une *boucle* est un chemin dont le premier et le dernier des signaux sont identiques.

### 11.5.5 Propriété. Contrainte topologique

La réalisation d'un filtre numérique, par calculs séquentiels, *est impossible s'il existe des boucles qui ne passent pas par un retard*.

En effet, parmi les signaux qui composent une boucle sans retard, il n'y en a aucun qui serait indépendant des valeurs de tous les autres au même instant. Ceci empêche les calculs d'être exécutés séquentiellement.

Dans cette section, nous ne considérons que des filtres numériques qui obéissent à cette contrainte.

### 11.5.6 Filtres numériques à structure directe

L'exemple du paragraphe 11.5.2 est un filtre numérique à *structure directe* de degré 1. Sa généralisation au degré  $n$  est représentée à la figure 11.40. En généralisant le calcul du paragraphe 11.5.2, on obtient la fonction de transfert

$$H(z) = \left[ \sum_{m=0}^M a_m z^{-m} \right] / \left[ 1 + \sum_{n=1}^N b_n z^{-n} \right] \quad (11.111)$$

La synthèse d'une fonction de transfert stable arbitraire pour un filtre numérique à structure directe est immédiate puisque, d'après (11.111), les coefficients des multiplieurs sont directement les coefficients des numérateur et dénominateur de la fonction de transfert; il suffit de multiplier numérateur et dénominateur dans l'expression (11.111) par une puissance de  $z$ , pour obtenir des polynômes.

### 11.5.7 Filtres numériques à structure canonique directe

Une variante de la structure directe est la *structure canonique directe*, représentée à la figure 11.41. Sa fonction de transfert est (11.111) avec  $M = N$ . Elle est appelée canonique parce que le nombre de retards est minimal, c'est-à-dire identique au degré de la fonction de transfert.

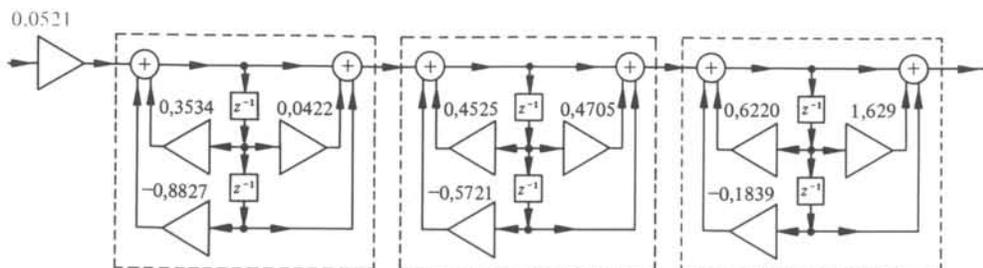
### 11.5.8 Filtres numériques à structure cascade

Comme c'est le cas des filtres RC-actifs et des filtres à capacités commutées, des filtres numériques peuvent être synthétisés par connexion en cascade de cellules de faible degré, normalement de degré deux.

Si l'on synthétise les cellules par la structure canonique directe, le filtre entier reste canonique. Cette méthode est assez populaire grâce à son économie en éléments et à sa structure répétitive.

### 11.5.9 Exemple

Un exemple de filtre cascade est représenté à la figure 11.42. Il réalise la fonction de transfert passe-bas de degré six, obtenue au paragraphe 11.3.7. Les cellules biquadra-



```

CONST
  DEGRE = 2; (* DEGRE DES CELLULES BIQUADRATIQUES *)
  NCEL = 3; (* NOMBRE DE CELLULES DU FILTRE *)

TYPE
  FICHSIGN = FILE OF REAL;
  FICHCOEFF = FILE OF RECORD
  A,B:ARRAY[1..DEGRE] OF REAL
  END;

VAR
  FICHX; (* FICHIER CONTENANT LE SIGNAL D'ENTREE *)
  FICHY:FICHSIGN; (* * * * DE SORTIE *)
  FICHC:FICHCOEFF; (* * * * LES COEFF. DES CELLULES *)
  I; (* VARIABLE DE BOUCLE *)
  NMAX:INTEGER; (* VALEUR MAXIMALE POUR L'INDICE DES SIGNAUX
  DISCRETS *)
  K:REAL; (* FACTEUR D'ECHELLE DE LA FONCTION DE TRANSFERT *)

PROCEDURE FILTRE (VAR FX,FY:FICHSIGN; NMAX:INTEGER; K:REAL;
  (*****)) VAR FC:FICHCOEFF;
  (* EFFECTUE LE FILTRAGE DU SIGNAL

  TYPE DE FILTRE:
    FILTRE PASSE-BAS REALISE PAR UNE CASCADE
    DE NCEL CELLULES BIQUADRATIQUES EN
    STRUCTURE CANONIQUE DIRECTE

  PARAMETRES DE LA PROCEDURE:
    FX FICHIER CONTENANT LE SIGNAL D'ENTREE
    FY * * * * DE SORTIE
    NMAX LONGEUR DES SIGNAUX DISCRETS
    K FACTEUR D'ECHELLE DE H(Z)
    FC FICHIER CONTENANT LES COEFFICIENTS
    DES CELLULES *)

TYPE
  PARTSIGN = ARRAY[0..NCEL,0..DEGRE] OF REAL;

VAR
  I,J,N:INTEGER; (* VARIABLES DE BOUCLES *)
  X:PARTSIGN; (* PARTIE DU SIGNAL A CONSIDERER POUR LE CALCUL *)

FUNCTION BIQUAD (X:PARTSIGN; VAR FC:FICHCOEFF; NO:INTEGER):REAL;
  (***** CALCULE LA VALEUR DU SIGNAL DE SORTIE
  D'UNE CELLULE BIQUADRATIQUE *)
  BEGIN (* BIQUAD *)
    WITH FC DO
      BIQUAD:=X[NO,0]+A[1]*X[NO,1]+A[2]*X[NO,2]
      -B[1]*X[NO+1,1]-B[2]*X[NO+1,2]
    END; (* BIQUAD *)

  BEGIN (* FILTRE *)
    RESET(FX); REWRITE(FY);
    FOR I:=0 TO NCEL DO
      FOR J:=0 TO DEGRE DO X[I,J]:=0;
    FOR N:=0 TO (NMAX-1) DO
      BEGIN
        X[0,0]:=K*FX^;
        RESET(FC);
        FOR I:=0 TO (NCEL-1) DO
          BEGIN
            X[I+1,0]:=BIQUAD(X,FC,I);
            GET(FC)
          END;
        FY^:=X[NCEL,0];
        PUT(FY);
        FOR I:=0 TO NCEL DO
          FOR J:=DEGRE DOWNT0 1 DO X[I,J]:=X[I,J-1];
        GET(FX)
      END
    END; (* FILTRE *)
  
```

Fig. 11.42

tiques de structure canonique directe qui le composent, sont délimitées en trait interrompu.

Réalisons ce filtre en logiciel pur. En bas de la figure 11.42, une procédure en langage PASCAL est représentée, qui lit le signal dans un fichier FX, effectue le filtrage et écrit le résultat sur un fichier FY.

Cette procédure réalise en fait n'importe quel filtre cascade avec cellules biquadratiques de structure canonique directe. Car le nombre de cellules, NCEL, est spécifié en dehors de la procédure et les coefficients des cellules sont lus du fichier FC.

Comme il s'agit d'une procédure, il est sous-entendu qu'elle fait partie d'un programme qui place, si nécessaire, le signal en FX, et qui s'occupe de la réponse en FY, soit en effectuant des transformations supplémentaires, soit en l'imprimant seulement. Pour chaque application, l'environnement de la procédure sera différent. Pourtant, un certain nombre de déclarations de constantes, de types et de variables doivent obligatoirement précéder la procédure. Elles se trouvent également à la figure 11.42.

### 11.5.10 Sensibilité des filtres numériques

Plusieurs types d'imprécisions se produisent dans un filtre numérique. Elles ne proviennent pas des opérations imprécises sur les signaux, comme c'est le cas des autres filtres traités dans ce volume, mais du fait que les opérations que l'on réalise sont différentes de celles que l'on aimerait réaliser, et ceci d'une façon bien déterminée.

L'origine de cette difficulté est la nature même des signaux numériques, la limitation des valeurs à un ensemble fini. Il est souvent nécessaire de quantifier un nombre, c'est-à-dire de choisir une valeur admise pour les signaux numériques proches du nombre donné. L'erreur que l'on commet dans cette opération est appelée *erreur de quantification*.

Remarquons qu'en général chaque nombre a deux valeurs admises proches, une plus grande et une plus petite. On peut jouer sur ce degré de liberté pour réduire l'erreur de quantification. Cependant, le plus souvent, un choix arbitraire est fait a priori. Les deux méthodes les plus courantes sont de choisir ou bien la valeur admise la plus proche, appelée *valeur arrondie* ou bien la valeur admise inférieure en module la plus proche, appelée *valeur tronquée*. Il faut distinguer :

- les erreurs de quantification sur les coefficients des multiplicateurs;
- les erreurs de quantification sur les résultats de multiplications, éventuellement d'additions.

Un troisième type d'erreurs de quantification intervient quand le filtre numérique est utilisé pour le traitement de signaux analogiques. Comme un filtre numérique est un cas particulier d'un filtre discret, une telle application nécessite une chaîne de transmission du type de la figure 11.7. De plus, il faut un dispositif, appelé *convertisseur analogique-numérique*, capable de transformer un signal échantillonné en un signal numérique, et un dispositif, appelé *convertisseur numérique-analogique*, pour la transformation inverse. Il faut donc ajouter :

- les erreurs de quantification sur le signal d'entrée dans le convertisseur analogique-numérique.

La chaîne de filtrage complète, nécessaire pour le traitement de signaux analogiques par un filtre numérique, est représentée à la figure 11.43.

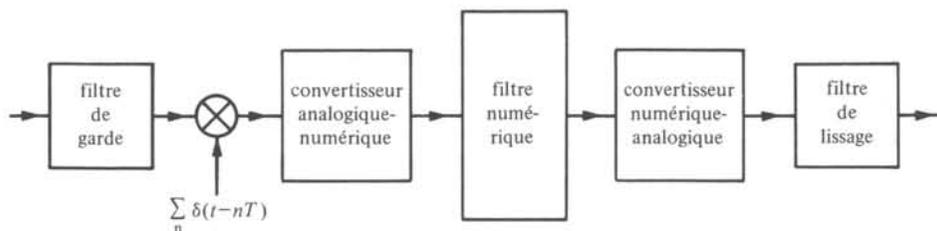


Fig. 11.43

### 11.5.11 Commentaire

Le retard, le multiplicateur, le sommateur et le nœud, définis à la section 11.1 en tant que systèmes discrets, sont implicitement pris pour des systèmes numériques dans la définition 11.5.1. Alors que ceci ne pose pas de problème dans le cas du retard et du nœud, la réponse d'un multiplicateur n'est en général pas limitée aux valeurs admissibles pour les signaux numériques, et, par conséquent, chaque réalisation de filtre numérique se contentera de multiplicateurs approximatifs. C'est l'origine de la deuxième classe d'erreurs de quantification du paragraphe 11.5.10.

L'ensemble des valeurs admises est un choix à faire lors de la réalisation du filtre. En d'autres mots, il s'agit de choisir un nombre  $B$  de bits par valeur, ainsi qu'une représentation binaire des nombres. L'importance des erreurs de quantification dépend de la densité de l'ensemble des valeurs représentables, par des mots binaires de longueur  $B$ , sur l'axe réel.

Si un filtre numérique est réalisé par un programme fonctionnant sur un grand ordinateur,  $B$  est fixe et grand, par exemple 60, la densité des valeurs admises est grande et les erreurs de quantification négligeables.

A l'autre extrême, si le filtre est entièrement réalisé en matériel,  $B$  sera choisi le plus petit possible, car la complexité du circuit et sa vitesse de fonctionnement dépendent fortement de  $B$ . Cependant, avec un  $B$  trop petit, les erreurs de quantification deviennent trop grandes et le filtre ne satisfait plus les exigences.

### 11.5.12 Erreurs de quantification sur les coefficients des multiplicateurs

L'effet de ces erreurs ressemble à celui des imprécisions des éléments passifs dans un filtre analogique.

Supposons que les valeurs admises pour les coefficients des multiplicateurs  $a_i$  soient espacées de façon uniforme et que la différence entre deux valeurs voisines soit  $h$ , la *pas de quantification*. Supposons en plus que la valeur arrondie soit choisie. De façon analogue qu'au paragraphe 7.1.6, on peut borner, en première approximation, l'écart relatif du module de la fonction de transfert par

$$\delta |H| \leq \sum |S'(|H|, a_i)| \frac{h}{2} \quad (11.112)$$

Normalement, cette inégalité sert à déterminer  $h$ , et par conséquent le nombre de bits par coefficient, à partir de l'écart disponible entre les exigences et  $|H|$  du filtre nominal. Puisqu'il s'agit d'une borne, (11.112) fournit souvent une valeur trop petite pour  $h$  et donc un nombre  $B$  de bits par coefficient plus grand que strictement nécessaire.

Un calcul plus précis peut être fait en tenant compte de l'écart effectif  $\Delta a_i$  entre la valeur nominale  $a_i$  et la valeur à  $B$  bits  $\tilde{a}_i$  pour chaque coefficient de multiplication :

$$\delta |H| = \sum_i S'(|H|, a_i) \Delta a_i = \sum_i \operatorname{Re} S'(H, a_i) \Delta a_i \quad (11.113)$$

En connaissant la fonction de transfert  $H$  et les sensibilités  $S(H, a_i)$  du filtre, on peut donc contrôler si une limitation à  $B$  bits n'entraîne pas une violation des spécifications. De plus, comme il a été remarqué au paragraphe 11.5.11, pour un nombre  $B$  bits on a le choix entre deux valeurs  $\tilde{a}_i$  pour chaque  $a_i$ . On peut alors envisager de chercher le meilleur des  $2^N$  choix de coefficients  $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_N$ , sans pour autant effectuer des analyses supplémentaires du filtre.

Il est important de noter que la possibilité d'optimiser un filtre numérique en jouant sur la manière de quantifier les coefficients de multiplication constitue une différence fondamentale entre les filtres numériques et les filtres analogiques. En effet, la valeur exacte des éléments passifs de ces derniers *n'est pas connue*.

Une autre possibilité, propre au filtre numérique, est de réaliser avec précision des contraintes sur les coefficients de multiplication. Dans le cas des filtres analogiques, on est souvent obligé d'écarter des solutions qui se basent sur une relation entre les valeurs des éléments passifs, par exemple l'égalité de deux résistances. L'équivalent dans le domaine numérique serait l'égalité entre deux coefficients de multiplicateurs. Alors qu'une égalité entre deux résistances ne peut jamais être exactement réalisée, deux coefficients de multiplication peuvent toujours être quantifiés à la même valeur, indépendamment du pas de quantification.

### 11.5.13 Erreurs de quantification comme source de bruit

Les erreurs de quantification sur les résultats d'opérations arithmétiques et sur le signal d'entrée, dépendent de celui-ci. Dans la mesure où le signal d'entrée est considéré comme inconnu, elles ne sont pas prévisibles. C'est pourquoi, on leur associe une variable aléatoire, ce qui revient à introduire une source de bruit, le *bruit de quantification*, à l'entrée du filtre et à l'emplacement de chaque multiplicateur.

Cependant, la modélisation par des sources de bruit n'est pas totalement adéquate. Par le fait que ces erreurs de quantification dépendent du signal d'entrée, il s'agit là d'un phénomène non linéaire qui peut causer des instabilités. En effet, on observe parfois une réponse d'amplitude non nulle avec un comportement à première vue périodique, alors que le signal d'entrée était nul. De plus, des oscillations parasites de grande amplitude peuvent être causées par des dépassements de capacité des mémoires. L'élimination de tels ennuis se situe en dehors des possibilités d'une théorie linéaire.

### 11.5.14 Simulation de filtres LC

D'après le paragraphe 11.5.11, l'influence des erreurs de quantification des coefficients de multiplication est liée aux sensibilités de la fonction de transfert à ces coefficients. Il est donc important de disposer de structures à faible sensibilité si ces erreurs ne sont pas négligeables. Dans ce but, on essaiera, comme précédemment pour les filtres RC-actifs et les filtres à capacités commutées, de simuler le filtre classique.

Etant donné que l'on dispose de cellules biquadratiques numériques, la première solution qui vient à l'esprit est la structure LF. Malheureusement, la contrainte du pa-

ragraphe 11.5.4 joue ici un mauvais tour. Les filtres numériques LF, conçus selon la méthode de la section 9.5 et transformés par la transformation bilinéaire dans le domaine discret, comportent forcément des boucles sans retard.

En effet, on va montrer qu'il existe une boucle qui ne passe pas par un retard. Comme les chemins de contre-réaction ne comportent pas de retard, la présence de boucles sans retard est équivalente à la présence de chemins sans retard qui conduisent de l'entrée d'une cellule biquadratique à sa sortie. Un tel chemin doit exister si la réponse  $y$ , prise à un instant, dépend de la valeur du signal  $x$  au même instant. Cette propriété est indépendante de la synthèse particulière choisie pour la cellule biquadratique. D'après (11.11), elle est équivalente à  $h(0) \neq 0$ , où  $h$  est la réponse impulsionnelle de la cellule. D'autre part,

$$h(0) = H(\infty) = T(\omega_0) \tag{11.114}$$

où  $H$  et  $T$  sont les fonctions de transfert en  $z$  et  $p$ . Ici,  $\omega_0$  est la pulsation de normalisation arbitraire dans la transformation bilinéaire

$$p = \omega_0 (z - 1)/(z + 1) \tag{11.115}$$

Puisque les zéros des fonctions de transfert  $T$  des cellules biquadratiques dans un filtre LF se situent tous sur l'axe imaginaire, la présence de boucles sans retard est inévitable dans un filtre LF numérique.

Une méthode de simulation des filtres LC totalement différente a été inventée, ce qui permet de contourner cette difficulté. Au lieu de simuler par des signaux numériques les tensions et courants d'un circuit LC, on simule les ondes incidentes et réfléchies par rapport à une résistance de normalisation. Cette dernière constitue un degré de liberté qui est systématiquement utilisé pour éliminer les boucles sans retard.

### 11.5.15 Définition. Filtre numérique d'ondes

Un *filtre numérique d'ondes* est un système numérique à deux entrées,  $x_1$  et  $x_2$ , et deux sorties,  $y_1$  et  $y_2$ , tel que la matrice de transfert  $H$  satisfait les conditions suivantes

$$H(1/z)H(z) = 1_2 \tag{11.116}$$

$$H_{12}(z) = r H_{21}(z) \tag{11.117}$$

où  $r$  est une constante positive.

Il effectue un filtrage par  $H_{21}, H_{11}, H_{12}$  et  $H_{22}$  (fig. 11.44).

### 11.5.16 Principe du filtre numérique d'ondes

Soit un biporte non dissipatif réciproque, entre terminaisons résistives, et  $\xi_i, \eta_i$  les ondes incidentes et réfléchies à l'accès  $i$ , relatives à la résistance de terminaison  $R_i$  et définies par

$$\xi_i(p) = U_i(p) + R_i I_i(p) \quad , \quad i = 1, 2 \tag{11.118}$$

$$\eta_i(p) = U_i(p) - R_i I_i(p) \quad , \quad i = 1, 2 \tag{11.119}$$

et soit  $s(p)$  la matrice de répartition définie par

$$\eta = s \xi \tag{11.120}$$

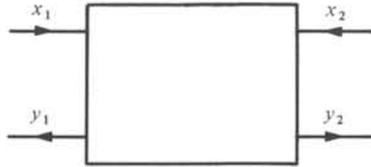


Fig. 11.44

Remarquons que (11.118) et (11.119) se distinguent des ondes de puissance introduites à la section 2.3. C'est un cas particulier des ondes de tension, introduites à la section 8.3, obtenu en posant  $Z_1 = R_1$ , et  $Z_2 = R_2$ . Les développements de la section 8.3 sont donc applicables, en particulier la forme canonique pour la matrice de répartition. Les conditions de non-dissipativité et de réciprocity reviennent ensemble à

$$s(-p)s(p) = 1_2 \quad (11.121)$$

$$s_{12}(p) = R_1 s_{21}(p)/R_2 \quad (11.122)$$

Soit  $H(z)$  la matrice rationnelle obtenue par la transformation bilinéaire (11.115) à partir de  $s(p)$ . Alors, les équations (11.121) et (11.122) sont équivalentes à (11.116) et (11.117). Ceci montre que, par la transformation bilinéaire, à un biporte non dissipatif entre terminaisons  $R_1, R_2$  correspond un filtre numérique d'ondes, dont la constante  $r$  vaut  $R_1/R_2$  et vice versa.

### 11.5.17 Commentaire

Normalement, on s'intéresse au filtrage par  $s_{21}$ . Ceci revient à choisir l'entrée  $x_2$  identiquement nulle, représentée par une demi-lune à la figure 11.45, et à ne considérer que  $y_2$  comme réponse. On ramène ainsi le filtre numérique d'ondes à un système numérique à une entrée et une sortie, conformément à la définition 11.5.1 pour le filtre numérique.



Fig. 11.45

Toutefois, la réponse  $y_1$ , qui correspond à la fonction de transfert  $H_{11}$ , est à disposition sans calcul supplémentaire. D'après (11.121) et (11.122), on a

$$1 = H_{11}(e^{-j\Omega})H_{11}(e^{j\Omega}) + H_{12}(e^{-j\Omega})H_{21}(e^{j\Omega}) \quad (11.123)$$

$$= |H_{11}(e^{j\Omega})|^2 + r |H_{21}(e^{j\Omega})|^2 \quad (11.124)$$

Selon la définition 5.4.10,  $H_{11}$  et  $H_{21}$  sont donc les fonctions de transfert de filtres complémentaires. Par conséquent, le signal  $x_1$  est séparé, selon les fréquences, en une réponse  $y_1$  et  $y_2$ . Le filtre numérique d'ondes est donc par sa nature ce que l'on appelle un *aiguillage*.

**11.5.18 Simulation des capacités et des inductances**

La synthèse d'un filtre numérique d'ondes procède par extension de la méthode du paragraphe 11.5.16 aux composants. On associe donc aux capacités et aux inductances des systèmes numériques à une entrée et une sortie, qui simulent l'onde incidente et réfléchie, respectivement. La résistance de normalisation  $R$  des ondes, qui est un paramètre libre dans cette description, est mise en relation avec la valeur de la capacité et de l'inductance. Cette astuce permet d'aboutir à un seul système numérique pour toutes les capacités, et un seul pour toutes les inductances.

Une capacité de valeur  $C$  obéit aux équations

$$\eta = U - RI = (1 - RCp)U = (1 - RCp)(\xi + \eta)/2 \tag{11.125}$$

ce qui implique

$$\eta = (1 - RCp) \xi / (1 + RCp) \tag{11.126}$$

En transformant les ondes  $\eta$  et  $\xi$  par la transformation bilinéaire du paragraphe 11.3.3 avec pulsation de normalisation arbitraire  $\omega_0 = 2/T$ , on obtient avec  $R = 1/C\omega_0$

$$Y(z) = X(z)/z \tag{11.127}$$

qui représente simplement un retard. Dans sa représentation, à la figure 11.46, on a indiqué également la résistance de normalisation.



Fig. 11.46

Un calcul analogue pour une inductance de valeur  $L$  fournit, si  $R = L\omega_0$ ,

$$Y(z) = -X(z)/z \tag{11.128}$$

ce qui correspond à la mise en cascade d'un retard avec un multiplicateur de coefficient  $-1$ , représentée à la figure 11.47.

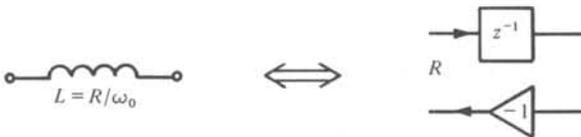


Fig. 11.47

**11.5.19 Simulation des connexions**

La connexion de capacités et d'inductances, qui, en termes de tensions et courants, s'exprime de façon extrêmement simple, devient plus compliquée en termes de variables d'ondes. D'autant plus que les équations de connexion doivent être dérivées pour des résistances de normalisation arbitraires, car, d'après le paragraphe 11.5.18, elles sont utilisées pour simuler les valeurs des capacités et des inductances.

Un élément série d'un filtre en échelle est connecté à travers un triporte, indiqué en trait interrompu dans la figure 11.48. Le même triporte intervient dans la mise en

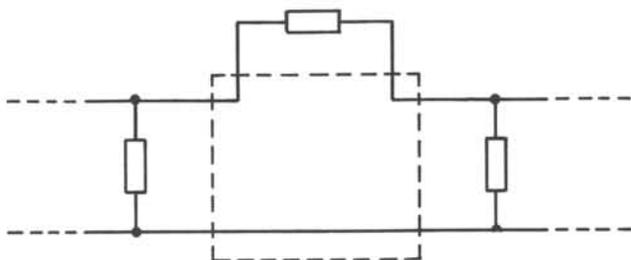


Fig. 11.48

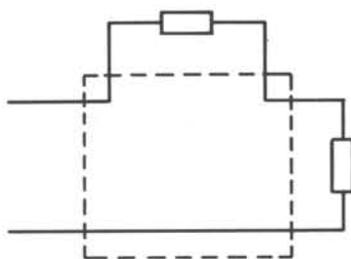


Fig. 11.49

série de deux impédances, représentée à la figure 11.49. Considérons donc le triporte de la figure 11.50. Il est décrit par les équations

$$I_1 = I_2 = I_3 \quad (11.129)$$

$$U_1 + U_2 + U_3 = 0 \quad (11.130)$$

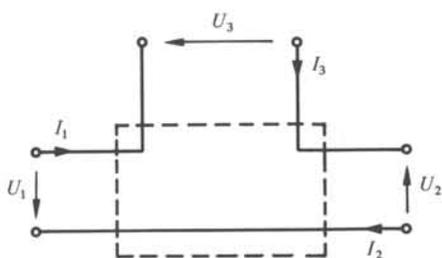


Fig. 11.50

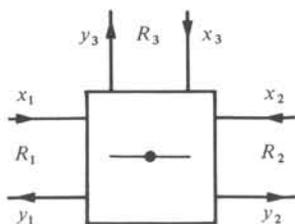


Fig. 11.51

En y introduisant les ondes incidentes (11.118) et réfléchies (11.119), elles deviennent

$$(\xi_1 - \eta_1)/2R_1 = (\xi_2 - \eta_2)/2R_2 = (\xi_3 - \eta_3)/2R_3 \quad (11.131)$$

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0 \quad (11.132)$$

ce qui est équivalent à

$$\eta_i = \xi_i - 2R_i(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)/(R_1 + R_2 + R_3) \quad (11.133)$$

La transformation bilinéaire revient simplement à remplacer  $\eta_i, \xi_i$  par  $Y_i, X_i$  :

$$Y_i = X_i - a_i(X_1 + X_2 + X_3) \quad (11.134)$$

avec

$$a_i = 2R_i/(R_1 + R_2 + R_3) \quad (11.135)$$

Un système numérique satisfaisant (11.134) est appelé *adaptateur série*; il est représenté par le symbole de la figure 11.51, et une réalisation est donnée à la figure 11.52. Cette dernière ne nécessite, à part un inverseur de signe, que deux multiplicateurs, puisque  $a_1 + a_2 + a_3 = 2$ .

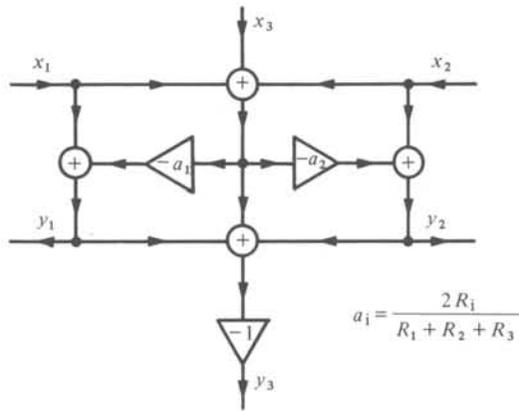


Fig. 11.52

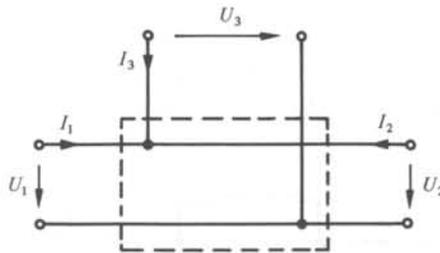


Fig. 11.53

Un élément parallèle dans un circuit en échelle, est connecté à travers le triporte de la figure 11.53. De même, la mise en parallèle de deux impédances revient à ce triporte. Le système numérique, qui lui est associé, est appelé *adaptateur parallèle*; son

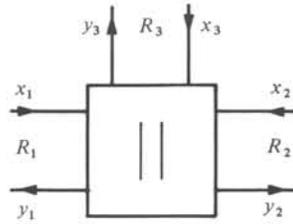


Fig. 11.54

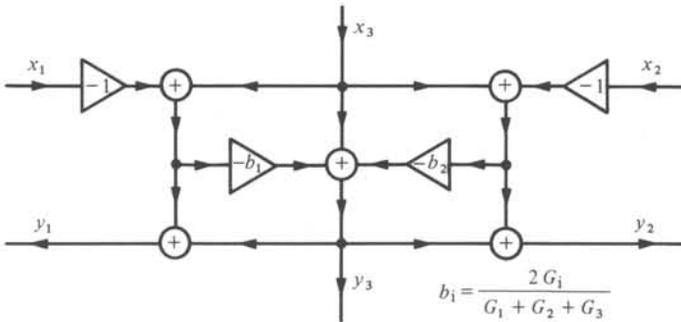


Fig. 11.55

symbole est représenté à la figure 11.54, et une réalisation à la figure 11.55. Il est décrit par les équations

$$Y_i = -X_i + \sum_{k=1}^3 b_k X_k \quad (11.136)$$

où

$$b_i = 2G_i / (G_1 + G_2 + G_3) \quad (11.137)$$

et

$$G_i = 1/R_i \quad (11.138)$$

### 11.5.20 Elimination des boucles sans retard

Par la méthode des paragraphes 11.5.18 et 11.5.19, on associe, à titre d'exemple, au filtre de la figure 11.56 le filtre d'ondes de la figure 11.57. Malheureusement, avec les adaptateurs des figures 11.52 et 11.55, il comporte une multitude de boucles sans

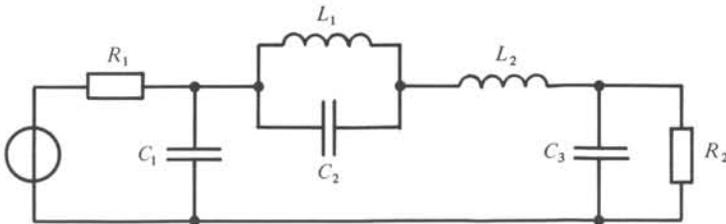


Fig. 11.56

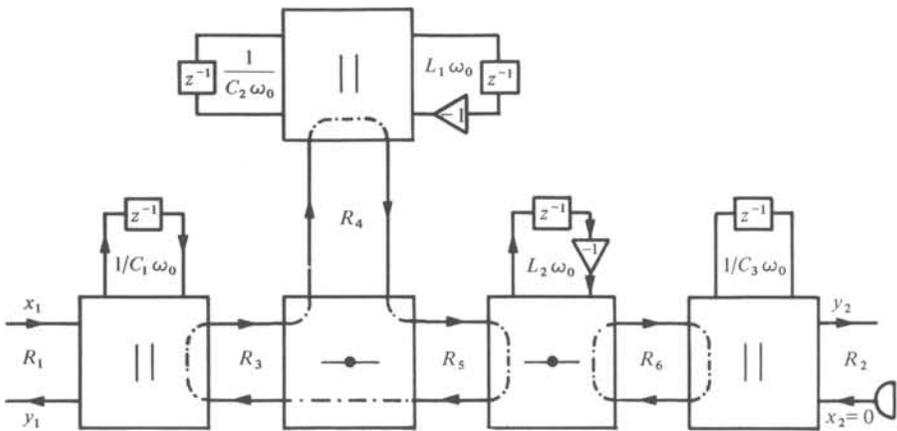


Fig. 11.57

retard, dont deux sont indiquées dans la figure 11.57. Leur présence est due au fait que chaque sortie d'un adaptateur est liée à chaque entrée par un chemin sans retard. Cette propriété n'est pas propre à la synthèse particulière, mais elle est inhérente aux équations (11.134) et (11.136), car  $Y_i$  est une combinaison linéaire à coefficients constants de tous les  $X_i$ . Ce n'est que si l'un des coefficients s'annule que l'on peut synthétiser l'adaptateur sans le chemin correspondant.

Heureusement, on dispose encore de certaines résistances de normalisation comme paramètres libres. Dans le filtre de la figure 11.57, ce sont  $R_3, R_4, R_5$  et  $R_6$ . Si, pour l'adaptateur série, on choisit  $R_2 = R_1 + R_3$ , alors  $a_2 = 1$  dans (11.134), et  $Y_2$  ne dépend plus de  $X_2$ . La synthèse de la figure 11.58, pour ce cas particulier, ne comporte effectivement pas de chemin entre  $x_2$  et  $y_2$ . De façon analogue, un adaptateur parallèle avec  $G_2 = G_1 + G_3$  admet la synthèse de la figure 11.59, sans chemin entre  $x_2$  et  $y_2$ . Les symboles pour les adaptateurs sans chemin de  $x_2$  à  $y_2$  sont représentés à la figure 11.60.

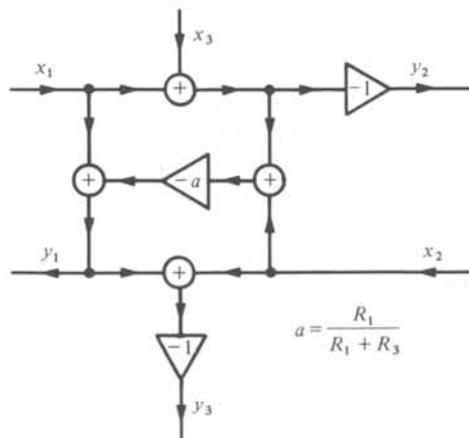


Fig. 11.58

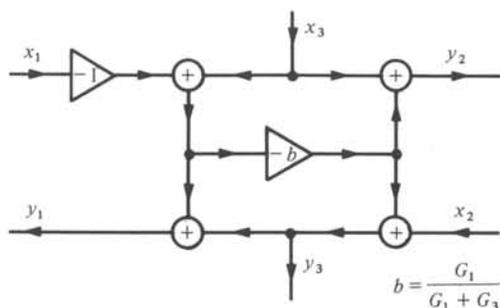


Fig. 11.59

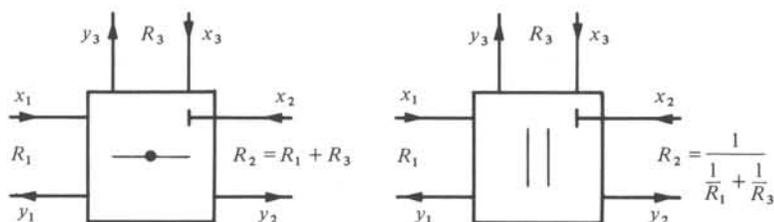


Fig. 11.60

Les nouveaux adaptateurs doivent être connectés selon la règle suivante : à chaque connexion de deux adaptateurs, l'un des deux n'a pas de chemin liant son entrée et sa sortie connectées. Si cette condition est satisfaite, aucune boucle sans retard ne peut subsister dans un filtre d'ondes, dérivé d'un filtre LC en échelle.

Dans l'exemple de la figure 11.57, quatre des cinq adaptateurs doivent être remplacés, ce qui correspond aussi au nombre de résistances de normalisation libres. Celles-ci sont déterminées par les équations suivantes :

$$R_3 = 1/(C_1 \omega_0 + 1/R_1) \quad (11.139)$$

$$R_4 = 1/(C_2 \omega_0 + 1/L_1 \omega_0) \quad (11.140)$$

$$R_5 = R_3 + R_4 \quad (11.141)$$

$$R_6 = R_5 + L_2 \omega_0 \quad (11.142)$$

On remarque que l'adaptateur qui fournit le signal de sortie ne satisfait en général pas la contrainte qui permettrait sa synthèse selon la figure 11.59. Il faut donc se contenter du circuit de la figure 11.55, tandis que les quatre autres adaptateurs seront synthétisés selon les figures 11.58 et 11.59.

### 11.5.21 Commentaires

En quantifiant les coefficients des multiplicateurs, on ne change que les résistances de normalisation des ondes aux accès des adaptateurs, ce qui revient à modifier la valeur des éléments du filtre LC, y compris les terminaisons. Le biporte reste donc non dissipatif et le théorème de Fettweis-Orchard s'applique.

Le choix des orientations pour les courants et les tensions, dans la figure 11.50, est tel, que la connexion de certains adaptateurs dans la figure 11.57 correspond à des

filis croisés dans la figure 11.56. Cependant, ceci ne change que le signe de la fonction de transfert  $H_{21}$ .

Le nombre de retards d'un filtre numérique d'ondes est égal au nombre d'éléments réactifs du filtre LC correspondant. Le nombre de multiplicateurs autres que les inverseurs est d'une unité inférieur au nombre d'éléments du filtre LC, y compris les terminaisons. Le paramètre qui manque est dû au fait que le niveau d'impédance du filtre LC n'a aucune influence sur  $s_{21}$ . Du point de vue des retards et des multiplicateurs, le filtre numérique d'ondes est donc très économique. Par contre, un nombre élevé de sommateurs est nécessaire.

La réalisation d'un filtre numérique comme calculatrice séquentielle a été expliquée au paragraphe 11.5.3. On a constaté que le calcul des signaux d'argument  $n$ , à partir des signaux d'argument  $(n - 1)$ , doit nécessairement passer par un certain nombre d'étapes intermédiaires. Ce nombre impose une limite supérieure à la vitesse de fonc-

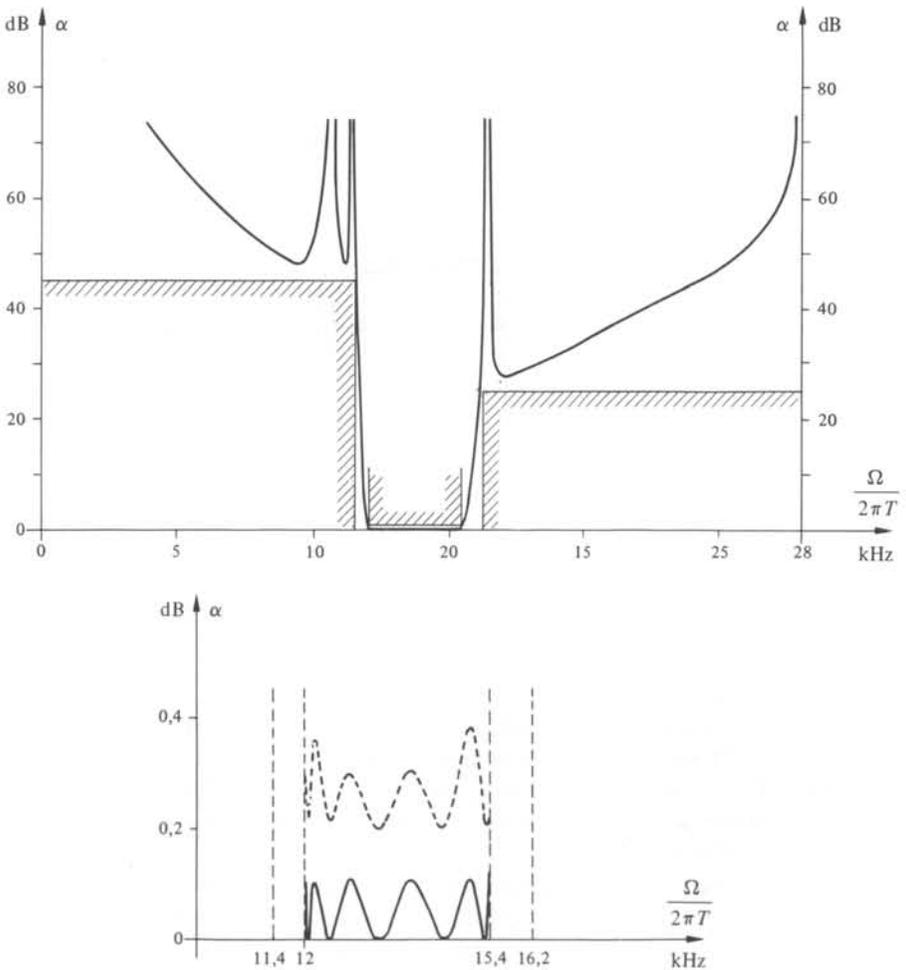


Fig. 11.61

tionnement du filtre. C'est une propriété de la structure; plus précisément, c'est le maximum d'opérations sur un chemin entre deux retards. Il est évident qu'un filtre numérique d'ondes, tel qu'il est décrit au paragraphe 11.5.20, nécessite beaucoup d'étapes intermédiaires de calculs. Ce désavantage est évité dans une autre version du filtre numérique d'ondes, qui utilise les éléments unité [53]. Le prix qu'il faut y mettre alors est un nombre accru de retards.

### 11.5.22 Exemple

On se propose de réaliser les exigences du filtre passe-bande, qui ont déjà servi d'exemple aux paragraphes 5.4.15, 6.3.17, 8.3.12, 8.3.25 et 9.5.7, par un filtre numérique d'ondes.

Choisissons une fréquence d'échantillonnage de 56 kHz. Le point de départ pour le problème d'approximation est donc en exigences sur la circonférence unité du plan  $z$ , représentées à la figure 11.61. Par application de la transformation bilinéaire, elles deviennent des exigences sur l'axe imaginaire du plan  $p$ . Avec un choix de  $T = (1/56\,000)s$ , la bande coupée inférieure s'arrête à 13,26 kHz, la bande passante s'étend de 14,22 kHz à 20,87 kHz et la bande coupée supérieure commence à 22,87 kHz. Le filtre LC de classe 0, représenté à la figure 11.62, satisfait ces exigences transformées. Il est issu de l'application successive de deux programmes de calcul.

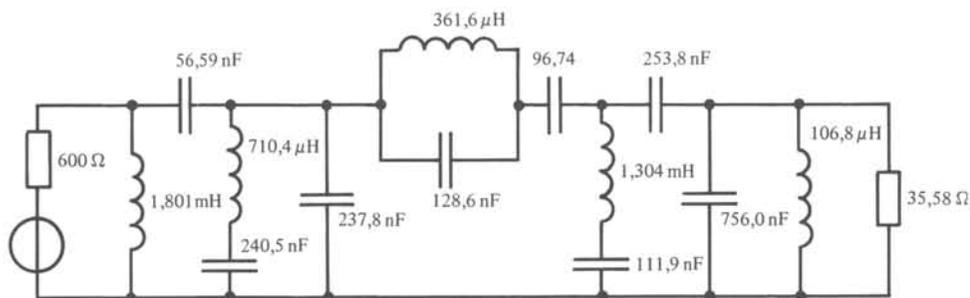


Fig. 11.62

Le filtre d'ondes qui en résulte est représenté à la figure 11.63. Pour chaque adaptateur, on a donné son (ses) coefficient(s) de multiplication, en supposant la réalisation suivant la figure 11.58 ou 11.59 (fig. 11.55).

En arrondissant les coefficients des multiplicateurs à sept bits, on obtient un affaiblissement, représenté en trait interrompu à la figure 11.61, qui respecte toujours les exigences. Par contre, en arrondissant à six bits, le pôle d'affaiblissement en fin de bande coupée inférieure se déplace jusqu'à la bande de transition. Il en résulte un affaiblissement de 40,7 dB seulement à 11,2 kHz.

On pourrait réduire le nombre de bits davantage, en évitant au mieux cet effet de la manière suivante. A proximité des pôles d'affaiblissement fournis par le programme d'approximation, on en cherche de nouveaux qui sont réalisables avec le nombre de bits envisagé. En imposant ces pôles, on refait une approximation et une synthèse. Ce procédé ressemble à l'accordage des pôles d'affaiblissement dans un filtre LC.

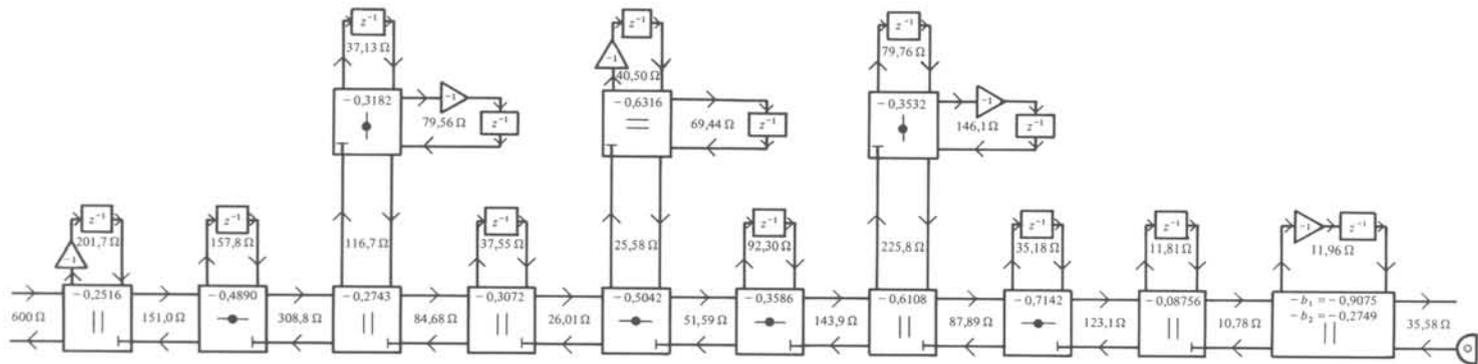


Fig. 11.63



## FILTRES À RÉPONSE IMPULSIONNELLE FINIE

### 12.1 GÉNÉRALITÉS

#### 12.1.1 Introduction

Ce chapitre traite de l'approximation et de la synthèse de filtres à Réponse Impulsionnelle Finie. Les filtres R.I.F. appartiennent à une classe particulière de filtres numériques pour laquelle le signal de sortie est calculé par la sommation pondérée d'un certain nombre de signaux d'entrée, qui sont les versions retardées du signal à filtrer. Cette action est symbolisée par le schéma bloc de la figure 12.1. Les coefficients  $h(k)$  (les pondérations) constituent les éléments de la réponse impulsionnelle qui comptent donc un nombre fini d'éléments. Ce type de filtre est à mémoire finie parce que sa sortie est déterminée exactement en fonction des  $N - 1$  entrées précédentes et de l'entrée présente si le filtre compte  $N$  coefficients. On désigne aussi souvent les filtres R.I.F. sous la dénomination de filtres non récursifs, parce que leur réalisation (cf. bas de la figure 12.1) ne fait pas apparaître de boucle de contre-réaction de la sortie  $y(n)$  sur l'entrée  $x(n)$ .

Toutefois cette dénomination (liée à la structure de réalisation) est source de confusion car le filtre opère bien d'après des opérations de récursion mathématique sur les entrées. Les propriétés des filtres à réponse impulsionnelle finie sont résumées ci-dessous :

- Pour certaines combinaisons des  $h(n)$  on peut imposer que la réponse du R. I. F soit une *réponse à phase linéaire*. Cette caractéristique fait que les R. I. F. sont des

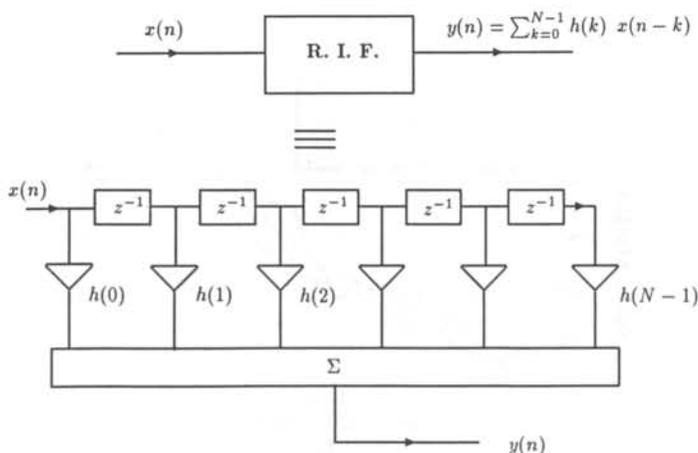


Fig. 12.1 Réalisation d'un filtre R.I.F.

filtres particulièrement utiles dès lors que l'on veut minimiser les distorsions de phase (applications audio, transmission de données).

- La stabilité du filtre est garantie car il n'y a pas de pôles à des fréquences finies.
- Des méthodes d'approximation simples et relativement efficaces existent : les méthodes par fenêtrage. Toutefois si l'on veut, à niveau de performances donné, minimiser le nombre de coefficients, on doit employer des méthodes d'optimisation numérique.
- L'inconvénient majeur des R. I. F. est la charge de calcul importante qui est inhérente à leur implémentation. En effet les filtres à transition de bande « rapide » exigent un grand nombre de coefficients.

### 12.1.2 Exemple

Nous donnons ci-dessous un exemple de filtre R. I. F. abondamment utilisé par les opérateurs en bourse et que l'on retrouve par exemple dans les journaux financiers grand public. Cet exemple peut servir d'introduction à la compréhension de l'action d'un R. I. F. Soit le filtre numérique défini par

$$h(k) = \frac{1}{N} \text{ pour } 0 \leq k \leq N-1 \quad h(k) = 0 \text{ ailleurs}$$

Nous supposons ici implicitement que la période d'échantillonnage  $T$  vaut un jour.

Ce filtre est connu par les boursiers sous le nom de filtre à moyenne mobile à  $N$  jours, ou plutôt sa sortie est interprétée sous le nom de moyenne mobile à  $N$  jours. Un exemple est donné à la figure 12.2 où l'on a rendu compte de l'évolution de la moyenne à 30 et à 60 jours du Swiss Market Index (S. M. I.) entre janvier 1993 et avril 1994. Interprétons l'action du filtre dans le domaine temporel, il s'agit de calculer en sortie la moyenne arithmétique des  $N$  derniers échantillons :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)$$

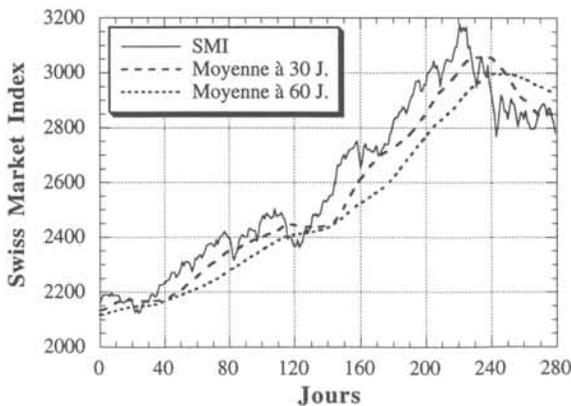


Fig. 12.2 Moyenne mobile à 30 et 60 jours du Swiss Market Index.

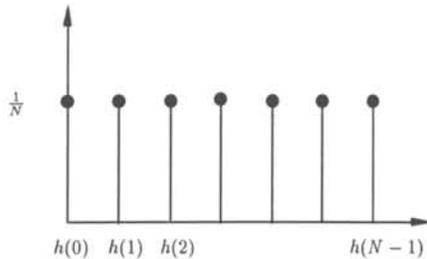


Fig. 12.3 Réponse impulsionnelle.

La réponse impulsionnelle d'un tel filtre est donnée au temps  $n$  par

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)\delta(n-k) = h(n)$$

et donc la réponse impulsionnelle n'est autre que la suite des coefficients du filtre, cette réponse impulsionnelle est représentée à la figure 12.3.

Interprétons maintenant l'action du filtre d'un point de vue fréquentiel. On a, en appliquant le principe de linéarité et le « théorème » du retard ( $x(n-k) \rightarrow z^{-k}X(z)$ )

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} z^{-k} X(z) = \frac{X(z)}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z^{-k} = \frac{X(z)}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} = \frac{X(z)}{N} \frac{z^N - 1}{z^{N-1}(z - 1)}$$

Le système précédent est stable et causal, l'unique pôle est un pôle en  $z = 0$  (pôle de multiplicité  $N - 1$ ) qui est bien à l'intérieur du cercle unité. Pour étudier le comportement en fréquence, le cercle unité faisant partie du domaine de convergence de la partie droite de l'équation précédente, on peut remplacer  $z$  par  $e^{j2\pi f}$ . On a vu (§ 11.1.19), qu'il suffisait d'étudier la réponse en fréquence entre 0 et  $(f_c/2)$ , du fait de la périodicité induite par la transformée de Fourier d'un signal numérique. Dans la suite nous introduisons le concept de fréquence normalisée  $\tilde{f} = (ff_c)$  et nous n'étudierons donc les réponses en fréquences que dans l'intervalle  $[0, 0,5]$ ; par rapport à la variable  $\Omega$  introduite au paragraphe 11.1.4, on a la relation  $\Omega = 2\pi\tilde{f}$ . Pour analyser la réponse en fréquence on remplace  $z$  par  $e^{j2\pi\tilde{f}}$

$$Y(\tilde{f}) = \frac{X(\tilde{f})}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi k\tilde{f}} = \frac{X(\tilde{f})}{N} \frac{1 - e^{-j2\pi N\tilde{f}}}{1 - e^{-j2\pi\tilde{f}}}$$

Pour  $\tilde{f} \neq 0$ , l'équation précédente donne

$$H(\tilde{f}) = \frac{e^{-j(N-1)\pi\tilde{f}}}{N} \frac{\sin(N\pi\tilde{f})}{\sin(\pi\tilde{f})}$$

Si  $\tilde{f} = 0$ , on a  $Y(0) = (X(0)/N) \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi k \cdot 0} = X(0)$ ; on a donc  $H(0) = 1$ . Le module de la fonction de transfert est donc

$$|H(0)| = 1 \quad |H(\tilde{f})| = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin(N\pi\tilde{f})}{\sin(\pi\tilde{f})} \right| \quad \text{si } \tilde{f} \neq 0$$

La phase est linéaire en fonction de la fréquence et vaut

$$\text{Arg}[H(\tilde{f})] = -(N-1)\pi\tilde{f} \quad \text{si} \quad \frac{\sin(N\pi\tilde{f})}{\sin(\pi\tilde{f})} \geq 0$$

$$\text{Arg}[H(\tilde{f})] = -(N-1)\pi\tilde{f} - \pi \quad \text{si} \quad \frac{\sin(N\pi\tilde{f})}{\sin(\pi\tilde{f})} < 0$$

Le retard de groupe, qui est la dérivée de  $-\text{Arg}(H(\tilde{\omega}))$  par rapport à  $\tilde{\omega}$  est donc

$$\tau(\tilde{f}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \text{Arg}[H(\tilde{f})]}{\partial \tilde{f}} = \frac{N-1}{2}$$

On peut montrer aisément qu'un retard de groupe constant induit que chaque composante cosinusoidale du signal (si on le décomposait en série de Fourier sur un certain intervalle) est retardée par une *même* valeur temporelle  $((N-1)/2)(\Delta T \rightarrow T)T$ . Comme ce retard est le même pour toutes les composantes fréquentielles, on ne distord pas la phase du signal original. On peut voir cet effet de retard sur les deux moyennes mobiles à 30 et 60 jours sur la figure 12.1 où les retards respectifs sont de 14,5 et 29,5 jours. Le module de la fonction de transfert est donnée pour les valeurs  $N=30$  et  $N=60$  à la figure 12.4. Les filtres considérés sont comme l'on s'y attend des filtres passe-bas, dont la fonction est d'extraire la tendance en « coupant » les composantes fréquentielles haute fréquence.

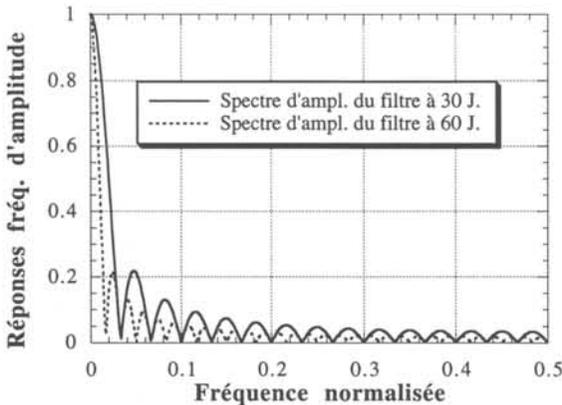


Fig. 12.4 Réponse fréquentielle d'amplitude du filtre extrayant la moyenne mobile pour  $N=30$  et  $N=60$ .

## 12.2 FILTRES À PHASE LINÉAIRE

### 12.2.1 Définition

Nous exprimons ici les contraintes portant sur  $\{h(n)\}$  et permettant d'assurer qu'un filtre R. I. F. soit à phase linéaire.

Soit un filtre R. I. F. de réponse impulsionnelle  $\{h(n)\}$  pour  $0 \leq n \leq N-1$ . La transformée en  $z$  de la réponse impulsionnelle s'écrit

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \tag{12.1}$$

Cette transformée est absolument convergente pour  $|z| = 1$  et la réponse en fréquence,  $H(\tilde{f})$ , peut donc être déduite par remplacement de  $z$  par  $e^{j2\pi\tilde{f}}$ .

$$H(\tilde{f}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j2\pi\tilde{f}n} \tag{12.2}$$

La fonction de transfert  $H(\tilde{f})$  sera dite à *phase linéaire* si on peut l'écrire sous la forme

$$H(\tilde{f}) = A(\tilde{f})e^{-j(2\pi\alpha\tilde{f}+\beta)} \tag{12.3}$$

où  $A(\tilde{f})$  est une fonction réelle paire ou impaire. En effet, comme les  $\{h(n)\}$  sont réels, on voit d'après l'équation (12.2) que  $H^*(\tilde{f}) = H(-\tilde{f})$  et donc  $|H(-\tilde{f})| = |H^*(\tilde{f})| = |H(\tilde{f})|$  et par conséquent  $|A(-\tilde{f})| = |A(\tilde{f})|$ ; par suite  $A(-\tilde{f}) = A(\tilde{f})$  ou  $A(-\tilde{f}) = -A(\tilde{f})$ ,  $A(\tilde{f})$  est donc soit paire soit impaire. La *phase*  $\phi(\tilde{f})$  peut donc prendre deux formes différentes:

$$\begin{aligned} \phi(\tilde{f}) &= \text{Arg}[H(\tilde{f})] = -2\pi\alpha\tilde{f} - \beta && \text{si } A(\tilde{f}) \geq 0 \\ \phi(\tilde{f}) &= \text{Arg}[H(\tilde{f})] = -2\pi\alpha\tilde{f} - \beta - \pi && \text{si } A(\tilde{f}) \leq 0 \end{aligned}$$

### 12.2.2 Explicitation des contraintes de linéarité de phase

Si l'on explicite la contrainte (12.3), on peut montrer qu'il n'existe que deux solutions possibles :

$$\alpha = \frac{N-1}{2} \quad \beta = 0 \quad \text{et} \quad h(n) = h(N-1-n) \quad 0 \leq n \leq N-1 \tag{12.4}$$

ou

$$\alpha = \frac{N-1}{2} \quad \beta = \pm\pi/2 \quad \text{et} \quad h(n) = -h(N-1-n) \quad 0 \leq n \leq N-1 \tag{12.5}$$

Selon que  $N$  est pair ou impair on a donc quatre types de filtres R.I.F. à phase linéaire, les allures des quatre formes de réponse impulsionnelle sont présentées à la figure 12.5.

Le *retard de groupe* étant défini comme la dérivée de  $-\phi(\tilde{\omega})$  par rapport à  $\tilde{\omega}$ , *i.e.*

$$\tau(\tilde{f}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \text{Arg}[H(\tilde{f})]}{\partial \tilde{f}} \tag{12.6}$$

Les filtres R. I. F. qui respectent les contraintes (12.4) ou (12.5) ont donc un retard de groupe constant, *i.e.*

$$\tau(\tilde{f}) = \alpha = \frac{N-1}{2} \tag{12.7}$$

Rappelons que nous travaillons en grandeurs normalisées. Physiquement, c'est-à-dire en grandeurs dénormalisées, ceci veut dire que le retard est en fait  $\tau(f) = ((N-1)/2)T$ .

### 12.2.3 Importance du concept de linéarité de phase

Pour un filtre numérique quelconque le retard de groupe est une fonction non linéaire de la fréquence. Ceci veut dire que si un signal est constitué d'une superposition de signaux à fréquences pures (par exemple), alors le signal filtré sera une superposition des versions atté-

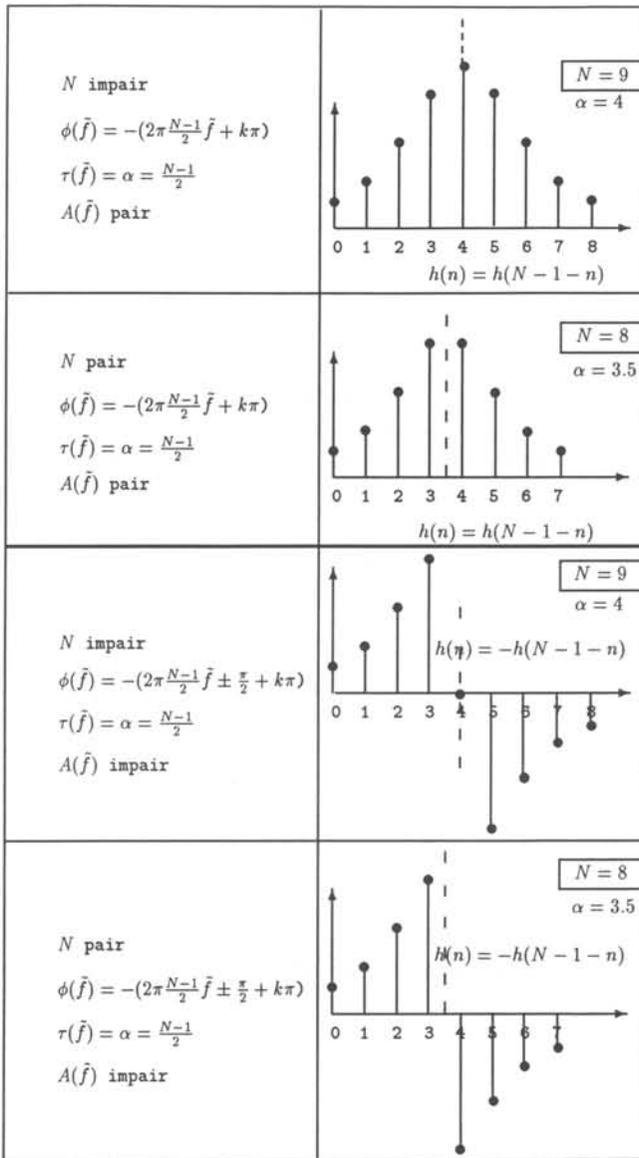


Fig. 12.5 Contraintes sur les  $\{h(n)\}$  pour des R.I.F. à phase linéaire.

nuées de chacune de ces composantes, chacune étant retardée d'un intervalle de temps  $\tau(\tilde{f})$  dépendant de la fréquence. On a donc, dans le cas général, ce que l'on appelle une *distorsion de phase* qui peut être particulièrement gênante pour certaines applications.

Dans le cas d'un filtre à retard de groupe  $\alpha$  constant chaque composante  $e^{j2\pi\tilde{f}n}$  du signal d'entrée est filtrée en  $A(\tilde{f})e^{-j(2\pi\alpha\tilde{f})}e^{j2\pi\tilde{f}n}$  (cas  $\beta = 0$ ), i.e.

$$e^{j2\pi\tilde{f}n} \rightarrow A(\tilde{f})e^{j2\pi\tilde{f}(n-\alpha)}$$

ou, de façon équivalente, toute composante sinusoïdale  $\sin(2\pi\tilde{f}n)$  est filtrée en  $A(\tilde{f})\sin(2\pi\tilde{f}(n - \alpha))$ .

Ainsi chaque composante est-elle retardée d'une même valeur  $\alpha$ . Cette propriété de respect de la linéarité de phase peut s'avérer très importante en télécommunications. Les filtres R.I.F. présentent l'avantage de pouvoir être facilement contraints à présenter exactement une phase linéaire.

### 12.2.4 Réponse en fréquence des filtres à phase linéaire

A titre d'exercice, on pourra vérifier que les quatre types de filtres à phase linéaire précédemment calculés ont des caractéristiques de réponse en fréquence décrites dans le tableau 12.6. Dans le cas où la réponse impulsionnelle est symétrique (*i.e.*  $h(n) = h(N - 1 - n)$ ) et  $N$  est pair, on remarquera que  $H(1/2) = 0$  quelles que soient les valeurs de  $h(n)$ . Ceci veut dire qu'un tel filtre ne peut être utilisé comme filtre passe-haut. La même remarque prévaut lorsque  $h(n) = -h(N - 1 - n)$  (réponse impulsionnelle antisymétrique) et que  $N$  est impair. Enfin lorsque  $h(n) = -h(N - 1 - n)$  et  $N$  est pair,  $H(0) = 0$  quelles que soient les valeurs de

Tableau 12.6 Réponse en fréquence de R.I.F. à phase linéaire.

Contraintes	Réponse fréquentielle
Type 1 $N$ impair $h(n) = h(N - 1 - n)$	$H(\tilde{f}) = \exp\left(-j\left(2\pi\tilde{f}\frac{N-1}{2}\right)\right)A(\tilde{f})$ $A(\tilde{f}) = \sum_{k=0}^{(N-1)/2} a(k) \cos(2\pi\tilde{f}k) \quad \text{avec } a(0) = h\left(\frac{N-1}{2}\right)$ $\text{et } a(k) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - k\right) \quad 1 \leq k \leq \frac{N-1}{2}$
Type 2 $N$ pair $h(n) = h(N - 1 - n)$	$H(\tilde{f}) = \exp\left(-j\left(2\pi\tilde{f}\frac{N-1}{2}\right)\right)A(\tilde{f})$ $A(\tilde{f}) = \sum_{k=1}^{N/2} b(k) \cos(2\pi\tilde{f}(k-1/2))$ $b(k) = 2h\left(\frac{N}{2} - k\right) \quad 1 \leq k \leq \frac{N}{2}$
Type 3, $N$ impair $h(n) = -h(N - 1 - n)$ Remarque : $h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$	$H(\tilde{f}) = j \exp\left(-j\left(2\pi\tilde{f}\frac{N-1}{2}\right)\right)A(\tilde{f})$ $A(\tilde{f}) = \sum_{k=1}^{(N-1)/2} c(k) \sin(2\pi\tilde{f}k)$ $c(k) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - k\right) \quad 1 \leq k \leq \frac{N-1}{2}$
Type 4 $N$ pair $h(n) = -h(N - 1 - n)$	$H(\tilde{f}) = j \exp\left(-j\left(2\pi\tilde{f}\frac{N-1}{2}\right)\right)A(\tilde{f})$ $A(\tilde{f}) = \sum_{k=1}^{N/2} d(k) \sin(2\pi\tilde{f}(k-1/2))$ $d(k) = 2h\left(\frac{N}{2} - k\right) \quad 1 \leq k \leq \frac{N}{2}$

$h(n)$ ; ceci implique que ce filtre ne peut être en aucun cas un filtre de type passe-bas. En ce qui concerne la réponse fréquentielle d'amplitude  $A(\tilde{f})$ , une autre formulation nous sera utile par la suite lorsque nous discuterons l'optimisation des R.I.F. par des méthodes numériques. On fait simplement apparaître dans le tableau 12.7  $A(\tilde{f})$  comme le produit d'une fonction  $P(\tilde{f})$  et d'une somme de terme en  $\cos(2\pi\tilde{f}k)$ . Les coefficients de ce nouveau développement sont surmontés conventionnellement d'un « tilde » et pourraient être calculés simplement par trigonométrie; comme ces coefficients ne nous sont pas directement utiles par la suite, nous ne mentionnons que l'expression générale de la fonction.

Tableau 12.7 Autres expressions de la réponse fréquentielle des R.I.F.

Type du R.F.I.	Réponse fréquentielle d'amplitude	$r$
Type 1	$A(\tilde{f}) = \sum_{k=0}^{r-1} \tilde{h}(k) \cos(2\pi\tilde{f}k)$	$r = \frac{N+1}{2}$
Type 2	$A(\tilde{f}) = \cos(\pi\tilde{f}) \sum_{k=0}^{r-1} \tilde{b}(k) \cos(2\pi\tilde{f}k)$	$r = \frac{N}{2}$
Type 3	$A(\tilde{f}) = \sin(2\pi\tilde{f}) \sum_{k=0}^{r-1} \tilde{c}(k) \cos(2\pi\tilde{f}k)$	$r = \frac{N-1}{2}$
Type 4	$A(\tilde{f}) = \sin(\pi\tilde{f}) \sum_{k=0}^{r-1} \tilde{d}(k) \cos(2\pi\tilde{f}k)$	$r = \frac{N}{2}$

### 12.2.5 Position des zéros pour les R.I.F. à phase linéaire

Il est aisé de montrer que, pour les quatre type de filtres décrits dans le tableau 12.6, on a

$$z^{N-1}H(z) = H(z^{-1}) \quad \text{si} \quad h(n) = h(N-1-n) \quad (12.8)$$

$$z^{N-1}H(z) = -H(z^{-1}) \quad \text{si} \quad h(n) = -h(N-1-n) \quad (12.9)$$

Soit  $z_i = \rho_i e^{j\theta_i}$  un zéro de  $H(z)$  ( $H(z_i) = 0$ ), d'après les expressions (12.8) et (12.9), on voit que  $((1/\rho_i)e^{-j\theta_i})$  est aussi un zéro de  $H(z)$  car

$$H(z_i^{-1}) = \pm z_i^{N-1}H(z_i) = 0$$

D'autre part, les  $\{h(n)\}$  étant supposés réels, il est facile de montrer que si  $z_i = \rho_i e^{j\theta_i}$  est un zéro de  $H(z)$ , alors  $z_i^* = \rho_i e^{-j\theta_i}$  est aussi un zéro de  $H(z)$

$$H(z_i) = \sum_{k=0}^{N-1} h(i)z_i^{k-1} = 0 \rightarrow H(z_i^*) = \sum_{k=0}^{N-1} h(i)z_i^{*k-1} = \sum_{k=0}^{N-1} h^*(i)z_i^{*k-1}$$

$$H(z_i^*) = \left( \sum_{k=0}^{N-1} h(i)z_i^{k-1} \right)^* = 0$$

### 12.2.6 Position des pôles pour les R.I.F. à phase linéaire

Comme

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{N-1} h(N-1-k) z^{-(N-1-k)} = \frac{1}{z^{N-1}} \sum_{k=0}^{N-1} h(N-1-k) z^k$$

on voit que le seul pôle de  $H(z)$  est un pôle en 0, de multiplicité  $N-1$ . La figure 12.8 montre une configuration typique de pôles et zéros d'un filtre R.I.F. à phase linéaire. Le pôle en  $z = 0$  de multiplicité  $N-1$  est représenté par une croix.

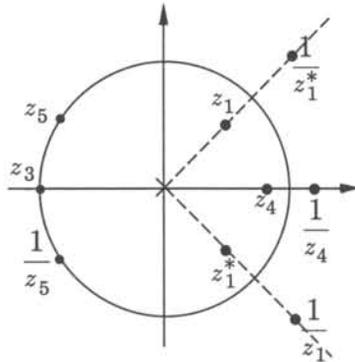


Fig. 12.8 Configuration typique des pôles et des zéros pour un R.I.F. à phase linéaire (le seul pôle est en  $z = 0$  et est de multiplicité  $N-1$ ).

## 12.3 CALCUL DE R.I.F. PAR DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE FOURIER

### 12.3.1 Principe général

On aborde ici le problème de l'approximation d'un filtre R.I.F. satisfaisant à des exigences données par le biais du développement en série de la fonction de transfert d'un filtre idéal. Considérons le filtre idéal de la figure 12.9 tel que la fonction de transfert (périodique de période 1) satisfasse à

$$\begin{aligned} H_d(\tilde{f}) &= 1 & \text{si} & \quad -\tilde{f}_c \leq \tilde{f} \leq \tilde{f}_c \\ H_d(\tilde{f}) &= 0 & \text{si} & \quad \frac{-1}{2} \leq \tilde{f} < \tilde{f}_c \quad \text{ou si} \quad \tilde{f}_c < \tilde{f} \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

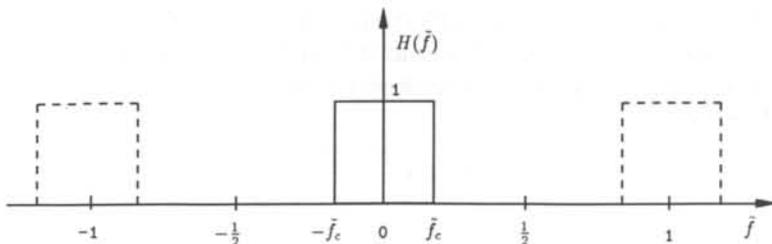


Fig. 12.9 Filtre idéal de fréquence coupure  $\tilde{f}_c$ .

La réponse impulsionnelle du filtre peut être calculée par développement en série de Fourier, *i.e.*

$$h_d(n) = \int_{-1/2}^{1/2} H(\tilde{f}) e^{-j2\pi n\tilde{f}} d\tilde{f} = \int_{-\tilde{f}_c}^{\tilde{f}_c} e^{-j2\pi n\tilde{f}} d\tilde{f} \quad (12.10)$$

dont la solution est

$$h_d(0) = 2\tilde{f}_c \quad h_d(k) = 2\tilde{f}_c \left( \frac{\sin(2\pi\tilde{f}_c k)}{2\pi\tilde{f}_c k} \right) \quad k \neq 0 \quad (12.11)$$

L'allure de la réponse impulsionnelle idéale du filtre est donnée par la figure 12.10. Cette réponse pose deux problèmes, d'une part elle est de durée infinie, d'autre part elle est non causale.

Les solutions les plus évidentes pour remédier à ces deux problèmes sont d'une part de tronquer la série, d'autre part de la décaler dans le temps pour la rendre causale. Tronquer la série ou la *fenêtrer* aura forcément des conséquences quant à la qualité de l'approximation ; la décaler dans le temps n'aura, d'après le théorème du retard, aucune conséquence sur le spectre d'amplitude de  $H(\tilde{f})$ .

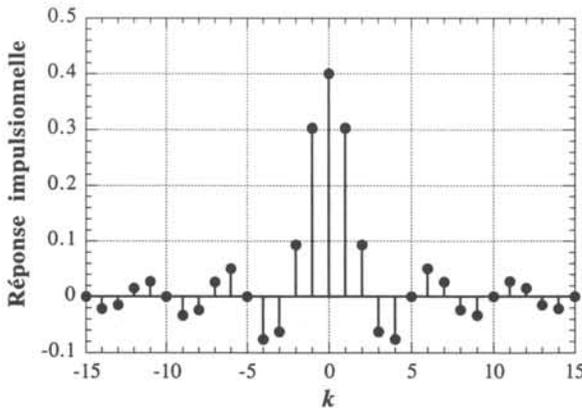


Fig.12.10 Réponse impulsionnelle du filtre idéal ( $\tilde{f}_c = 0,2$ ).

### 12.3.2 Influence d'un fenêtrage par une fenêtre rectangulaire

Dans un premier temps évaluons l'influence d'un fenêtrage de la réponse impulsionnelle (non causale) par une fenêtre rectangulaire. En nous plaçant dans le cas où  $N$  est impair, considérons un filtre particulier, dénommé *fenêtre rectangulaire*, tel que sa réponse impulsionnelle satisfasse à :

$$w_r(n) = 1 \quad -\frac{N-1}{2} \leq n \leq +\frac{N-1}{2}$$

$$w_r(n) = 0 \quad n < -\frac{N-1}{2} \quad \text{ou} \quad n > +\frac{N-1}{2}$$

Le filtre (non causal) constituée par la troncation de la réponse impulsionnelle idéale  $h_d(n)$  par la fenêtre rectangulaire peut s'écrire comme une multiplication dans le domaine temporel, *i.e.*

$$h(n) = h_d(n) w_r(n) \tag{12.12}$$

Dans le domaine transformé,  $H(\tilde{f})$  s'écrira donc comme la convolution de chacune des transformées de Fourier  $H_d(\tilde{f})$  et  $W_r(\tilde{f})$ , *i.e.*

$$H(\tilde{f}) = H_d(\tilde{f}) * W_r(\tilde{f}) = \int_{-1/2}^{1/2} H_d(\tau) W_r(\tilde{f} - \tau) d\tau = \int_{-\tilde{f}_c}^{\tilde{f}_c} W_r(\tilde{f} - \tau) d\tau \tag{12.13}$$

Or

$$W_r(\tilde{f}) = \sum_{k = -\frac{N-1}{2}}^{+\frac{N-1}{2}} e^{-j2\pi\tilde{f}k} = \frac{\sin(\pi\tilde{f}N)}{\sin(\pi\tilde{f})} \tag{12.14}$$

on a donc

$$H(\tilde{f}) = \int_{-\tilde{f}_c}^{\tilde{f}_c} \frac{\sin[\pi(\tilde{f} - \tau)N]}{\sin[\pi(\tilde{f} - \tau)]} d\tau \tag{12.15}$$

L'intégrale (12.15) n'a pas de forme analytique explicite. L'interprétation graphique de l'équation (12.14) peut toutefois nous renseigner, d'une manière qualitative, quant au comportement de l'approximation de  $H_d(\tilde{f})$  par  $H(\tilde{f})$ . Soit par exemple à approximer le filtre idéal de fréquence de coupure  $\tilde{f}_c = 0,2$ . La figure 12.11 nous montre le comportement de  $W_r(\tilde{f} - \tau)$  pour  $\tilde{f} = 0,1$ .  $H(0,1)$  est donc dans ce cas l'aire de la fonction  $W_r(0,1 - \tau)$  pour  $\tau$  variant entre  $-0,2$  et  $0,2$ . Comment va varier  $H(\tilde{f})$  pour  $\tilde{f}$  variant entre  $\tilde{f}_c = -0,2$  et  $\tilde{f}_c = 0,2$  ?

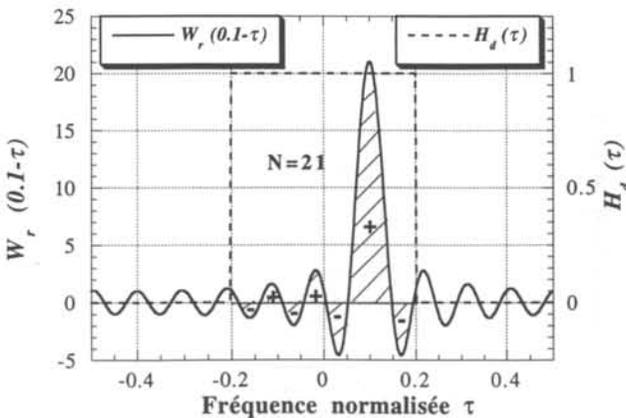


Fig.12.11 Principe de calcul de  $H(\tilde{f})$  en  $\tilde{f} = 0,1$  ( $\tilde{f}_c = 0,2$ ,  $N = 21$ ).

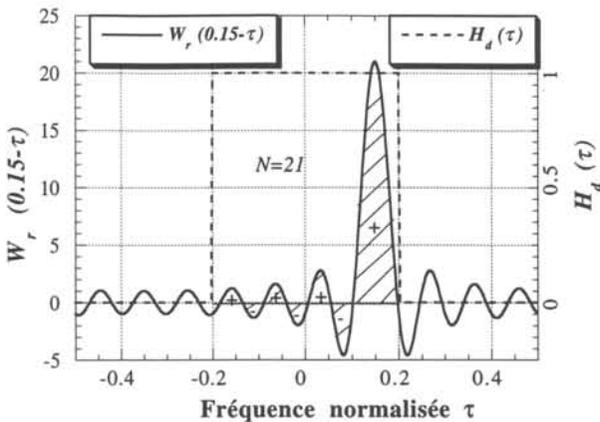


Fig. 12.12 Principe de calcul de  $H(\tilde{f})$  en  $\tilde{f} = 0,15$  ( $\tilde{f}_c = 0,2$ ,  $N = 21$ ).

D'après la figure 12.12, on peut voir que la variation la plus extrême de  $H(\tilde{f})$  par rapport au cas précédent adviendra approximativement lorsque l'on décomptera un lobe secondaire de moins dans l'intégration de  $W_r(\tilde{f} - \tau)$ . Cet extremum advient lorsque  $\tilde{f} = 0,15$ , et ceci est confirmé par la figure 12.13 où l'on a calculé la fonction  $H(\tilde{f})$ . En bande atténuée on intègre seulement des lobes secondaires entre  $\tilde{f}_c = -0,2$  et  $\tilde{f}_c = 0,2$  et l'ondulation maximale que l'on pourra avoir entre deux valeurs de l'intégrale calculées à des fréquences différentes sera égale à l'intégration du premier lobe secondaire. Dans la bande de transition, on intègre toujours une partie du lobe primaire; la largeur de la bande de transition dépendra donc de la largeur du lobe primaire. On peut résumer l'étude graphique par les deux constatations suivantes :

- L'ondulation maximale en bande passante et coupée est approximativement égale à l'aire du premier lobe secondaire.
- La largeur de la bande de transition (entre bande passante et atténuée) dépend de la largeur du lobe primaire de  $W_r(\tilde{f})$ .

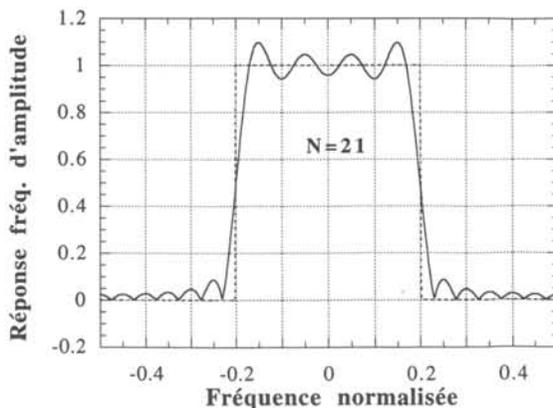


Fig. 12.13 Filtre idéal  $H_d(\tilde{f})$  et son approximation  $H(\tilde{f})$  ( $\tilde{f}_c = 0,2$ ).

On s'attendrait à ce que les oscillations provoquées par les lobes secondaires de la fenêtre décroissent lorsque  $N \rightarrow \infty$ . En fait, il n'en est rien et l'on peut montrer que l'intégrale du premier lobe secondaire tend vers une valeur limite. Le lobe primaire débute en  $\tilde{f} = 1/N$  et se termine en  $\tilde{f} = 2/N$ . Pour  $N$  grand, l'intégrale du premier lobe secondaire vaut approximativement

$$\int_{\frac{1}{N}}^{\frac{2}{N}} \frac{\sin(\pi \tilde{f} N)}{\sin(\pi \tilde{f})} d\tilde{f} \approx \int_{\frac{1}{N}}^{\frac{2}{N}} \frac{\sin(\pi \tilde{f} N)}{\pi \tilde{f}} d\tilde{f} \approx \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{N}}^{\frac{2}{N}} \sin(\pi \tilde{f} N) d\tilde{f} \quad (12.16)$$

Dans l'expression (12.16), on a remplacé le dénominateur par sa valeur moyenne sur l'intervalle d'intégration. Cette approximation donne comme valeur approchée de l'intégrale du lobe secondaire :

$$\frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{N}}^{\frac{2}{N}} \sin(\pi \tilde{f} N) d\tilde{f} = -\frac{2N}{3\pi} \frac{1}{\pi N} \left[ \cos(\pi \tilde{f} N) \right]_{1/N}^{2/N} = -\frac{4}{3\pi^2} \quad (12.17)$$

L'amplitude des oscillations est donc indépendante de  $N$  et on ne peut donc espérer, selon (12.17), diminuer l'amplitude maximale de l'ondulation en deçà de  $\pm 7\%$  en bande passante. Une étude plus fine montre en fait qu'on ne peut aller en deçà de  $\pm 9\%$ . Ce phénomène d'oscillation est connu sous le nom de *phénomène de Gibbs* (§ IV.7.3.36, § XX.3.7.7) ; il confère à l'approximation, selon le développement en série de Fourier et la troncation par la fenêtre rectangulaires, des performances bien modestes quant à l'ondulation en bande passante et en bande atténuée.

### 12.3.3 Causalité

Le principe du fenêtrage nous a permis de disposer d'un filtre à réponse impulsionnelle finie non causal. Voyons maintenant comment rendre ce filtre causal. Il suffit en fait de décaler dans le temps la réponse impulsionnelle de façon à ce que si  $h(n)$  désigne la réponse non causale, alors la réponse causale s'exprime sous la forme

$$g(n) = h\left(n - \left(\frac{N-1}{2}\right)\right) \quad (12.18)$$

on a, d'après le théorème du retard, les relations

$$G(\tilde{f}) = e^{-j2\pi \frac{(N-1)}{2} \tilde{f}} H(\tilde{f}) \quad (12.19)$$

Par conséquent  $|G(\tilde{f})| = |H(\tilde{f})|$ , le fait de décaler la série ne change rien du point de vue du spectre d'amplitude. La phase est linéaire selon  $\tilde{f}$ , elle vaut

$$\text{Arg}[G(\tilde{f})] = -(N-1) \pi \tilde{f} \quad \text{si} \quad H(\tilde{f}) \geq 0 \quad (12.20)$$

$$\text{Arg}[G(\tilde{f})] = -(N-1) \pi \tilde{f} - \pi \quad \text{si} \quad H(\tilde{f}) < 0 \quad (12.21)$$

Le retard de groupe calculé selon (12.6) est égal à  $(N-1)/2$ .

### 12.3.4 Utilisation d'autres fenêtres

Le défaut principal de la fenêtre rectangulaire est dû à la présence de lobes secondaires importants. On a donc recherché des fenêtres qui présentent un bon compromis entre l'amplitude relative du lobe secondaire par rapport au lobe primaire, et une largeur du lobe primaire relativement fine. On trouvera en XX.3.7 une étude détaillée des principales fenêtres. Les fenêtres les plus utilisées sont données dans le tableau 12.14. La figure 12.15 donne un aperçu de l'allure des différentes fenêtres dans le domaine temporel. Le tableau 12.16 donne leurs caractéristiques. Pour une fenêtre donnée, il est à noter que le maximum de  $|G(\tilde{f})|$  en bande atténuée est indépendant de l'ordre du filtre  $N$ . La largeur du lobe primaire est quant à elle dépendante de  $N$ . On a vu précédemment que la largeur de la bande de transition était liée à la largeur du lobe primaire : plus ce lobe est large et plus la bande de transition l'est aussi. La seule latitude que l'on peut avoir (hormis le choix de la fenêtre) est évidemment l'ordre du filtre qui doit être ajusté en fonction de la largeur de la bande de transition.

Tableau 12.14 Principales fenêtres.

Fenêtre	Description
Rectangulaire	$W(n) = 1 \quad 0 \leq n \leq N-1$
Bartlett	$w(n) = \frac{2n}{N-1} \quad 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2}$ $w(n) = 2 - \frac{2n}{N-1} \quad \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1$
Hanning	$w(n) = 0,5 \left( 1 - \cos \left( \frac{2n\pi}{N-1} \right) \right) \quad 0 \leq n \leq N-1$
Hamming	$W(n) = 0,54 - 0,46 \cos \left( \frac{2n\pi}{N-1} \right) \quad 0 \leq n \leq N-1$
Blackman	$W(n) = 0,42 - 0,5 \cos \left( \frac{2n\pi}{N-1} \right) + 0,08 \cos \left( \frac{4n\pi}{N-1} \right) \quad 0 \leq n \leq N-1$

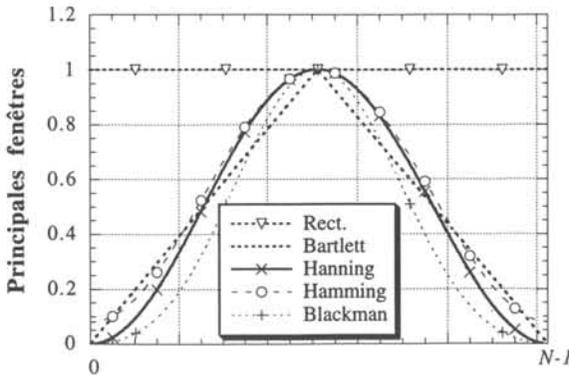


Fig. 12.15 Principales fenêtres utilisées en pratique.

Tableau 12.16 Caractéristiques de différentes fenêtres (d'après R. Boite et H. Leich).

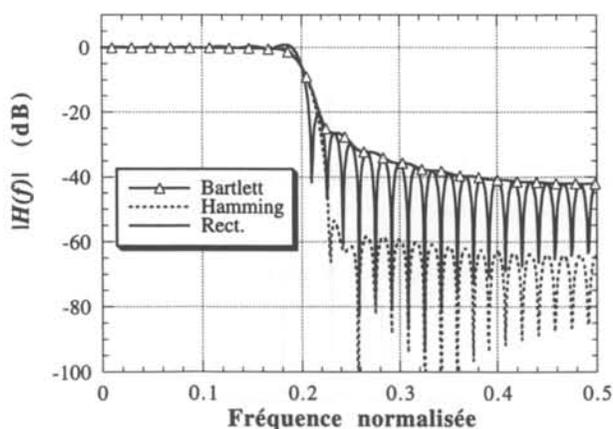
Fenêtre	Rapport ampl. lobe principal secondaire	Largeur lobe principal (fréquence norm.)	Maxima de $ G(f^c) $ en bande atténuée
Rectangulaire	-13 dB	$\frac{2}{N}$	-21 dB
Bartlett	-25 dB	$\frac{4}{N}$	-25 dB
Hanning	-31 dB	$\frac{4}{N}$	-44 dB
Hamming	-41 dB	$\frac{4}{N}$	-53 dB
Blackman	-57 dB	$\frac{6}{N}$	-74 dB

### 12.3.5 Calcul de filtres passe-bas

On résume ici la méthode de calcul d'un filtre passe-bas par développement en série de Fourier et par fenêtrage. En reprenant l'étude précédente, les coefficients du filtre passe-bas sont donnés par

$$h(k) = 2\tilde{f}_c \left[ \frac{\sin \left( 2\pi\tilde{f}_c \left( k - \frac{N-1}{2} \right) \right)}{2\pi\tilde{f}_c \left( k - \frac{N-1}{2} \right)} \right] w(k) \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (12.22)$$

On donne pour les cinq fenêtres présentées dans le tableau 12.14 un exemple d'implémentation de filtre passe-bas pour lequel  $\tilde{f}_c$  valait 0,2.


 Fig. 12.17 Filtre passe-bas,  $\tilde{f}_c = 0,2$ , fenêtres rectangulaire, Bartlett, Hamming,  $N = 61$ .

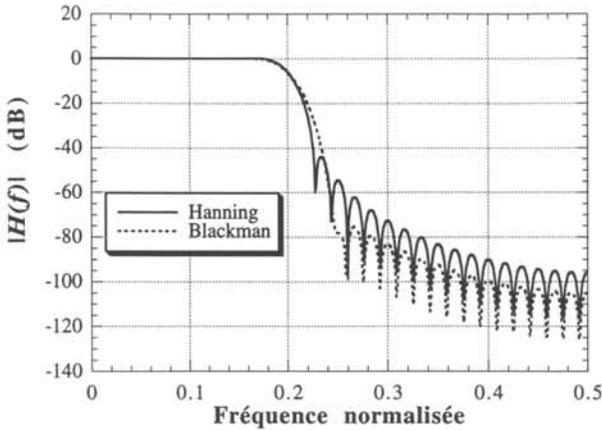


Fig. 12.18 Filtre passe-bas,  $\tilde{f}_c = 0,2$ , fenêtres Hanning, Blackman,  $N = 61$ .

### 12.3.6 Calcul de filtres passe-bande

On peut facilement transformer un filtre passe-bas en filtre passe-bande et inversement ; de cette façon on peut approximer un filtre passe-bas en utilisant l'équation (12.22) et transformer le passe-bas ainsi approximé en filtre passe-bande. Le filtre passe-bande idéal  $H(\tilde{f})$  de la figure 12.19 de fréquence de coupure basse  $\tilde{f}_{c-}$  et de fréquence de coupure haute  $\tilde{f}_{c+}$  peut être déduit du filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure  $\tilde{f}_c = (\tilde{f}_{c+} - \tilde{f}_{c-})/2$  à l'aide de la relation

$$H(\tilde{f}) = G(\tilde{f} - \tilde{f}_m) + G(\tilde{f} + \tilde{f}_m)$$

où

$$\tilde{f}_m = \frac{\tilde{f}_{c+} + \tilde{f}_{c-}}{2}$$

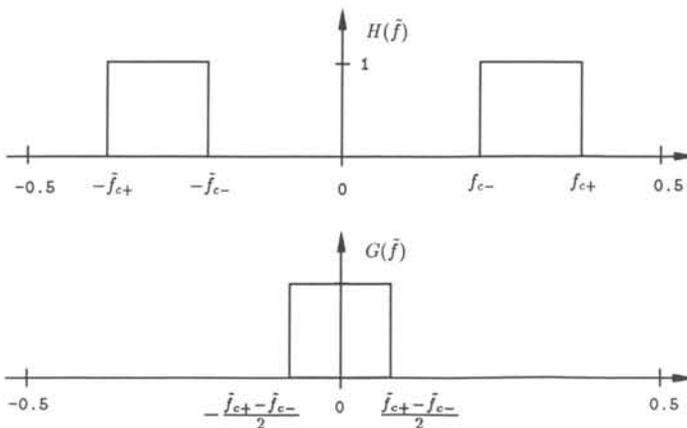


Fig. 12.19 Transformation passe-bande passe-bas.

Par transformée de Fourier inverse on déduit la réponse impulsionnelle (non causale) du filtre passe-bande idéal

$$\begin{aligned} h(n) &= g(n) e^{j2\pi\tilde{f}_m n} + g(n) e^{-j2\pi\tilde{f}_m n} = 2g(n) \cos(2\pi n\tilde{f}_m) \\ &= 4\tilde{f}_c \left[ \frac{\sin(2\pi\tilde{f}_c n)}{2\pi\tilde{f}_c n} \right] \cos(2\pi\tilde{f}_m n) \end{aligned}$$

soit après fenêtrage et décalage pour rendre la série causale

$$h(n) = 4\tilde{f}_c \left[ \frac{\sin\left(2\pi\tilde{f}_c \left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right)}{2\pi\tilde{f}_c \left(n - \frac{N-1}{2}\right)} \right] \cos\left(2\pi\tilde{f}_m \left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right) \quad (12.23)$$

Si  $N$  est impair, on a

$$h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 4\tilde{f}_c \quad (12.24)$$

Pour d'autres configurations de filtres (passe-haut, coupe-bande), on peut trouver des formules semblables. Pour le passe-haut on peut se servir directement du résultat du passe-bande en posant  $\tilde{f}_c = 0,5$ .

### 12.3.7 Résumé des méthodes par développement en série de Fourier

Dans ce type de méthode, pour des exigences données, on a un degré de liberté, le nombre de coefficients du filtre  $N$ , et l'on doit choisir parmi plusieurs fenêtres. La largeur de la bande de transition sera approximativement la largeur du lobe primaire de la fenêtre choisie. Cette largeur est inversement proportionnelle à  $N$ . De manière générale, en fonction de la largeur de la bande de transition de notre filtre et des exigences d'atténuation en bande coupée, l'examen du tableau 12.16 nous indiquera le type de fenêtre que nous devons choisir et le nombre de coefficients approximatif que nous devons mettre en oeuvre. On résume les étapes pour un filtre passe-bas :

1. En fonction des exigences on choisit un type de fenêtre dans le tableau 12.16.
2. On détermine  $N$  en faisant coïncider la largeur du lobe primaire (fonction de  $N$ ) et la largeur de la bande de transition.
3. On calcule  $h(n)$  par (12.22).
4. On développe  $H(\tilde{f})$  et on vérifie que les exigences sont bien remplies. Si elles ne le sont pas, on peut accroître  $N$  et revenir au point 3.

La méthode d'approximation proposée repose sur le choix quasi empirique d'un type de fenêtre. En particulier, par rapport à des exigences données, la décomposition par série de Fourier peut s'avérer extrêmement exigeante en nombre de coefficients. On paye ici la simplicité de la méthode, par une valeur de  $N$  considérablement plus grande que celle que l'on obtiendrait, avec d'autres méthodes, particulièrement les méthodes basées sur l'algorithme de Remez.

## 12.4 APPROXIMATION NUMÉRIQUE DES R.I.F.

## 12.4.1 Introduction

Il existe différentes techniques d'optimisation qui permettent d'approximer un filtre R.I.F. à phase linéaire. Nous donnerons ici quelques éléments qui permettent de comprendre comment construire une procédure itérative qui réalise une *approximation au sens de Tchebycheff*.

Rappelons que, selon les résultats énoncés au tableau 12.7, l'approximation d'un filtre R.I.F. à phase linéaire revient à déterminer les coefficients  $\tilde{h}(k)$  d'une fonction de la forme

$$A(\tilde{f}) = P(\tilde{f}) \sum_{k=0}^{r-1} \tilde{h}(k) \cos(2\pi\tilde{f}k) \quad (12.25)$$

## 12.4.2 Approximation au sens de Tchebycheff

Le problème qui se pose est le suivant : étant donné une réponse d'amplitude fréquentielle  $D(\tilde{f})$  à approximer sur un intervalle compact de fréquence  $F$  et une fonction de pondération  $W(\tilde{f})$  continue monotone sur  $F$  à valeurs réelles positives connues, on désire trouver les coefficients  $\{\tilde{h}(k), 0 \leq k \leq r-1\}$  qui minimisent sur  $F$  le maximum de la valeur absolue d'une fonction d'erreur ainsi définie

$$E(\tilde{f}) = W(\tilde{f}) [A(\tilde{f}) - D(\tilde{f})] \quad (12.26)$$

c'est à dire que, pour  $r$  connu et  $D(\tilde{f})$  et  $W(\tilde{f})$  connues sur  $F$ , on doit trouver les  $\{\tilde{h}(k), 0 \leq k \leq r-1\}$  qui minimisent le critère

$$\min_{\text{sur } \{\tilde{h}(k) \mid 0 \leq k \leq r-1\}} [\max_{\text{sur } \tilde{f} \in F} \|E(\tilde{f})\|] \quad (12.27)$$

dans le cas où  $A(\tilde{f})$  possède la forme particulière (12.25). L'approximation (12.27) est dite approximation de Tchebycheff (minimisation de la norme  $L_\infty$  de la fonction d'erreur).

Une telle optimisation est possible, elle est basée sur le théorème d'analyse numérique suivant que nous énoncerons sans démonstration:

**Théorème d'alternance** *Soit  $F$  un sous-ensemble compact de l'intervalle  $[0, 1/2]$ . Une condition nécessaire et suffisante pour que  $\sum_{k=0}^{r-1} \tilde{h}(k) \cos(2\pi\tilde{f}k)$  soit l'**unique et meilleure** approximation au sens de Tchebycheff d'une fonction  $D(\tilde{f})$  est que la fonction d'erreur*

$$E(\tilde{f}) = W(\tilde{f}) \left( \sum_{k=0}^{r-1} \tilde{h}(k) \cos(2\pi\tilde{f}k) - D(\tilde{f}) \right) \quad (12.28)$$

présente au moins  $r+1$  fréquences extrémales sur  $F$ , i.e. qu'il existe au moins  $r+1$  fréquences  $\{\tilde{f}_i\}$ ,  $\tilde{f}_0 < \tilde{f}_1 < \dots < \tilde{f}_r$  telles que

$$E(\tilde{f}_{i+1}) = -E(\tilde{f}_i)$$

$$|E(\tilde{f}_i)| = \max_{\text{sur } \tilde{f} \in F} |E(\tilde{f})| = \delta \quad i = 0, 2, \dots, r$$

On notera que l'erreur d'approximation change de signe entre deux fréquences extrémales successives, d'où le nom du théorème. Le problème de l'approximation se trouve ainsi rame-

né à la résolution des  $r + 1$  équations

$$E(\tilde{f}_i) = W(\tilde{f}_i) (A(\tilde{f}_i) - D(\tilde{f}_i)) = -(-1)^i \delta \quad i = 0, 2, \dots, r \quad (12.29)$$

dans lequel les inconnues sont les  $r$  coefficients  $\{\tilde{h}(0), \tilde{h}(1), \dots, \tilde{h}(r-1)\}$  et la déviation  $\delta$  ainsi que les  $r + 1$  fréquences extrémales qui ne sont pas connues a priori.

#### 12.4.3 Exemple de pondération de la fonction d'erreur

Supposons par exemple que l'on veuille approximer au sens de Tchebycheff un filtre passe-bas dont la réponse fréquentielle d'amplitude satisfasse à

$$\begin{aligned} 1 - \delta_1 &\leq A(\tilde{f}) \leq 1 + \delta_1 & |\tilde{f}| &\leq \tilde{f}_c \\ -\delta_2 &\leq A(\tilde{f}) \leq +\delta_2 & |\tilde{f}| &\geq \tilde{f}_s \end{aligned}$$

$F$  est donc ici l'ensemble  $F = [0, \tilde{f}_c] \cup [\tilde{f}_s, 0,5]$ ; en posant

$$\begin{aligned} W(\tilde{f}) &= \frac{\delta_2}{\delta_1} & |\tilde{f}| &\leq \tilde{f}_c \\ W(\tilde{f}) &= 1 & |\tilde{f}| &\geq \tilde{f}_s \end{aligned}$$

on s'assure ainsi que lorsque  $E(\tilde{f})$  est optimisé au sens de Tchebycheff et que le maximum de la valeur absolue de la déviation  $\delta$  est inférieur à  $\delta_2$ , alors l'erreur d'optimisation

$$A(\tilde{f}) - D(\tilde{f}) = \frac{E(\tilde{f})}{W(\tilde{f})} \quad (12.30)$$

est telle que

$$\begin{aligned} |A(\tilde{f}) - D(\tilde{f})| &= \delta \leq \delta_2 & |\tilde{f}| &\geq \tilde{f}_s \\ |A(\tilde{f}) - D(\tilde{f})| &= \frac{\delta_1}{\delta_2} \delta \leq \delta_1 & |\tilde{f}| &\leq \tilde{f}_c \end{aligned}$$

#### 12.4.4 Optimisation par l'algorithme de Remez

Lorsqu'on veut optimiser l'un des quatre filtres R.I.F. à phase linéaire du tableau 12.7, on a une fonction d'erreur qui vaut

$$E(\tilde{f}) = W(\tilde{f}) \left( P(\tilde{f}) \sum_{k=0}^{r-1} \tilde{h}(k) \cos(2\pi\tilde{f}k) - D(\tilde{f}) \right) \quad (12.31)$$

L'équation (12.31) diffère de l'équation (12.28) par la présence du terme excédentaire  $P(\tilde{f})$ . Afin de pouvoir appliquer le théorème d'alternance, on peut récrire (12.31) sous la forme

$$\begin{aligned} E(\tilde{f}) &= W(\tilde{f}) P(\tilde{f}) \left( \sum_{k=0}^{r-1} \tilde{h}(k) \cos(2\pi\tilde{f}k) - \frac{D(\tilde{f})}{P(\tilde{f})} \right) \\ E(\tilde{f}) &= \hat{W}(\tilde{f}) \left( \sum_{k=0}^{r-1} \tilde{h}(k) \cos(2\pi\tilde{f}k) - \hat{D}(\tilde{f}) \right) \end{aligned} \quad (12.32)$$

avec

$$\hat{W}(\tilde{f}) \triangleq W(\tilde{f}) P(\tilde{f}) \quad \text{et} \quad \hat{D}(\tilde{f}) \triangleq \frac{D(\tilde{f})}{P(\tilde{f})}$$

On notera dans la suite

$$\hat{A}(\tilde{f}) \triangleq \sum_{k=0}^{r-1} \tilde{h}(k) \cos(2\pi\tilde{f}k) \quad (12.33)$$

L'équation (12.32) se prête maintenant à l'application du théorème d'alternance de l'erreur qui prend ses maxima  $\pm \delta$  aux fréquences extrémales  $\tilde{f}_0, \dots, \tilde{f}_{r-1}$  en sorte que l'équation (12.29) s'applique et que les  $r+1$  équations fournissent le système matriciel

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(2\pi\tilde{f}_0) & \dots & \cos(2\pi\tilde{f}_0(r)) & \frac{1}{\hat{W}(\tilde{f}_0)} \\ 1 & \cos(2\pi\tilde{f}_1) & \dots & \cos(2\pi\tilde{f}_1(r)) & \frac{-1}{\hat{W}(\tilde{f}_1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(2\pi\tilde{f}_{r-1}) & \dots & \cos(2\pi\tilde{f}_{r-1}(r)) & \frac{(-1)^{r-1}}{\hat{W}(\tilde{f}_{r-1})} \\ 1 & \cos(2\pi\tilde{f}_r) & \dots & \cos(2\pi\tilde{f}_r(r)) & \frac{(-1)^r}{\hat{W}(\tilde{f}_r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{h}(0) \\ \tilde{h}(1) \\ \vdots \\ \tilde{h}(r-1) \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{D}(\tilde{f}_0) \\ \hat{D}(\tilde{f}_1) \\ \vdots \\ \hat{D}(\tilde{f}_{r-1}) \\ \hat{D}(\tilde{f}_r) \end{bmatrix} \quad (12.34)$$

Pour résoudre ce système en  $\{\tilde{h}(k) \mid 1 \leq k \leq r-1\}$  et en  $\delta$ , il faudrait avoir connaissance des  $r+1$  fréquences extrémales, ce qui permettrait de trouver les  $\{\tilde{h}(k)\}$  par inversion matricielle. C'est dans la détermination des fréquences extrémales qu'intervient l'algorithme d'échange de Remez. Avant de décrire cet algorithme, il est utile de remarquer que la valeur de  $\delta$  que l'on obtiendrait par inversion matricielle est donnée par la formule analytique

$$\delta = \frac{\gamma_0 \hat{D}(\tilde{f}_0) + \gamma_1 \hat{D}(\tilde{f}_1) + \dots + \gamma_r \hat{D}(\tilde{f}_r)}{\frac{\gamma_0}{\hat{W}(\tilde{f}_0)} + \frac{-\gamma_1}{\hat{W}(\tilde{f}_1)} + \dots + \frac{(-1)^r \gamma_r}{\hat{W}(\tilde{f}_r)}} \quad (12.35)$$

avec

$$\gamma_k = \prod_{i=0, i \neq k}^r \frac{1}{\cos(2\pi\tilde{f}_k) - \cos(2\pi\tilde{f}_i)} \quad (12.36)$$

cette formule évite d'obtenir  $\delta$  par inversion matricielle.

D'autre part, on doit aussi remarquer qu'il n'est pas nécessaire de connaître les  $\{\tilde{h}(k)\}$  pour construire la fonction d'erreur. En effet, aux  $r+1$  fréquences extrémales  $\tilde{f}_k$ , on a la relation

$$\hat{A}(\tilde{f}_k) = \hat{D}(\tilde{f}_k) - \frac{(-1)^k \delta}{\hat{W}(\tilde{f}_k)} \quad (12.37)$$

qui permet de reconstruire exactement le polynôme trigonométrique  $A(\tilde{f})$  par interpolation de Lagrange, *i.e.*

$$\hat{A}(\tilde{f}) = \frac{\sum_{k=0}^{r-1} \frac{\beta_k \hat{A}(\tilde{f}_k)}{\cos(2\pi\tilde{f}) - \cos(2\pi\tilde{f}_k)}}{\sum_{k=0}^{r-1} \frac{\beta_k}{\cos(2\pi\tilde{f}) - \cos(2\pi\tilde{f}_k)}} \quad (12.38)$$

avec

$$\beta_k = \prod_{i=0, i \neq k}^{r-1} \frac{1}{\cos(2\pi\tilde{f}_k) - \cos(2\pi\tilde{f}_i)} \quad (12.39)$$

Pour  $\tilde{f}$  appartenant à  $F$ , on peut alors reconstruire l'erreur à l'aide de

$$E(\tilde{f}) = \hat{W}(\tilde{f}) [\hat{A}(\tilde{f}) - \hat{D}(\tilde{f})] \quad (12.40)$$

La procédure d'échange de Remez consiste en un calcul itératif qui permet d'affiner l'évaluation des fréquences extrémales en même temps que le calcul de la déviation optimale  $\delta_{\text{opt}}$ . Au début de la procédure on choisit un jeu de fréquences extrémales (candidates). Si

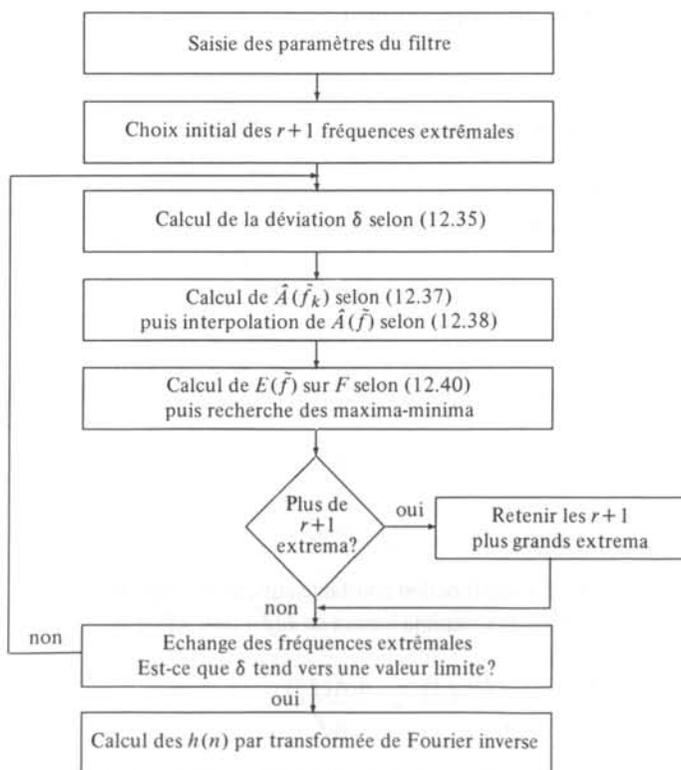


Fig. 12.20 Organigramme de l'algorithme de Remez.

ces fréquences étaient effectivement des fréquences extrémales, elles conduiraient à une erreur nivelée avec une alternance de maxima et de minima  $\pm \delta_{\text{opt}}$ . Lorsqu'on choisit arbitrairement les fréquences « extrémales » on n'obtient pas une erreur avec une ondulation constante sur  $F$ , on a bien  $E(\tilde{f}_i) = \pm \delta$  avec  $|\delta| < |\delta_{\text{opt}}|$  mais les  $\tilde{f}_i$  ne correspondent pas aux maxima-minima locaux de  $E(\tilde{f})$ . En échangeant le premier jeu de fréquences extrémales contre un nouveau qui correspond aux positions des  $r + 1$  maxima-minima locaux de la fonction d'erreur, on peut montrer qu'on obtient une nouvelle déviation  $\delta$  plus proche de  $\delta_{\text{opt}}$  que la précédente. En itérant ce procédé  $\delta$  converge vers  $\delta_{\text{opt}}$  et, le jeu de fréquences optimales étant unique, on converge vers le jeu de fréquences extrémales. Une fois  $\delta$  et les fréquences extrémales connues, le calcul des  $\{\tilde{h}(k)\}$  ne pose aucun problème, à l'inversion matricielle du système (12.34) on préférera une solution par transformée de Fourier inverse.

Généralement, lorsqu'on calcule les maxima-minima de la fonction  $E(\tilde{f})$ , on a besoin d'un nombre de points d'échantillonnage assez grand ; il est admis que le nombre minimal de points doit être environ 16 fois l'ordre du filtre. On arrête le processus itératif dès que  $\delta$  atteint sa borne supérieure, ou plus commodément lorsque les fréquences extrémales, qui sont de la forme  $i\Delta\tilde{f}$   $i = 0, \dots, M$  du fait de l'échantillonnage, ne changent pas de valeur d'une itération à l'autre de la procédure d'échange. Le nombre d'itérations nécessaires dépend de l'initialisation, mais en général la procédure converge en quelques dizaines d'itérations même pour des filtres d'ordre grand.

L'organigramme général de l'algorithme est donné à la figure 12.20. Cet algorithme est dû à T.W. Parks et J. H. McClellan [62, 65] qui ont proposé d'appliquer l'algorithme général de Remez au problème de l'approximation des R. I. F.

#### 12.4.5 Optimisation d'un filtre R.I.F. passe-bas

On donne ici un exemple d'implémentation de la procédure d'échange pour un filtre passe-bas. Soit à optimiser au sens de Tchebycheff un filtre passe-bas à phase linéaire dont la réponse fréquentielle d'amplitude satisfasse à

$$1 - \delta_1 \leq A(\tilde{f}) \leq 1 + \delta_1 \quad |\tilde{f}| \leq \tilde{f}_c$$

$$- \delta_2 \leq A(\tilde{f}) \leq + \delta_2 \quad |\tilde{f}| \geq \tilde{f}_s$$

D'après le paragraphe 12.4.3, on utilisera la fenêtre de pondération définie par

$$W(\tilde{f}) = \frac{\delta_2}{\delta_1} \quad |\tilde{f}| \leq \tilde{f}_c$$

$$W(\tilde{f}) = 1 \quad |\tilde{f}| \geq \tilde{f}_s$$

Du fait que  $W(\tilde{f})$  est une fonction constante sur chacun des intervalles disjoints de  $F = [0, \tilde{f}_c] \cup [\tilde{f}_s, 0,5]$  les maxima-minima locaux de  $E(\tilde{f})$  sont tels que

$$\frac{d(E(\tilde{f}))}{d\tilde{f}} = \frac{d(A(\tilde{f}) - D(\tilde{f}))}{d\tilde{f}} = \frac{d(A(\tilde{f}))}{d\tilde{f}} \quad (12.41)$$

Les maxima-minima locaux de  $E(\tilde{f})$  sont donc ceux de  $A(\tilde{f})$ , et les fréquences extrémales correspondent donc aux fréquences pour lesquelles s'annule la dérivée de  $A(\tilde{f})$ . Par

exemple dans le cas où  $P(\tilde{f}) = 1$

$$A(\tilde{f}) = \sum_{k=0}^{r-1} \tilde{h}(k) \cos(2\pi\tilde{f}k) \quad (12.42)$$

En remarquant que le polynôme  $A(\tilde{f})$  peut être arrangé sous la forme d'un polynôme trigonométrique de degré  $r-1$ , *i.e.*

$$A(\tilde{f}) = \sum_{k=0}^{r-1} \tilde{g}(k) (\cos(2\pi\tilde{f}))^k \quad (12.43)$$

on constate que le polynôme a  $r-1$  racines sur l'intervalle  $0 < \tilde{f} < 0,5$  et de ce fait possède au moins  $r$  maxima-minima locaux sur cet intervalle. Parmi ces  $r$  maxima-minima locaux, on en connaît exactement 2; en effet par définition  $\tilde{f}_c$  et  $\tilde{f}_s$  sont des fréquences extrémales,  $E(\tilde{f}_c) = \pm\delta$  et  $E(\tilde{f}_s) = \mp\delta$ , car si tel n'était pas le cas l'on imposerait une fréquence de coupure plus grande que  $\tilde{f}_c$  et une fréquence de réjection plus petite que  $\tilde{f}_s$ .

Quel est le nombre maximum de maxima-minima locaux de  $E(\tilde{f})$ ? Par dérivation de (12.42) par rapport à  $\tilde{f}$ , on obtient

$$\frac{d(A(\tilde{f}))}{d\tilde{f}} = -2\pi \sum_{k=0}^{r-1} k \tilde{h}(k) \sin(2\pi\tilde{f}k) \quad (12.44)$$

ce qui prouve qu'aux fréquences 0 et 0,5, pour lesquelles s'annule (12.44), sont situés des maxima-minima locaux de  $E(\tilde{f})$ . Il s'ensuit que les fréquences 0 et 0,5 sont des fréquences candidates en tant que fréquences extrémales, et qu'on a au plus  $r+2$  minima-maxima locaux. Le fait que  $d(A(\tilde{f}))/d\tilde{f}$  s'annule en  $\tilde{f} = 0$  et  $\tilde{f} = 0,5$  ne veut pas dire que ces fréquences seront toutes deux des fréquences extrémales: on peut très bien avoir  $|E(\tilde{f})|$  qui est inférieur en valeur absolue à  $|\delta|$  en une de ces deux fréquences. Ceci conduit à chercher les  $r$  maxima-minima locaux pour  $0 < \tilde{f} < 0,5$ , et à choisir la  $r+1$  ième fréquence extrême en 0 ou 0,5 suivant laquelle l'une de ces deux fréquences présente le meilleur extrema de  $E(\tilde{f})$ , une au moins de ces fréquences étant telle que  $E(\tilde{f}) = \pm\delta$ .

Par rapport à l'organigramme général donné à la figure 12.20, on peut donc simplifier la procédure de réjection de l'éventuelle  $r+2$  ième fréquence extrême excédentaire, en rejetant le plus petit des extrema en 0 ou 0,5.

On donne un exemple d'implémentation de la procédure d'échange pour un filtre passe-bas de type 1, pour lequel les spécifications étaient  $\tilde{f}_c = 0,2$ ,  $\tilde{f}_s = 0,3$ ,  $\delta_1 = 0,1$ ,  $\delta_2 = 0,01$ ,  $N = 15$ . Le filtre choisi étant du type 1 (§ 12.2.4), on a  $r = (N+1)/2 = 8$ , soit au moins  $r+1 = 9$  fréquences extrémales. On a choisi de présenter 3 itérations successives de la procédure d'échange aux figures 12.21 et 12.22. La procédure a convergé en 6 itérations et l'on présente ici les trois dernières itérations. On remarquera que les courbes d'erreurs comportent bien 9 fréquences extrémales, et que  $\delta$  croît en valeur absolue à chaque itération jusqu'à atteindre son optimum. La réponse fréquentielle  $A(\tilde{f})$  d'amplitude est donnée à la figure 12.23. Avec un choix  $\delta_1 = \delta_2 = 0,025$ , on obtient le réponse fréquentielle d'amplitude de la figure 12.24. Pour ce dernier filtre, la fonction d'erreur représentée à la figure 12.25, présente  $r+1$  fréquences extrémales, on pourra noter que la fréquence 0 n'est plus une fréquence extrême dans ce cas.

Enfin pour illustrer l'influence du nombre de coefficients sur les performances, on a optimisé deux filtres passe-bas avec des fréquences de coupures et de réjection  $\tilde{f}_c = 0,2$  et

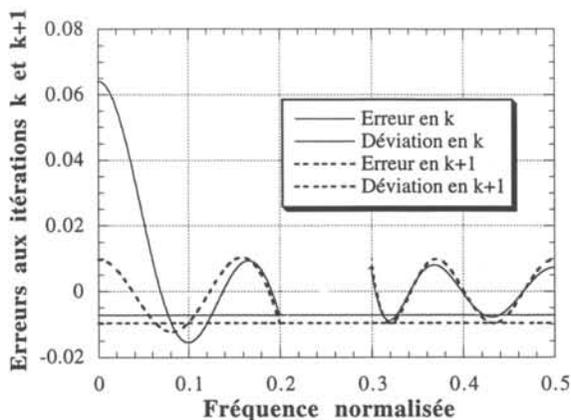


Fig. 12.21  $E(f)$  aux itérations  $k$  et  $k+1$  de la procédure d'échange.

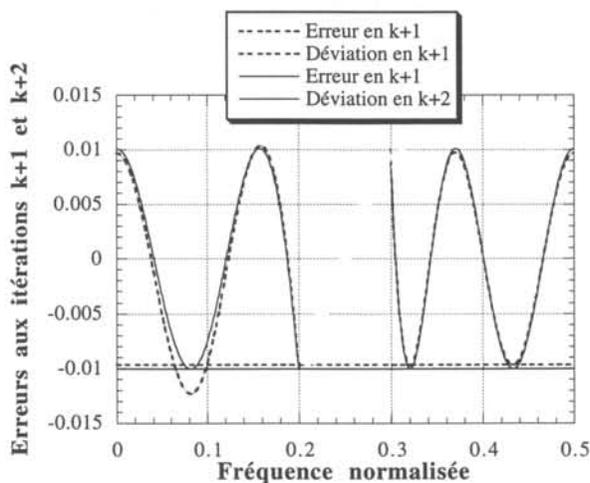


Fig. 12.22  $E(\tilde{f})$  aux itérations  $k+1$  et  $k+2$  de la procédure d'échange.

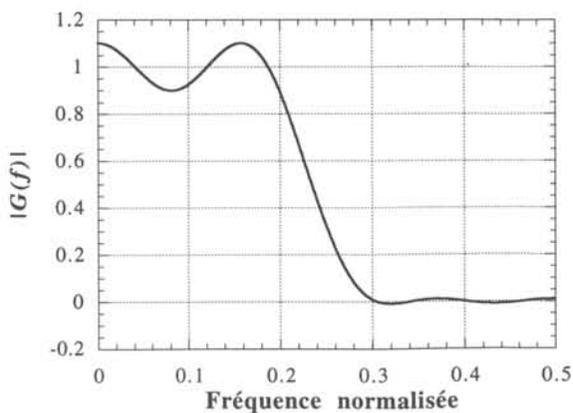


Fig. 12.23 Réponse fréquentielle d'amplitude  $N = 15$ ,  $\tilde{f}_c = 0,2$ ,  $\tilde{f}_s = 0,3$ ,  $\delta_1 = 0,1$ ,  $\delta_2 = 0,01$ .

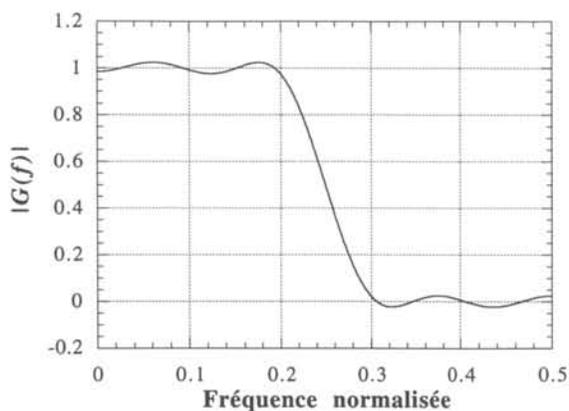


Fig. 12.24 Réponse fréquentielle d'amplitude  $N = 15$ ,  $\tilde{f}_c = 0,2$ ,  $\tilde{f}_s = 0,3$ ,  $\delta_1 = 0,025$ ,  $\delta_2 = 0,025$ .

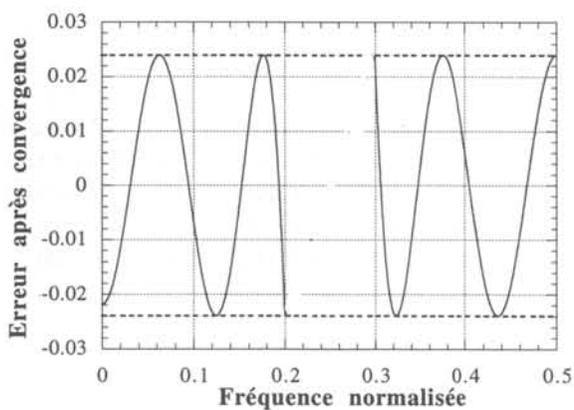


Fig. 12.25  $E(f)$   $N = 15$ ,  $\tilde{f}_c = 0,2$ ,  $\tilde{f}_s = 0,3$ ,  $\delta_1 = 0,025$ ,  $\delta_2 = 0,025$ .

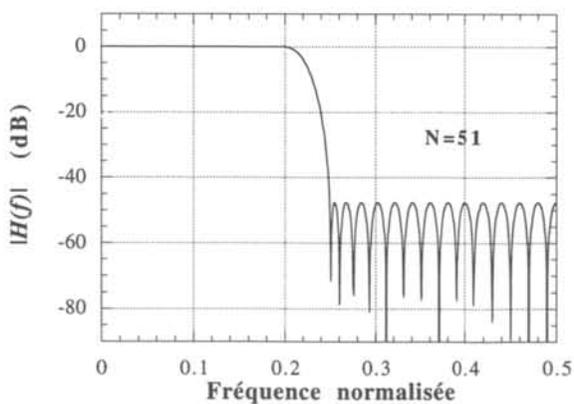


Fig. 12.26 Réponse fréquentielle d'amplitude  $N = 51$ ,  $\tilde{f}_c = 0,2$ ,  $\tilde{f}_s = 0,25$ .

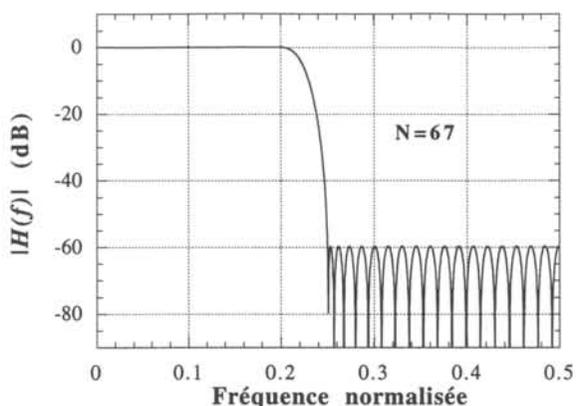


Fig. 12.27 Réponse fréquentielle d'amplitude  $N = 67$ ,  $\tilde{f}_c = 0,2$ ,  $\tilde{f}_s = 0,25$ .

$\tilde{f}_s = 0,25$  et on a choisi une pondération unité sur la bande passante et la bande coupée. Le premier filtre passe-bas est optimisé avec 51 coefficients, on obtient alors une ondulation de  $\pm 0,035$  dB en bande passante et une réjection de  $-48$  dB en bande coupée (fig. 12.26). Le même gabarit avec la même fonction de pondération a été approximé pour 67 coefficients, le résultat de l'approximation est donné à la figure 12.27: l'ondulation est maintenant de  $\pm 0,009$  dB, la réjection valant  $-60$  dB. On voit apparaître un des défauts majeurs liés à l'utilisation de filtres R.I.F., même lorsqu'on dispose de techniques d'optimisation sophistiquées ; ces filtres requièrent un grand nombre de coefficients, entre cinquante et quelques centaines dès lors que l'on désire des performances élevées.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. SAAL, *Handbook of Filter Design*, AEG Telefunken, Berlin, 1979.
- [2] A. ZVEREV, *Handbook of Filter Synthesis*, Wiley, New York, 1967.
- [3] P. GEFFE, *Simplified Modern Filter Design*, Rider, New York, 1963.
- [4] J. COLIN, Filtrés électriques, *Techniques de l'Ingénieur*, E 610-613, Paris, 1967.
- [5] J. COLIN, Filtrés antimétriques de synthèse à deux bandes passantes et à deux bandes affaiblies, *Câbles et Transmission*, 1, janvier 1976, pp. 72-80.
- [6] J. BASS, Cours de Mathématiques, Masson, Paris, 1956.
- [7] V. BELEVITCH, *Classical network theory*, Holden-Day, San Francisco, 1968.
- [8] D. MANH CUONG, M. HASLER, On the canonic cascade synthesis for lossless One-Ports, *IEEE Trans. Circ. Syst.* CAS-27, 2, February 1980, pp. 124-136.
- [9] C. WELLEKENS, Simultaneous approximation of attenuation and phase of reciprocal lossless networks, *Proc. ISCAS*, San Francisco, 1974, pp. 274-277.
- [10] M. GOLAY, Polynomials of transfer functions with poles only satisfying conditions at the origin, *IEEE Trans. Circ. Syst.*, vol. CT-7, September 1966, pp. 224-229.
- [11] I. PELESS, T. MURAKANI, Analysis and synthesis of transitional Butterworth Thomson filters, *RCA Rev.*, vol. 18, March 1957, pp. 60-94.
- [12] J. NEIRYNCK, Transient behaviour of systems with equal-ripple delay, *IEEE Trans. Circ. Syst.*, vol. CT-11, June 1964, pp. 302-303.
- [13] E. CHENEY, *Introduction to Approximation Theory*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [14] B. RAKOVICH, B. DJURICH, Chebyshev Approximation of a Constant Group Delay with Constraints at the Origin, *IEEE Trans.*, vol. CT-19, September 1972, pp. 466-475.
- [15] B. SMITH, G. TEMES, An Iterative Approximation Procedure for Automatic Filter Synthesis, *IEEE Trans.*, vol. CT-12, March 1965, pp. 107-111.
- [16] V. BELEVITCH, Y. GENIN, Cascade decomposition of Lossless 2-Ports, *Phil. Res. Repts.*, vol. 26, August 1971, pp. 326-340.
- [17] A. FETTWEIS, On the Factorization of Transfer Matrices of Lossless 2-Ports, *IEEE Trans.*, vol. CT-17, February 1970, pp. 86-94.
- [18] J. MEINGUET, V. BELEVITCH, On the Realisability of Ladder Filters, *IRE Trans.*, vol. CT-5, December 1958, pp. 253-255.

- [19] DAO MANH CUONG, J. NEIRYNCK, Realisability of Bandpass Filters, *Elect. Lett.*, vol. 1, June 1975, pp. 256-259.
- [20] J. NEIRYNCK, P. VAN BASTELAER, Tables on Sensitivity Invariants and Bounds for Lossless Two-Ports, *Int. Journ. Circ. Theory and Applic.*, vol. 3, September 1975, pp. 285-292.
- [21] G. TEMES, S. MITRA, *Modern Filter Theory and Design*, Wiley, New York, 1973.
- [22] J. NEIRYNCK, P. VAN BASTELAER, The Minimization of LC-Filter Sensitivity, *Proc. ISCAS*, San Francisco, 1974, pp. 590-594.
- [23] J. NEIRYNCK, N. BUI, C. TRAN, Influence of the Extraction Order of Attenuation Poles in a Lowpass Filter, *Elec. Lett.*, vol. 9, August 1973, pp. 381-382.
- [24] J. NEIRYNCK, L. MILIC, Equal Ripple Tolerance Characteristics, *Int. Journ. Circ. Theory and Applic.*, vol. 4, January 1976, pp. 99-104.
- [25] J. NEIRYNCK, J.P. MOINAT, Sensitivity of Image-Parameter Theory, *Proc. Sum. School Circ. Theory*, Prague, 1974, vol. 2, pp. 85-90.
- [26] J. P. MOINAT, J. NEIRYNCK, Calcul des tolérances des filtres LC en échelle pour de larges variations des éléments, *Annales des télécommunications*, à paraître.
- [27] G. SZENTIRMAI, On the Realization of Crystal Bandpass Filters, *IEEE Trans.*, vol. CT-11, June 1964, pp. 299-301.
- [28] C. NIGHTINGALE, J. ROLLETT, Exact Synthesis of Active Lowpass Frequency-Dependent Negative-Resistance Filters, *Elec. Lett.*, vol. 10, February 1974, pp. 34-45.
- [29] V. BELEVITCH, J. GOETHALS, J. NEIRYNCK, Darlington Filters with Unequal Uniform Dissipation in Inductors and Capacitors, *Phil. Res. Repts.*, vol. 19, October 1964, pp. 441-468.
- [30] J. NEIRYNCK, Compensation of Parasitic Capacitances in Broadband Filters, *IEEE Trans.*, vol. CT-14, September 1967, pp. 250-259.
- [31] N. JÖHL, Conception de filtres à transconductances et capacités en technologie CMOS pour applications hautes fréquences, Thèse no 997, EPFL, Lausanne, 1992.
- [32] F. KRUMMENACHER, N. JÖHL, A 4 MHz continuous-time filter with on-chip automatic tuning, *IEEE J. Solid-State Circuits*, vol. SC-23, June 1988, pp. 750-758.
- [33] Y. TSIVIDIS, J.O. VOORMAN, *Integrated continuous-time filters*, IEEE Press, USA, 1993.
- [34] R. SCHAUMANN, S. GHSAI, K.R. LAKER, *Design of analog filters : passive, active RC, and switched capacitor*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1990.
- [35] M. HASLER, Lossless 2-Ports between Non-Reactive Terminations, *Int. Journ. Circ. Theory and Applic.*, vol. 9, January 1981, pp. 89-101.
- [36] G. MOSCHYTZ, *Linear Integrated Networks*, Van Nostrand, New York, 1975.
- [37] R. PALOMERA, Classification des cellules biquadratiques à deux éléments actifs, Thèse no 326, EPFL, Lausanne 1979.
- [38] H. ORCHARD, *Gyrator Circuits in Active Filters*, McGraw-Hill, New York.

- [39] P. THIRAN, Adaptation d'impédance à large bande, *Mémoire de fin d'études*, Université Catholique de Louvain, 1989.
- [40] H.J. CARLIN, B.S. YARMAN, The double matching problem: analytical and real frequency solutions, *IEEE Trans. Circ. Syst.*, vol. CAS-30, January 1983, pp. 15-28.
- [41] R.M. FANO, Theoretical limitations on the broadband matching of arbitrary impedances, *J. Franklin Inst.*, vol. 249, January and February 1950, pp. 57-83 and pp. 139-154.
- [42] C. DEHOLLAIN, *Adaptation d'impédance à large bande*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1996.
- [43] J. NEIRYNCK, P. THIRAN, Broadband matching as a scattering problem, *Proc. ISCAS*, Portland, May 1989, pp. 693-696.
- [44] H. DEDIEU, C. DEHOLLAIN, J. NEIRYNCK, G. RHODES, New broadband matching circuits, *Int. Journ. Circ. Theory and Applic.*, vol. 22, January 1994, pp. 61-69.
- [45] C. DEHOLLAIN, J. NEIRYNCK, Double broadband matching of a lowpass generator and a lowpass load by equal minima gain functions, *Proc. ISCAS*, London, May 1994, vol. 5, pp. 1-4.
- [46] D.C. YOULA, A new theory of broadband matching, *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-11, March 1964, pp. 30-50.
- [47] W.K. CHEN, Explicit formulas for the synthesis of optimum broad-band impedance-matching networks, *IEEE Trans. Circ. Syst.*, vol. CAS-24, April 1977, pp. 157-169.
- [48] G.L. MATTHAEI, L. YOUNG, E.M.T. JONES, *Microwave filters, impedance-matching networks, and coupling structures*, Artech House, Dedham, 1964.
- [49] C. DEHOLLAIN, J. NEIRYNCK, Simplified impedance broadband matching by the image parameter method : the RC case, *Int. Journ. Circ. Theory and Applic.*, vol. 23, April 1995, pp. 91-116.
- [50] H. DEDIEU, C. DEHOLLAIN, J. NEIRYNCK, G. RHODES, A new method for solving broadband matching problem, *IEEE Trans. Circ. Syst.*, vol. CAS-41, September 1994, pp. 561-571.
- [51] B.S. YARMAN, A. FETTWEIS, Computer aided double matching via parametric representations of Brune functions, *IEEE Trans. Circ. Syst.*, vol. CAS-37, February 1990, pp. 212-222.
- [52] M. HASLER, *Stray Capacitance Insensitive Switched Capacitors Filters*, Proceedings of the International Symposium on circuits and systems, ISCAS'81, pp. 42-45.
- [53] A. FETTWEIS, *Digital Filter Structures Related to Classical Networks*, A. E. U., vol. 25, Feb. 1971, pp. 78-89.
- [54] M. KUNT, *Traitement Numérique des Signaux*, Traité d'Electricité, vol. XX, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1984.
- [55] R. BOITE, H. LEICH, *Les Filtrés Numériques*, Ed. Masson, Paris, 1990.
- [56] M. BELLANGER, *Traitement Numérique du Signal*, Ed. Masson, Paris, 1984.

- [57] M. KUNT ED., *Techniques Modernes de Traitement Numérique des Signaux*, vol. 1, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1991.
- [58] L. R. RABINER, B. GOLD, *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- [59] A. V. OPPENHEIM, R. W. SCHAFER, *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall International, London, 1975.
- [60] A. ANTONIOU, *Digital Filters – Analysis, Design and Applications*, McGraw-Hill, New York, 1993.
- [61] J. G. PROAKIS, D. M. MANOLAKISA, *Digital Signal Processing – Principles, Algorithms and Applications*, Macmillan Publishing Company, New York, 1992.
- [62] T. W. PARKS, J. H. MCCLELLAN, *Chebyshev Approximation for Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase*, IEEE Trans. on Circuit Theory, Vol. CT-19, March 1972, pp. 189-194.
- [63] T. W. PARKS, J. H. MCCLELLAN, *A Program for the Design of Linear Phase Finite Impulse Response Filters*, IEEE Trans. on Audio and Elec., Vol. AU-20, No. 4, Aug. 1972, pp. 195-199.
- [64] L. R. RABINER, *Linear program Design of Finite Impulse Response (FIR) Digital Filters*, IEEE Trans. on Audio and Elec., Vol. No. 5, Oct. 1972, pp. 280-288.
- [65] J. H. MCCLELLAN, T. W. PARKS, L. R. RABINER, *A Computer Program for Designing Optimum FIR linear Phase Digital Filters*, IEEE Trans. on Audio and Elec., Vol. AU-21, No. 6, Dec. 1973, pp. 506-526.

## INDEX ANALYTIQUE

Les références sont celles des pages

- Adaptateur parallèle, 391
  - série, 391
- Adaptation à large bande, 301, 303
  - conjuguée, 301
  - -image, 51
- Affaiblissement, 4
  - de désadaptation, 64
  - effectif, 53
  - -image, 53
  - de réflexion, 4
- Aiguillage, 388
- Algorithme d'échange, 115
  - de Parks et McClellan, 420
  - de Remez, 117, 416
  - de Remez généralisé, 119
  - de Remez pour les fractions rationnelles, 119
- Amplificateur opérationnel flottant, 245
  - opérationnel idéal, 245
  - opérationnel réel, 285
  - sommateur, 255
  - sommateur à capacités commutées, 374
  - de tension flottant, 246
  - de tension à gain fini, 245
- Amplificateur OTA à transconductance, 215
- Analyse dimensionnelle, 180
  - fréquentielle, 364
  - numérique, 160
  - temporelle, 362
- Approximation analytique, 85
  - par une fraction rationnelle, 117
  - numérique, 85
  - polynomiale, 108
  - polynomiale de Tchebycheff, 107, 416
- Approximation, 8
- Arc, 120
- Atténuateur, 9
- Auto-transformateur, 167
- Avance, 368
  
- Bande bloquée, 1
  - coupée, 1, 5
  - passante, 1, 5
  - passante relative, 194
  
- Bande de fréquences, 301
  - -image, 324
  - prescrite, 324
- Bipôles LC, 19
  - RC, 19
- Biporte de la charge, 304
  - de la source, 304
  - global, 304
  - élémentaire, 133
  - à impédance constante, 52
  - résiduel, 133
- Borne inférieure des indices de sensibilité, 183
  - supérieure des indices de sensibilité, 184
- Boucle à verrouillage de phase, 214, 222
- Boucle, 382
- Bruit, 283, 377
  - de quantification, 386
  
- Calcul des pôles-image, 120
  - de la sensibilité, 176
- Capacité Miller, 216
- Capacité parasite, 192, 286, 369
  - associées aux accès du gyrateur, 209
  - de translation, 143
- Caractérisation, 20
  - de la matrice de répartition, 41, 234
- Caractéristique de Butterworth, 92
  - de Thomson, 93
- Cascade de deux biportes, 132
- Causalité, 368
- Cellule, 53, 251
  - biquadratique, 251, 257, 288, 372, 375
  - de Brune, 146, 149, 207
  - de Darlington, 149
  - de Deliyannis-Friend, 258
  - dérivée du convertisseur d'impédances, 261
  - du deuxième ordre, 165
  - de Fleischer-Tow, 259
  - à k-constant, 56
  - en m-dérivé, 58
  - à pôle unique du second type, 76
  - de Poschenrieder, 202
  - du premier ordre, 164

- du premier type, 73
- symétrique en fréquence, 72
- Centrage, 170
- d'un filtre, 185
- Chaîne de filtrage, 347, 350
- -image, 53
- Chemin, 381
- capacitif, 367, 368
- Circuit auxiliaire, 163
- impair, 359
- pair, 359
- Classe de réactance, 24
- Classification des filtres, 149
- des filtres passe-bande, 154
- Coefficient de réflexion, 37
- de température, 288, 377
- de transmission, 4, 37
- Comportement, 4
- -image, 53
- Compromis entre l'affaiblissement et le déphasage, 98
- Conclusion, 154
- Confluence, 71
- Conjugué hurwitzien, 26
- Connexion, 252
- de cellules biquadratiques, 373
- Construction du polynôme de référence nivelé, 112
- Contrainte imposée par les amplificateurs opérationnels, 363
- de réalisation des FDNC et FDNR, 224
- topologique, 382
- Contraintes intégrales par le formalisme polynomial, 315
- non intégrales par le formalisme polynomial, 315
- non intégrales de Youla, 315
- Convergence de l'algorithme d'échange, 116
- Conversion entre signaux discrets et analogiques, 351
- Convertisseur analogique-numérique, 384
- de courant, 264
- d'impédances, 264
- d'impédances flottant, 264
- d'impédances négatif, 264
- d'impédances positif, 264
- numérique-analogique, 384
- Convolution, 342
- Corps, 154
- Correcteur d'affaiblissement, 166
- de phase, 163
- Critère d'optimisation, 303
- méplat, 92
- de Tchebycheff, 108
- Décibel, 4
- Décomposition de la fonction déphasage, 88
- Déphasage, 4, 355
- -image, 53
- linéaire, 355
- minimal, 87
- d'un passe-tout, 89
- Déphaseur, 9
- Dérivées du gain par le réseau adjoint, 336
- par la matrice de chaîne, 336
- Détermination aléatoire des éléments optimaux de l'égalisateur, 332, 335
- des paramètres-images optimaux, 331
- d'une transmittance, 86, 90
- Déviations de référence, 111
- relative, 284
- de Tchebycheff, 114
- Discrimination, 5
- Dissipation non uniforme, 191
- dans un seul élément, 191
- uniforme égale, 189
- uniforme inégale, 191
- Distorsion de phase, 404
- Domaine de convergence, 343
- Double adaptation à large bande, 331
- Dualité, 309, 318
- Ecarts, 174
- relatif de la valeur nominale, 171
- Echantillonneur avec maintien, 352, 365
- idéal, 347, 348, 349
- réel, 351
- Echelon unité, 341
- Egalisation des minima, 334
- des tolérances, 186
- Egaliseur, 301
- Élément actif, 245
- parasite, 188
- Élimination des boucles sans retard, 392
- Entrée connectée, 252
- Equation de Bessel, 94
- de conservation de charge, 363
- Équivalence de Darlington, 303, 305
- Erreur, 108
- d'arrondi, 169
- commune, 377
- individuelle, 377
- inhérente, 169
- de quantification, 384
- de quantification comme source de bruit, 386
- de quantification sur les coefficients, 384, 385
- de quantification sur les résultats, 384
- Exigence, 5

- Extraction d'un biporte, 133
  - d'un gyrateur, 205
  - partielle, 143
- Facteur d'amplification, 286
  - de conversion, 264
  - de désadaptation, 64
  - d'échelle, 6, 258
  - de parité, 305
  - de qualité, 190, 248
- Factorisation de la matrice de transfert, 131
- FDNC, 224, 267, 293
  - flottant, 268
- FDNR, 224, 267
- Fenêtre de Barlett, 412, 413
  - de Blackman, 412, 413
  - rectangulaire, 408, 412, 413
  - de Hamming, 412, 413
  - de Hanning, 412, 413
- Filtrage, 1
- Filtre, 1
  - à capacités commutées, 358
  - à phase linéaire, 309, 403, 404
  - à déphasage linéaire, 362
  - à gyrateurs et à capacités, 203
  - à réponse impulsionnelle finie, 309, 346
  - à réponse impulsionnelle infinie, 346
  - à temps continu, 213
  - à temps continu  $g_m C$ , 209, 214
  - à temps continu MOSFET-C, 214
  - à transfert de tension, 250
  - antimétrique, 45
  - cascade, 270, 288
  - centré, 185
  - complémentaire, 127
  - coupe-bande, 9
  - de Abele-Ulbrich-Piloty, 104
  - de garde, 350, 368
  - de Golay, 98
  - de lissage, 350, 368
  - de reconstitution, 350
  - de référence, 126
  - de Schüssler, 99
  - de simulation LC directe, 250, 264, 372
  - de Tchebycheff, 101
  - discret, 346
  - discret associé à un filtre à capacités commutées, 365
  - économique, 79
  - FLF, 280, 298
  - follow the leader feedback, 280
  - insensible aux capacités parasites, 370
  - instable, 287
  - leapfrog, 272, 275
  - LF numérique, 387
  - LF, 275, 296, 375
    - non récursif, 309, 346
    - numérique à structure canonique directe, 382
    - numérique à structure cascade, 382
    - numérique à structure directe, 382
    - numérique d'ondes, 387
    - numérique, 379
    - paramétrique, 79, 150
    - passe-bande, 9
    - passe-bande à FDNC et FDNR, 228
    - passe-bande FDNC à extraction inverse, 229
    - passe-bas, 9
    - passe-bas à FDNC, 225
    - passe-bas idéal, 91
    - passe-haut, 9
    - passe-haut à FDNR, 227
    - passe-haut à inductances simulées, 227
    - RC-actif, 250
    - RC-passif, 245
    - récursif, 346
    - symétrique, 44
    - transversal, 346
    - zig-zag, 79
- Fonction approximante, 92, 108
  - bornée, 42
  - de Foster, 26
  - impaire, 22
  - objectif, 92, 108
  - paire, 22
  - positive réelle, 20
  - de transfert, 345
  - de transfert RC-passive, 245
  - de transfert du système, 251
- Fonction gain, 301, 303
  - de Tchebycheff, 320
- Formalisme polynomial, 305
- Formule de décomposition de Zobel, 64
  - d'estimation, 122
  - de Lagrange, 109
- Fraction rationnelle réelle, 19
- Fréquence d'échantillonnage, 347
  - normalisée, 401
- Gabarit d'affaiblissement, 62, 81
  - de déphasage, 64
- Gain de tension continue, 286
- Gain effectif, 324
  - idéal constant, 303, 313
  - -image, 324
- Gibbs (phénomène de), 411
- Gyrateur, 268, 295
- Hurwitzien, 26
- Immittance, 19

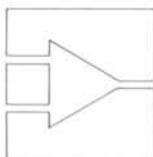
- Impédance-image, 51
  - terminée, 46
- Imprécision commune, 284
  - individuelle, 284
  - propre à la couche du matériau, 284
  - de type géométrique, 284
- Impulsion unité, 341
- Indice de sensibilité absolue, 173
  - de sensibilité moyenne, 173
  - de sensibilité quadratique, 173
- Influence du gain fini, 377
  - de la température et du vieillissement, 174
- Intégrateur à capacités commutées, 360
- Interpolation par une fraction rationnelle, 118
  - par un polynôme, 108
- Intervalle impair, 359
  - pair, 359
  - de transition, 5
- Invariant dimensionnel, 180, 181
  - de sensibilité, 180
- Inverseur à capacités commutées, 374
  
- Lieu d'Evans, 249
  
- Marge de la bande coupée, 123
  - de la bande passante, 123
- Matrice de chaîne, 46, 235
  - de répartition généralisée, 231
  - de transfert, 132, 251
  - de transfert du système discret, 365
- Mesures discrètes de la charge et du générateur, 339
- Méthode des fréquences réelles, 332
  - de Gauss-Newton stochastique, 334
  - de Tchebycheff, 320
  - des minima égalisés, 332, 334
  - des paramètres-image, 324
  - paramétrique, 332
- Méthode numérique d'approximation, 107
  - des potentiels indépendants, 247
  - du produit, 163
  - de la variable transformée, 163
- Mise en équation, 247
- Mode d'emploi pour concevoir un égaliseur, 337
- Modèle linéaire du gyrateur, 218
  - probabiliste, 171
- Modèles de la charge et du générateur connus, 338
- Multiplicateur, 252
  
- Néper, 4
- Noeud, 252
  - de tension, 370
  
- Nombre minimal d'inductances, 149
- Normalisation en fréquence, 18
  - en impédance, 17
- Norme de Tchebycheff, 100
  
- Onde incidente, 231
  - réfléchie, 231
  - de tension, 231
- Ondulation, 5
- Opération linéaire, 342
- Optimisation des sensibilités des filtres FLF, 338
- Ordre d'extraction des pôles, 186
  
- Paire de pôles finis, 145
- Paramètre-image, 51
  - d'un treillis, 55
- Paramétrisation de la fonction de transfert, 257
- Pas de quantification, 385
- Passe-tout, 9
- Période d'échantillonnage, 347
  - d'horloge, 361
- Perte constante, 6
- Phase d'approximation, 160
  - de factorisation, 160
  - de synthèse, 161
- Pôle d'affaiblissement, 5, 235
  - d'affaiblissement à l'infini, 137
  - d'affaiblissement à l'origine, 139
  - d'un amplificateur, 286
  - mobile, 120
  - de réflexion, 48
  - de transmission, 6
  - et zéro de l'impédance terminée, 141
- Polynôme(s) de Butterworth, 93
  - associés à l'égaliseur, 315
  - optimal, 114
  - de référence, 110
  - de référence nivelé, 111
  - de Tchebycheff, 100
- Préambule, 154
- Prédistorsion, 190
- Probabilité d'échec, 176
- Problème d'approximation, 108, 353
  - de filtrage sous contraintes, 303
  - de réalisabilité, 144
  - dégénéré, 304
  - non dégénéré, 304
  - bien conditionné, 328
  - mal conditionné, 328
- Produit gain-bande passante, 286
  - gain-sensibilité, 288
- Puissance active, 212
  - réactive, 226, 227
- Pulsation d'adaptation parfaite, 66

- de coupure, 57
- critique, 174
- d'échantillonnage, 347
- d'indifférence, 66
- de résonance, 258
  
- Réciprocité, 311, 320
- Référence, 109
- Réglage, 284
  - des pôles, 169
- Relation(s) caractéristique, 110
  - de Feldtkeller, 41
  - d'unitarité, 41
  - explicites de Weinberg, 323
- Réponse impulsionnelle, 345
  - indicielle, 97
  - indicielle optimale, 99
- Réseau en T-ponté, 166
- Résistance d'entrée, 286
  - résiduelle des interrupteurs fermés, 379
  - de sortie, 286
- Résonateur piézoélectrique, 193
- Retard, 346
  - de groupe, 89, 403
  
- Schéma bloc, 252
- Sensibilité, 226
  - absolue, 170
  - des cellules biquadratiques, 288
  - d'un circuit accordé, 179
  - au facteur d'amplification, 287
  - des filtres avec FDNC et FDNR, 293
  - des filtres à capacités commutées, 377
  - des filtres cascade, 288
  - des filtres à gyrateurs, 295
  - des filtres LC, 169
  - des filtres LF, 296
  - des filtres numériques, 384
  - des filtres RC-actifs, 283
  - passive, 284
  - par rapport à la température, 288
  - relative, 170
  - semi-relative, 170
- Signal analogique, 341
  - discret, 341, 348
  - échantillonné, 347, 348
  - exponentiel, 342
  - numérique, 341
- Simple adaptation à large bande, 304
- Simulation des capacités et des inductances, 389
  - des connexions, 389
  - de filtres LC, 386
  - en filtres à transfert de tension, 372
- Sommeur, 253
  - pondéré, 254
  
- Sortie connectée, 252
- Sous-circuit, 250, 264
- Spécification partielle, 86
- Stabilité en température, 195
- Structure de filtres à capacités commutées, 372
  - de filtres RC-actifs, 250
  - de Jaumann, 199
  - LF, 386
  - en treillis, 164
  - optimale de l'égaliseur, 331
- Suiveur de tension, 246
- Supercapacité, 224
- Superinductance, 224
- Synthèse, 8
  - des bipôles RC, 34
  - des biportes LC, 131
  - des biportes non dissipatifs, 234
  - de Brune, 21
  - canonique, 30
  - de Cauer par développement à l'infini, 31
  - de Cauer par développement à l'origine, 32
  - du convertisseur d'impédances négatif, 265
  - du convertisseur d'impédances positif, 266
  - du FDNC, 267
  - du FDNR, 267
  - du filtre cascade, 270
  - du filtre FLF, 281
  - du filtre LF, 275
  - du filtre LF entre terminaisons généralisées, 277
  - du filtre en treillis, 197
  - de Foster en parallèle, 30
  - de Foster en série, 30
  - du gyrateur, 268
  - de l'inductance, 267
  - de la résistance négative, 265
- Système analogique, 344
  - causal, 344
  - d'asservissement du filtre  $g_m C$ , 214, 222
  - de maintien, 351
  - discret, 344
  - discret associé à un filtre à capacités commutées, 362
  - invariant, 345
  - linéaire, 251, 344
  - multidimensionnel, 252
  - à n entrées et m sorties, 252
  - numérique, 344
  - stable, 345
  
- Température, 169
- Terme d'interaction, 65
- Terminaison généralisée, 230, 277
  - non réactive, 231

- Terre virtuelle, 370
- Théorème d'alternance, 416
- de caractérisation, 114, 121
- d'échange, 115
- d'échantillonnage, 350
- de Fettweis-Orchard, 8, 394
- du maximum, 20
- de la moyenne pondérée, 112
- de Rouché, 46
- d'unicité, 113
- Tolérance absolue, 174
- statistique, 175
- Transfert de charge, 361
- maximum de puissance active, 233
- maximum de tension, 233
- de puissance active, 231
- Transformateur idéal, 148
- Transformation, 8
- bilinéaire, 354
- de circuits, 167
- équivalente, 185
- étoile-triangle, 167
- de fréquence, 124
- de Howitt, 185
- d'impédances, 224
- de Norton, 167, 210
- du passe-bas en coupe-bande, 16
- du passe-bas en passe-bande, 12
- du passe-bas en passe-haut, 9
- de Schoeffler, 185
- Transformée de Fourier, 342
- Transitional Butterworth-Thomson, 99
- Transmittance-image, 53
- Valeur arrondie, 384
- imprécise des capacités, 377
- nominale, 169
- tronquée, 384
- Vieillessement, 169, 379
- Zéro d'affaiblissement, 5
- de transmission, 6
- de transmission hors de l'axe imaginaire, 148

Le Traité d'Electricité est l'oeuvre collective  
des membres du Département d'Electricité de l'EPFL,  
assistés par quelques collaborateurs externes.  
A ce volume ont collaboré plus particulièrement :

- Philippe Allemandou* : critique du manuscrit  
*Pierre Amstutz* : critique du manuscrit  
*Georges Barre* : correction des épreuves  
*René Boite* : critique du manuscrit  
*Michel Bon* : critique du manuscrit  
*Charles-Henri Carlin* : correction des épreuves  
*Edouard Colin* : critique du manuscrit  
*Paul Debefve* : correction des épreuves  
*Florence De Bondeli* : critique et mise au point du manuscrit  
*Hervé Dedieu* : rédaction du chapitre 12  
*Catherine Dehollain* : rédaction  
des paragraphes 8.2.9 à 8.2.24 et du chapitre 10  
*Claire-Lise Delacrausaz* : Presses polytechniques  
et universitaires romandes  
*Roger Dessoulavy* : critique du manuscrit  
*Yuzhong Ding* : correction des épreuves  
*Daniel Dubois* : critique du manuscrit  
et rédaction des exemples  
*Liselotte Fazan* : composition des textes et des formules  
*Martin Hasler* : rédaction des chapitres 9 et 11  
et de la section 8.3  
*Kurt Hofer* : dessins, photographie  
*Luong Thien Huynh* : critique du manuscrit  
*Allen Kilner* : mise en page et montage  
*Alexander Knob* : critique du manuscrit  
*Murat Kunt* : critique du manuscrit  
*Ljiljana Milic* : critique du manuscrit  
*Jacques Neiryneck* : rédaction des chapitres 1 à 7  
de la section 8.1 et des paragraphes 8.2.1 à 8.2.8  
*Renée Pittet* : composition des textes et des formules  
*Alain Vachoux* : rédaction des exemples du chapitre 11  
*Philippe Verburch* : correction des épreuves  
*Rose Vez* : dactylographie du manuscrit  
*Ida Wegmüller* : montage des corrections et lettrage





d'approximation font l'objet d'une étude détaillée. Le problème de la sensibilité et du calcul des tolérances, pratiquement ignoré jusqu'ici, est pour la première fois traité de façon exhaustive. Les technologies les plus récentes, jusqu'aux circuits de capacités commutées et les filtres à temps continu, sont mises en relation avec les concepts classiques. De nouvelles méthodes, qui permettent d'aboutir à des solutions quasi optimales, sont proposées pour résoudre le problème de l'adaptation à large bande.

Hervé Dedieu, né en 1956 à Saint-Gaudens (France), a reçu son doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse en 1988. De 1984 à 1988, il a été engagé comme ingénieur contractuel par le laboratoire de traitement du signal de l'Ecole Nationale Supérieure d'Electronique, d'Electrotechnique et d'Hydraulique de Toulouse et a travaillé pour le compte du Centre National d'Etudes Spatiales sur divers projets allant de la restitution d'attitude de satellite à l'étude d'équipements radar. Depuis 1990, il est assistant et chargé de cours à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne. Il est auteur ou co-auteur d'une cinquantaine de publications scientifiques.

Catherine Dehollain, née à Paris en 1957, est diplômée ingénieur électricien (1982) et Docteur ès sciences techniques (1995) de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL), où elle a effectué des recherches dans le domaine des filtres électriques. Elle est auteur de plusieurs publications scientifiques. De 1984 à 1990, elle a travaillé dans le domaine des télécommunications au Centre Européen de Recherche de Motorola à Genève. Depuis 1995, elle étudie au Laboratoire d'Electronique Générale de l'EPFL de nouvelles techniques de transmission de données sans fil à courte distance.

Martin Hasler, né en 1945, a reçu le diplôme de physicien (1969) et le titre de Docteur ès sciences naturelles (1973) de l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich. Il a poursuivi ses recherches en physique mathématique au Bedford College à Londres de 1973 à 1974. Depuis 1974, il travaille à la chaire des circuits et systèmes de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne. Il est professeur titulaire depuis 1984 et professeur extraordinaire depuis 1996. Il est auteur et coauteur de plus d'une centaine de publications scientifiques ainsi que de 4 livres. Il est Fellow de l'IEEE et il était editor de l'IEEE Transactions on Circuits and Systems de 1994 à 1995.

Jacques Neiryck, né en 1931, a reçu les diplômes d'Ingénieur Civil Electricien (1954) et de Docteur en sciences appliquées (1958) de l'Université Catholique de Louvain. Il a enseigné à l'Université de Louvain et à l'Université Lovanium (Kinshasa, Zaïre). Il a travaillé, de 1963 à 1972, dans les Laboratoires de recherche de Philips SA. Depuis 1972, il est professeur à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne. Il est auteur ou coauteur d'une centaine de publications scientifiques, y compris 4 livres. Fellow de l'IEEE, il a créé et présidé de 1990 à 1996 la section de systèmes de communication de l'EPFL. Associate Editor du Journal of the Franklin Institute de Philadelphie et membre de l'équipe éditoriale de l'International Journal of Circuit Theory and Applications de Londres. Fondateur des PPUR en 1980 qu'il a présidées jusqu'en 1992.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

# Traité d'Électricité

I INTRODUCTION À L'ÉLECTROTECHNIQUE

II MATÉRIAUX DE L'ÉLECTROTECHNIQUE

III ÉLECTROMAGNÉTISME

IV THÉORIE DES RÉSEAUX DE KIRCHHOFF

V ANALYSE ET SYNTHÈSE DES SYSTÈMES LOGIQUES

VI THÉORIE ET TRAITEMENT DES SIGNAUX

VII DISPOSITIFS À SEMICONDUCTEUR

VIII ÉLECTRONIQUE

IX ÉLECTROMÉCANIQUE

X MACHINES ÉLECTRIQUES

XI MACHINES SÉQUENTIELLES

XII ÉNERGIE ÉLECTRIQUE

XIII HYPERFRÉQUENCES

XIV CALCULATRICES

XV ÉLECTRONIQUE DE PUISSANCE

XVI ÉLECTRONIQUE DE RÉGLAGE ET DE COMMANDE

XVII SYSTÈMES DE MESURE

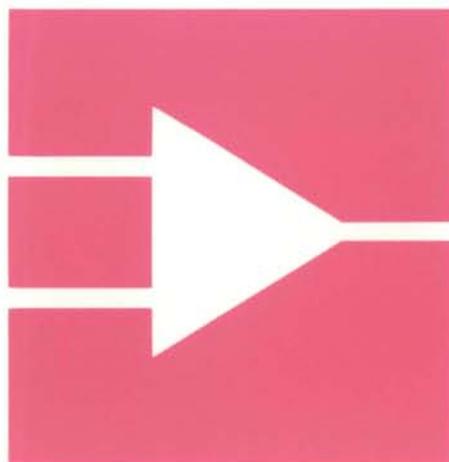
XVIII SYSTÈMES DE TÉLÉCOMMUNICATIONS

XIX FILTRES ÉLECTRIQUES

XX TRAITEMENT NUMÉRIQUE DES SIGNAUX

XXI ÉLECTROACOUSTIQUE

XXII HAUTE TENSION



ISBN 2-88074-315-X



9 782880 743154

PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES