

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

# Traité d'Électricité

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION DE JACQUES NEIRYNCK

VOLUME XVII

## SYSTÈMES DE MESURE

Pierre-André Paratte  
et Philippe Robert



PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

## **TRAITÉ D'ÉLECTRICITÉ**

Jusqu'à ce jour, les théories et les applications de l'électricité n'ont jamais fait l'objet d'un exposé systématique et unifié.

Les 22 volumes du Traité d'Electricité comblent cette lacune. Cet ouvrage rassemble de façon cohérente des connaissances jusqu'ici disparates et fragmentaires en fonction de la hiérarchie de modèles de plus en plus généraux, tels que les ingénieurs les ont conçus pour maîtriser des techniques de plus en plus complexes.

PRÉSENTATION DU VOLUME XVII

## **SYSTÈMES DE MESURE**

Caractéristiques statiques et dynamiques d'un système de mesure □ Traitement des résultats de mesure □ Erreurs, échantillonnage, tests d'hypothèses □ Méthodes actives et passives de réduction du bruit □ Circuits de mesure □ Acquisition informatique des mesures □ Sources, détecteurs et capteurs optiques □ Capteurs à effets thermiques □ Thermo-électricité □ Piézo-électricité □ Capteurs à effets électriques.

Quelle que soit sa spécialité, l'ingénieur est constamment confronté à des problèmes de mesure. La très grande majorité de ceux-ci reçoit aujourd'hui une solution relevant de l'électricité, pour deux raisons principales. D'une part, les possibilités offertes par l'électrodynamique, l'électronique et la microinformatique sont irremplaçables. D'autre part, la technologie des capteurs permet de convertir en grandeur électrique toute autre grandeur de nature différente.

La modélisation d'un système de mesure au sens large est abordée au chapitre 1. Les méthodes de traitement des résultats: estimateurs, analyses statistiques, propagation des erreurs, sont développées dans le chapitre 2. Le chapitre 3 traite des diverses sources de bruit et des méthodes passives et actives permettant d'en réduire les effets perturbateurs. Le chapitre 4 est consacré aux circuits analogiques les plus importants pour la métrologie. Les méthodes de conversion analogique-numérique et numérique-analogique sont présentées au chapitre 5. Les chapitres 6 à 10 sont consacrés aux capteurs. Un accent particulier est donné aux capteurs optoélectroniques et optiques. Le chapitre 6 décrit les sources lumineuses, notamment les laser à semiconducteur. Le chapitre 7 est une introduction aux capteurs optiques passifs, tels que les capteurs à fibres optiques. Les détecteurs font l'objet du chapitre 8. Le chapitre 9

Cet ouvrage fait partie d'une série de vingt-deux volumes  
dont les titres sont les suivants :

- I INTRODUCTION À L'ÉLECTROTECHNIQUE
- II MATÉRIAUX DE L'ÉLECTROTECHNIQUE
- III ÉLECTROMAGNÉTISME
- IV THÉORIE DES RÉSEAUX DE KIRCHHOFF
- V ANALYSE ET SYNTHÈSE DES SYSTÈMES LOGIQUES
- VI THÉORIE ET TRAITEMENT DES SIGNAUX
- VII DISPOSITIFS À SEMICONDUCTEUR
- VIII ÉLECTRONIQUE
- IX ÉLECTROMÉCANIQUE
- X MACHINES ÉLECTRIQUES
- XI MACHINES SÉQUENTIELLES
- XII ÉNERGIE ÉLECTRIQUE
- XIII HYPERFRÉQUENCES
- XIV CALCULATRICES
- XV ÉLECTRONIQUE DE PUISSANCE
- XVI ÉLECTRONIQUE DE RÉGLAGE ET DE COMMANDE
- XVII SYSTÈMES DE MESURE
- XVIII SYSTÈMES DE TÉLÉCOMMUNICATIONS
- XIX FILTRES ÉLECTRIQUES
- XX TRAITEMENT NUMÉRIQUE DES SIGNAUX
- XXI ÉLECTROACOUSTIQUE
- XXII HAUTE TENSION



Le Traité d'Electricité est une publication des  
**Presses polytechniques et universitaires romandes**,  
fondation scientifique dont le but est principalement la diffusion des  
travaux de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne.  
Le catalogue de ces publications peut être obtenu aux  
**Presses polytechniques et universitaires romandes, CH-1015 Lausanne.**

---

Deuxième édition  
ISBN (série) 2-604-00002-4  
ISBN (ce volume) 2-88074-321-4  
© 1996 Presses polytechniques et universitaires romandes  
CH-1015 Lausanne  
Imprimé en Suisse

# **TRAITÉ D'ÉLECTRICITÉ**

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE  
PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION DE JACQUES NEIRYNCK

VOLUME XVII

## **SYSTÈMES DE MESURE**

par Pierre-André Paratte  
et Philippe Robert



PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES



TRAITÉ D'ÉLECTRICITÉ

**XVII**  
**SYSTÈMES DE MESURE**

PPUR  
Cité Universitaire EPFL  
Centre Midi  
CH - 1015 Lausanne

29. 1. 96

SFr HT: 89,-

TTC: 90,80

## INTRODUCTION

*Absolute certainty is a privilege of uneducated minds and fanatics.*

C.J. Keyser

### Généralités

L'obtention de mesures précises constitue un préalable indispensable au développement des sciences et à la mise en œuvre des techniques. En ce sens, la mesure est certainement la démarche scientifique la plus fondamentale. Ce caractère d'usage universel vaut à la métrologie de prendre des aspects extrêmement variés. On ne mesure pas une température de la même manière à la surface de Jupiter, dans les gaz d'échappement d'une turbine, ou sur un thyristor.

Pour choisir, en fonction de la situation, un procédé de mesure approprié, il est indispensable de posséder une *connaissance suffisante des méthodes de la métrologie et de leur mise en œuvre* par les moyens techniques disponibles. La méthode de comparaison, par exemple, est aussi ancienne que la métrologie elle-même. Les Egyptiens l'employaient pour mesurer la surface de leurs champs, en comparant les dimensions de ceux-ci à la longueur d'une corde étalon. Aujourd'hui, cette méthode est utilisée dans les gyromètres statiques du domaine aérospatial, où l'on compare la phase de deux signaux optiques se propageant en sens inverse dans une fibre optique: même méthode, techniques différentes!

Les appareils les plus sophistiqués dialoguent avec l'expérimentateur, lui demandant par exemple de choisir dans un « menu » affiché l'opération à effectuer: acquisition de données sur une certaine période, établissement d'un histogramme d'amplitudes, transformation de Fourier rapide, etc. Dans presque tous les cas, l'opérateur obtient une réponse de l'appareil. De plus, la présentation des résultats est généralement très soignée esthétiquement, ce qui leur confère d'emblée une certaine crédibilité. Que cette crédibilité devienne un réflexe et les plus grossières erreurs peuvent être commises. C'est une nécessité absolue que *d'interpréter tout résultat de mesure avec un esprit critique*. Il n'est pas rare qu'une mesure reflète tout autre chose que le processus censé être analysé!

Les ressources de sciences de base comme la physique et la chimie, les mathématiques d'une part, le développement de techniques comme la microélectronique, la microinformatique, l'optoélectronique, le contrôle d'autre part, modèlent le visage de la métrologie. Cet aspect pluridisciplinaire de la métrologie en fait un domaine vaste, diversifié et passionnant, dont ce livre présente les caractères essentiels, dans le but d'aider le lecteur à maîtriser les problèmes de mesure auxquels les scientifiques sont journellement confrontés.

### Place du volume XVII dans le *Traité d'Electricité*

Le rôle central de la métrologie et la multiplicité des techniques auxquelles elle recourt mettent le volume XVII en rapport avec la majorité des volumes de la collection. Plus particulièrement, on trouve des compléments utiles à ce livre dans le volume II: propriétés physiques des matériaux utilisées dans un certain nombre de capteurs; le volume III: propagation d'ondes et couplage électromagnétique de perturbations par exemple; volume VI: méthodes de traitement des signaux, amélioration du rapport signal/bruit; volume VII: dispositifs à semiconducteurs, sources lumineuses, détecteurs; volume VIII: circuits et fonctions de l'électronique; volume IX: conception et fonctionnement de capteurs électromécaniques; volume XIII: guides d'ondes et fibres optiques; volume XIV: microprocesseurs, langage assembleur; volume XVI: électronique de réglage, asservissement; volume XVIII: fibres optiques; volume XIX: calcul des filtres électriques; volume XX: méthodes de traitement numérique des signaux.

### Organisation générale du volume XVII

Le volume est divisé en 11 chapitres qui peuvent, dans une large mesure, être lus indépendamment les uns des autres.

La modélisation d'un système de mesure au sens large, qu'il s'agisse d'un capteur simple ou d'une chaîne de mesure complète, est abordée au chapitre 1, dans le but d'établir une qualification exhaustive des performances d'un tel système. Les méthodes de traitement des résultats de mesure: représentations graphiques, estimateurs, analyses statistiques, domaines de confiance, ajustement de paramètres, propagation des erreurs, sont développées dans le chapitre 2. La limite ultime de fonctionnement d'un système de mesure dépend toujours du niveau de bruit présent. Le chapitre 3 traite des diverses sources de bruit et des méthodes passives et actives permettant d'en réduire les effets perturbateurs. Le chapitre 4 est consacré aux circuits analogiques les plus importants, destinés à traiter les signaux électriques provenant des capteurs en particulier. Les méthodes de conversions analogique-numérique et numérique-analogique sont présentées au chapitre 5, avec mention de leurs domaines d'utilisation spécifiques. Les performances des convertisseurs, compte tenu des effets de l'échantillonnage y sont également décrites. Les chapitres 6 à 10 sont consacrés aux capteurs. Un accent particulier est donné aux capteurs optoélectroniques et optiques dont l'importance croît rapidement. Le chapitre 6 décrit les sources lumineuses, en faisant une place particulière aux sources laser à semiconducteurs. Le chapitre 7 est une introduction aux capteurs optiques passifs, orientée principalement sur les capteurs à fibres optiques. Les détecteurs optiques font l'objet du chapitre 8. Le chapitre 9 traite de la mesure et des capteurs de température. Dans le chapitre 10, on trouve la classe importante et riche d'application des capteurs piézoélectriques, piézorésistifs et magnétiques. Le chapitre 11 regroupe différentes annexes, en particulier des tables statistiques.

### Conventions

Le *Traité d'Electricité* est composé de volumes (vol.) repérés par un chiffre romain (vol. V). Chaque volume est partagé en chapitres (chap.) repérés par un nombre arabe

(chap. 2). Chaque chapitre est divisé en sections (sect.) repérées par deux nombres arabes séparés par un point (sect. 2.3). Chaque section est divisée en paragraphes (§) repérés par trois nombres arabes séparés par deux points (§ 2.3.11). Les références internes stipulent le volume, le chapitre, la section ou le paragraphe du Traité auquel on renvoie. Dans le cas de la référence à une partie du même volume, on omet le numéro de celui-ci.

Les références bibliographiques sont numérotées continûment par volume et repérées par un seul nombre arabe entre crochets; les pages concernées sont éventuellement précisées entre parenthèses: [33] (pp. 12-15).

Un terme apparaît en *italique maigre* la première fois qu'il est défini dans le texte. Un passage important est mis en évidence lorsqu'il est composé en *italique gras*.

Les équations hors texte sont numérotées continûment par chapitre et repérées par deux nombres arabes placés entre parenthèses et séparés par un point (3.14). Les figures et tableaux sont numérotés continûment par chapitre et repérés par deux nombres arabes précédés de Fig. (Fig. 4.12) ou Tableau (Tab. 4.13).

De nombreux sigles et acronymes, consacrés par un large usage dans la littérature spécialisée, ont été repris de l'anglais, sans chercher à les adapter à tout prix en français. C'est notamment le cas de la désignation abrégée des sources optiques.



## TABLE DES MATIÈRES

	INTRODUCTION . . . . .	v
CHAPITRE 1	CARACTÉRISTIQUES MÉTROLOGIQUES D'UN SYSTÈME DE MESURE	
	1.1 Modélisation d'un système de mesure . . . . .	1
	1.2 Caractéristique de transfert statique . . . . .	4
	1.3 Caractéristique de transfert dynamique . . . . .	7
	1.4 Combinaison des caractéristiques de transfert . . . . .	25
	1.5 Identification des caractéristiques de transfert. . . . .	29
	1.6 Effets de charge . . . . .	33
CHAPITRE 2	TRAITEMENT DES RÉSULTATS DE MESURE	
	2.1 Notion d'erreur. . . . .	41
	2.2 Représentation graphique d'un ensemble de résultats . . . . .	45
	2.3 Tendance moyenne et dispersion . . . . .	49
	2.4 Population, échantillon. . . . .	51
	2.5 Tests d'hypothèses. . . . .	60
	2.6 Comparaison de distributions. . . . .	65
	2.7 Comparaison de deux moyennes . . . . .	70
	2.8 Comparaison de deux variances . . . . .	73
	2.9 Propagation des erreurs fortuites . . . . .	74
	2.10 Regression et corrélation. . . . .	78
	2.11 Exercices . . . . .	81
CHAPITRE 3	BRUIT, MÉTHODES ACTIVES ET PASSIVES DE RÉDUCTION DU BRUIT	
	3.1 Introduction. . . . .	83
	3.2 Sources de bruit . . . . .	88
	3.3 Blindages et mise à terre . . . . .	98
	3.4 Amplificateur lock-in ou amplificateur synchrone . . . . .	111
CHAPITRE 4	CIRCUITS DE MESURE ANALOGIQUES	
	4.1 Circuits passifs . . . . .	117
	4.2 Circuits actifs . . . . .	128

<b>CHAPITRE 5</b>	<b>ACQUISITION INFORMATIQUE DES MESURES</b>	
	5.1 Introduction . . . . .	139
	5.2 Echantillonnage . . . . .	144
	5.3 Echantillonneur-bloqueur . . . . .	150
	5.4 Convertisseur digital-analogique . . . . .	155
	5.5 Convertisseur analogique-digital . . . . .	160
	5.6 Calibration et performance des convertisseurs A/D. . . . .	168
<b>CHAPITRE 6</b>	<b>SOURCES LUMINEUSES</b>	
	6.1 Energie lumineuse, radiométrie . . . . .	171
	6.2 Sources à incandescence . . . . .	174
	6.3 Sources luminescentes . . . . .	178
	6.4 Sources laser. . . . .	187
	6.5 Propriétés optiques des sources laser . . . . .	195
	6.6 Autres types de laser . . . . .	204
	6.7 Exercices . . . . .	206
<b>CHAPITRE 7</b>	<b>CAPTEURS OPTIQUES PASSIFS</b>	
	7.1 Classification . . . . .	209
	7.2 Propagation de la lumière . . . . .	211
	7.3 Polarisation . . . . .	228
	7.4 Biréfringence . . . . .	238
	7.5 Effets agissant sur la polarisation de la lumière . . . . .	248
	7.6 Exercices . . . . .	261
<b>CHAPITRE 8</b>	<b>CAPTEURS OPTIQUES ACTIFS</b>	
	8.1 Caractéristiques métrologiques des détecteurs optiques . . . . .	263
	8.2 Les détecteurs quantiques . . . . .	265
	8.3 Détecteurs photovoltaïques. . . . .	273
	8.4 Bruit dans les détecteurs optiques. . . . .	281
	8.5 Exercices . . . . .	285
<b>CHAPITRE 9</b>	<b>CAPTEURS À EFFETS THERMIQUES</b>	
	9.1 Echelles de températures. . . . .	287
	9.2 Transmission d'énergie thermique. . . . .	290
	9.3 Thermo-électricité. . . . .	296
	9.4 Variation de résistance électrique . . . . .	306
	9.5 Thermométrie par mesure de fréquence . . . . .	312
	9.6 Exercices . . . . .	314
<b>CHAPITRE 10</b>	<b>CAPTEUR À EFFETS ÉLECTRIQUES</b>	
	10.1 Piézoélectricité . . . . .	317
	10.2 Capteurs piézoélectriques . . . . .	319
	10.3 Capteurs piézorésistifs . . . . .	323
	10.4 Autres capteurs à effets électriques et magnétiques . . . . .	327
	10.5 Exercices . . . . .	330

CHAPITRE 11	ANNEXES	
	11.1 Tables statistiques . . . . .	333
	11.2 Algorithmes de calcul de diverses distributions . . . . .	340
	11.3 Introduction aux tenseurs . . . . .	341
	11.4 Table des capteurs à deux entrées . . . . .	343
	11.5 Exercices . . . . .	343
	SOLUTIONS DES EXERCICES . . . . .	345
	BIBLIOGRAPHIE . . . . .	349
	INDEX ANALYTIQUE . . . . .	353



## CARACTÉRISTIQUES MÉTROLOGIQUES D'UN SYSTÈME DE MESURE

### 1.1 MODÉLISATION D'UN SYSTÈME DE MESURE

#### 1.1.1 Introduction

La modélisation des systèmes de mesure a pour but principal de donner une réponse à la question fondamentale : de quelle façon la représentation d'une grandeur fournie par un instrument ressemble-t-elle à cette grandeur elle-même ? Pour répondre à cette question, les systèmes de mesure sont en général divisés en un certain nombre d'éléments. A titre d'exemple, la figure 1.1 représente le cas d'un manomètre enregistreur.

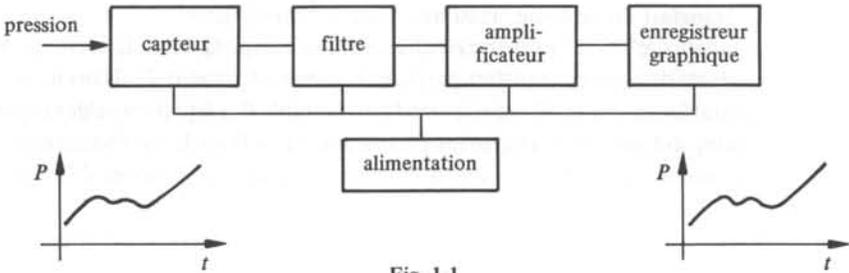


Fig. 1.1

Les performances de chaque élément sont décrites au moyen d'un modèle physique adéquat et mises sous la forme d'une caractéristique de transfert, ensemble souvent complexe d'informations reliant les paramètres de sortie aux paramètres d'entrée de l'élément considéré. Il ne reste qu'à déduire les performances du système de mesure complet en combinant de manière appropriée les caractéristiques de transfert de chaque élément. Cette opération n'est faisable efficacement que si toutes les caractéristiques de transfert sont exprimées dans le même formalisme.

#### 1.1.2 Modèle formel général. Définitions

Il est d'usage d'exprimer les caractéristiques de chaque élément et du système tout entier dans le formalisme découlant du modèle général représenté à la figure 1.2.

On distingue trois types de sollicitations ou grandeurs d'entrée.

Les *mesurandes* ou *grandeurs d'entrée désirées*  $x^d$  sont les grandeurs pour la mesure desquelles le système est spécifiquement conçu.

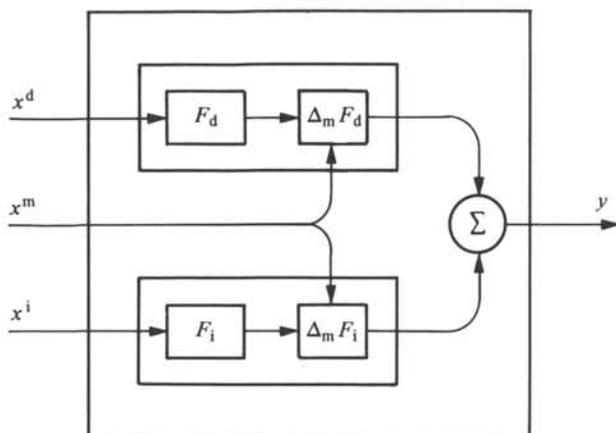


Fig. 1.2 Système ne comprenant qu'une entrée de chaque type.

Les *grandeurs interférentes*  $x^i$  sont les grandeurs auxquelles le système n'est pas intentionnellement sensible. Elles perturbent la mesure, leurs effets se superposent à celui de  $x^d$  à la sortie du système.

Les *grandeurs modifiantes*  $x^m$  sont les grandeurs capables de faire varier la caractéristique de transfert du système, aussi bien pour  $x^d$  que pour  $x^i$ .

Les grandeurs  $x^d$  et  $x^i$  fournissent chacune une composante de la sortie  $y$ , déductible d'une caractéristique de transfert partielle  $F_d$ , respectivement  $F_i$ . Dans le cas de sollicitations statiques,  $F_d$  et  $F_i$  représentent par exemple des équations algébriques, linéaires ou non, soit encore des équations transcendentes. Dans le cas dynamique,  $F_d$  et  $F_i$  peuvent contenir des fonctions aléatoires, représentant des sources de bruit par exemple.

L'effet des grandeurs modifiantes est de faire varier les paramètres intervenant dans  $F_d$  et  $F_i$ , il est représenté symboliquement par  $\Delta_m F_d$  et  $\Delta_m F_i$  sur la figure 1.2.

Le schéma de la figure 1.2 peut être étendu sans difficultés pour le cas le plus courant des systèmes comportant plusieurs grandeurs interférentes et modifiantes.

### 1.1.3 Exemples

Deux exemples servent à illustrer les concepts de grandeur interférente et modifiante. Soit premièrement un système destiné à mesurer l'allongement d'une pièce mécanique au moyen d'une jauge de contrainte, selon le schéma représenté à la figure 1.3.

La résistance de la jauge est donnée par

$$R_J = R_0 + \Delta R \quad (1.1)$$

où

$$\Delta R = KR_0 \epsilon \quad (1.2)$$

avec

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (1.3)$$

La constante  $K$  dépend du type de jauge utilisé. Pour de petites déformations, et lorsque  $R_0 = R$ , la tension de déséquilibre  $U$  du pont est liée à l'allongement spécifique  $\epsilon$  par :

$$U \cong -\frac{K\epsilon}{4} U_0 \quad (1.4)$$

La grandeur interférente la plus évidente ici est la température. Une variation de température, au niveau de la jauge ou du pont lui-même, provoque une variation des résistances  $R_J$  et  $R$  respectivement, faisant apparaître une tension de déséquilibre  $U$  sans aucun rapport avec un allongement de la pièce.

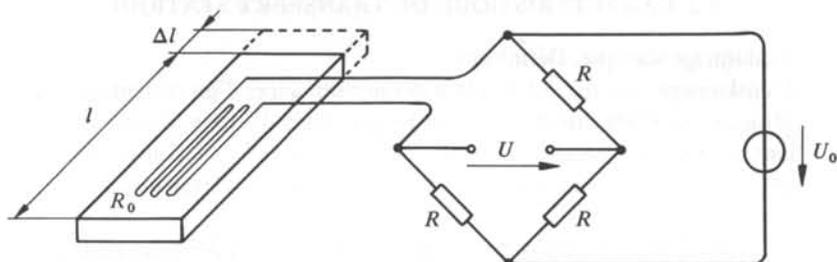


Fig. 1.3

La grandeur modifiante principale est la tension  $U_0$  de l'alimentation. La caractéristique de transfert (1.4) montre que la sensibilité du système, définie par le rapport  $U/\epsilon$ , est directement proportionnelle à  $U_0$ .

Le deuxième exemple concerne un capteur piézoélectrique de pressions relatives, dont la membrane seule est représentée à la figure 1.4.

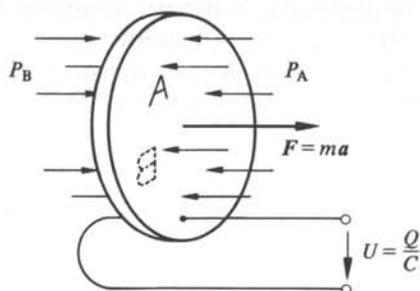


Fig. 1.4

La membrane se déforme principalement sous l'action du mesurande ( $P_A - P_B$ ) et produit une charge  $Q$ . Mais elle se déforme également sous l'effet d'une accélération agissant sur le capteur (champ de la pesanteur terrestre, mouvements d'un véhicule, etc.). L'accélération est donc une grandeur interférente pour ce capteur. La température, l'humidité sont les grandeurs modifiantes dans la mesure où elles ont une action sur les propriétés de la membrane, en modifiant par exemple sa résistance électrique ou son élasticité.

La température apparaît dans les deux exemples ci-dessus, comme grandeur interférente et modifiante. Ce n'est pas un hasard. Il n'existe aucun système physique sur lequel la température n'ait aucun effet, même s'il est parfois négligeable.

### 1.1.4 Expression des caractéristiques de transfert

Dans la règle, on renonce à exprimer les caractéristiques  $F_d$ ,  $\Delta_m F_d$ ,  $F_i$ ,  $\Delta_m F_i$  sous une forme tout à fait générale. Celle-ci serait en effet trop complexe pour être utile, lorsqu'elle est accessible! Par conséquent, on divise l'énoncé des performances d'un système en deux parties: les caractéristiques statiques et les caractéristiques dynamiques. Cette division est arbitraire mais, utilisée avec discernement, elle donne d'excellents résultats.

## 1.2 CARACTÉRISTIQUE DE TRANSFERT STATIQUE

### 1.2.1 Etalonnage statique. Définition

L'*étalonnage statique* est le relevé des performances d'un système de mesure dans les conditions spécifiées suivantes: toutes les grandeurs d'entrée, désirées, interférentes, modifiantes, sont maintenues constantes à l'exception de l'une d'entre elles. On fait varier cette dernière par paliers et la grandeur de sortie est relevée lorsque tout effet transitoire a disparu.

L'énoncé d'une caractéristique de transfert statique n'a donc de valeur que lorsqu'il est accompagné des conditions spécifiées de l'étalonnage statique correspondant. En particulier, les valeurs des grandeurs maintenues constantes doivent être données.

### 1.2.2 Composantes de la caractéristique de transfert statique

La caractéristique de transfert statique est généralement donnée sous la forme d'un ensemble de paramètres, dont les principaux sont définis dans les paragraphes suivants. La grandeur d'entrée sera toujours désignée par  $x$ , qu'il s'agisse d'une grandeur désirée, interférente ou modifiante, la grandeur de sortie par  $y$ .

L'importance relative de chaque paramètre dépend du système considéré. Par exemple, il peut être plus important pour un capteur de pression destiné à la météorologie de présenter une faible hystérésis qu'une haute linéarité. Dans un domaine où les variations de pression sont plus importantes, les exigences peuvent être inversées.

Malgré de nombreux efforts de normalisation, la terminologie utilisée par les fabricants n'est pas parfaitement unifiée, de sorte que certaines propriétés peuvent apparaître sous plusieurs appellations. Les unités dans lesquelles sont donnés les paramètres permettent le plus souvent de lever le doute.

### 1.2.3 Sensibilité. Définition

On appelle *sensibilité* le quotient de l'accroissement de la grandeur de sortie par l'accroissement correspondant de la grandeur d'entrée.

La sensibilité est une constante dans un système linéaire, elle dépend de la valeur  $x_0$  de la grandeur d'entrée dans un système non linéaire (1.5)

$$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Big|_{x=x_0} \quad (1.5)$$

Un exemple d'action de la température sur le diagramme d'étalonnage statique est donné à la figure 1.5.

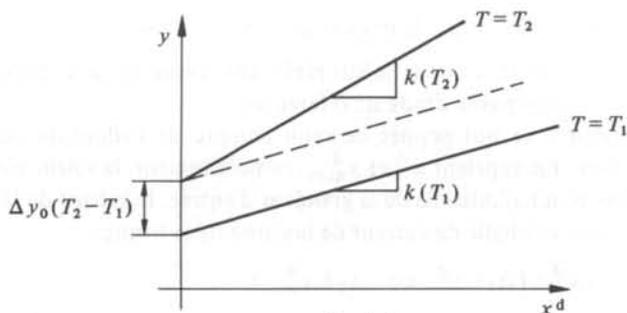


Fig. 1.5

La température est à la fois une grandeur modifiante par son effet sur la sensibilité, et une grandeur interférente car elle fait dériver d'une quantité  $\Delta y_0(T_2 - T_1)$  la grandeur de sortie pour  $x^d = 0$ . Souvent on peut admettre que la température n'a qu'un effet de deuxième ordre et considérer que la sensibilité, respectivement la dérive  $\Delta y_0$  sont des fonctions linéaires de la température.

#### 1.2.4 Décalage de zéro. Définition

Cette notion s'applique essentiellement aux systèmes délivrant une grandeur de sortie théoriquement nulle lorsque la valeur du mesurande est égale à zéro.

On appelle alors *décalage de zéro* (zéro offset) la valeur du mesurande à laquelle correspond *réellement* le zéro de la grandeur de sortie.

Le décalage de zéro est presque toujours fonction de la température.

#### 1.2.5 Linéarité. Définition

La *linéarité* décrit le degré de concordance entre le diagramme d'étalonnage statique et une droite choisie comme référence. Ce peut être la droite des moindres carrés calculée sur les points d'étalonnage, ou la droite joignant les points extrêmes de l'éten due de mesure.

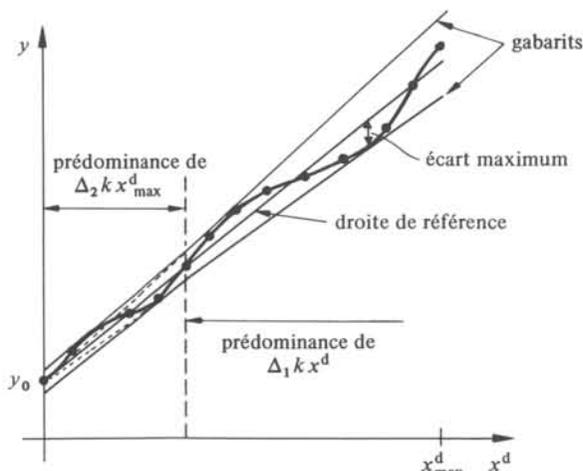


Fig. 1.6

On peut exprimer la linéarité de deux manières (fig. 1.6) :

- par l'écart maximum entre la valeur réelle de la grandeur de sortie et sa valeur théorique donnée par la droite de référence ;
- par un gabarit, ce qui permet de tenir compte de l'allure du diagramme d'étalonnage. En appelant  $x^d$  et  $x_{\max}^d$ , respectivement, la valeur réelle et la valeur maximum admissible de la grandeur d'entrée, le gabarit de la figure 1.6 correspond à un libellé de l'erreur de linéarité de la forme :

$$y = y_0 + kx^d \pm (\Delta_1 kx^d \text{ ou } \Delta_2 kx_{\max}^d) \quad (1.6)$$

où  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont des constantes. Par convention on ne retient dans la parenthèse que le terme dont la valeur est la plus grande.

### 1.2.6 Hystérésis. Définition

Un système présente une *hystérésis* lorsque la valeur de la grandeur de sortie ne dépend pas seulement de la valeur (statique) de la grandeur d'entrée, mais encore de la manière dont celle-ci a été atteinte. L'hystérésis est décrite par l'erreur qu'elle entraîne.

Par définition, c'est l'*écart maximum* entre les valeurs de la grandeur de sortie, lorsque la valeur de la grandeur d'entrée est atteinte à partir du minimum puis du maximum admissibles en valeur algébrique.

L'hystérésis associée à la polarisation magnétique (sect. II.3.8) ou électrique (sect. II.4.9) de la matière donne lieu à une relation  $y = f(x)$  (cycle d'hystérésis) de la forme représentée à la figure 1.7.

Le cycle d'hystérésis associé au frottement sec ou à un jeu dans un mécanisme a l'allure de la figure 1.8.

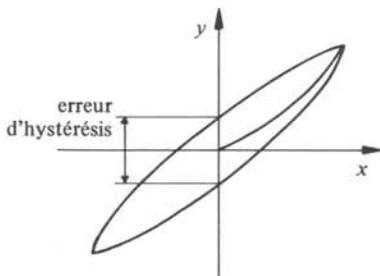


Fig. 1.7

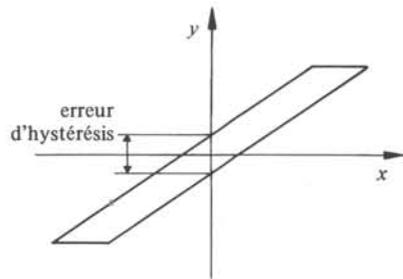


Fig. 1.8

### 1.2.7 Répétabilité. Définition

La *répétabilité* est la marge de fluctuation de la grandeur de sortie, lorsque la même valeur de la grandeur d'entrée est appliquée plusieurs fois successivement et dans le même sens. Ce paramètre peut regrouper des effets d'origines diverses.

### 1.2.8 Résolution. Définition

On appelle *résolution* l'accroissement minimum de la grandeur d'entrée provoquant une modification de la grandeur de sortie. La résolution n'est pas nécessairement constante sur toute l'étendue de mesure.

### 1.2.9 Seuil. Définition

On appelle *seuil* la résolution à l'origine, c'est-à-dire au voisinage de la valeur zéro de la grandeur d'entrée.

### 1.2.10 Dynamique. Définition

La *dynamique* est l'intervalle de variation admissible pour la grandeur d'entrée. On l'exprime souvent en décibels :

$$\text{Dynamique} = 20 \log \frac{x_{\max}}{x_{\text{seuil}}} \quad \text{dB} \quad (1.7)$$

### 1.2.11 Temps d'établissement. Définition

On appelle *temps d'établissement* (settling time) le temps nécessaire pour que l'écart entre la valeur instantanée et la valeur finale de la grandeur de sortie soit inférieur à une valeur spécifiée (1%, 1‰ p. ex.), après l'application d'un signal en échelon à l'entrée (tab. 1.10).

### 1.2.12 Dérive. Définition

On appelle *dérive*, une variation lente de la grandeur de sortie indépendante de la valeur de la grandeur d'entrée. Le vieillissement des composants d'un système, les variations de température (période transitoire à l'enclenchement d'un appareil) peuvent produire une dérive.

### 1.2.13 Relaxation. Définition

Dans de nombreux phénomènes physiques, on observe un décalage temporel entre l'effet et la cause, appelé *relaxation* (fig. 1.9).

De nature exponentielle, la relaxation est donnée sous la forme d'une constante de temps, qui peut varier entre une fraction de microseconde et plusieurs années.

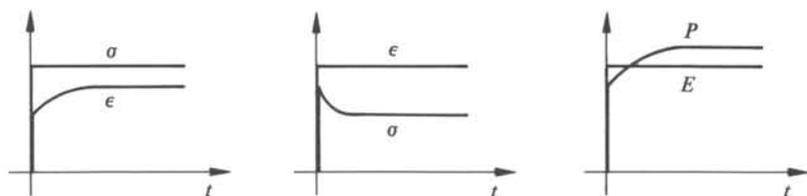


Fig. 1.9 Exemples de relaxation : mécanique :  $\sigma$  = contrainte,  $\epsilon$  = allongement; électrique :  $E$  = champ électrique,  $P$  = polarisation.

## 1.3 CARACTÉRISTIQUE DE TRANSFERT DYNAMIQUE

### 1.3.1 Introduction

L'ensemble des propriétés incluses dans la rubrique *caractéristique de transfert statique* permet, dans la plupart des situations, d'aborder l'étude des propriétés dynami-

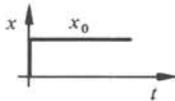
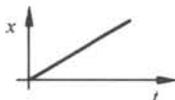
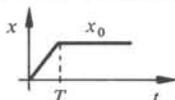
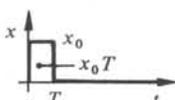
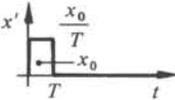
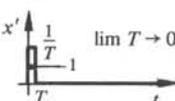
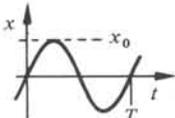
ques d'un système de mesure au moyen de l'équation différentielle ordinaire (1.8)

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x(t) \quad (1.8)$$

Selon les cas, les coefficients  $a_n$  sont déterminés théoriquement par modélisation, ou expérimentalement par analyse du comportement du système soumis à des sollicitations appropriées (sect. 1.5). Les systèmes sont classés en fonction de l'ordre  $n$  de l'équation différentielle qui les représente correctement.

La solution générale de (1.8) pour un système donné présente un intérêt évident, puisqu'elle renferme toute l'information contenue dans le modèle. En pratique, il est très utile de connaître en plus le comportement du système soumis à une grandeur d'entrée  $x$  de forme typique.

Tableau 1.10

Nom	Paramètres	Représentation
Echelon	$x_0$	
Rampe	$R = \frac{dx}{dt}$	
Rampe tronquée	$x_0, T$	
Fonction rectangulaire: a)	$x_0, T$	
Fonction rectangulaire: b)	$x_0, T$	
Fonction de Dirac	—	
Sinus	$x_0, T$	

Le tableau 1.10 définit les fonctions les plus couramment utilisées comme références. L'utilité du changement de variable  $x' = x/T$  dans la fonction rectangulaire b) apparaît plus loin (§ 1.3.8). S'agissant de la fonction de Dirac, ce changement est conforme à la définition.

Les cinq premières fonctions sont nulles pour  $t < 0$ . Elles provoquent donc un régime transitoire. Il en est de même pour le sinus appliqué dès  $t = 0$ . Mais cette fonction peut aussi être considérée comme appliquée dès  $t = -\infty$ . Dans ce cas, seul le régime permanent est présent.

La réponse du système à un signal de forme quelconque est déductible de sa réponse en excitation sinusoïdale dans le domaine des fréquences utiles. Il suffit pour cela d'exprimer la grandeur d'entrée par une série ou une intégrale de Fourier.

### 1.3.2 Système d'ordre zéro. Définition

Par définition, le *système d'ordre zéro* est celui dont la caractéristique de transfert dynamique correspond à (1.9),

$$a_0 y = x(t) \quad (1.9)$$

dans laquelle on retrouve la sensibilité  $k$  définie au paragraphe 1.2.3 :

$$k = 1/a_0 \quad (1.10)$$

Ce système, le plus simple mathématiquement, est aussi, du point de vue métrologique, un système idéal puisque la grandeur de sortie est en toutes circonstances proportionnelle à la grandeur d'entrée.

### 1.3.3 Exemple

En première approximation, un capteur de position à potentiomètre (fig. 1.11) est un système d'ordre zéro.

La grandeur de sortie,  $u$ , est liée à la grandeur d'entrée (abscisse  $x$ ) par :

$$u(t) = \frac{u_0}{l} x(t) \quad (1.11)$$

La sensibilité  $k$  (V/m) est proportionnelle à la tension d'alimentation  $u_0$  et inversement proportionnelle à la course maximum  $l$ .

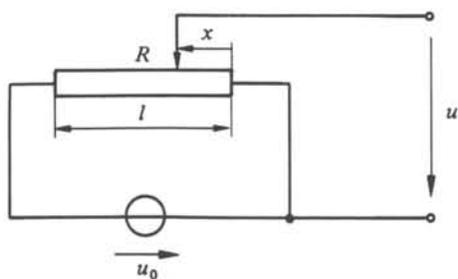


Fig. 1.11

En deuxième analyse, le comportement de ce capteur peut s'écarter de (1.11) pour plusieurs raisons :

- Le déplacement du curseur modifie la géométrie du circuit et par conséquent le flux magnétique. Il en résulte une tension induite, liée à la vitesse du curseur  $dx/dt$ , qui se superpose à  $u$ .
- La résistance du potentiomètre est en réalité une impédance correspondant au schéma équivalent de la figure 1.12.

Or, tout déplacement du curseur provoque une variation du courant  $i(t)$  qui le traverse. La présence des éléments  $L$  et  $C$  a pour effet de déphaser  $i(t)$  et par conséquent  $u(t)$  par rapport à  $x(t)$ .

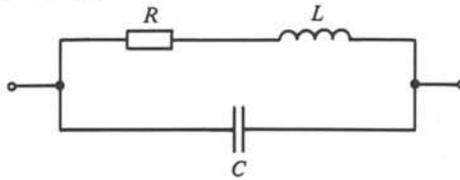


Fig. 1.12

### 1.3.4 Limitations de la caractéristique de transfert

L'équation (1.11) représente bien la conversion position-tension réalisée par le capteur mais elle est insuffisante pour décrire complètement ce dernier, et en particulier son comportement lorsqu'il est intégré dans un système complet : la position  $x(t)$  doit être considérée comme un effet résultant de deux causes. Premièrement, le mouvement de la pièce mécanique dont on veut connaître la position. Deuxièmement, la résistance au déplacement offerte par le curseur du potentiomètre lui-même.

A chaque instant, la valeur de la grandeur d'entrée  $x(t)$  dépend donc de l'objet à mesurer *et* du capteur lui-même. Concernant ce dernier, entrent en ligne de compte la masse du curseur et ses coefficients de frottement statique et dynamique, au sujet desquels l'équation (1.11) est muette.

De même, la grandeur de sortie  $u(t)$  dépend de la résistance  $R$  du potentiomètre, qui ne figure pas dans (1.11) et de l'impédance d'entrée du circuit sur lequel sera branché le potentiomètre.

Ce problème est repris sous forme générale à la section 1.6.

### 1.3.5 Système du 1<sup>er</sup> ordre. Définition

Par définition, le *système du 1<sup>er</sup> ordre* est celui dont la caractéristique de transfert dynamique correspond à

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x(t) \quad (1.12)$$

soit encore

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = k x(t) \quad (1.13)$$

où on reconnaît la sensibilité  $k$ . On appelle  $\tau$  (s) la *constante de temps* du système.

**1.3.6 Réponse d'un système du 1<sup>er</sup> ordre à un échelon**

La solution générale de la partie homogène de (1.13) s'écrit

$$y = C \exp(-t/\tau) \tag{1.14}$$

où  $C$  est une constante d'intégration.

L'équation (1.13) complète admet comme solution particulière:

$$y = k x_0 \tag{1.15}$$

La solution générale de (1.13) est donc

$$y = C \exp(-t/\tau) + k x_0 \tag{1.16}$$

En imposant la condition initiale

$$y = 0 \text{ pour } t = -0 \tag{1.17}$$

il vient

$$y = k x_0 [1 - \exp(-t/\tau)] \tag{1.18}$$

La réponse du système est donnée sous forme adimensionnelle sur la figure 1.13 et le tableau 1.14.

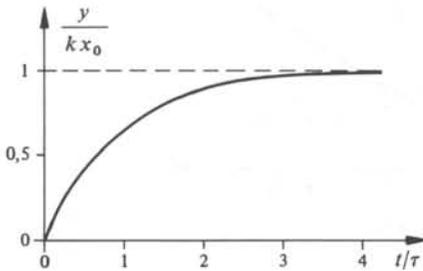


Fig. 1.13

Tableau 1.14

Ecart	$t/\tau$
5 %	3,0
1 %	4,6
5‰	5,3
1‰	6,9

$$\text{Ecart} = \frac{y(\infty) - y(t)}{y(\infty)}$$

**1.3.7 Réponse d'un système du 1<sup>er</sup> ordre à une rampe**

L'équation 1.13 devient

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = k R t \tag{1.19}$$

Une solution particulière de cette équation est de la forme

$$y = C_0 + C_1 t \tag{1.20}$$

d'où par substitution dans 1.19 et identification des coefficients:

$$C_0 = -\tau k R \tag{1.21}$$

$$C_1 = k R \tag{1.22}$$

La solution générale de 1.19 s'écrit donc

$$y = C \exp(-t/\tau) + k R(t - \tau) \tag{1.23}$$

La constante d'intégration  $C$  est déterminée en imposant la condition initiale :

$$y = 0 \text{ pour } t = -0 \quad (1.24)$$

Il vient :

$$y = kR \{ \tau \exp(-t/\tau) + (t - \tau) \} \quad (1.25)$$

La réponse du système (fig. 1.15) comprend donc un terme transitoire et un terme permanent. Il en est de même de l'erreur  $\Delta y(t)$  par rapport à un système idéal (fig. 1.16), définie par :

$$\Delta y(t) = y(t) - kRt \quad (1.26)$$

soit

$$\Delta y(t) = kR\tau \{ \exp(-t/\tau) - 1 \} \quad (1.27)$$

La constante de temps  $\tau$  affecte à la fois la durée de la composante transitoire et l'amplitude de la composante permanente de l'erreur.

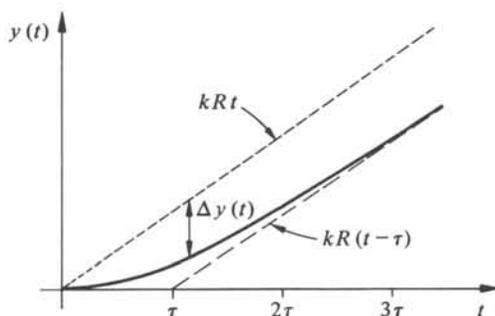


Fig. 1.15

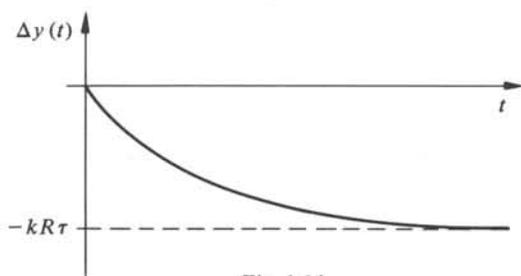


Fig. 1.16

### 1.3.8 Réponse d'un système du 1<sup>er</sup> ordre à une impulsion

On considère le système soumis à l'impulsion représentée à la figure 1.17.

Le changement de variable  $x' = x/T$  effectué sur la grandeur d'entrée est destiné à maintenir constante l'aire de l'impulsion lorsque  $T$  varie, ce qui permet un passage immédiat à l'impulsion de Dirac en faisant tendre  $T$  vers zéro.

Jusqu'à l'instant  $t = T$ , la solution (1.18) est valable :

$$y = \frac{kx_0}{T} [1 - \exp(-t/\tau)] \quad (1.28)$$

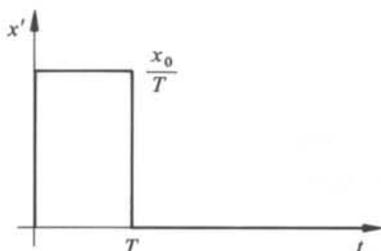


Fig. 1.17

Pour  $t > T$ , seule la partie homogène de (1.13) subsiste, la solution (1.14) est donc valable. La continuité de  $y(t)$  en  $t = T$  impose que

$$\frac{k x_0}{T} [1 - \exp(-T/\tau)] = C \exp(-T/\tau) \quad (1.29)$$

d'où

$$C = \frac{k x_0}{T} [\exp(T/\tau) - 1] \quad (1.30)$$

Finalement, la solution pour  $t > T$  s'écrit

$$y(t) = \frac{k x_0}{T} [\exp(T/\tau) - 1] \exp(-t/\tau) \quad (1.31)$$

Dans le cas d'une impulsion de Dirac de poids  $x_0$ , il vient :

$$y(t) = k x_0 \exp(-t/\tau) \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} [\exp(T/\tau) - 1] \quad (1.32)$$

Le passage à la limite aboutit à une forme indéterminée qu'on peut résoudre par la règle de l'Hospital :

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} [\exp(T/\tau) - 1] = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \exp(T/\tau) = \frac{1}{\tau} \quad (1.33)$$

d'où

$$y(t) = \frac{k x_0}{\tau} \exp(-t/\tau) \quad (1.34)$$

La figure 1.18 illustre le comportement du système à des impulsions d'entrée de durée variable, mais dont le produit amplitude-durée est constant. Sur la figure 1.19, c'est l'amplitude  $x_0$  qui reste constante.

### 1.3.9 Réponse d'un système du 1<sup>er</sup> ordre en régime sinusoïdal

On exprime les grandeurs d'entrée et de sortie par les relations

$$x(t) = \text{Re} \{ \underline{X} \exp(j\omega t) \} \quad (1.35)$$

$$y(t) = \text{Re} \{ \underline{Y} \exp(j\omega t) \} \quad (1.36)$$

Alors, (1.13) devient :

$$j\omega\tau \underline{Y} + \underline{Y} = k \underline{X} \quad (1.37)$$

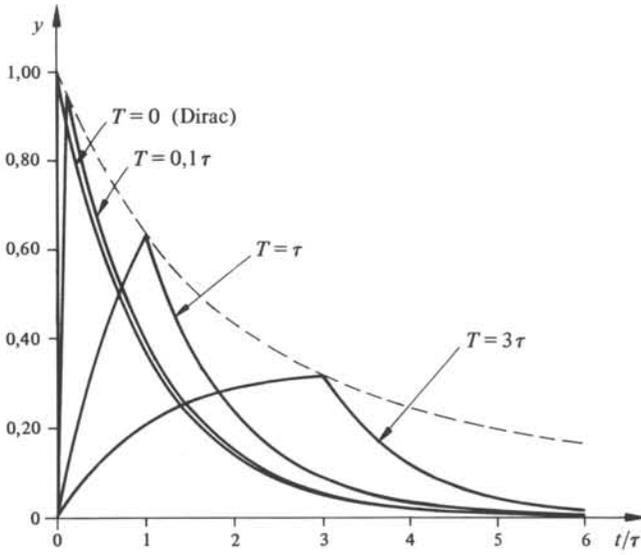


Fig. 1.18

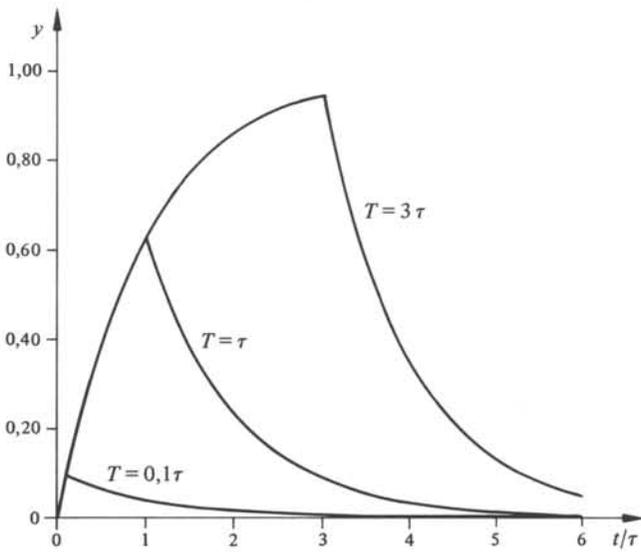


Fig. 1.19

d'où le rapport des amplitudes

$$\frac{|Y|}{|X|} = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \quad (1.38)$$

Le déphasage entre  $X$  et  $Y$  se déduit immédiatement :

$$\varphi = \text{Arctan}(-\omega \tau) \quad (1.39)$$

Les figures 1.20 et 1.21 illustrent les relations (1.38) et (1.39).

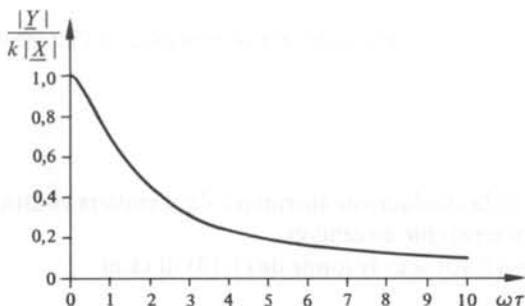


Fig. 1.20

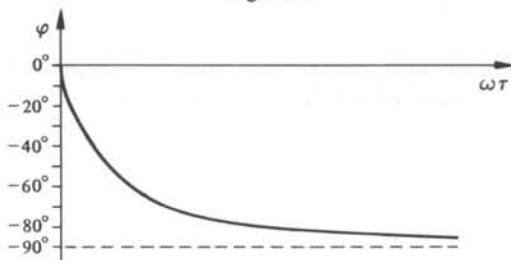


Fig. 1.21

### 1.3.10 Exemple

Les dispositifs dans lesquels intervient un transfert de chaleur fournissent de nombreux exemples de systèmes du 1<sup>er</sup> ordre. La mesure de la température d'un fluide s'écoulant dans une conduite (fig. 1.22) en est un.

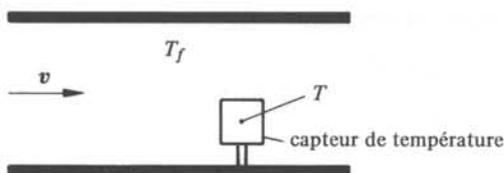


Fig. 1.22

En première approximation, la température  $T$  du capteur est liée à la température  $T_f$  du fluide par la relation

$$\bar{h} A_s (T_f - T) dt = \rho C V dT \quad \text{J} \quad (1.40)$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $C$  la chaleur massique ( $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ ),  $V$  le volume et  $A_s$  la surface extérieure du capteur;  $\bar{h}$  ( $\text{J m}^{-2} \text{K}^{-1} \text{s}^{-1}$ ) est le coefficient de transfert de chaleur moyen à travers  $A_s$ . L'équation (1.40) implique que la température est uniforme dans le capteur, ce qui revient à dire que le transfert de chaleur à travers la surface  $A_s$  est beaucoup moins important qu'à l'intérieur du capteur lui-même. En d'autres termes, la résistance thermique de surface  $R_s$ , définie par

$$R_s = \frac{1}{\bar{h} A_s} \quad (1.41)$$

doit être beaucoup plus grande que la résistance thermique à l'intérieur du capteur  $R_v$  définie par

$$R_v = \frac{1}{\lambda l} \quad (1.42)$$

où  $\lambda$  ( $\text{Jm}^{-1}\text{K}^{-1}\text{s}^{-1}$ ) est la conductivité thermique de la matière constituant le capteur et  $l$  une dimension caractéristique de celui-ci.

On peut mettre (1.40) sous la forme de (1.13). Il vient :

$$\frac{\rho C V}{\bar{h} A_s} \frac{dT}{dt} + T = T_f \quad (1.43)$$

En admettant par exemple que l'élément sensible du capteur délivre un signal électrique directement proportionnel à  $T$ , la constante de temps du capteur sera donnée par (1.44)

$$\tau = \frac{\rho C V}{\bar{h} A_s} \quad (1.44)$$

### 1.3.11 Système du 2<sup>ème</sup> ordre. Définitions

Par définition, le système du 2<sup>ème</sup> ordre est celui dont la caractéristique de transfert dynamique correspond à :

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x(t) \quad (1.45)$$

On met en général cette équation sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{dy}{dt} + y = kx(t) \quad (1.46)$$

Par définition, on appelle  $\omega_0$  (rad/s) la *pulsation propre* du système non amorti,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} \quad (1.47)$$

et  $\xi$  (1) le *facteur d'amortissement* du système,

$$\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} \quad (1.48)$$

Le tableau 1.23 définit la terminologie usuelle associée aux valeurs de  $\xi$ .

Tableau 1.23

$\xi > 1$	sur-amortissement
$\xi = 1$	amortissement critique
$\xi < 1$	sous-amortissement

### 1.3.12 Réponse générale d'un système du 2<sup>ème</sup> ordre

La solution générale de la partie homogène de (1.46) dépend de la nature des racines de l'équation caractéristique :

$$r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0 \quad (1.49)$$

$$r = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (1.50)$$

Lorsque ces racines sont réelles et distinctes, on se trouve dans le cas du sur-amortissement. Alors,

$$y = \exp(-\xi\omega_0 t) [C_1 \exp(\omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}t) + C_2 \exp(-\omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}t)] \quad (1.51)$$

$C_1$  et  $C_2$  sont les constantes d'intégration.

L'amortissement critique correspond au cas où les deux racines sont confondues, ici

$$y = \exp(-\xi\omega_0 t) (C_1 t + C_2) \quad (1.52)$$

Enfin, on est dans le cas de sous-amortissement lorsque les deux racines de (1.50) sont complexes, alors,

$$y = A \exp(-\xi\omega_0 t) \sin[\omega_0\sqrt{1 - \xi^2} t + \varphi] \quad (1.53)$$

$A$  et  $\varphi$  sont les constantes d'intégration.

### 1.3.13 Réponse d'un système du 2<sup>ème</sup> ordre à un échelon

L'équation (1.46) admet comme solution particulière

$$y = kx_0 \quad (1.54)$$

En imposant les conditions initiales :

$$y = 0 \quad \text{pour} \quad t = +0 \quad (1.55)$$

$$\frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad t = +0 \quad (1.56)$$

dictées par la nature physique du système considéré, les solutions générales de (1.46) s'écrivent, sous forme adimensionnelle, de la manière suivante :

Cas  $\xi > 1$  : sur-amortissement :

$$\begin{aligned} \frac{y}{kx_0} = 1 + & \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \exp(-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_0 t) \\ & - \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \exp(-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_0 t) \end{aligned} \quad (1.57)$$

Cas  $\xi = 1$  : amortissement critique :

$$\frac{y}{kx_0} = 1 - (1 + \omega_0 t) \exp(-\omega_0 t) \quad (1.58)$$

Cas  $\xi < 1$  : sous-amortissement :

$$\frac{y}{kx_0} = 1 - \frac{\exp(-\xi \omega_0 t)}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin[\sqrt{1-\xi^2} \omega_0 t + \varphi] \quad (1.59)$$

avec

$$\varphi = \text{Arc sin } \sqrt{1-\xi^2} \quad (1.60)$$

Ces solutions sont représentées graphiquement pour diverses valeurs de  $\xi$  à la figure 1.24.

On constate que  $\omega_0$  est liée directement à la rapidité de réponse du système, alors que  $\xi$  est associé aux oscillations de la réponse autour de la valeur finale. Une augmentation de  $\xi$  réduit les oscillations, mais retarde le moment où la réponse atteint pour la première fois sa valeur finale. Le temps d'établissement dépend à la fois de  $\omega_0$  et  $\xi$ . A chaque bande d'erreur associée au temps d'établissement correspond un couple optimum des valeurs de  $\omega_0$  et  $\xi$ .

On choisit souvent une valeur de  $\xi$  comprise entre 0,6 et 0,7.

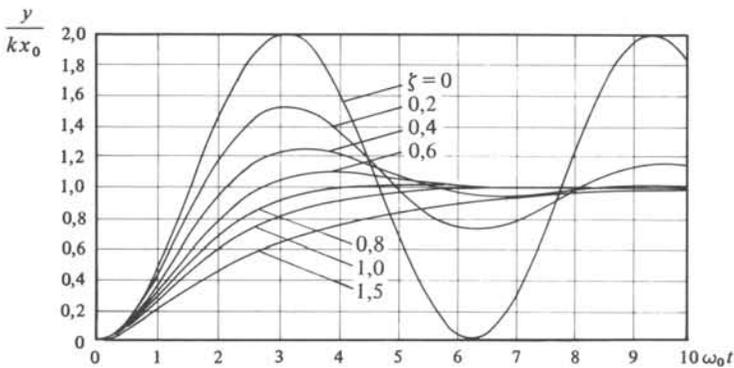


Fig. 1.24

### 1.3.14 Limite de validité de la réponse à un échelon

La fonction échelon est une abstraction mathématique. En réalité, aucun signal physique ne peut subir un accroissement fini en un temps infiniment court. La grandeur d'entrée met donc toujours un certain temps, éventuellement très petit mais jamais nul, pour passer de zéro à  $x_0$ . Cette constatation explique certaines divergences importantes pouvant apparaître entre le comportement réel d'un système et son comportement théorique selon le paragraphe précédent. Le capteur de pression piézoélectrique est un exemple typique. Il possède une fréquence propre  $\omega_0/2\pi$  de l'ordre de 100 kHz et un facteur d'amortissement généralement inférieur à  $\xi = 0,01$ . Le cas d'une onde de choc étant réservé, la période d'oscillation propre du capteur, environ  $10 \mu\text{s}$ , est toujours inférieure de plusieurs ordres de grandeur au temps de montée de la pression. Il convient dans ce cas de remplacer, à l'entrée du système, la fonction échelon par la fonction rampe tronquée. En d'autres termes, l'étude de la réponse d'un système à un échelon n'a de sens que si la période propre du système  $2\pi/\omega_0$  est nettement plus grande que le temps de montée de la grandeur d'entrée.

D'autre part (fig. 1.24), l'amplitude et la durée d'amortissement des oscillations étant plus importantes pour les petites valeurs de  $\xi$ , un faible amortissement renforce l'opportunité d'utiliser la fonction rampe de préférence à la fonction échelon.

### 1.3.15 Réponse d'un système du 2<sup>ème</sup> ordre à une rampe tronquée

En imposant les conditions de la rampe tronquée, soit :

$$x = \frac{x_0}{T} t \quad 0 \leq t < T \quad (1.61)$$

et

$$x = x_0 \quad t \geq T \quad (1.62)$$

la solution générale de (1.46) valable pour le cas du sous-amortissement s'écrit, pour  $0 \leq t < T$ :

$$\frac{y}{k x_0} = \frac{t}{T} - \frac{2\xi}{\omega_0 T} + \frac{\exp(-\xi \omega_0 t)}{\omega_0 T \sqrt{1-\xi^2}} \sin(\sqrt{1-\xi^2} \omega_0 t + \varphi) \quad (1.63)$$

et pour  $t \geq T$

$$\frac{y}{k x_0} = 1 + \frac{\exp(-\xi \omega_0 t)}{\omega_0 T \sqrt{1-\xi^2}} \left\{ \sin(\sqrt{1-\xi^2} \omega_0 t + \varphi) - \exp(\xi \omega_0 T) \right. \\ \left. \sin(\sqrt{1-\xi^2} \omega_0 (t - T) + \varphi) \right\} \quad (1.64)$$

où

$$\varphi = 2 \operatorname{Arctan} \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \quad (1.65)$$

L'équation (1.63) montre que, durant la phase ascendante du signal d'entrée, le signal de sortie présente :

- une erreur permanente :  $-2\xi/\omega_0 T$ ;
- une erreur transitoire à caractère sinusoïdal amorti, dont l'amplitude reste inférieure à  $1/\omega_0 T \sqrt{1-\xi^2}$ .

Dans le cas limite d'un amortissement nul, seule subsiste une erreur sinusoïdale d'amplitude constante dans le temps et égale à  $1/\omega_0 T$ .

Passé l'instant  $t = T$ , l'erreur du signal de sortie présente deux composantes sinusoïdales amorties (1.64). La première est la continuation de l'erreur transitoire pour  $0 < t < T$ . La seconde résulte du changement abrupt de la pente de  $x$  en  $t = T$  (fig. 1.25).

L'écart des comportements d'un système à faible amortissement soumis à un échelon, respectivement à une rampe tronquée, est illustré à la figure 1.26. On constate que l'erreur transitoire, prohibitive dans le cas d'un échelon, est très fortement réduite avec une rampe tronquée dont la phase ascendante est, dans l'exemple, égale à cinq fois la période propre du système.

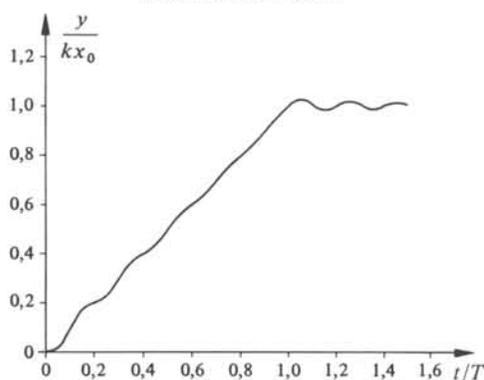


Fig. 1.25 Réponse normalisée à une rampe tronquée.  $\xi = 0,05$ ;  $\omega_0 T/2\pi = 5$ .

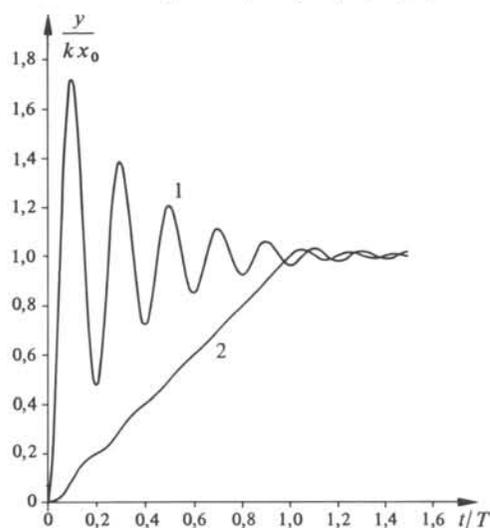


Fig. 1.26 Réponses à un échelon (1) et une rampe tronquée (2).  $\xi = 0,1$ ;  $\omega_0 T/2\pi = 5$ .

### 1.3.16 Réponse d'un système du 2<sup>ème</sup> ordre à une rampe

Pour le signal d'entrée

$$x = Rt \quad (1.66)$$

et les conditions initiales habituelles: (1.55) et (1.56), la solution de (1.46) peut être mise sous la forme

$$\frac{y}{k} = Rt - \frac{2\xi R}{\omega_0} \alpha(t) \quad (1.67)$$

La fonction  $\alpha(t)$  dépend de la valeur du facteur d'amortissement. Pour  $\xi > 1$ , il vient:

$$\begin{aligned} \alpha(t) = 1 + & \frac{2\xi^2 - 1 - 2\xi\sqrt{\xi^2 - 1}}{4\xi\sqrt{\xi^2 - 1}} \exp[(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_0 t] + \\ & + \frac{1 - 2\xi^2 - 2\xi\sqrt{\xi^2 - 1}}{4\xi\sqrt{\xi^2 - 1}} \exp[(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_0 t] \end{aligned} \quad (1.68)$$

Pour  $\xi = 1$

$$\alpha(t) = 1 - \exp \left[ -\omega_0 t \left( 1 + \frac{\omega_0 t}{2} \right) \right] \quad (1.69)$$

Et pour  $\xi < 1$

$$\alpha(t) = 1 - \frac{\exp(-\xi \omega_0 t)}{2\xi \sqrt{1-\xi^2}} \sin(\sqrt{1-\xi^2} \omega_0 t + \varphi) \quad (1.70)$$

où  $\varphi$  est donné par l'équation (1.65).

Les expressions ci-dessus montrent que la réponse présente une erreur permanente d'amplitude normalisée égale à  $-2\xi R/\omega_0$ . Une diminution de  $\xi$  réduit cette erreur mais augmente, pour  $\omega_0$  donnée, l'amplitude des oscillations pendant le régime transitoire. Au cours du temps, la réponse tend asymptotiquement vers une réponse idéale retardée de  $2\xi/\omega_0$  (fig. 1.27).

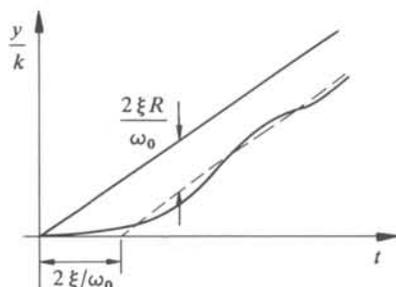


Fig. 1.27 Réponse à une rampe :  $\xi = 0,4$ ;  $R/\omega_0 = 20$ .

### 1.3.17 Réponse d'un système du 2<sup>ème</sup> ordre à une impulsion

On se limite au cas d'une impulsion de Dirac de poids  $x_0$ . La durée de cette impulsion étant infiniment courte, les solutions générales de la partie homogène de l'équation différentielle (1.46) sont valables dès  $t = +0$ . Il reste à trouver les conditions initiales.

On peut montrer [1] qu'elles correspondent à :

$$y(t = +0) = 0 \quad (1.71)$$

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=+0} = k x_0 \omega_0^2 \quad (1.72)$$

On déduit de (1.51), (1.52) et (1.53) les expressions suivantes :

Cas  $\xi > 1$

$$\frac{y}{k x_0 \omega_0} = \frac{\exp(-\xi \omega_0 t)}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \sinh(\sqrt{\xi^2 - 1} \omega_0 t) \quad (1.73)$$

Cas  $\xi = 1$

$$\frac{y}{k x_0 \omega_0} = \omega_0 t \exp(-\omega_0 t) \quad (1.74)$$

Cas  $\xi < 1$

$$\frac{y}{k x_0 \omega_0} = \frac{\exp(-\xi \omega_0 t)}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\sqrt{1-\xi^2} \omega_0 t) \quad (1.75)$$

Les solutions ci-dessus sont représentées à la figure 1.28 pour différentes valeurs de  $\xi$ .

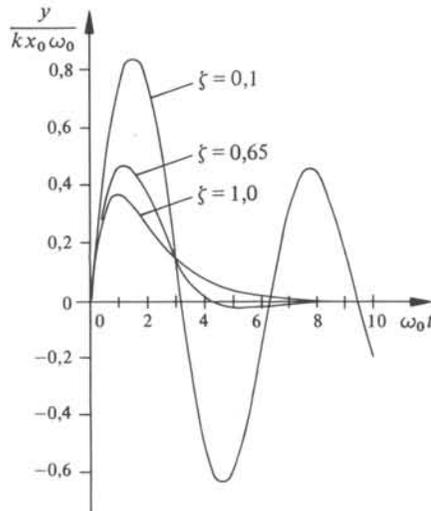


Fig. 1.28

### 1.3.18 Réponse d'un système du 2<sup>ème</sup> ordre en régime sinusoïdal

L'équation (1.40) devient

$$-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \underline{Y} + j2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \underline{Y} + \underline{Y} = k \underline{X} \quad (1.76)$$

Sous forme adimensionnelle, le rapport des modules des grandeurs de sortie et d'entrée vaut :

$$\frac{|\underline{Y}|}{k|\underline{X}|} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (1.77)$$

Le déphasage  $\varphi$  entre  $\underline{Y}$  et  $\underline{X}$  est donné par

$$\varphi = \text{Arctan} \left[ 2\xi / \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \omega_0/\omega \right) \right] \quad (1.78)$$

Les figures 1.29 et 1.30 illustrent le comportement d'un système du 2<sup>ème</sup> ordre en régime sinusoïdal.

Un système du 2<sup>ème</sup> ordre faiblement amorti ( $\xi < 0,4$ ) est utilisable au voisinage immédiat de sa fréquence de résonance si l'obtention d'une sensibilité maximum est primordiale. On constate toutefois que ce gain en sensibilité s'obtient au prix d'une très forte dépendance de l'amplitude du signal de sortie en fonction de la fréquence.

$$\frac{|Y|}{k|X|}$$

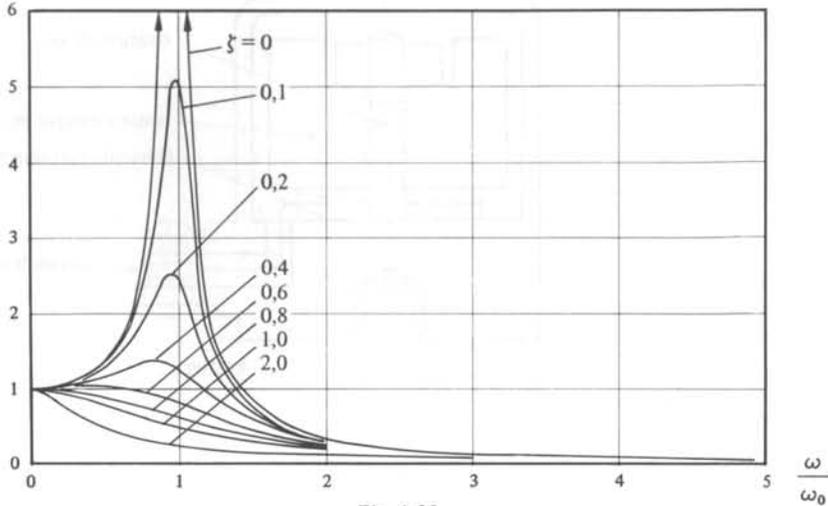


Fig. 1.29

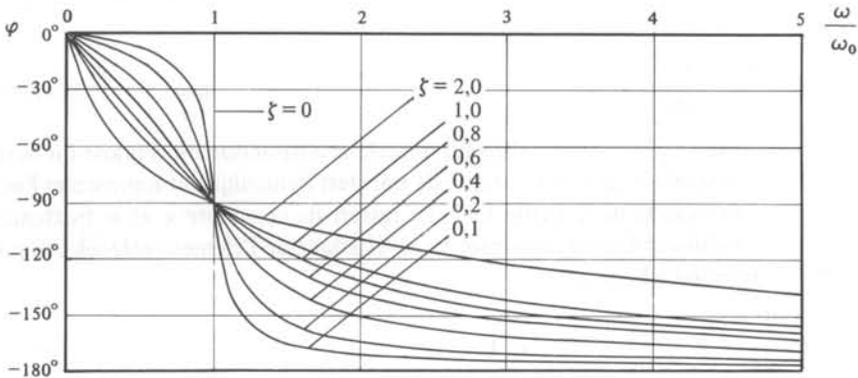


Fig. 1.30

La variation de l'amplitude du signal de sortie en fonction de la fréquence, entre  $\omega = 0$  et le voisinage de  $\omega = \omega_0$ , est minimale pour un facteur d'amortissement compris entre 0,6 et 0,7. Parallèlement, un tel amortissement provoque un déphasage  $\varphi$  variant quasi linéairement avec la fréquence dans tout le domaine  $0 \leq \omega \leq \omega_0$ .

### 1.3.19 Exemples

Les exemples typiques de systèmes du 2<sup>ème</sup> ordre sont, en électricité, les circuits RLC et en mécanique, les dispositifs qui peuvent être modélisés au moyen d'une masse, d'un ressort et d'un élément à frottement visqueux, tels que l'accéléromètre représenté à la figure 1.31.

Cet accéléromètre est de type uniaxial, c'est-à-dire destiné à la mesure d'accéléra-tions dans une direction donnée. Il est constitué d'un boîtier dans lequel une masse sismique  $m_s$  est maintenue en contact avec un élément piézoélectrique au moyen d'une

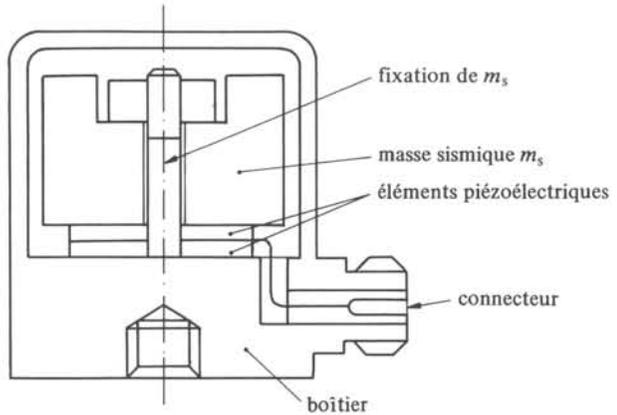


Fig. 1.31 Accéléromètre uniaxial.

tige de fixation. Soit  $m$  la masse totale de l'accéléromètre et  $F$  la force lui communiquant l'accélération à mesurer  $a$ . La rigidité de l'élément piézoélectrique étant toujours suffisante pour que le mouvement relatif de la masse sismique par rapport au boîtier puisse être négligé, on peut écrire

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_s}{m_s} \quad \text{ms}^{-2} \quad (1.79)$$

où  $F_s$  est la force accélérant  $m_s$ . On peut donc faire abstraction de la masse du boîtier dans l'établissement de la caractéristique de transfert dynamique et représenter l'accéléromètre par le modèle de la figure 1.32. Le ressort de constante  $\kappa$  et le frottement visqueux  $\alpha$  traduisent le comportement visco-élastique de l'élément piézoélectrique. Ce modèle correspond à l'équation :

$$m_s \frac{d^2 y}{dt^2} + \alpha \frac{dy}{dt} + \kappa y = F_s(t) \quad \text{N} \quad (1.80)$$

La grandeur de sortie du capteur étant la charge produite par l'élément piézoélectrique, et cette dernière étant admise proportionnelle au déplacement  $y$ , la caractéristique de transfert dynamique est bien du deuxième ordre.

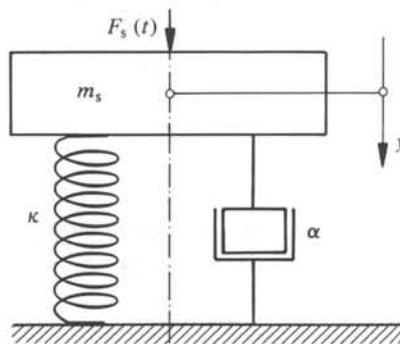


Fig. 1.32 Modèle d'un accéléromètre uniaxial.

## 1.4 COMBINAISON DES CARACTÉRISTIQUES DE TRANSFERT

### 1.4.1 Introduction

Les caractéristiques de transfert statique et dynamique de tous les éléments constituant un système étant connues, il reste à les combiner d'une manière appropriée pour obtenir une description du système complet.

Il n'y a pas de règle absolue pour la combinaison des paramètres statiques. La manière de procéder doit être déterminée de cas en cas. Il arrive souvent que toutes les contributions d'un type (hystérésis par exemple) soient négligeables à l'exception de celle provenant d'un élément déterminé.

Les caractéristiques de transfert dynamique ne se combinent aisément que lorsqu'elles sont exprimées sous la forme de fonctions de transfert.

### 1.4.2 Fonction de transfert

Soit un élément de système dont la relation entre les grandeurs d'entrée et de sortie,  $x(t)$  et  $y(t)$  respectivement, est donnée par

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i x}{dt^i} \quad (1.81)$$

Cette équation différentielle linéaire, à coefficients constants, est une variante de (1.8). La notion de fonction de transfert est liée à l'usage de la transformation de Laplace pour résoudre (1.81). On se conforme à la notation suivante : la fonction  $F(p)$  est la transformée de Laplace de la fonction  $f(t)$  :

$$F(p) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt \quad (1.82)$$

La variable complexe  $p$  se décompose selon :

$$p = \sigma + j\omega \quad (1.83)$$

où  $\sigma$  et  $\omega$  sont des variables réelles. La transformée de la dérivée  $d^n f/dt^n$  notée  $f^{(n)}$ , est donnée [2] par la relation :

$$L[f^{(n)}] = p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1} f_0^{(k)} \quad (1.84)$$

où  $f_0^{(n)}$  désigne la valeur que prend la dérivée  $f^{(n)}$  pour  $t = 0$ .

En prenant la transformée de Laplace des deux membres de (1.81) il vient, compte tenu de (1.84),

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \left[ a_i \left( p^i Y(p) - \sum_{k=0}^{i-1} p^{i-k-1} y_0^{(k)} \right) \right] &= \\ &= \sum_{i=0}^m \left[ b_i \left( p^i X(p) - \sum_{k=0}^{i-1} p^{i-k-1} x_0^{(k)} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.85)$$

On en déduit immédiatement la transformée de la grandeur de sortie :

$$Y(p) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} X(p) - \left[ \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^{i-1} b_i p^{i-k-1} x_0^{(k)}}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} + \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{i-1} a_i p^{i-k-1} y_0^{(k)}}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} \right] \quad (1.86)$$

et la grandeur de sortie elle-même par transformation inverse :

$$y(t) = L^{-1} \left[ \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} X(p) \right] - L^{-1} \left[ \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^{i-1} b_i p^{i-k-1} x_0^{(k)}}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} + \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{i-1} a_i p^{i-k-1} y_0^{(k)}}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} \right] \quad (1.87)$$

Le premier terme du membre de droite de (1.87) représente le régime permanent, le deuxième les régimes transitoires dus aux conditions initiales sur la grandeur d'entrée  $x_0^{(k)}$  et sur la grandeur de sortie  $y_0^{(k)}$ .

Par définition, on appelle *fonction de transfert*  $G(p)$  le facteur de  $X(p)$  dans (1.86), soit

$$G(p) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} \quad (1.88)$$

L'intérêt de la fonction de transfert tient en bonne partie au fait qu'elle définit complètement la relation entrée-sortie de l'élément dans deux cas particuliers importants :

- l'élément est au repos pour  $t < 0$ , c'est-à-dire que tous les  $x_0^{(k)}$  et  $y_0^{(k)}$  sont nuls;
- l'élément, supposé exponentiellement stable, fonctionne en régime permanent sinusoïdal depuis  $t = -\infty$  et l'effet de conditions initiales différentes de zéro a disparu asymptotiquement.

### 1.4.3 Exemples

La fonction de transfert d'un système du 1<sup>er</sup> ordre, défini par (1.13), s'écrit :

$$G(p) = \frac{k}{\tau p + 1} \quad (1.89)$$

Pour un système du 2<sup>ème</sup> ordre, défini par (1.46), on obtient :

$$G(p) = \frac{k}{\omega_0^2 p^2 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + 1} \quad (1.90)$$

#### 1.4.4 Conditions préalables à la combinaison de fonctions de transfert

La combinaison des fonctions de transfert des éléments constituant un système présuppose :

- l'absence de conditions initiales sur tous les éléments (§ 1.4.2);
- l'absence d'effet de charge d'un élément sur un autre.

En effet, la fonction de transfert d'un élément isolé est en général établie en considérant que le signal de sortie de celui-ci ne fournit aucune puissance ou énergie. Si l'introduction d'un élément dans le système produit une charge non négligeable de cet élément, il est nécessaire soit de reporter cette charge sur un élément supplémentaire ad hoc (amplificateur), soit de tenir compte de la charge dans l'établissement de la fonction de transfert. A défaut, le modèle mathématique cesse de représenter correctement le système réel. Ce problème est traité plus en détail dans la section suivante.

#### 1.4.5 Règles de combinaison des fonctions de transfert

Deux règles suffisent pour établir la fonction de transfert du système entier. La fonction de transfert de  $n$  éléments en série (fig. 1.33) est égale au produit des fonctions de transfert de chaque élément.

$$G(p) = \frac{Y_n(p)}{X_1(p)} = G_1(p) G_2(p) \dots G_n(p) \quad (1.91)$$

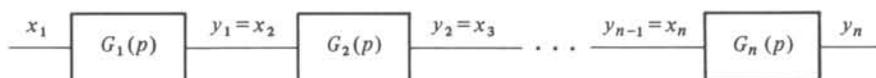


Fig. 1.33

La fonction de transfert d'une boucle de contre-réaction (fig. 1.34) est donnée par

$$G(p) = \frac{G_1(p)}{1 + G_1(p) G_2(p)} \quad (1.92)$$

Les équations (1.91) et (1.92) découlent directement de la définition de la fonction de transfert.

#### 1.4.6 Systèmes en boucle fermée

Les systèmes en boucle fermée (fig. 1.34) présentent un intérêt particulier en métrologie, en raison du rôle fondamental qu'ils jouent dans la mise en œuvre des principes de mesure par comparaison et par compensation (§ 1.6.1).

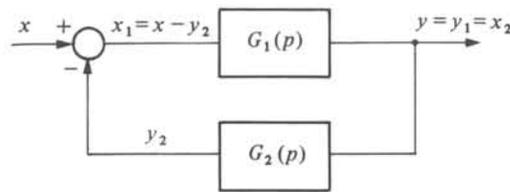


Fig. 1.34

La théorie du contrôle [3, 4], fournit un ensemble de méthodes permettant une analyse très détaillée du fonctionnement de tels systèmes. On se borne ici à rappeler les faits suivants.

L'établissement de la réponse temporelle d'un système bouclé conduit à des calculs laborieux, même pour les configurations simples. La *réponse harmonique* par contre s'obtient facilement. On montre qu'un signal

$$x(t) = A \sin \omega t \quad (1.93)$$

appliqué dès  $t = -\infty$  à l'entrée du système produit à la sortie :

$$y(t) = A |G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi) \quad (1.94)$$

où  $G(j\omega)$  est obtenu à partir de la fonction de transfert en boucle fermée donnée par (1.92) en posant  $p = j\omega$ , c'est-à-dire  $\sigma = 0$ . D'autre part :

$$\phi = \arg G(j\omega) \quad (1.95)$$

La *stabilité* du système peut être étudiée au moyen du diagramme de Nyquist : on trace dans le plan complexe la fonction  $G_0(j\omega)$  obtenue à partir de la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$G_0(p) = G_1(p) G_2(p) \quad (1.96)$$

en posant  $p = j\omega$ . Le système est stable si le point  $-1$  se trouve à la gauche d'un observateur se déplaçant sur la courbe  $G_0(j\omega)$  dans le sens des  $\omega$  croissants (fig. 1.35).

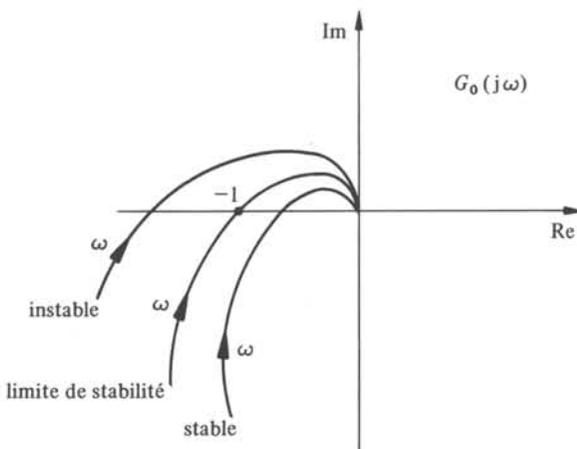


Fig. 1.35

## 1.5 IDENTIFICATION DES CARACTÉRISTIQUES DE TRANSFERT

## 1.5.1 Introduction

La mesure des caractéristiques de transfert statiques n'appelle pas de commentaires particuliers. Cette section est donc consacrée principalement à l'identification des caractéristiques de transfert dynamiques.

1.5.2 Systèmes du 1<sup>er</sup> ordre

La sensibilité  $k$  étant déterminée par un étalonnage statique, il reste à trouver la constante de temps  $\tau$  (1.13). La méthode simpliste consistant à appliquer un signal d'entrée en échelon et à mesurer le temps nécessaire pour que le signal de sortie atteigne 63,2% de sa valeur finale, doit être écartée pour deux raisons: elle ne donne pas d'information concernant la ressemblance du système étudié avec un système du 1<sup>er</sup> ordre d'une part, elle est imprécise car elle repose sur un point de mesure seulement d'autre part.

S'il est indiqué d'appliquer un signal en échelon, il est préférable de tirer  $\tau$  de la fonction linéaire du temps (1.97) déduite de (1.18).

$$\text{Ln} \left( 1 - \frac{y}{kx_0} \right) = \frac{-t}{\tau} \quad (1.97)$$

Une représentation graphique de (1.97) donne immédiatement  $\tau$  et une information visuelle précieuse sur l'adéquation du modèle avec la réalité, par la manière dont les points de mesure s'alignent sur la droite (fig. 1.36). De plus, on dispose très facilement d'une information sous forme numérique par régression linéaire des points expérimentaux sur (1.97): valeur la plus probable et intervalle de confiance sur  $\tau$ , coefficient de corrélation, etc. (sect. 2.10).

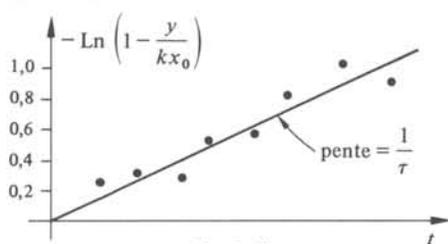


Fig. 1.36

On peut également appliquer un signal d'entrée sinusoïdal et tracer la réponse harmonique (fig. 1.37). Le rapport des modules est donné par (1.38) d'où l'on tire :

$$A = 20 \log \frac{|Y|}{k|X|} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \quad \text{dB} \quad (1.98)$$

La phase est donnée par (1.39).

La constante de temps  $\tau$  s'obtient à partir de la pulsation de transition  $\omega_{tr}$  par la relation :

$$\tau = (\omega_{tr})^{-1} \quad (1.99)$$

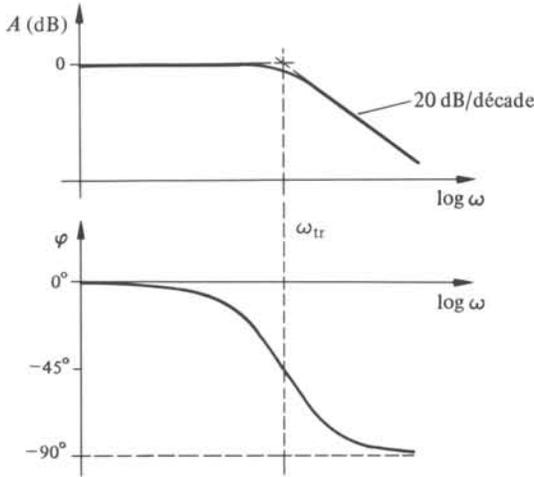


Fig. 1.37

On reconnaît un système du 1<sup>er</sup> ordre aux faits suivants:  $A = 0$  dB jusqu'au voisinage de  $\omega_{tr}$ ;  $A = -20$  dB/décade au-delà de  $\omega_{tr}$ , le déphasage vaut  $45^\circ$  à  $\omega_{tr}$ .

### 1.5.3 Systèmes du 2<sup>ème</sup> ordre

On présente quatre méthodes permettant d'obtenir  $\omega_0$  et  $\xi$ , étant entendu que la sensibilité  $k$  est toujours déterminée de manière indépendante, par étalonnage statique. Le choix de l'une de ces méthodes est souvent dicté par la possibilité matérielle d'imposer un signal d'entrée de forme donnée. En effet, s'il est aisé de créer un signal électrique de forme pratiquement quelconque, il n'en va pas de même avec des variables physiques telles que la pression, l'humidité, les paramètres physiologiques, etc.

La réponse à un échelon d'un système sous-amorti ( $\xi < 1$ ) est du type représenté à la figure 1.38. En mesurant  $D$  et  $T$  on obtient par (1.59):

$$\xi = \left( \left( \frac{\pi}{\text{Ln } D} \right)^2 + 1 \right)^{-1/2} \quad (1.100)$$

et

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T\sqrt{1-\xi^2}} \quad (1.101)$$

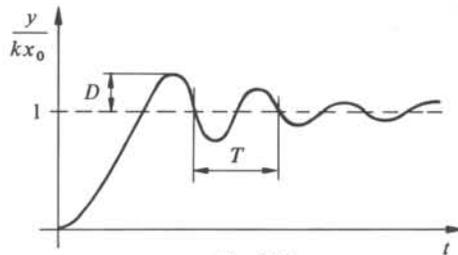


Fig. 1.38

La figure 1.39 montre la réponse d'un système sous-amorti à une impulsion brève, c'est-à-dire de durée nettement inférieure à  $2\pi/\omega_0$ . En mesurant  $T$  on obtient  $\omega_0$  par (1.101), d'autre part, en admettant que  $\sqrt{1-\xi^2} \cong 1$  on tire de (1.75)

$$\xi \cong \frac{\text{Ln}(y_0/y_m)}{2\pi m} \quad (1.102)$$

où  $y_m$  représente l'amplitude après  $m$  pseudopériodes.

Le système est réellement du 2<sup>ème</sup> ordre si  $\omega_0$  et  $\xi$  ne dépendent pas du couple d'alternances choisi pour calculer ces grandeurs.

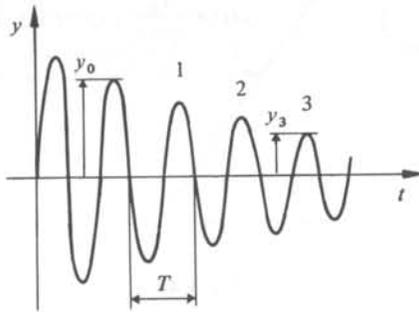


Fig. 1.39

Dans le cas d'un système fortement amorti, il est difficile d'obtenir directement  $\omega_0$  et  $\xi$  à partir de la réponse à un échelon. On effectue alors un changement de variables dans (1.57) en définissant les deux constantes de temps  $\tau_1$  et  $\tau_2$  par :

$$\tau_1 = [(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \omega_0]^{-1} \quad (1.103)$$

$$\tau_2 = [(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \omega_0]^{-1} \quad (1.104)$$

L'équation (1.57) prend la forme :

$$1 - \frac{y}{kx_0} = z_1(t) - z_2(t) \quad (1.105)$$

avec

$$z_1(t) = \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \exp(-t/\tau_1) \quad (1.106)$$

et

$$z_2(t) = \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \exp(-t/\tau_2) \quad (1.107)$$

On obtient alors les constantes de temps  $\tau_1$  et  $\tau_2$  par la procédure suivante (fig. 1.40) :

- Tracer la fonction  $1 - y/kx_0$  dans un système d'axes semi-logarithmique.
- Tracer, par extrapolation linéaire de cette fonction à partir des grandes valeurs de  $t$ , la droite  $z_1(t)$ . On déduit de la pente de  $z_1(t)$  la valeur de  $\tau_1$  par la relation :

$$\tau_1 = \frac{t_2 - t_1}{\text{Ln}(z_1(t_1)/z_1(t_2))} \quad (1.108)$$

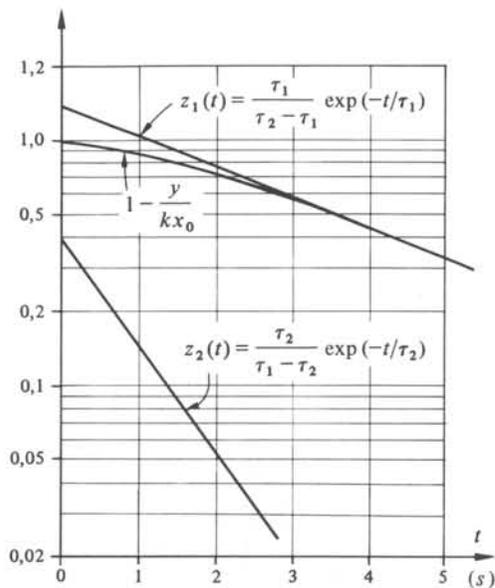


Fig. 1.40

où  $t_1$  et  $t_2$  sont deux instants quelconques, en pratique aussi éloignés que possible l'un de l'autre pour minimiser l'erreur.

- Calculer  $\tau_2$  à partir de l'intersection de  $z_1(t)$  avec l'axe vertical.

L'adéquation du modèle avec la réalité peut être testée en traçant graphiquement  $z_1(t) - (1 - y/kx_0)$ . Les points devraient s'aligner sur la droite  $z_2(t)$ , entièrement définie par (1.107).

Si la réponse harmonique en amplitude est connue, on peut exploiter directement les résultats du paragraphe 1.3.18. La détermination de  $\xi$  et  $\omega_0$  dans le cas d'un système sous-amorti est décrite à la figure 1.41.

L'annulation de la dérivée de (1.77) donne

$$\omega_0 = \omega_{tr} / \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (1.109)$$

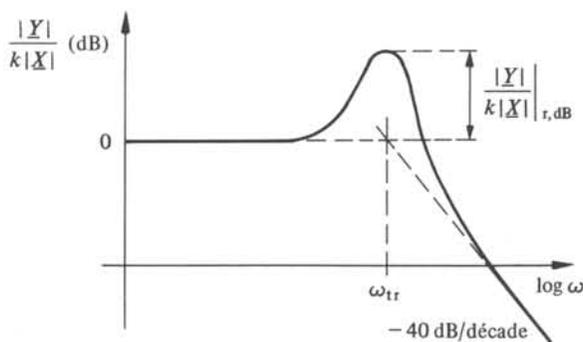


Fig. 1.41

Le facteur d'amortissement est obtenu en résolvant l'équation

$$2\xi\sqrt{1-\xi^2} = 10^{-\frac{1}{20} \left| \frac{|Y|}{k|X|} \right|_{r, \text{dB}}} \quad (1.110)$$

La réponse harmonique est moins caractéristique pour les systèmes sur-amortis (fig. 1.42).

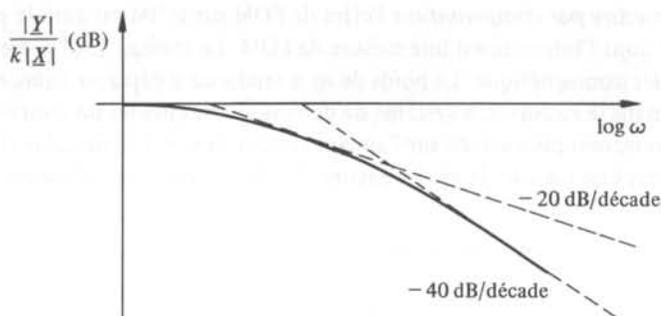


Fig. 1.42

#### 1.5.4 Systèmes quelconques

L'identification de la caractéristique de transfert de systèmes plus complexes que ceux d'ordre 1 ou 2 est possible à partir de la réponse harmonique. La recherche des changements de pente de  $|Y|/k|X|$  (dB) représentée en fonction de  $\log \omega$  est toujours utile pour donner une première idée des fréquences propres du système. La fonction de transfert  $G(p)$  (1.88) peut être déterminée par un ajustement des polynômes  $\sum_{i=0}^m b_i p^i$  et  $\sum_{i=0}^n a_i p^i$  par la méthode des moindres carrés. Les degrés de ces polynômes sont choisis aussi bas que possible pour une exigence de précision donnée. Il est inutile d'élever ces degrés au-delà d'une certaine limite, en raison des corrélations qui apparaissent alors entre les coefficients  $a_i$  et  $b_i$ .

Lorsque la réponse harmonique n'est pas disponible, on utilise le plus souvent la réponse à une impulsion brève, c'est-à-dire une impulsion dont l'amplitude de la transformée de Fourier est constante jusqu'à la fréquence où la réponse du système tombe pratiquement à zéro.

## 1.6 EFFETS DE CHARGE

### 1.6.1 Trois principes de mesure

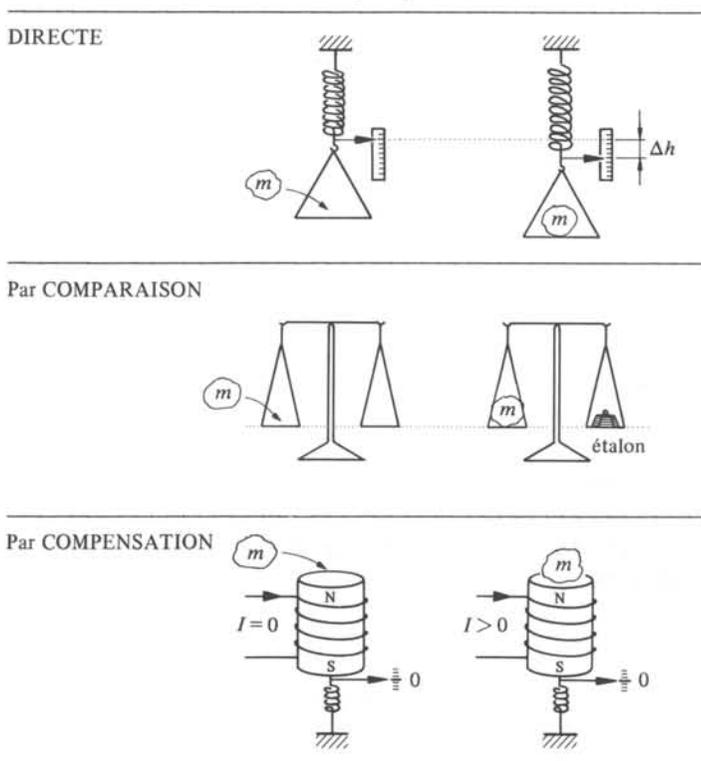
En termes très généraux, l'opération *mesure* est une interaction entre l'objet à mesurer (OM) et le système de mesure (SM). Aux cours de cette interaction, le SM reçoit une information, donc une certaine quantité d'énergie, laquelle peut provenir de l'OM, d'une source auxiliaire ou des deux à la fois. En prenant ce transfert d'énergie comme critère de classification, on peut définir trois principes de mesure. Ces principes sont illustrés au tableau 1.43 pour la mesure d'une masse  $m$ .

Dans la *mesure directe*, l'OM fournit seul l'énergie nécessaire à la mesure, ou tout au moins l'énergie nécessaire au fonctionnement de l'élément du SM jouant le rôle

d'interface avec l'OM. Le fonctionnement d'un peson utilise une énergie  $mg\Delta h$  fournie par l'OM, en l'occurrence la masse  $m$ , qui est prélevée sur la réserve d'énergie potentielle de gravitation de  $m$ . Dans la *mesure par comparaison*, l'OM est comparé à un étalon de *même nature*. L'OM ne fournit pas d'énergie : lorsque la mesure est achevée, la masse  $m$  est à la même altitude qu'avant la mesure. L'énergie nécessaire à la présentation des étalons est fournie de l'extérieur.

Dans la *mesure par compensation* l'effet de l'OM sur le SM est annulé par un processus adéquat dont l'intensité est une mesure de l'OM. Le tableau 1.43 présente le cas de la balance électromagnétique. Le poids de  $m$  a tendance à déplacer l'aimant vers le bas en comprimant le ressort. Un système de détection fait circuler un courant  $I$  tel que la force électromagnétique exercée sur l'aimant ramène la position de celui-ci à l'origine. La valeur de  $I$  est une mesure de  $m$ . Ici encore, l'OM ne fournit pas d'énergie.

Tableau 1.43 Trois principes de mesure.



### 1.6.2 Grandeur associée à $x$

Le transfert d'énergie caractéristique de la mesure directe implique que l'OM délivre au SM, non seulement la grandeur  $x$  à mesurer, mais encore une deuxième grandeur associée à celle-ci :  $\tilde{x}$ , telle que  $x\tilde{x}$  ait la dimension d'une puissance ou, ce qui revient au même,  $\int x\tilde{x} dt$  la dimension d'une énergie. Dans chaque couple  $x\tilde{x}$  l'une des variables appelée *variable d'effort* « fait circuler » l'autre variable, appelée *variable d'écoulement*.

L'énergie consommée par le SM est tantôt limitée (peson par exemple), tantôt indéfinie comme dans le cas d'un voltmètre où finalement, l'énergie utilisée est proportionnelle au temps de branchement de l'appareil. Pour les distinguer on appellera le premier, SM à transfert d'énergie [W], le second SM à transfert de puissance [P]. Les couples  $x\tilde{x}$  les plus courants sont donnés aux tableaux 1.44 et 1.45, complétés par les commentaires a) à m).

- Une tension électrique n'est accessible à la mesure directe que si elle fournit un courant [P] ou une charge [W].
- La mesure directe d'une force implique nécessairement un déplacement de son point d'application. Ce déplacement est soit limité [W] (p. ex. mesure par un ressort) soit indéterminé [P]. Dans ce dernier cas, c'est la vitesse du point d'application qui est la grandeur associée (p. ex. mesure par un frottement visqueux).
- Le commentaire b) se transpose sans autre au cas d'un couple.
- La mesure directe de la pression d'un fluide implique un écoulement de ce fluide. Cet écoulement est soit limité [W] (p. ex. déformation d'une membrane) soit indéterminé [P] (p. ex. mesure du débit à travers une fuite calibrée).
- La mesure directe d'une température implique nécessairement le transfert d'une puissance thermique [P] ou d'une énergie thermique [W].
- La mesure directe d'un courant électrique implique nécessairement la création par ce courant, soit d'une tension électrique [P], soit d'un flux d'induction magnétique [W].

Tableau 1.44

Grandeur d'entrée $x$	Grandeur associée		Résistance généralisée $R = x/\tilde{x}$	Raideur généralisée $S = x/\int \tilde{x} dt$	Commentaires
	(Puissance) $\tilde{x}$	(Energie) $\int \tilde{x} dt$			
Tension électrique V	Courant électrique A	Charge électrique C	Résistance électrique $V/A = \Omega$	$V/C = 1/F$	a
Force N	Vitesse linéaire m/s	Déplacement m	$\frac{N}{m/s}$	N/m	b
Couple Nm	Vitesse de rotation rad/s	Rotation rad	$\frac{Nm}{rad/s}$	$\frac{Nm}{rad}$	c
Pression $N/m^2$	Débit volumique $m^3/s$	Volume $m^3$	$\frac{N/m^2}{m^3/s}$	$\frac{N/m^2}{m^3}$	d
Température K	Coeff. de transfert de chaleur W/K	Transfert de chaleur J/K	$\frac{K}{W/K}$	$\frac{K}{J/K}$	e

$x$  = variable d'effort

Tableau 1.45

Grandeur d'entrée $x$	Grandeur associée		Conductance généralisée $G = x/\tilde{x}$	Compliance généralisée $H = x/\int \tilde{x} dt$	Commentaires
	(Puissance) $\tilde{x}$	(Energie) $\int \tilde{x} dt$			
Courant électrique A	Tension électrique V	Flux d'induction magnétique $\int U dt = \Phi$	Conductance électrique $A/V = S$	$A/Vs$	f
Déplacement m	N/s	Force N	$\frac{m}{N/s}$	$\frac{m}{N}$	g
Rotation rad	Nm/s	Couple Nm	$\frac{rad}{Nm/s}$	$\frac{rad}{Nm}$	h
Vitesse linéaire m/s	Force N	$\int (\text{force}) dt$ Ns	$\frac{m/s}{N}$	$\frac{m/s}{Ns}$	i
Vitesse de rotation rad/s	Couple Nm	$\int (\text{couple}) dt$ Nms	$\frac{rad/s}{Nm}$	$\frac{rad/s}{Nms}$	j
Accélération linéaire $m/s^2$	$\int (\text{force}) dt$ Ns	$Ns^2$	$\frac{m/s^2}{Ns}$	$\frac{m/s^2}{Ns^2}$	k
Accélération de rotation $rad/s^2$	$\int (\text{couple}) dt$ Nms	$Nm^2$	$\frac{rad/s^2}{Nms}$	$\frac{rad/s^2}{Nms^2}$	l
Débit volumique $m^3/s$	Pression $N/m^2$	$\int (\text{pression}) dt$ $\frac{Ns}{m^2}$	$\frac{m^3/s}{N/m^2}$	$\frac{m^3/s}{Ns/m^2}$	m

$x$  = variable d'écoulement

- g) Par nature, un déplacement *unique* ne peut fournir qu'une énergie. La mesure d'un tel déplacement [W] fait nécessairement intervenir une force, tendant à s'opposer à ce déplacement. Un déplacement répétitif, par contre, est susceptible de délivrer une puissance au système de mesure [P] (mesure de l'amplitude d'une vibration p. ex.). Une force tendant à s'opposer au déplacement existe aussi dans ce cas, mais la grandeur associée est la dérivée de cette force par rapport au temps.
- h) Le commentaire g) se transpose sans autre au cas d'une rotation.
- i) La mesure directe d'une vitesse linéaire implique l'existence d'une force de freinage telle que celle résultant d'un frottement visqueux, par exemple [P]. Dans un système de mesure basé sur l'énergie, cette force existe également mais elle n'agit que durant un temps limité. La grandeur associée est l'intégrale sur le temps de cette force.
- j) Le commentaire i) se transpose sans autre au cas d'une vitesse de rotation.
- k) La mesure directe d'une accélération implique également l'existence d'une force tendant à diminuer cette accélération. L'intégrale sur le temps de cette force

est la grandeur associée pour [P]. Dans le cas [W] la grandeur associée est l'intégrale sur le temps de l'intégrale précédente.

- l) Le commentaire k) se transpose sans autre au cas d'une accélération de rotation.
- m) La mesure directe d'un débit volumique implique l'existence d'un obstacle sur lequel le fluide exercera une pression tendant à diminuer ce débit.

### 1.6.3 Effet de charge. Définition

Dans le cas général,  $x$  dépend de  $\tilde{x}$ . La relation entre ces deux grandeurs est différente pour l'OM et le SM.

Le système de mesure, nécessitant  $\tilde{x} \neq 0$  pour fonctionner, perturbe l'objet à mesurer en ce sens que la grandeur  $x$  fournie par l'OM n'a pas la même valeur si le SM est raccordé ( $\tilde{x} \neq 0$ ) ou non ( $\tilde{x} = 0$ ).

On appelle *effet de charge* les modifications de la grandeur à mesurer résultant du raccordement de l'objet à mesurer au système de mesure.

### 1.6.4 Cas des systèmes linéaires

L'OM et le SM sont définis par un seul paramètre chacun, lorsque les relations liant  $x$  à  $\tilde{x}$  (transfert de puissance) ou  $x$  à  $\int \tilde{x} dt$  (transfert d'énergie) sont linéaires. Les

Tableau 1.46

OM	$\xrightarrow{x}$ $\xrightarrow{\tilde{x}}$	var. d'effort var. d'écoulement	$\xrightarrow{x_m}$ $\xrightarrow{\tilde{x}_m}$	SM
TRANSFERT DE PUISSANCE				
$x = x_0 - R \tilde{x}$		$R_m = x_m / \tilde{x}_m$		
TRANSFERT D'ÉNERGIE				
$x = x_0 - S \int \tilde{x} dt$		$S_m = x_m / \int \tilde{x}_m dt$		
$R, R_m$ : résistances généralisées				
$S, S_m$ : raideurs généralisées				
OM	$\xrightarrow{\tilde{x}}$ $\xrightarrow{x}$	var. d'écoulement var. d'effort	$\xrightarrow{x_m}$ $\xrightarrow{\tilde{x}_m}$	SM
TRANSFERT DE PUISSANCE				
$x = x_0 - G \tilde{x}$		$G_m = x_m / \tilde{x}_m$		
TRANSFERT D'ÉNERGIE				
$x = x_0 - H \int \tilde{x} dt$		$H_m = x_m / \int \tilde{x}_m dt$		
$G, G_m$ = conductances généralisées				
$H, H_m$ = compliances généralisées				

quatre cas possibles sont représentés sur le tableau 1.46. Les noms des paramètres  $R, S, G, H$  sont empruntés aux vocabulaires de l'électricité et de la mécanique. Leurs dimensions sont données, pour les variables  $x$  les plus courantes, sur les tableaux 1.44 et 1.45.

### 1.6.5 Erreur due à l'effet de charge

Il est aisé de corriger l'erreur due à l'effet de charge dans le cas de systèmes linéaires. En posant  $\tilde{x} = \tilde{x}_m$  on tire des équations du tableau 1.46 :

$$x_0 = x_m \left( 1 + \frac{\Omega}{\Omega_m} \right) \quad (1.111)$$

où  $x_0$  est la valeur exacte,  $x_m$  la valeur mesurée,  $\Omega$  et  $\Omega_m$  représentant selon les cas  $R, R_m; S, S_m; G, G_m$  ou  $H, H_m$ . L'équation (1.111) montre clairement que l'erreur due à l'effet de charge dépend autant des propriétés de l'objet à mesurer que de celles du système de mesure. L'erreur est d'autant plus faible que  $\Omega$  est petit devant  $\Omega_m$ .

### 1.6.6 Exemple 1

Une illustration élémentaire d'une mesure par transfert de puissance, où  $x$  est une variable d'effort, est donnée par la mesure de la tension à vide  $u_0$  d'une source de résistance interne  $R$ , au moyen d'un voltmètre de résistance interne  $R_v$  (fig. 1.47).

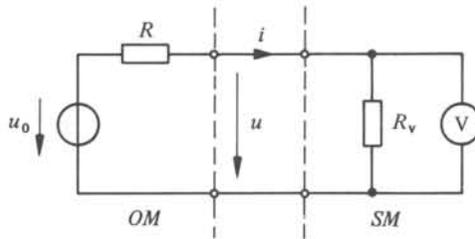


Fig. 1.47

On a  $x = u$ ;  $\tilde{x} = i$ . L'équation de l'OM est  $u = u_0 - Ri$ , celle du SM  $u = R_v i$ , d'où le résultat bien connu

$$u_0 = u \left( 1 + \frac{R}{R_v} \right) \quad (1.112)$$

### 1.6.7 Exemple 2

La même variable d'effort, délivrée par un OM différent, ici un condensateur, peut être mesurée par un système à transfert d'énergie tel qu'un voltmètre électrostatique (fig. 1.48),

$$\text{Equation de l'OM: } u = u_0 - \frac{1}{C} \int i dt$$

$$\text{Equation de SM: } u_m = \frac{1}{C_m} \int i_m dt$$

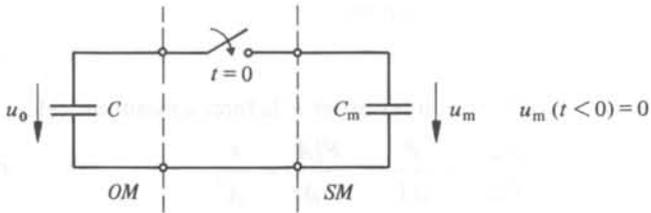


Fig. 1.48

Les raideurs du SM et de l'OM sont donc respectivement  $S = 1/C$  et  $S_m = 1/C_m$  d'où

$$u_0 = u \left( 1 + \frac{C_m}{C} \right) \quad \text{V} \quad (1.113)$$

1.6.8 Exemple 3

On mesure la pression  $P_0$  dans une enceinte (OM) de volume  $V_0$ , au moyen du manomètre à piston (SM) représenté à la figure 1.49. Lorsque le manomètre est branché sur l'enceinte, le piston se déplace de  $\Delta z$ . Typiquement, le SM fonctionne par transfert d'énergie. Avec  $x = P$  (pression),  $f \tilde{x} dt$  a la dimension d'un volume, d'après le tableau 1.44. Tout le dispositif étant supposé isotherme, l'OM est décrit par la loi de Mariotte :

$$PV = P_0 V_0 = \text{constante} \quad \text{Pam}^3 \quad (1.114)$$

or

$$V = V_0 + A \Delta z \quad \text{m}^3 \quad (1.115)$$

d'où, en linéarisant (1.114) sous l'hypothèse que  $A \Delta z \ll V_0$  :

$$P = P_0 - \frac{P_0}{V_0} A \Delta z \quad \text{Pa} \quad (1.116)$$

constatant que  $f \tilde{x} dt = A \Delta z$  on tire, par identification (tab. 1.46)

$$S = \frac{P_0}{V_0} \quad \text{Pam}^{-3} \quad (1.117)$$

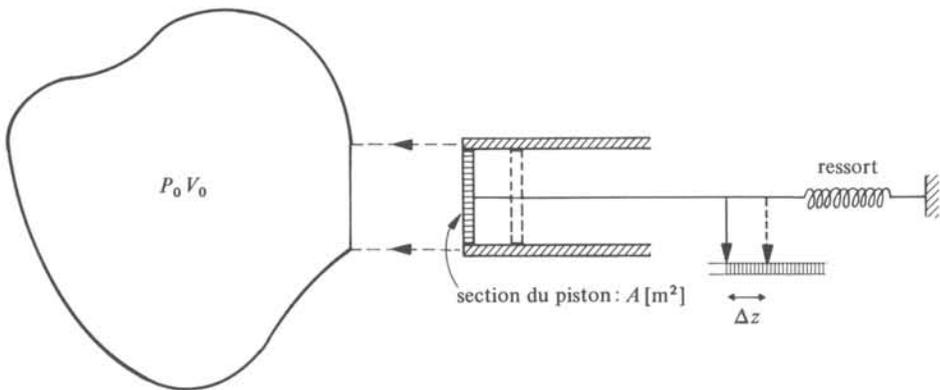


Fig. 1.49

Le SM est décrit par l'équation :

$$F = \kappa \Delta z \quad \text{N} \quad (1.118)$$

où  $\kappa$  est la constante du ressort et  $F$  la force agissant sur celui-ci. On a :

$$S_m = \frac{x_m}{\int \tilde{x} dt} = \frac{P}{\Delta V} = \frac{F/A}{A \cdot \Delta z} = \frac{\kappa}{A^2} \quad \text{Pam}^{-3} \quad (1.119)$$

Finalement,

$$P_0 = P \left( 1 + \frac{P_0 A^2}{V_0 \kappa} \right) \quad \text{Pa} \quad (1.120)$$

La pression dans l'enceinte est peu affectée par la mesure à condition que

$$\frac{P_0 A^2}{V_0 \kappa} \ll 1 \quad (1.121)$$

Comme on devait s'y attendre, il faut pour cela que la constante du ressort soit aussi grande que possible, la section du cylindre aussi petite que possible, et le volume de l'enceinte  $V_0$  suffisamment importante.

### 1.6.9 Conclusion

Toute mesure directe est affectée d'un effet de charge qu'il faut à chaque fois estimer de manière à corriger la valeur obtenue si nécessaire.

## TRAITEMENT DES RÉSULTATS DE MESURE

## 2.1 NOTION D'ERREUR

## 2.1.1 Place de la mesure. Erreurs

La mesure occupe la position d'une interface (fig. 2.1). D'un côté, on trouve toujours une *réalité physique* qui peut être d'origine naturelle ou artificielle. De l'autre, on retrouve soit le monde physique, soit le monde abstrait, selon que la mesure est utilisée pour contrôler directement un processus ou pour élaborer une théorie (modélisation).

Indissolublement liée au domaine concret, une mesure est *toujours* entachée d'une certaine erreur, ceci pour plusieurs raisons. On peut citer par exemple, la présence de grandeurs interférentes et modifiantes, les effets de charge non complètement maîtrisés, le fait qu'un résultat s'exprime nécessairement par un nombre limité de chiffres, l'impossibilité de mesurer directement certaines grandeurs, l'existence de limites fondamentales à la connaissance (principe d'incertitude de Heisenberg, échantillonnage), etc.

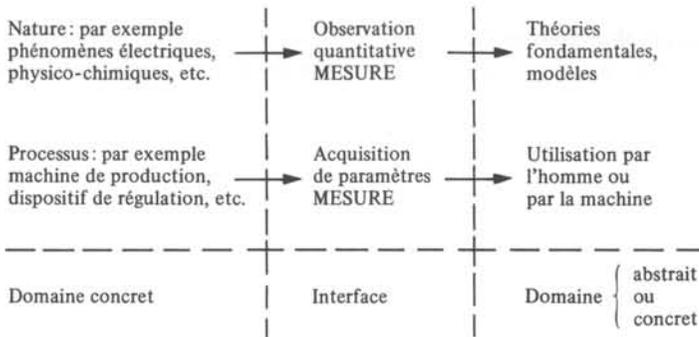


Fig. 2.1

## 2.1.2 Libellé d'un résultat de mesure. Exemple

La présence des erreurs de mesure impose une attention particulière dans la formulation d'un résultat. A supposer par exemple qu'on désire connaître la résistivité du matériau utilisé pour fabriquer un fil électrique. Il faut *mesurer* la résistance  $R$ , la longueur  $l$  et la section  $S$  d'un échantillon du fil, puis calculer la résistivité  $\rho$  en utilisant la relation :

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (2.1)$$

Trois attitudes sont possibles :

- mesurer une fois  $R, l, S$  et calculer  $\rho$  (peu sérieux!);
- mesurer plusieurs fois  $R, l, S$  et tirer une valeur moyenne de  $\rho$  (pas assez sérieux!);
- à partir de plusieurs mesures de  $R, l, S$ , calculer la valeur la plus probable de  $\rho$  ainsi qu'une marge  $\Delta\rho$  comptée à partir de  $\rho$  dans laquelle la valeur réelle de la résistivité a une probabilité donnée, par exemple 95%, de se trouver (tout à fait sérieux!).

En conclusion, pour être complet, un résultat de mesure doit comprendre les quatre éléments suivants :

- la valeur la plus probable;
- une zone d'incertitude entourant la valeur la plus probable;
- la probabilité  $p$  associée à cette zone d'incertitude;
- et bien entendu l'unité utilisée.

Exemple :  $\rho = 17,24 \text{ n}\Omega\text{m} \pm 0,02 \text{ n}\Omega\text{m} \quad (p = 0,95)$

### 2.1.3 Remarque

La nature du problème ci-dessus est totalement différente de celle d'un autre problème qui consiste à calculer la résistance d'un fil dont on connaît la résistivité, la longueur et la section. Dans ce cas, la valeur obtenue par (2.1) est théorique et d'une précision absolue dans le cadre du modèle utilisé (validité de (2.1)).

### 2.1.4 Erreur absolue. Définition

On appelle *erreur absolue* l'écart  $\Delta y$  entre la valeur mesurée  $y$  et la valeur exacte  $y_0$  :

$$\Delta y = y - y_0 \quad (2.2)$$

### 2.1.5 Erreur relative. Définition

On appelle *erreur relative*  $\Delta_r y$ , l'écart entre la valeur mesurée et la valeur exacte, rapporté à une valeur de référence  $R_e$  :

$$\Delta_r y = \frac{y - y_0}{R_e} = \frac{\Delta y}{R_e} \quad (2.3)$$

On peut choisir pour valeur de référence la valeur mesurée. Lorsqu'il s'agit de l'erreur relative d'un appareil,  $R_e$  représente la valeur maximale que peut indiquer l'appareil, sur la gamme utilisée.

### 2.1.6 Erreur systématique. Définition

On appelle *erreur systématique* une erreur d'origine connue, dont la valeur peut être calculée. On corrige donc un résultat de ses erreurs systématiques éventuelles.

Les effets de charge sont une cause très fréquente d'erreurs systématiques.

### 2.1.7 Erreur fortuite. Définition

Une *erreur fortuite* est une erreur dont la valeur dépend du hasard. Cette valeur est inconnue, a priori et a posteriori. Il est donc impossible de corriger une mesure de ses erreurs fortuites. On peut par contre déterminer l'amplitude probable d'une erreur fortuite par l'analyse d'un ensemble de résultats.

L'origine de cette erreur n'est en général pas connue dans tous les détails. On peut citer à titre d'exemples : les frottements dans les mécanismes, le bruit dans les circuits amplificateurs, les perturbations électromagnétiques, etc.

### 2.1.8 Erreur maximale

L'erreur fortuite est une variable aléatoire. Pour la définir complètement, il faut donner, par exemple, sa fonction densité de probabilité, à partir de laquelle un calcul d'erreur détaillé peut être entrepris selon la méthode développée à la section 2.4. Par simplification, et parce que l'erreur fortuite d'un appareil est en général petite, on se borne souvent à donner la valeur maximale que ne dépasse en principe jamais l'erreur fortuite. On peut inclure également dans cette erreur maximale une composante d'erreur systématique.

La simplification obtenue en remplaçant une variable aléatoire, l'erreur fortuite, par une variable certaine, l'erreur maximale, a l'inconvénient de conduire à une surestimation parfois importante des erreurs. C'est le cas principalement dans les systèmes complexes où intervient en général une certaine compensation statistique des erreurs.

### 2.1.9 Lois de propagation des erreurs maximales

En général, le résultat de mesure final  $y$  est obtenu par combinaison d'un certain nombre  $n$  de résultats partiels  $x_i$ . Il importe donc de savoir comment les erreurs maximales sur les  $x_i$  se répercutent sur  $y$ . Soit, sous forme générale,

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.4)$$

On suppose que les  $x_i$  sont indépendants les uns des autres. En développant  $y$  en série de Taylor et en admettant les erreurs suffisamment petites pour que tous les termes d'ordres supérieurs au premier soient négligeables, l'erreur absolue sur  $y$  vaut

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i \quad (2.5)$$

soit encore, pour l'erreur relative :

$$\Delta_r y = \frac{1}{y} \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln y}{\partial x_i} \Delta x_i \quad (2.6)$$

Ces formules sont utilisables sans autre lorsque le signe des  $\Delta x_i$  est connu, ce qui n'est pas toujours le cas. L'erreur maximale d'un appareil est souvent donnée sous la forme  $\pm \Delta_r x_i$ . On peut donc chercher la combinaison de signes rendant l'erreur sur  $y$  maximale, sans perdre de vue que l'estimation ainsi obtenue est souvent très pessimiste.

Les résultats obtenus par (2.5) et (2.6) pour quelques fonctions importantes sont données au tableau 2.2.

Tableau 2.2

Fonction $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$	Erreur absolue $\Delta y$	Erreur relative $\Delta_r y$
$\sum_{i=1}^n x_i$	$\sum_{i=1}^n \Delta x_i$	$\frac{\sum_{i=1}^n \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n x_i}$
$\prod_{i=1}^n x_i$	$\prod_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n \frac{\Delta x_i}{x_i}$	$\sum_{i=1}^n \frac{\Delta x_i}{x_i}$
$\frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\prod_{j=1}^m x'_j}$	$\frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\prod_{j=1}^m x'_j} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\Delta x_i}{x_i} - \sum_{j=1}^m \frac{\Delta x'_j}{x'_j} \right]$	$\sum_{i=1}^n \frac{\Delta x_i}{x_i} - \sum_{j=1}^m \frac{\Delta x'_j}{x'_j}$
$a x$	$a \Delta x$	$\frac{\Delta x}{x}$
$x^n$	$n x^{n-1} \Delta x$	$n \frac{\Delta x}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x) \Delta x$	$\Delta x / \tan(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x) \Delta x$	$-\tan(x) \Delta x$
$\tan(x)$	$\Delta x / \cos^2(x)$	$2 \Delta x / \sin(2x)$

### 2.1.10 Sensibilité de l'erreur relative

Une erreur relative importante est à craindre chaque fois que le résultat final dépend d'une différence de résultats intermédiaires voisins, comme le montre l'exemple suivant. On suppose que la tension  $U_3$  (fig. 2.3) ne peut être déterminée qu'à partir des tensions  $U_1$  et  $U_2$ . Pour mesurer ces deux dernières, on utilise deux voltmètres présentant une erreur fortuite maximale de  $\pm 1\%$ , sur l'échelle de 250 V.

On relève  $U_1 = 220$  V et  $U_2 = 212$  V.

$$U_3 = U_1 - U_2 = 8 \text{ V}$$

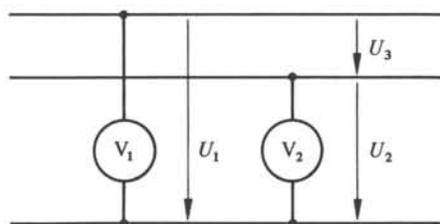


Fig. 2.3

D'autre part,  $\Delta U_3 = \pm (|\Delta U_1| + |\Delta U_2|) = \pm 5 \text{ V}$ . Par conséquent

$$\frac{\Delta U_{3 \max}}{U_3} = \pm \frac{5 \text{ V}}{8 \text{ V}} = \pm 62,5\%$$

Malgré l'usage d'appareils précis (erreur maximale de  $\pm 1\%$ ), le résultat final est entaché ici d'une erreur relative très importante.

## 2.2 REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UN ENSEMBLE DE RÉSULTATS

### 2.2.1 Introduction

Le plus souvent, un *ensemble de résultats* se présente tout d'abord sous la forme d'un tableau, stocké dans la mémoire d'un ordinateur ou non. Il est toujours souhaitable, sinon indispensable, de transcrire cette information sous une forme visuelle. Plusieurs modes de représentation sont possibles. Les plus importants sont décrits ci-dessous, avec leurs caractéristiques particulières. On note que seul le tableau contient *toute* l'information disponible.

### 2.2.2 Histogramme

Soit par exemple un ensemble de mesures de résistances, comprises entre  $387 \Omega$  et  $402 \Omega$  environ. Pour représenter cet ensemble, on divise l'intervalle de résistance concerné en un certain nombre de classes. (On a choisi ici des classes de largeur constante égale à  $1 \Omega$ , dont la valeur moyenne correspond à un nombre entier d'ohm). On distribue ensuite les résistances dans ces classes, et l'on trace des rectangles dont les hauteurs correspondent aux effectifs des classes. La figure ainsi obtenue constitue un *histogramme* (fig. 2.4).

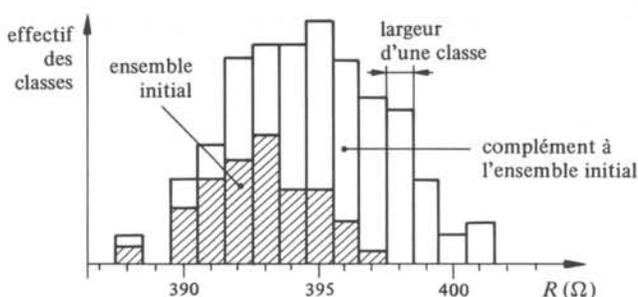


Fig. 2.4 Histogramme.

L'histogramme a l'avantage de donner une information visuelle claire dans tous les cas et de permettre une mise à jour continue par simple surcharge. Ses inconvénients sont la perte de l'identité des mesures, une perte d'information (généralement négligeable) due à la répartition en classes. Il ne donne pas directement l'effectif total des mesures.

Le nombre  $k$  de classes doit être adapté au nombre total  $n$  de mesures. Le choix  $k \cong \sqrt{n}$  représente généralement un compromis valable. Dans certains cas, il est judicieux d'utiliser des classes de largeur variable, par exemple lors d'un test de  $\chi^2$  (§ 2.6.5).

### 2.2.3 Diagramme de dispersion

Soit un ensemble de  $N$  couples de résultats  $\{x_k, y_k\}$ ,  $k = 1$  à  $N$ . Il peut s'agir par exemple des températures  $y$  et des tensions correspondantes  $x$  délivrées par un capteur de température.

On appelle *diagramme de dispersion* l'ensemble des points correspondant à chaque couple de mesures, représenté dans un système d'axes cartésiens (fig. 2.5).

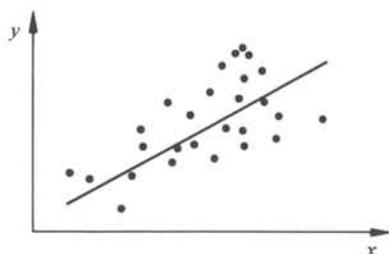


Fig. 2.5 Diagramme de dispersion.

Ce diagramme donne une première idée de la relation entre  $x$  et  $y$ . Une mise à jour continue est possible. Il est impropre à mettre en évidence une relation variable dans le temps, sauf bien entendu si  $x$  ou  $y$  représente précisément le temps. Il ne délivre qu'une information vague concernant la distribution statistique de mesures. L'effectif total n'est pas lisible.

### 2.2.4 Diagramme des fréquences cumulées

Le *diagramme des fréquences cumulées* relatif à un ensemble de  $N$  mesures s'obtient de la manière suivante :

- on classe les mesures  $x$  par ordre croissant;
- sur cette série ordonnée on forme, en procédant à partir des valeurs les plus faibles,  $k$  classes contenant chacune  $N/k$  mesures;
- chacune de ces classes est représentée par un point dans le diagramme. En abscisse, on porte la valeur la plus élevée de la classe n°  $l$  considérée; en ordonnée, la fréquence relative cumulée  $N_l$  :

$$N_l = lN/k \quad (2.7)$$

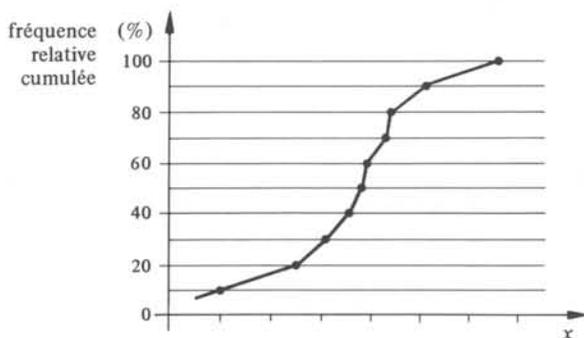


Fig. 2.6 Diagramme des fréquences cumulées, échelles linéaires.

La figure 2.6 est un exemple de diagramme de fréquences cumulées dans lequel on a classé un ensemble de mesures en 10 classes correspondant à des fréquences de 10%. La courbe présente en général l'allure d'un S. Il est possible de transformer cette courbe en une droite par l'usage d'échelles non linéaires appropriées (fig. 2.7).

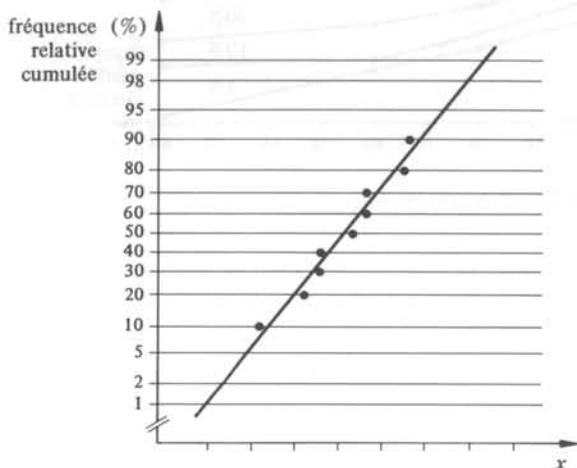


Fig. 2.7 Diagramme des fréquences cumulées d'un ensemble de résultats suivant une distribution normale, représenté avec des échelles normale/linéaire.

Le diagramme des fréquences cumulées donne la tendance moyenne des mesures par la lecture immédiate de la médiane (§ 2.3.3); la dispersion par la lecture immédiate des bornes entre lesquelles se trouve une fraction quelconque des résultats; la possibilité de tester la nature d'une distribution par l'emploi de graduations appropriées (obtention d'une droite).

Ce diagramme ne donne pas l'effectif total, qui doit être indiqué séparément. Il ne peut être complété par de nouveaux résultats, comme l'histogramme par exemple, car il faut à chaque fois recalculer toutes les fréquences cumulées sur la base de l'effectif total.

### 2.2.5 Diagramme de variation des percentiles

Par définition, le  $n^{\text{ième}}$  percentile est la valeur en-dessous de laquelle se trouve  $n$  pour cent de l'ensemble des mesures.

L'étude de la variation des percentiles, au cours du temps par exemple, est un moyen d'analyse fréquemment utilisé. A titre d'exemple, on a représenté à la figure 2.8 la variation des percentiles de la tension de claquage d'un type de condensateur.

La procédure pour établir ce diagramme est la suivante. On doit disposer d'un lot de condensateurs neufs suffisamment important. On prélève de celui-ci un premier échantillon sur lequel on mesure les percentiles au temps  $t = 0$ . Le reste du lot est soumis (dans ce cas) à un traitement correspondant à un vieillissement accéléré. A intervalles réguliers  $\Delta t$ , on extrait du lot restant des échantillons sur lesquels on mesure à nouveau les percentiles. Le diagramme s'obtient en reliant les points relatifs aux mêmes percentiles.

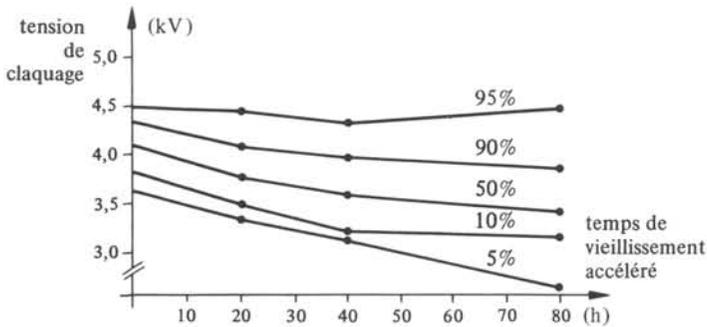


Fig. 2.8 Diagramme de variation des percentiles.

Ce diagramme convient pour l'étude de variations continues observées sur une certaine durée. Il fournit quelques particularités de la distribution (asymétrie, élargissement, etc.). Les résultats provenant d'expériences parallèles (nouvelles données) ne peuvent pas être intégrés directement. L'identité des objets est perdue. L'effectif total n'est pas lisible immédiatement.

### 2.2.6 Résumé comparatif

Seul le tableau des mesures conserve toute l'information obtenue, mais il n'en donne pas une vision claire. Les avantages et inconvénients des autres modes de présentation sont résumés dans le tableau 2.9. Aucun d'entre eux ne donne directement le nombre de mesures effectuées, qui doit être indiqué séparément.

Tableau 2.9

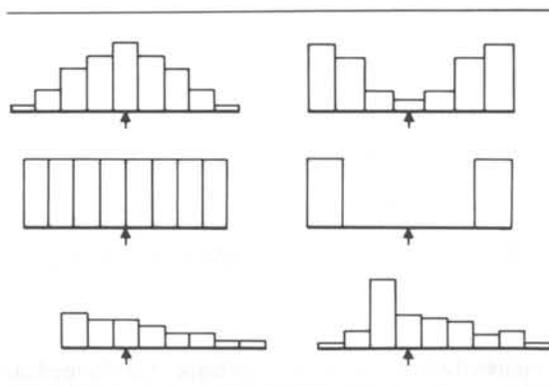
	Histogramme	Diagramme de dispersion	Diagramme des fréquences cumulées	Diagramme de variation des percentiles
Adjonction possible de nouveaux résultats	OUI	OUI	NON	NON
Conservation de l'identité des résultats	NON	OUI	NON	NON
Indication de la tendance moyenne et de la dispersion	~ OUI	NON	OUI	~ NON
Mise en évidence d'une relation entre deux variables	NON	OUI	NON	NON
Test sur la nature de la distribution	~ NON	NON	OUI	NON
Observation d'une fonction du temps	~ OUI	NON sauf si $x$ ou $y = t$	NON	OUI

## 2.3 TENDANCE MOYENNE ET DISPERSION

## 2.3.1 Introduction

Les modes de représentation graphique présentés dans la section précédente sont un premier moyen d'extraire et de concentrer l'information contenue dans un ensemble de résultats. On peut aller plus loin dans cette direction et résumer l'information par deux nombres dont l'un caractérise la *tendance moyenne* des résultats et l'autre leur *dispersion*. Se contenter de la tendance moyenne est notoirement insuffisant, comme le montre le tableau 2.10.

**Tableau 2.10** Ces 6 ensembles de résultats ont la même moyenne arithmétique.



La tendance moyenne est le plus souvent mesurée par la moyenne arithmétique ou la médiane, la dispersion par la variance, l'écart-type ou l'étendue.

## 2.3.2 Moyenne arithmétique. Définition

La *moyenne arithmétique* d'un ensemble de  $N$  valeurs  $\{x_i\}$   $i = 1$  à  $N$ , est définie par :

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (2.8)$$

On utilise aussi la notation  $\bar{x}$  pour  $m$ .

On peut calculer une valeur approchée de  $m$  à partir d'un histogramme. Si  $k$  est le nombre de classes,  $n_i$  l'effectif de la classe n°  $i$  et  $x_{ci}$  sa valeur centrale, on a :

$$m \cong \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_{ci}}{\sum_{i=1}^k n_i} \quad (2.9)$$

La valeur de  $m$  donnée par (2.9) n'est pas strictement exacte en raison de la perte d'information liée à la construction de l'histogramme.

Une formule d'un usage plus rapide que (2.9) est utilisable lorsque la largeur des classes est constante. Soient :

$A$  : la valeur centrale d'une classe de référence proche de la moyenne arithmétique;  
 $c$  : la largeur d'une classe;  
 $d_i = (x_{ci} - A)/c$  compté en valeur algébrique.

On montre (§ 2.11.1) que :

$$m \cong A + \frac{c}{N} \sum_{i=1}^k n_i d_i \quad (2.10)$$

### 2.3.3 Médiane

Soit un ensemble de résultats  $\{x_i\}$   $i = 1$  à  $N$  classés par ordre croissant. On appelle *médiane* de cet ensemble, la valeur

$$\begin{array}{ll} \frac{x_{N/2} + x_{(N/2)+1}}{2} & x_{(N+1)/2} \\ \text{Si } N \text{ est pair} & \text{Si } N \text{ est impair} \end{array} \quad (2.11)$$

La médiane est lisible immédiatement sur le diagramme des fréquences cumulées.

### 2.3.4 Mérites comparés de la moyenne arithmétique et de la médiane

La moyenne arithmétique tient compte de la valeur de tous les résultats. Elle est facile à calculer, car elle ne demande pas de classification. Ses fluctuations d'échantillonnage (§ 2.4.12 et 2.7.1) sont faibles. C'est la mesure de la tendance moyenne la plus utilisée.

La médiane n'est pas influencée par les valeurs extrêmes ce qui peut être utile lorsque la signification de ces valeurs n'est pas assurée ou lorsque le nombre de ces valeurs est seul connu, en raison par exemple de dépassements de gamme. Les fluctuations d'échantillonnage de la médiane sont plus importantes que celles de la moyenne arithmétique. Le temps de calcul est relativement long en raison de la classification nécessaire des résultats.

### 2.3.5 Variance et écart-type

A première vue, on pourrait être tenté de mesurer la dispersion par la somme des écarts à la valeur moyenne, mais, par définition de la moyenne

$$\sum_{i=1}^N (x_i - m) = 0 \quad (2.12)$$

La somme des valeurs absolues de ces écarts n'est en principe pas utilisée, car c'est une grandeur n'intervenant pas de façon pratique dans les calculs statistiques.

Les deux mesures habituelles de dispersion utilisent la somme des carrés des écarts à la moyenne. Ce sont :

La *variance*

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m)^2 \quad (2.13)$$

L'*écart-type*

$$s = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m)^2} \quad (2.14)$$

Le calcul de  $s^2$  par la relation de définition (2.13) est relativement laborieux, car il impose de lire deux fois chaque résultat  $x_i$  : une première fois pour calculer la moyenne, une deuxième fois pour obtenir les écarts par rapport à la moyenne.

On peut montrer (§ 2.11.2) que (2.13) est équivalente à (2.15) :

$$s^2 = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^N x_i \right)^2 / N \right\} \quad (2.15)$$

ou (2.16) si les résultats sont présentés sous la forme d'un histogramme,

$$s^2 \cong \frac{c^2}{N} \left\{ \sum_{i=1}^k n_i d_i^2 - \left( \sum_{i=1}^k n_i d_i \right)^2 / N \right\} \quad (2.16)$$

avec les mêmes notations que pour (2.10).

### 2.3.6 Etendue

Mesure sommaire de la dispersion, l'*étendue* (range en anglais) est par définition la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de l'ensemble  $\{x_i\}$   $i = 1$  à  $N$ . Basée sur deux valeurs seulement, qui de surcroît présentent toujours un risque de n'être pas significatives, l'étendue est en général une grandeur peu fiable.

## 2.4 POPULATION, ÉCHANTILLONS

### 2.4.1 Variable aléatoire. Définitions

La présence inévitable des erreurs fortuites a pour conséquence que tout résultat de mesure est une *variable aléatoire*. Par définition, une variable aléatoire est une variable dont les valeurs, appelées *réalisations*, dépendent du hasard. *Par convention, on désignera les variables aléatoires  $X$  et  $\mathbf{X}$  par des majuscules et leurs réalisations par les minuscules correspondantes, indicées ou non.*

A la notion de variable aléatoire est associée celle de *probabilité*. Parmi les définitions que l'on peut donner de la probabilité, la suivante est la plus utile ici.

Soit une variable aléatoire  $X$  ne prenant que des valeurs discrètes. La probabilité d'observer la réalisation  $X = x_i$  vaut, par définition :

$$\text{Prob}[X = x_i] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n(x_i)}{N} \quad (2.17)$$

où  $n(x_i)$  représente le nombre de fois que s'est produit l'événement  $X = x_i$  sur un nombre total  $N$  de réalisations.

On remarque que

$$\sum_i \text{Prob}[X = x_i] = 1 \quad (2.18)$$

Dans le cas où  $X$  est une variable aléatoire continue, on a

$$\text{Prob}[X = x] = 0 \quad (2.19)$$

On introduit alors une probabilité d'obtenir une valeur de  $X$  située dans un intervalle  $(x, x + dx)$ :

$$\text{Prob}[x \leq X < x + dx] = dF(x) \quad (2.20)$$

On appelle  $F(x)$  la *fonction de répartition de  $X$* . Elle jouit de la propriété suivante:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x dF(x') = \text{Prob}[X < x] \quad (2.21)$$

La fonction de répartition peut être définie pour une variable aléatoire continue ou discrète. Dans le cas d'une variable aléatoire continue, on pose, par définition de  $p(x)$

$$dF(x) = p(x) dx \quad (2.22)$$

On appelle  $p(x)$  la *densité de probabilité de  $X$* . Cette fonction est positive, mais elle n'est pas bornée à 1. Par contre,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = \text{Prob}[-\infty < X < +\infty] = 1 \quad (2.23)$$

La fonction de répartition possède les propriétés suivantes:

- $F(x)$  est non décroissante, de plus  $F(-\infty) = 0$  et  $F(+\infty) = 1$ .
- $1 - F(x) = 1 - \text{Prob}[X < x] = \text{Prob}[X \geq x]$  (2.24)

En effet, d'après l'axiome des probabilités totales:

$$\text{Prob}[X < x \text{ ou } X \geq x] = 1 = \text{Prob}[X < x] + \text{Prob}[X \geq x] \quad (2.25)$$

- $F(b) - F(a) = \text{Prob}[a \leq X < b] \quad (b > a)$  (2.26)

En effet,

$$\text{Prob}[a \leq X < b] = 1 - \text{Prob}[(X \geq b) \text{ ou } (X < a)] \quad (2.27)$$

- Les événements  $X \geq b$  et  $X < a$  s'excluant mutuellement,

$$\text{Prob}[a \leq X < b] = 1 - \text{Prob}[X \geq b] - \text{Prob}[X < a] \quad (2.28)$$

Compte tenu de (2.21) et (2.23), la relation (2.28) démontre (2.26).

**2.4.2 Espérance mathématique. Définition**

L'espérance mathématique  $E(X)$  de la variable aléatoire  $X$  est le nombre défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^N x_i \text{Prob}[X = x_i] \tag{2.29}$$

lorsque  $X$  est une variable discrète pouvant prendre  $N$  valeurs ( $N$  fini ou infini), et par

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx \tag{2.30}$$

si  $X$  est une variable continue de densité  $p$ .

La moyenne arithmétique d'un ensemble de réalisations  $\{x_i\}$   $i = 1$  à  $N$  de  $X$  tend vers  $E(X)$  si  $N \rightarrow \infty$ . Pratiquement, on appelle moyenne cette limite, et on écrit que la moyenne  $\mu = E(X)$ .

**2.4.3 Moments. Définitions**

L'expression  $E[(X - c)^r]$  porte le nom de *moment d'ordre  $r$*  de la variable aléatoire  $X$  par rapport à la valeur  $c$ .

Les moments  $M_r$  par rapport à la moyenne  $\mu$  de  $X$  sont spécialement utilisés. On constate que  $M_0 = 1$ ,  $M_1 = 0$ , par définition de  $\mu$ .

Par définition, le moment d'ordre 2 par rapport à  $\mu$  porte le nom de *variance* ; on la note  $\text{Var}(X)$  ou également  $\sigma^2$  :

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = E[(X - \mu)^2] \tag{2.31}$$

On appelle  $\sigma$  l'écart-type de la variable aléatoire  $X$ . Cette notation permet de le distinguer de l'écart-type  $s$  d'un ensemble de valeurs, défini par (2.13). Si cet ensemble de valeurs est obtenu par un échantillonnage aléatoire de  $X$ , alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s = \sigma \tag{2.32}$$

**2.4.4 Coefficient d'asymétrie**

Le moment d'ordre 3 est lié à la symétrie de  $p(x)$ . On définit le *coefficient d'asymétrie*  $a_3$  par la relation

$$a_3 = M_3 / (M_2)^{3/2} \tag{2.33}$$

La variation qualitative de  $a_3$  est donnée à la figure 2.11.

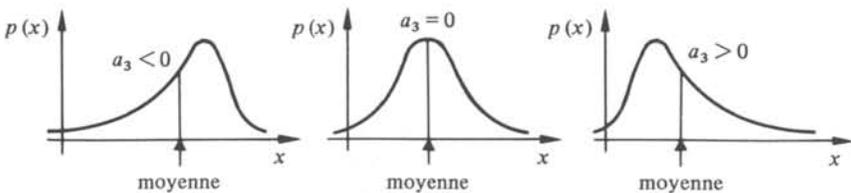


Fig. 2.11

### 2.4.5 Coefficient d'aplatissement

Le degré d'aplatissement de  $p(x)$  est mesuré par le rapport  $M_4/M_2^2$  qui vaut 3 pour la distribution normale. On définit un *coefficient d'aplatissement* par rapport à la distribution normale :

$$a_4 = (M_4/M_2^2) - 3 \quad (2.34)$$

La variation de  $a_4$  est illustrée à la figure 2.12, sur laquelle les 3 distributions ont même variance.

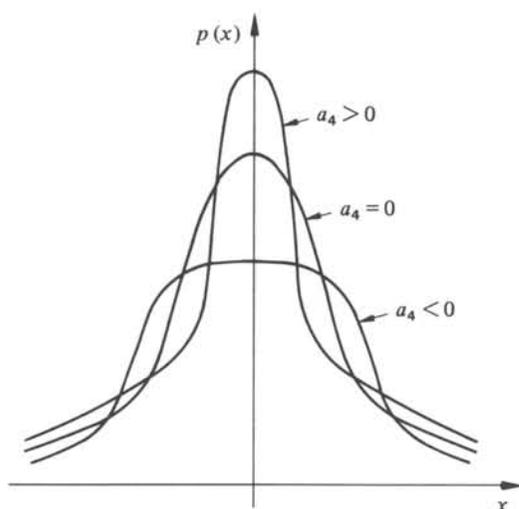


Fig. 2.12

### 2.4.6 Population, échantillonnage et échantillon. Définitions

Chaque résultat de mesure  $x_i$  peut être considéré comme une réalisation particulière d'une variable aléatoire  $X$  dont il est issu. On appelle  $X$  la *variable aléatoire mère*.

Pour la personne effectuant la mesure, cette variable mère est une abstraction mathématique qui contient potentiellement l'ensemble des résultats de mesure qu'elle *pourrait* effectuer. Par définition, cet ensemble porte le nom de *population mère*, ou *univers* des mesures possibles.

Soit maintenant un ensemble ordonné  $\{x_i\}$   $i = 1$  à  $N$  de mesures effectuées dans des conditions identiques, qui sont autant de réalisations particulières de la variable aléatoire  $X$ . Un tel ensemble, *toujours* de dimension finie, porte le nom d'*échantillon* de *taille*  $N$ .

Si l'on dispose de  $k$  échantillons ( $k$  suites de  $N$  mesures), on peut considérer que chaque échantillon (le  $j$ -ième est noté:  $\{x_i^{(j)}\}$   $i = 1$  à  $N$ ) constitue *une* réalisation d'une variable aléatoire *vectorielle*  $\mathbf{X}$  dont chaque composante  $X_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) est elle-même une variable aléatoire:  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$  (fig. 2.13).

Par définition,  $\mathbf{X}$  porte le nom d'*échantillonnage*.

Le problème fondamental consiste à connaître, à l'aide d'échantillons qui sont les réalisations d'un échantillonnage, la variable mère  $X$ . Pour résoudre ce problème, les

questions suivantes doivent trouver une réponse :

- Quels paramètres de la population désire-t-on connaître ?
- Comment accéder à ces paramètres (choix des estimateurs) ?
- Quelle précision peut-on atteindre sur l'évaluation de ces paramètres ?

### 2.4.7 Echantillonnage aléatoire

Soit une population et sa variable mère  $X$  de densité de probabilité  $p(x)$ . On tire de cette population un ensemble de  $k$  échantillons de taille  $N$ , à l'aide de l'échantillonnage  $\mathbf{X}$  (fig. 2.13).

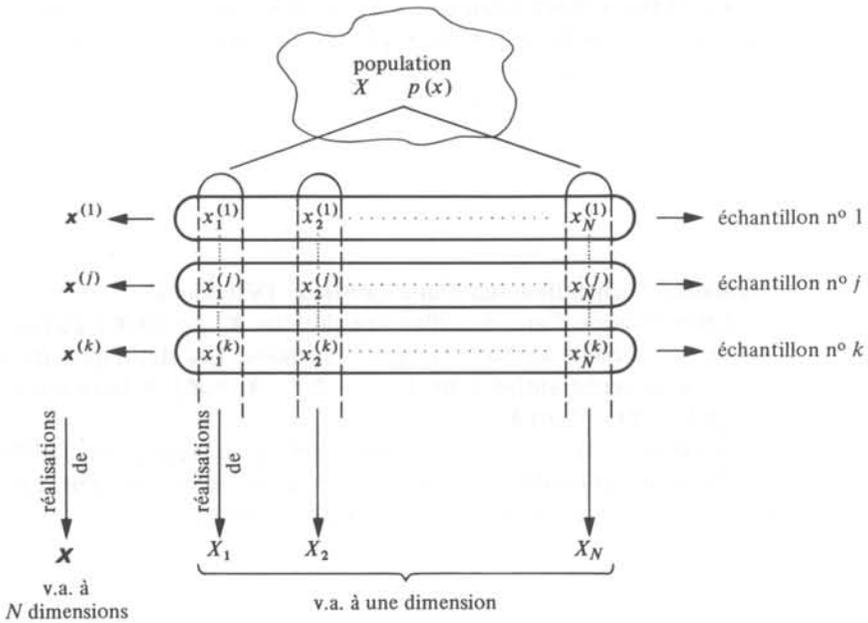


Fig. 2.13 Notation:  $x_i^{(j)}$  représente la réalisation de  $X$  occupant le rang  $i$  dans l'échantillon  $j$ .

Soit

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = p_{(X_1, \dots, X_N)}(\mathbf{x}) \tag{2.35}$$

la densité de probabilité de  $\mathbf{X}$ .

Par définition,  $\mathbf{X}$  est un *échantillonnage aléatoire* si les deux conditions

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2) \dots p_{X_N}(x_N) \tag{2.36}$$

$$p_{X_1}(x_1) = p_{X_2}(x_2) = \dots = p_{X_N}(x_N) = p(x) \tag{2.37}$$

sont remplies.

La première condition signifie que tous les résultats d'un même échantillon sont indépendants les uns des autres (théorème sur l'indépendance des variables aléatoires [5]), c'est-à-dire que les composantes de l'échantillonnage sont indépendantes.

La seconde condition implique que ces composantes sont effectivement des «copies» de la variable mère  $X$ .

En conclusion, un échantillonnage n'a de valeur (dans le sens d'être représentatif de la variable mère  $X$ ) que si (2.36) et (2.37) sont satisfaits. *Dans la suite de ce chapitre, tous les échantillonnages sont supposés aléatoires.*

#### 2.4.8 Conditions pratiques d'échantillonnage aléatoire

Les relations (2.36) et (2.37) ne donnent aucune information sur la façon d'effectuer pratiquement un échantillonnage aléatoire, opération qui peut présenter certaines difficultés. La relation d'indépendance (2.37) peut être contrôlée d'une certaine manière en comparant les densités de probabilité de plusieurs composantes de l'échantillonnage, mais il est difficile de s'assurer que ces distributions sont bien identiques à celles de la variable mère. Une procédure possible consiste à attribuer un nombre à chaque élément de la population, pour sélectionner ensuite les éléments devant constituer l'échantillon au moyen d'une table de nombres aléatoires.

#### 2.4.9 Fluctuation d'échantillonnage d'une statistique. Définitions

Soit  $Z$  une fonction d'un échantillonnage aléatoire  $\mathbf{X}$ :  $Z = Z(\mathbf{X})$ . La fonction  $Z$  est elle-même une variable aléatoire, appelée *statistique*. Les statistiques les plus connues sont la moyenne arithmétique ( $Z = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i = \bar{\mathbf{X}}$ ) et la variance ( $Z = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{\mathbf{X}})^2 = \text{Var}(\mathbf{X})$ ).

Les réalisations  $z_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) de  $Z$  correspondent aux réalisations  $\{\mathbf{x}^{(j)}\}$   $j = 1$  à  $k$  de  $\mathbf{X}$ . Elles sont a priori différentes les unes des autres, ce qui constitue le phénomène appelé *fluctuation d'échantillonnage* de la statistique  $Z$ .

#### 2.4.10 Estimateur. Définition

Soit  $\mathbf{X}$  un échantillonnage aléatoire d'une variable mère  $X$  (fig. 2.13) et soit  $a$  un paramètre de  $X$ , tel que son espérance mathématique, l'un de ses moments, etc.

Soit

$$\hat{A} = \hat{A}(\mathbf{X}) \quad (2.38)$$

une statistique dont les réalisations  $\hat{a}_i$  sont des estimations de  $a$ .

Par définition,  $\hat{A}$  est un *estimateur* de  $a$ . Par la suite, on réserve le signe  $\hat{\phantom{a}}$  pour désigner les estimateurs.

On appelle *biais*  $b_{\hat{A}}$  la grandeur définie par

$$b_{\hat{A}} = E(\hat{A}) - a \quad (2.39)$$

Lorsque  $b_{\hat{A}} = 0$ , l'estimateur  $\hat{A}$  est *non-biaisé*.

Par définition, la *variance d'un estimateur*  $\hat{A}$  est donnée, conformément à (2.31) par :

$$\text{Var}(\hat{A}) = E[(\hat{A} - E(\hat{A}))^2] \quad (2.40)$$

C'est une mesure de la dispersion de l'estimateur. Un estimateur est *bon* si son biais et sa variance sont faibles. L'estimateur  $\hat{A}$  est *consistant* si :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} b_{\hat{A}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{A}) = 0 \quad (2.41)$$

#### 2.4.11 Erreur sur une estimation

Un point important est d'évaluer l'erreur sur une estimation  $\hat{a}$  du paramètre  $a$  à laquelle on peut s'attendre.

Si l'on connaît la variance de l'estimateur  $\hat{A}$  et son biais, il est possible de déduire l'écart quadratique moyen de l'estimation  $\hat{a}$  par la relation :

$$E[(\hat{A} - a)^2] = \text{Var}(\hat{A}) + b_{\hat{A}}^2 \quad (2.42)$$

#### 2.4.12 Estimation de la moyenne d'une population mère

La moyenne d'un échantillon,  $m$ , est une valeur connue avec certitude, donnée par (2.8). Par contre, la moyenne arithmétique d'un échantillonnage  $\mathbf{X}$ , notée  $\bar{\mathbf{X}}$  est une statistique (§ 2.4.9) donnée par :

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad (2.43)$$

L'espérance mathématique de cette statistique s'écrit :

$$E[\bar{\mathbf{X}}] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E(X_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E(X) = \mu \quad (2.44)$$

*La moyenne  $\bar{\mathbf{X}}$  est donc un estimateur non-biaisé de l'espérance mathématique de la variable mère  $X$ . On peut donc la noter  $\hat{\bar{\mathbf{X}}}$ .*

La variance de cette moyenne,

$$\text{Var}(\hat{\bar{\mathbf{X}}}) = E[(\hat{\bar{\mathbf{X}}} - \mu)^2] \quad (2.45)$$

se calcule de la façon suivante : par définition de  $\hat{\bar{\mathbf{X}}}$ , on a

$$\text{Var}(\hat{\bar{\mathbf{X}}}) = E \left[ \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu) \right)^2 \right] \quad (2.46)$$

En introduisant les variables centrées

$$X'_i = X_i - \mu \quad i = 1, \dots, N \quad (2.47)$$

il vient

$$\text{Var}(\hat{\bar{\mathbf{X}}}) = \frac{1}{N^2} E \left[ \left( \sum_{i=1}^N X'_i \right)^2 \right] \quad (2.48)$$

soit encore

$$\text{Var}(\hat{\bar{\mathbf{X}}}) = \frac{1}{N^2} \left\{ \sum_{i=1}^N E(X_i'^2) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N E(X'_i X'_j) \right\} \quad (2.49)$$

Le second terme du membre de droite de (2.49) est nul car, d'une part l'indépendance de  $X'_i$  et  $X'_j$  entraîne que

$$E(X'_i X'_j) = E(X'_i) \cdot E(X'_j) \quad i \neq j \quad (2.50)$$

et d'autre part,

$$E(X'_i) = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (2.51)$$

car l'espérance mathématique d'une variable centrée est nulle.

Finalement,

$$\text{Var}(\hat{\bar{X}}) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N E[(X_i - \mu)^2] = \frac{\text{Var}(X)}{N} \quad (2.52)$$

On remarque que  $\hat{\bar{X}}$  est un estimateur consistant de l'espérance mathématique  $E(\bar{X})$  de la variable mère, puisque son biais est nul et que sa variance tend vers zéro lorsque la taille de l'échantillon augmente indéfiniment.

### 2.4.13 Estimation de la variance d'une population mère

En répétant la démarche du paragraphe précédent pour la variance  $S^2$  de l'échantillonnage  $\mathbf{X}$  défini par

$$S^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{\mathbf{X}})^2 \quad (2.53)$$

on trouve que  $S^2$  est un estimateur biaisé de la variance  $\sigma^2$  de la variable mère :

$$E(S^2) < \sigma^2 \quad (2.54)$$

Une correction mineure permet de supprimer le biais. On a :

$$E(S^2) = E \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{\mathbf{X}})^2 \right] \quad (2.55)$$

En ajoutant et en retranchant la moyenne  $\mu$  dans (2.55), il vient

$$E(S^2) = \frac{1}{N} E \left\{ \sum_{i=1}^N [(X_i - \mu) - (\bar{\mathbf{X}} - \mu)]^2 \right\} \quad (2.56)$$

Le développement du carré fait apparaître d'une part la variance  $\sigma^2$  de la variable mère  $X$ , d'autre part  $\text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}(\hat{\bar{X}})$  donnée par (2.52), et finalement le double produit :

$$E \left[ -2(\hat{\bar{X}} - \mu) \sum_{i=1}^N (X_i - \mu) \right] = -2NE [(\bar{\mathbf{X}} - \mu)^2] = -2\sigma^2 \quad (2.57)$$

Finalement, (2.56) se réduit à

$$E(S^2) = \left( \frac{N-1}{N} \right) \sigma^2 \quad (2.58)$$

**On en déduit que  $(N/(N-1))S^2 = \hat{S}^2$  est un estimateur non biaisé de la variance de la population.**

Par un calcul analogue à celui du paragraphe 2.4.12 on peut montrer [6] que

$$\text{Var}(S^2) = \frac{M_4 - M_2^2}{N} \quad (2.59)$$

où  $M_2$  et  $M_4$  sont les moments d'ordre 2 et 4 de la population. Lorsque cette dernière est normale, (2.59) se réduit à

$$\text{Var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{N} \quad (2.60)$$

d'où, pour l'estimateur non biaisé :

$$\text{Var}(\hat{S}^2) = \frac{2N}{(N-1)^2} \sigma^4 \quad (2.61)$$

#### 2.4.14 Inégalité de Chebychev

Soit un échantillon  $\{x_i\}$   $i=1$  à  $N$ , supposé connu seulement par sa moyenne  $m$  et sa variance  $s^2$ . On désire savoir quel est le nombre  $N_{\text{ex}}$  de valeurs situées à l'extérieur d'un intervalle  $\pm \epsilon$  compté à partir de  $m$ .

On peut envisager deux situations selon que la densité de probabilité de la population est connue ou non. L'inégalité de Chebychev résoud le problème dans le second cas. Pour démontrer cette relation, on classe tous les résultats par valeurs croissantes de  $|x_i - m|$ , les indices étant attribués selon la figure 2.14.

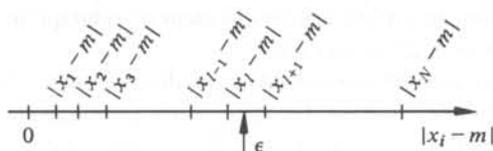


Fig. 2.14

On peut décomposer l'expression de la variance comme suit :

$$s^2 = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{i=1}^l (x_i - m)^2 + \sum_{i=l+1}^N (x_i - m)^2 \right\} \quad (2.62)$$

d'où, en négligeant les termes plus petits que  $\epsilon^2$  d'une part, en remplaçant tous les termes plus grands que  $\epsilon^2$  par leur limite inférieure :  $\epsilon^2$ , d'autre part :

$$s^2 > \frac{1}{N} \sum_{i=l+1}^N (x_i - m)^2 > \frac{1}{N} \sum_{i=l+1}^N \epsilon^2 \quad (2.63)$$

et

$$s^2 > \frac{N-l}{N} \epsilon^2 \quad (2.64)$$

Or,  $(N-l)/N$  représente la probabilité qu'une valeur  $|x_i - m|$  égale ou excède  $\epsilon$ . Finalement,

$$\frac{N_{\text{ex}}}{N} = \text{Prob}(|x_i - m| \geq \epsilon) < \frac{s^2}{\epsilon^2} \quad (2.65)$$

c'est l'inégalité de Chebychev. Les calculs qui précèdent montrent clairement que cette relation surestime, parfois de manière importante, le rapport  $N_{\text{ex}}/N$ . Réciproquement, pour un rapport  $N_{\text{ex}}/N$  donné, la relation surestime la limite  $\epsilon$  correspondante. Ces faits sont illustrés par l'exemple suivant. Soit une variable mère  $X$  distribuée selon une loi normale de moyenne  $m$  et de variance  $\sigma^2$ . La probabilité qu'une valeur sorte de la fourchette  $\epsilon = \pm 2\sigma$ , donnée par la fonction de répartition de la distribution normale (§ 11.1.1), vaut :

$$\text{Prob} \left\{ \frac{|x_i - m|}{\sigma} > 2 \right\} = 2F(-2) = 0,0455 \quad (2.66)$$

Par comparaison, l'inégalité de Chebychev donne :

$$\text{Prob} [|x_i - m| \geq 2\sigma] < \sigma^2/4\sigma^2 = 0,25 \quad (2.67)$$

Ces résultats montrent l'intérêt qu'il y a à connaître la densité de probabilité de  $X$ .

## 2.5 TESTS D'HYPOTHÈSES

### 2.5.1 Introduction

Fréquemment, un problème de mesure ne consiste pas à déterminer une valeur totalement inconnue. On dispose a priori d'une estimation de cette valeur, provenant d'un modèle théorique ou d'expériences antérieures. La question qui se pose alors est de savoir si le résultat obtenu diffère significativement de celui qu'on attend. Elle est résolue en recourant aux tests d'hypothèses.

Un test d'hypothèse est une procédure qui décrit en détail les opérations à effectuer sur un échantillon de résultats, de manière à conclure que cet échantillon vérifie ou non l'hypothèse formulée au départ. Le test d'hypothèse est donc une règle de décision qui, comme toutes les règles de ce genre, n'est pas infaillible. Deux risques sont toujours présents : celui de rejeter à tort une hypothèse conforme à la réalité, et celui d'accepter une hypothèse erronée.

### 2.5.2 Hypothèse nulle $H_0$

Pour être valablement soumise à un test, une hypothèse doit être énoncée sous la forme d'une *hypothèse nulle*. Une telle hypothèse, notée en abrégé  $H_0$ , s'exprime par une phrase du type : tel résultat, par exemple la valeur moyenne d'un paramètre calculé sur un échantillon, *ne diffère pas significativement* de tel résultat théorique admis par hypothèse. L'hypothèse  $H_0$  est toujours une affirmation sur la variable mère  $X$ .

Une première illustration de la manière de formuler une hypothèse nulle, et du genre de réponse donnée par le test, est fournie par l'exemple ci-dessous.

Une pièce de monnaie a été lancée 100 fois. Elle est tombée 59 fois sur pile et 41 fois sur face. Le problème est bien entendu d'estimer à partir de ces résultats, si la pièce est pipée.

Posée sous la forme : « la pièce est-elle pipée ou non », la question *n'a pas de sens*, ou si l'on préfère, c'est une question à laquelle il est impossible de répondre avec certitude.

On pose donc  $H_0$  : « le résultat (59 fois pile, 41 fois face) ne diffère pas significativement de celui qu'on obtiendrait avec une pièce non pipée ». Plus simplement  $H_0$  : « la pièce est non pipée ». Il reste à tester cette hypothèse, c'est-à-dire à *mesurer* sa vraisemblance, ce qui se fait dans le cas particulier de la manière suivante :

Sous  $H_0$ , la probabilité  $p$  d'obtenir pile est égale à la probabilité  $q$  d'obtenir face.

$$p = q = 0,5 \quad (2.68)$$

La probabilité  $P(x)$  d'obtenir  $x$  fois pile est donnée par la loi binômiale :

$$P(x) = \frac{N!}{x!(N-x)!} p^x q^{N-x} \quad (2.69)$$

où  $N$  représente le nombre de fois que la pièce est jetée. La moyenne et la variance de la loi binômiale valent :

$$\mu = Np \quad (2.70)$$

$$\sigma^2 = Npq \quad (2.71)$$

soit, dans ce cas,  $\mu = 50$  et  $\sigma^2 = 25$ . En utilisant l'approximation de la loi binômiale par la loi normale [7] et en posant la variable réduite :

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (2.72)$$

on obtient, pour  $x = 59$ ,  $z = 1,8$  d'où, (§ 11.1.1)

$$P(x \geq 59) = 1 - F(1,8) = 0,036 \quad (2.73)$$

soit encore (fig. 2.15),

$$P(41 \geq x \geq 59) = F(-1,8) + 1 - F(1,8) = 0,072 \quad (2.74)$$

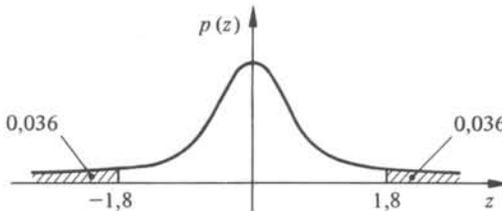


Fig. 2.15 Densité de probabilité de la distribution normale standard.

Avec une pièce non pipée (cas de l'hypothèse  $H_0$ ), on a 3,6% de chances d'obtenir 59 fois pile ou davantage. Mais on a également 3,6% de chances d'obtenir 59 fois face ou davantage. Or, une pièce pipée donne soit trop de pile, soit trop de face. En jetant la pièce 100 fois on a donc, dans l'hypothèse  $H_0$ , 7,2% de chances qu'une figure sorte 59 fois ou davantage.

Si on admet un risque  $\alpha$  correspondant à 10% de chances de se tromper, ou de manière tout-à-fait précise : 10% de *chance de rejeter à tort l'hypothèse nulle*, on conclura que la pièce est pipée.

Le choix du risque  $\alpha$  dépend des circonstances. Il est de nature stratégique. On choisit un risque  $\alpha$  plus faible s'il s'agit de tester un effet nocif possible d'un vaccin utilisable à grande échelle, que s'il s'agit de tester une hypothèse aux conséquences moins graves.

### 2.5.3 Risques d'erreurs de première et de seconde espèces

Un test d'hypothèse conduit nécessairement à l'une des quatre situations suivantes :

- l'hypothèse est vraie, et elle est acceptée;
- l'hypothèse est vraie, et elle est rejetée;
- l'hypothèse est fausse, et elle est acceptée;
- l'hypothèse est fausse, et elle est rejetée.

Le tableau 2.16 résume les possibilités et définit les notations utilisées pour les probabilités associées à chaque cas.

Tableau 2.16

Décision	Hypothèse $H_0$	
	Vraie	Fausse
$H_0$ rejetée	Erreur de 1ère espèce, commise avec la probabilité $\alpha$ (Risque $\alpha$ )	Décision correcte, obtenue avec la probabilité $1 - \beta$
$H_0$ acceptée	Décision correcte, obtenue avec la probabilité $1 - \alpha$	Erreur de 2ème espèce, commise avec la probabilité $\beta$ (Risque $\beta$ )

*La caractéristique fondamentale de l'hypothèse nulle est qu'elle correspond à une situation où les fluctuations d'échantillonnage sont connues.* Le test permet donc d'apprécier si la différence constatée entre le résultat obtenu par l'échantillon et le résultat correspondant à  $H_0$  peut *raisonnablement* être attribuée aux fluctuations d'échantillonnage. La valeur du test dépend évidemment de ce qu'on entend par raisonnable. On vient de voir qu'il n'y a pas plus ici qu'ailleurs de règle générale pour définir ce qui est raisonnable ! Par contre, et c'est là l'un des *intérêts majeurs du test*, il est toujours possible de *calculer le risque*  $\alpha$  de rejeter à tort l'hypothèse nulle.

A l'opposé, si  $H_0$  est fausse, on ne dispose d'aucune information acquise ou supposée concernant la population mère dont l'échantillon provient, si ce n'est l'échantillon lui-même. Celui-ci ne pouvant être testé par rapport à lui-même (tautologie), *le risque*  $\beta$  *est toujours inconnu*. On sait seulement que les risques  $\alpha$  et  $\beta$  sont *antagonistes* : diminuer  $\alpha$  revient à admettre une plage plus importante pour les fluctuations d'échantillonnage, ce qui a pour effet de diminuer les chances de détecter une situation différente de  $H_0$ , d'où augmentation de  $\beta$ . A la limite, en choisissant  $\alpha = 0$ , on ne se trompe jamais parce qu'on ne décide rien, toute situation étant interprétée comme résultant des fluctuations d'échantillonnage admises sous  $H_0$ .

*En conclusion, toute décision basée sur un test statistique comporte un risque d'erreur, dont la personne responsable choisit l'ampleur selon les circonstances. La seule manière de diminuer simultanément les risques  $\alpha$  et  $\beta$  est d'augmenter la taille de l'échantillon.*

#### 2.5.4 Degré de signification

En fixant a priori le risque  $\alpha$ , on donne au test d'hypothèse un caractère binaire:  $H_0$  est rejetée ou non. Il est possible de compléter ce résultat par le degré de signification du test.

Soit  $\hat{x}$  l'estimation obtenue à partir de l'échantillon de taille  $N$  à disposition, et  $x_0$  la valeur théorique correspondant à  $H_0$ . En admettant l'hypothèse nulle, on peut calculer la probabilité  $\alpha_0$  qu'un autre échantillon de même taille donne, sous l'effet des fluctuations d'échantillonnage, une valeur  $\hat{x}_i$  telle que  $\hat{x}_i - x_0 \geq \hat{x} - x_0$ .

On appelle  $\alpha_0$  le *degré de signification* du test par rapport à  $H_0$ .

Par exemple, dans le problème du paragraphe 2.5.2, le degré de signification est de  $\alpha_0 = 0,072$ . Cela signifie que, *si la pièce n'est pas pipée* on a (seulement) 7,2% de chances d'obtenir une disparité entre le nombre de pile et de face supérieure ou égale à celle qui a été observée.

#### 2.5.5 Zones de confiance et zones critiques

Le risque  $\alpha$  étant choisi, les valeurs limites des estimations admises sous  $H_0$ , sont connues. Soient par exemple  $x_A$  et  $x_B$  ces valeurs (fig. 2.17).

On appelle *zones de confiance et zones critiques*, les plages où  $H_0$  est acceptée, respectivement rejetée.

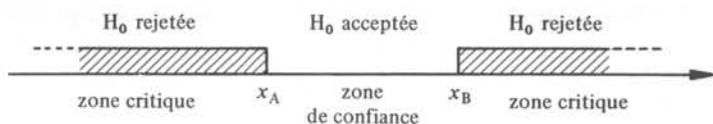


Fig. 2.17

#### 2.5.6 Test unilatéral ou bilatéral

Un test est *unilatéral* lorsque sa formulation aboutit à la définition d'une seule valeur limite  $x_A$ . Il est *bilatéral* s'il existe deux limites  $x_A$  et  $x_B$ .

Soit par exemple à tester une valeur moyenne  $\hat{m}$  obtenue sur un échantillon par rapport à la moyenne théorique  $\mu$ . Selon les cas, l'hypothèse  $H_0$  peut être formulée de différentes manières, par exemple :

- $H_0$  : la valeur  $\hat{m}$  ne *diffère* pas significativement de  $\mu$ . La zone de confiance s'étend alors de part et d'autre de  $\mu$ , il existe  $x_A$  et  $x_B$  tels que  $x_A < \mu < x_B$ , le test est bilatéral;
- $H_0$  : la valeur  $\hat{m}$  n'*excède* pas significativement  $\mu$ . Dans cette formulation, toutes les valeurs  $\hat{m} < \mu$  satisfont  $H_0$  et il n'existe qu'une limite  $x_A > \mu$ , le test est unilatéral.

### 2.5.7 Conduite générale d'un test d'hypothèse

La conduite d'un test d'hypothèse reste la même, quel que soit l'objet du test. On peut la résumer dans les six points ci-dessous, qui sont abondamment illustrés dans les sections suivantes.

1. Formuler l'hypothèse nulle  $H_0$ .
2. Trouver la variable  $Z$  mesurant l'écart entre les estimations et le résultat attendu sous l'hypothèse nulle.  $Z$  est une statistique au sens du paragraphe 2.4.9. Sa densité de probabilité, dont dépendent les fluctuations d'échantillonnage de  $Z$ , doit obligatoirement être connue.
3. Choisir le risque de première espèce  $\alpha$ .
4. A partir de  $\alpha$ , de la définition de  $Z$  et du caractère unilatéral ou bilatéral du test résultant de  $H_0$ , établir les zones de confiance et les zones critiques.
5. Calculer la valeur  $z_0$  de  $Z$  correspondant à l'expérience.
6. Conclure, avec le risque  $\alpha$ , au rejet ou à l'acceptation de  $H_0$ , selon la position de  $z_0$  dans une zone de confiance ou dans une zone critique.

On peut reconnaître ces étapes dans l'exemple de la pièce de monnaie, traité au paragraphe 2.5.2.

1.  $H_0$  : La pièce n'est pas pipée. Autre formulation, plus détaillée : le résultat des lancements de la pièce ne diffère pas significativement de celui qu'on obtiendrait avec une pièce non pipée.
2. Le score obtenu avec une pièce non pipée est décrit théoriquement par la distribution binômiale (2.69). L'écart par rapport à  $H_0$  peut donc être mesuré par la différence entre le score observé  $x_0 = 59$  fois pile et le score théorique  $x_{th} = \mu = 50$  fois pile donné par (2.69). Les fluctuations d'échantillonnage de  $X - \mu$  sont connues par (2.69), on aurait donc pu choisir  $Z = X - \mu$ . On a préféré, pour des raisons de commodité (tables numériques à disposition), prendre  $Z = (X - \mu) / \sigma$  où  $\sigma$  est l'écart-type de la distribution binômiale, car la densité de probabilité de  $Z$  ainsi définie correspond à celle de la distribution normale standard.
3. On a choisi  $\alpha = 0,1$  (10%).
4. La formulation de  $H_0$  correspond à un test bilatéral. Il faut donc répartir le risque  $\alpha$  en deux parties, l'une correspondant au cas où la pièce donnerait trop peu de fois pile, la seconde où elle donnerait trop de fois pile. On a choisi de diviser ainsi  $\alpha$  en deux parties égales. La table (§ 11.1.1) donne  $F(-1,65) = 0,05$  et  $F(1,65) = 1 - 0,05$  d'où les zones représentées à la figure 2.18.
5. On calcule  $z_0 = (59 - 50) / 5 = 1,8$ .
6. La valeur de  $z_0$  tombe dans une zone critique, par conséquent l'hypothèse  $H_0$  est rejetée.

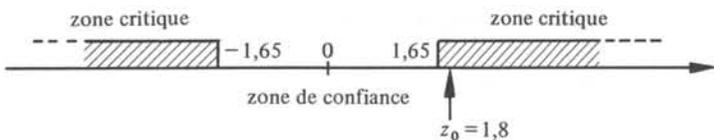


Fig. 2.18

## 2.6 COMPARAISON DE DISTRIBUTIONS

## 2.6.1 Introduction

Il est souvent nécessaire de connaître la densité de probabilité  $p(x)$  de la variable mère  $X$  dont on possède un échantillon. En toute généralité, on pourrait exprimer  $p(x)$  par un développement en série de fonctions, dont les coefficients seraient déterminés par une méthode de moindres carrés. En réalité, on préfère rechercher à quel type de fonction connue  $p(x)$  ressemble le plus. Cette attitude est justifiée pour deux raisons : premièrement, les théorèmes utilisables en statistique ne s'appliquent en général qu'à des populations dans lesquelles  $p(x)$  est d'un type donné ; deuxièmement, les différentes  $p(x)$  rencontrées en pratique sont en nombre très limité, les plus importantes correspondant aux distributions normale, uniforme et de Poisson.

2.6.2 Comparaison d'une distribution expérimentale avec une distribution théorique : test de  $\chi^2$ 

Pour les raisons évoquées ci-dessus, cette comparaison s'effectue sous la forme d'un test. Soient  $p_r(x)$  la distribution de  $X$  et  $\hat{p}(x)$  son estimation sur un échantillon. La question à laquelle le test doit répondre est la suivante : est-il raisonnable de penser, compte tenu de fluctuations d'échantillonnage que l'échantillon provient d'une population distribuée selon  $p_r(x)$ .

Soit  $\{x_i\}$   $i = 1$  à  $N$  l'ensemble de résultats constituant l'échantillon. Pour être soumis au test, ces résultats doivent être présentés sous la forme d'un histogramme, après quoi la procédure du paragraphe 2.5.7 est applicable.

Soient encore (fig. 2.19),

$K$  : nombre de classes de l'histogramme ;

$O_j$  : nombre de mesures appartenant à l'échantillon et tombant dans la classe n°  $j$ , (effectif observé) ;

$c_j$  : effectif théorique de la classe n°  $j$ , calculé à partir de  $p_r(x)$ .

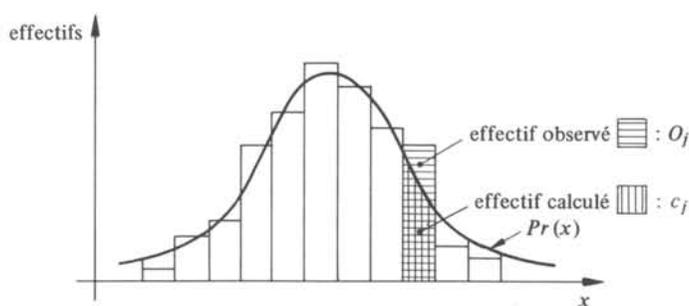


Fig. 2.19

Les effectifs théoriques sont donnés par

$$c_j = N \left\{ \int_{-\infty}^{x_j} p_r(x) dx - \int_{-\infty}^{x_{j-1}} p_r(x) dx \right\} \quad (2.75)$$

où  $x_j$  et  $x_{j-1}$  sont les valeurs limites de la classe n°  $j$ . Pour les classes extrêmes, (2.75) se réduit à

$$c_1 = N \int_{-\infty}^{x_1} p_r(x) dx \quad (2.76)$$

et

$$c_K = N \left\{ 1 - \int_{-\infty}^{x_{K-1}} p_r(x) dx \right\} \quad (2.77)$$

L'hypothèse  $H_0$  prend la forme :  $\hat{p}(x)$  ne diffère pas significativement de  $p_r(x)$ . On choisit, pour mesure de l'écart entre  $p_r(x)$  et  $\hat{p}(x)$ , la statistique  $Z$  définie

$$Z = \chi^2 = \sum_{j=1}^K \frac{(c_j - O_j)^2}{c_j} \quad (2.78)$$

Sous l'hypothèse  $H_0$ , les fluctuations d'échantillonnage de  $Z$  données par la densité de probabilité  $p(\chi^2)$ , sont connues et *ne dépendent pas de*  $p_r(x)$ . La densité  $p(\chi^2)$  dépend seulement du nombre de degrés de liberté  $\nu$ , donné par

$$\nu = K - 1 - a \quad (2.79)$$

où  $a$  est le nombre de paramètres nécessaires pour définir entièrement  $p_r(x)$ . On remarque que (2.78) effectue une pondération des écarts.

Le risque  $\alpha$  étant choisi, la zone de confiance et la zone critique sont connues par  $p(\chi^2)$ , il reste à conclure en fonction de la valeur de  $z_0$  calculée à partir de (2.78) dans laquelle les  $O_j$  sont remplacés par leurs réalisations  $o_j$ . On appelle souvent l'ensemble de ces opérations le test de  $\chi^2$ .

### 2.6.3 Densité de probabilité $p(\chi^2)$

La densité  $p(\chi^2)$  est donnée par

$$p(\chi^2) = \frac{(\chi^2/2)^{\nu/2} \exp(-\chi^2/2)}{\chi^2 \Gamma(\nu/2)} \quad (2.80)$$

où

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} \exp(-x) x^{n-1} dx \quad (2.81)$$

La fonction gamma jouit des propriétés suivantes : pour  $n$  entier,

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (2.82)$$

pour  $n$  positif,

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) \quad (2.83)$$

d'autre part,

$$\Gamma(1,5) = 0,88623 \quad (2.84)$$

L'allure de  $p(\chi^2)$  est représentée à la figure 2.20 pour quelques valeurs de  $\nu$ . On constate que pour  $\nu > 3$ , les courbes partent de l'origine et atteignent leur maximum pour

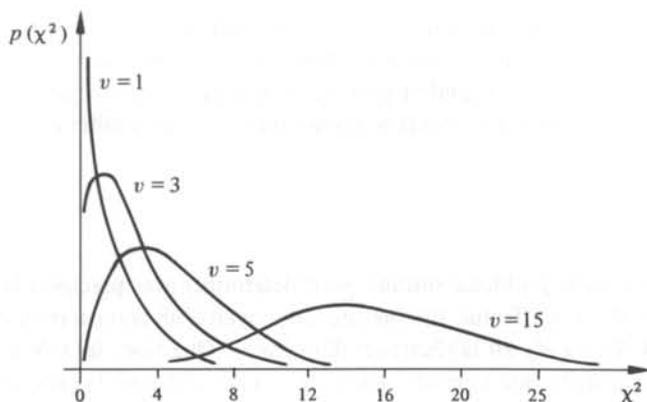


Fig. 2.20

$\chi^2 = \nu - 2$ . Pour  $\nu = 2$ , le maximum est situé sur l'axe vertical et pour  $\nu = 1$ , la courbe diverge à l'origine.

La probabilité  $\alpha$  (risque de première espèce) pour que  $\chi^2$  égale ou excède une valeur fixée  $\chi_\alpha^2$  est donnée par :

$$\alpha = 1 - \int_0^{\chi_\alpha^2} p(\chi^2) d\chi^2 \quad (2.85)$$

Cette probabilité est tabulée au paragraphe 11.1.3 pour les valeurs de  $\nu$  comprises entre 1 et 30. Pour de plus grandes valeurs de  $\nu$ , on peut admettre que  $\chi^2$  possède une densité de probabilité normale, de moyenne  $\nu$  et de variance égale à  $2\nu$ .

#### 2.6.4 Modalités d'application

La mise en œuvre du test de  $\chi^2$  implique la répartition des résultats de mesure dans les classes d'un histogramme. Sous peine de fausser le résultat du test, il est impératif de choisir ces classes de manière à ce que les effectifs théoriques et observés dans chacune d'elles satisfassent les conditions :

$$c_j > 5 \quad \text{et} \quad o_j > 4 \quad (2.86)$$

Sauf dans le cas d'une distribution uniforme, le choix de classes de largeur constante n'est donc pas recommandable, car il produit des écarts d'effectifs parfois très importants d'une classe à l'autre. Avec une distribution en cloche par exemple, les classes centrales sont sur-occupées par rapport aux classes extrêmes qui ne satisfont pas (2.86). Il faut donc fusionner un certain nombre de ces classes pour obtenir les effectifs requis.

On peut éviter ce genre de situation en recourant d'emblée à un ensemble à classes équiprobables, c'est-à-dire un ensemble dans lequel les effectifs théoriques, calculés à partir de  $p_r(x)$  sont les mêmes dans chaque classe. Le nombre maximum de classes est donné par le quotient, arrondi vers le bas, de l'effectif total par l'effectif minimum théorique admis par classe. Il est prudent de choisir à ce stade, un effectif théorique minimum supérieur à 5, par exemple 8 ou 10, de manière à réduire le risque d'obtenir un effectif observé inférieur à 4 dans l'une ou l'autre des classes.

D'autre part, le choix des limites de classes ne doit conduire à aucune ambiguïté concernant l'appartenance de telle mesure à l'une ou l'autre des classes. Par exemple, une limite correspondant à un résultat possible d'un appareil numérique doit être évitée. Il faut de plus être attentif aux erreurs systématiques pouvant résulter de l'arrondissement des résultats.

### 2.6.5 Exemple

Soit à résoudre le problème suivant : pour déterminer avec précision la valeur d'une résistance  $R$ , on a effectué 100 mesures au moyen d'un comparateur donnant  $\Delta R = (R - R_0)/R_0$  où  $R_0$  est la résistance d'un étalon. Question : les valeurs de  $\Delta R$  suivent-elles une distribution normale ? (Afin de ne pas surcharger la présentation, les 100 mesures ne sont pas reproduites ici, seuls les résultats des opérations effectuées sur cet ensemble sont donnés).

On choisit d'utiliser un histogramme à 10 classes équiprobables. Les limites des classes sont déterminées à l'aide de la fonction de répartition de la distribution normale, compte tenu de la moyenne et de la variance de l'échantillon. On a calculé  $\overline{\Delta R} = m = -33,4 \cdot 10^{-6}$  et  $s_{\Delta R} = 8,32 \cdot 10^{-6}$ . Soient  $z_j$  les limites des 10 classes équiprobables de la distribution normale standard  $N(0,1)$  et  $x_j$  les limites correspondantes de la distribution normale possédant même moyenne et même écart-type que l'échantillon des résultats :  $N(m, s_{\Delta R})$ .

On a :

$$x_j = \bar{m} + z_j s_{\Delta R} \quad (2.87)$$

A l'aide de la table du paragraphe 11.1.1 et des résultats, on établit le tableau 2.21.

Tableau 2.21

N° de classe	$F(z_j)$	$z_j$	$x_j (10^{-6})$	$o_j$
1	0,0	$-\infty$	$-\infty$	7
2	0,1	-1,282	-44,1	6
3	0,2	-0,842	-40,4	15
4	0,3	-0,524	-37,8	12
5	0,4	-0,253	-35,5	10
6	0,5	0,000	-33,4	9
7	0,6	0,253	-31,3	9
8	0,7	0,524	-29,0	13
9	0,8	0,842	-26,4	11
10	0,9	1,282	-22,7	8
	1,0	$\infty$	$+\infty$	

Tous les effectifs théoriques  $c_j$  sont égaux à 10, le calcul de  $\chi^2$  (2.78) à partir des effectifs observés est donc immédiat. On trouve :  $\chi_0^2 = 7$ .

Le nombre de degrés de liberté pour  $p(\chi^2)$  vaut  $\nu = 10 - 1 - 2 = 7$ , puisque l'histogramme a 10 classes et que la distribution de référence est une distribution normale, laquelle est définie par deux paramètres : la moyenne et la variance. En admettant un risque de première espèce  $\alpha = 0,05$ , la valeur théorique limite de  $\chi^2$ , notée  $\chi_\alpha^2$  vaut

14,07 (§ 11.1.3). La zone de confiance est donc constituée des valeurs inférieures à 14,07 et la zone critique, des valeurs supérieures à 14,07. On se rappelle en effet que  $\chi^2$  est une mesure de l'écart entre la distribution des  $\Delta R$  et une distribution normale.

On conclut donc, au risque  $\alpha$ , que la distribution de  $\Delta R$  ne diffère pas significativement d'une distribution normale.

La table du paragraphe 11.1.3 montre encore que le degré de signification du test est compris entre 0,5 et 0,3. Un calcul exact donne 0,43. Cela veut dire que sous  $H_0$  on a 43% de chance d'observer une valeur  $\chi_0^2$  supérieure ou égale à 7.

### 2.6.6 Comparaison de deux distributions expérimentales

On désire savoir si les distributions de deux échantillons A et B, qui peuvent être de tailles inégales, diffèrent significativement l'une de l'autre, ou, ce qui revient au même, si ces deux échantillons peuvent être considérés comme provenant d'un même univers (hypothèse  $H_0$ ).

Pour établir la comparaison, il faut tout d'abord répartir les échantillons dans deux histogrammes possédant des limites de classes identiques. Soient  $o_j^A$  et  $o_j^B$  les effectifs observés de chaque échantillon, tombant dans la classe  $j$ . Ces effectifs sont inscrits pour le total des  $K$  classes, dans un *tableau de contingence* (tab. 2.22).

Tableau 2.22 Tableau de contingence et sommes associées.

Effectifs observés	Numéros des classes						Somme des lignes
	1	2	...	$j$	...	$K$	
Echantillon A	$o_1^A$	$o_2^A$	...	$o_j^A$	...	$o_K^A$	$\sum_{j=1}^K o_j^A$
Echantillon B	$o_1^B$	$o_2^B$	...	$o_j^B$	...	$o_K^B$	$\sum_{j=1}^K o_j^B$
Tableau de contingence							
Somme des colonnes	$o_1^A + o_1^B$	$o_2^A + o_2^B$		$o_j^A + o_j^B$		$o_K^A + o_K^B$	Total général $\sum_{j=1}^K (o_j^A + o_j^B)$

La meilleure estimation possible des effectifs théoriques dans la classe  $j$ , pour les échantillons A et B est donnée par :

$$c_j^A = \frac{o_j^A + o_j^B}{\sum_{j=1}^K o_j^A + \sum_{j=1}^K o_j^B} \sum_{j=1}^K o_j^A \tag{2.88}$$

$$c_j^B = \frac{o_j^A + o_j^B}{\sum_{j=1}^K o_j^A + \sum_{j=1}^K o_j^B} \sum_{j=1}^K o_j^B \tag{2.89}$$

Il découle des propriétés de  $\chi^2$  que lorsqu'on extrait plusieurs échantillons d'un même univers (hypothèse  $H_0$ ), la somme des  $\chi^2$  calculés sur chaque échantillon possède la densité de probabilité  $p(\chi^2)$  (2.80) pour la somme  $\nu$  des degrés de liberté. Dans le cas d'un tableau de contingence, cette somme correspond au nombre minimum de cases dont il faut connaître les effectifs pour définir l'ensemble du tableau, lorsque les totaux de lignes et de colonnes sont donnés. On voit facilement que dans le cas général d'un tableau à  $l$  lignes et  $c$  colonnes, on a :

$$\nu = (l-1)(c-1) \quad (2.90)$$

En conclusion, l'écart entre les distributions des échantillons A et B doit être mesuré par la statistique

$$Z = \sum_{j=1}^K \frac{(C_j^A - O_j^A)^2}{C_j^A} + \sum_{j=1}^K \frac{(C_j^B - O_j^B)^2}{C_j^B} = \chi_A^2 + \chi_B^2 = \chi^2 \quad (2.91)$$

et le résultat testé au moyen de la table du paragraphe 11.1.3 pour  $\nu = K - 1$ , selon la méthode habituelle.

### 2.6.7 Généralisation

La méthode du tableau de contingence peut sans autre être étendue à la comparaison des distributions d'un nombre quelconque d'échantillons. Plus généralement encore, la méthode se prête à la comparaison de sous-ensembles de résultats définis par des variables qualitatives. A titre d'exemple, le tableau 2.23 pourrait servir à tester si l'origine des pannes dans un type de système donné varie avec la durée de fonctionnement.

Tableau 2.23 Nombre de pannes par mois sur un ensemble de systèmes installés.

Durée de fonctionnement	Origine des pannes			
	Electronique	Electrique	Pneumatique	Hydraulique
1 an	7	12	8	7
3 ans	1	8	10	15
10 ans	0	8	20	12

On remarque que le nombre de pannes dues à l'électronique ne satisfait pas la condition (2.86) d'application du test  $\chi^2$ . Il faut soit renoncer à inclure ce type de panne dans le test, soit définir une nouvelle variable qualitative « pannes d'origine électronique ou électrique » et fusionner les effectifs observés dans les deux premières colonnes.

## 2.7 COMPARAISON DE DEUX MOYENNES

### 2.7.1 Fluctuations d'échantillonnage de la moyenne

On peut considérer trois cas :

- L'univers possède une distribution normale de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$  connue. Soit  $\bar{X}$  l'estimateur de la moyenne d'un échantillonnage de taille  $n$

prélevé dans cet univers. On montre que la statistique

$$Z = \frac{\hat{\bar{X}} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (2.92)$$

est distribuée selon  $N(0,1)$ , quelle que soit la taille de l'échantillon.

- Si la variance de l'univers est inconnue, la statistique

$$T = \frac{\hat{\bar{X}} - \mu}{\hat{S}/\sqrt{n}} \quad (2.93)$$

suit la distribution de Student (§ 11.1.2) pour  $\nu = n - 1$  degrés de liberté,  $\hat{S}$  désignant l'estimateur de l'écart-type de l'échantillonnage. La distribution de Student tend vers la distribution normale standard lorsque  $n$  croît, on peut admettre qu'elles se confondent pratiquement dès  $n > 30$ .

- L'univers possède une distribution quelconque, alors la statistique  $Z$  définie par (2.92) n'est pas distribuée selon  $N(0,1)$ . Néanmoins, c'est une conséquence du théorème central limite, la distribution de  $Z$  tend vers  $N(0,1)$  quand  $n$  est suffisamment grand. On peut admettre dans tous les cas que  $Z$  suit  $N(0,1)$  si  $n > 50$ ; la convergence est d'autant plus rapide que la distribution de l'univers se rapproche d'une distribution normale.

### 2.7.2 Fluctuations d'échantillonnage de la différence de deux moyennes

Soient deux univers à distributions normales  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  et  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  connues. Soient  $\hat{\bar{X}}_1$  et  $\hat{\bar{X}}_2$  les moyennes des échantillonnages aléatoires de taille  $n_1$  et  $n_2$  provenant de chaque univers. La statistique

$$Z = \frac{\hat{\bar{X}}_1 - \hat{\bar{X}}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \quad (2.94)$$

est distribuée selon  $N(\mu_1 - \mu_2, 1)$  quelle que soit la taille des échantillons. Si  $n_1 > 30$  et  $n_2 > 30$ , l'hypothèse concernant la normalité des deux univers n'est pas nécessaire (théorème de la limite centrale), d'autre part  $\sigma_1^2$  et  $\sigma_2^2$  peuvent être remplacées par leurs estimations sur les échantillons, selon (2.58).

### 2.7.3 Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique

Cette comparaison doit être basée sur les statistiques  $Z$  ou  $T$  définies au paragraphe 2.7.1, il est indiqué de lui donner la forme d'un test d'hypothèse.

Soit par exemple une source de tension supposée parfaitement connue (donnée théorique) délivrant, à 20°C, une tension moyenne  $\mu = 17,24 \mu\text{V}$  avec un écart-type  $\sigma = 0,1 \mu\text{V}$ . On désire savoir si la valeur de la tension est différente à 50°C et pour cela on effectue 100 mesures à cette température. On trouve une tension moyenne  $m = 17,27 \mu\text{V}$ .

- $H_0$  : la température n'a pas d'effet, c'est-à-dire :  $m$  ne diffère pas significativement de  $\mu$ . Test bilatéral;
- Sous  $H_0$ ,  $(\hat{\bar{X}} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$  est distribué selon  $N(0,1)$ ;

- Risque de première espèce admis:  $\alpha = 0,01$ ;
- Zones critiques, (§ 11.1.1)  $-2,576 > Z > 2,576$ ;
- Ecart observé:  $z_o = (17,27 - 17,24)/(0,1/\sqrt{100}) = 3$ ;
- $z_o$  tombe dans une zone critique,  $H_0$  doit être rejetée, au risque  $\alpha$ . En d'autres termes, il y a moins de 1% de chance que l'élévation de température n'ait pas modifié la tension.

### 2.7.4 Comparaison de deux moyennes observées

Elle repose sur la statistique  $Z$  du paragraphe 2.7.2. Soient par exemple deux capacimètres dont on désire comparer les performances, dans le but de mettre en évidence une différence systématique de l'un par rapport à l'autre. Les mesures du même étalon au moyen des deux appareils ont donné les résultats suivants (tab. 2.24).

- $H_0$ : les deux appareils sont identiques. Test bilatéral;
- Sous  $H_0$ ,  $Z$  définie par (2.94) est distribuée selon  $N(0,1)$ ;
- Risque de première espèce admis:  $\alpha = 0,05$ ;
- Zones critiques selon paragraphe 11.1.1,  $-1,96 > Z > 1,96$ ;
- Ecart observé:  $z_o = -2,31$ ;
- $H_0$  doit être rejetée. Au risque  $\alpha$ , la différence entre les deux appareils est significative.

Tableau 2.24

Numéro des appareils	Caractéristiques des échantillons de mesures		
	Taille	Moyenne	Ecart-type
1	$N_1 = 30$	$\bar{x}_1 = 35,15$ nF	$s_1 = 0,40$ nF
2	$N_2 = 35$	$\bar{x}_2 = 35,43$ nF	$s_2 = 0,57$ nF

### 2.7.5 Cas des séries appariées

Les échantillonnages n° 1 et 2 du problème précédent sont indépendants, car chacun d'eux est prélevé aléatoirement dans l'univers des résultats de l'appareil correspondant branché à l'étalon. Il arrive que deux échantillonnages soient liés d'une certaine manière. Alors, la statistique (2.94) n'est plus utilisable pour comparer leurs moyennes.

Exemple: on désire comparer deux ohm-mètres fonctionnant dans la gamme  $100\ \Omega - 1\ \text{M}\Omega$ . On rassemble pour cela un lot de  $n$  résistances dont les valeurs sont distribuées de manière uniforme dans cette gamme. Chaque résistance est mesurée une fois par chaque appareil. Soit  $x_i$  la valeur de la résistance n°  $i$  indiquée par l'appareil A, et  $y_i$  celle indiquée par l'appareil B. L'échantillonnage  $\mathbf{X}$  n'est pas indépendant de l'échantillonnage  $\mathbf{Y}$ , au contraire les valeurs de même rang  $i$ , sont appariées puisqu'elles se rapportent à la même résistance.

On montre que dans ce cas, la statistique

$$Z = \frac{D}{S_D/\sqrt{n}} \quad (2.95)$$

où

$$D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - Y_i) \quad (2.96)$$

et

$$S_D = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - Y_i)^2} \quad (2.97)$$

est distribuée selon  $N(0,1)$  dès que  $n > 30$ . C'est donc la statistique (2.95) qu'il faut utiliser pour comparer les moyennes de deux séries appariées.

On remarque que la moyenne et l'écart-type sont beaucoup plus petits sur l'échantillon des différences que sur les échantillons de résultats fournis par chaque appareil.

## 2.8 COMPARAISON DE DEUX VARIANCES

### 2.8.1 Fluctuations d'échantillonnage de la variance

Soit un univers normal possédant une variance  $\sigma^2$  connue et  $\hat{S}^2$  l'estimation non biaisée (§ 2.4.13) de  $\sigma^2$  donnée par un échantillonnage aléatoire de taille  $n$ . On montre que la variable aléatoire  $\hat{S}^2/\sigma^2$  suit la distribution de  $\chi^2/\nu$  pour  $\nu = n - 1$  degrés de liberté.

### 2.8.2 Fluctuations d'échantillonnage du quotient de deux variances estimées

Soit un univers normal, dont la variance  $\sigma^2$  est inconnue. Soient  $\hat{S}_1^2$  et  $\hat{S}_2^2$  les estimations non biaisées de  $\sigma^2$  fournies par deux échantillonnages aléatoires de tailles  $n_1$  et  $n_2$  respectivement. On montre que la variable aléatoire  $\hat{S}_1^2/\hat{S}_2^2$  suit la distribution  $F_{\nu_1}^{\nu_2}$  (§ 11.1.4) pour  $\nu_1 = n_1 - 1$  et  $\nu_2 = n_2 - 1$  degrés de liberté.

### 2.8.3 Comparaison d'une variance observée à une variance théorique

Cette comparaison est basée sur la propriété de la statistique  $\hat{S}^2/\sigma^2$  énoncée au paragraphe 2.8.1.

On désire, par exemple, tester l'efficacité d'un limiteur de bruit. On sait que, sans limiteur, le bruit caractérisé par l'écart-type de la tension vaut :  $\sigma = 2,2 \mu\text{V}$ . Cent mesures effectuées avec le limiteur donnent :  $\hat{s} = 1,92 \mu\text{V}$ .

- $H_0$  : le limiteur est inefficace :  $\hat{S}^2$  ne diffère pas significativement de  $\sigma^2$ . Test bilatéral;
- Sous  $H_0$ ,  $\hat{S}^2/\sigma^2$  possède la distribution de  $\chi^2/\nu$  pour  $\nu = 99$ ;
- Risque de première espèce admis :  $\alpha = 0,1$ , réparti symétriquement;
- Zones critiques, selon paragraphe 11.1.3,  $0,779 > \hat{S}^2/\sigma^2 > 1,24$ ;
- Valeur observée  $\hat{s}^2/\sigma^2 = 0,76$ ;
- $H_0$  rejetée de justesse, le limiteur est efficace.

Ce test bilatéral implique que si le limiteur n'est pas inefficace, il peut aussi bien augmenter le bruit que le diminuer. On pourrait poser  $H_0$  différemment : le limiteur

ne réduit pas le bruit. Cela correspond à un test unilatéral sur les valeurs de  $\hat{S}^2/\sigma^2 < 1$ . Avec les données numériques ci-dessus, on rejetterait la nouvelle hypothèse  $H_0$  avec le risque  $\alpha = 0,05$ .

#### 2.8.4 Comparaison de deux variances observées

Cette comparaison repose sur la propriété de la statistique  $\hat{S}_1^2/\hat{S}_2^2$  énoncée au paragraphe 2.8.2.

Soit par exemple à tester la dispersion de deux ampèremètres. Le premier donne  $s_1 = 0,4$  nA calculé sur 21 mesures, le second  $s_2 = 0,57$  nA sur 25 mesures.

- $H_0$  les dispersions des appareils ne diffèrent pas significativement l'une de l'autre. Test bilatéral;
- Sous  $H_0$ ,  $\hat{S}_1^2/\hat{S}_2^2$  possède la distribution  $F_{n_1-1}^{n_2-1}$ ,
- Risque de première espèce admis:  $\alpha = 0,05$ , réparti symétriquement;
- Calcul des zones critiques.

On remarque que la table F (§ 11.1.4) ne contient que des rapports  $\hat{S}_1^2/\hat{S}_2^2 > 1$ . Lorsque  $\hat{S}_1^2/\hat{S}_2^2 < 1$ , il faut considérer le rapport  $\hat{S}_2^2/\hat{S}_1^2$  qui suit la distribution  $F_{n_2-1}^{n_1-1}$ .

Dans ce problème, on a :

$$\text{pour } \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} > 1 \quad \text{et} \quad \frac{\alpha}{2} = 0,025 \quad F_{24}^{20} = 2,33$$

$$\text{pour } \frac{\hat{S}_2^2}{\hat{S}_1^2} > 1 \quad \text{et} \quad \frac{\alpha}{2} = 0,025 \quad F_{20}^{24} = 2,41$$

La zone critique est donc définie par  $1/2,41 = 0,41 > \hat{S}_1^2/\hat{S}_2^2 > 2,33$ .

- Valeur observée:  $s_1^2/s_2^2 = 0,49$ ;
- La dispersion des deux appareils ne diffère pas significativement au risque  $\alpha = 0,05$ .

## 2.9 PROPAGATION DES ERREURS FORTUITES

### 2.9.1 Introduction

Dans une première analyse (§ 2.1.9) on a abordé le problème de la propagation des erreurs fortuites (variables aléatoires), en les remplaçant par des erreurs maximales (valeurs certaines). Le but de cette section est de reprendre le problème en respectant sa nature statistique. Tout résultat de mesure peut être exprimé par une variable aléatoire  $X_i$  de la forme :

$$X_i = A + \Delta'_i \quad (2.98)$$

où  $A$  est la valeur exacte (valeur certaine, inaccessible par nature) et  $\Delta'_i$  l'erreur de mesure, variable aléatoire. L'erreur  $\Delta'_i$  résulte en général d'un grand nombre de causes, dont certaines sont de nature déterministe (erreurs systématiques) et d'autres, de nature aléatoire. Soit

$$\epsilon = E[\Delta'_i] \quad (2.99)$$

la variable aléatoire  $\Delta_i$  définie par

$$\Delta_i = \Delta'_i - \epsilon \tag{2.100}$$

est centrée et de même variance  $\sigma$  que  $\Delta'_i$ .

On peut mettre (2.98) sous la forme

$$X_i = A + \epsilon + \Delta_i \tag{2.101}$$

Alors,  $\epsilon$  représente l'erreur systématique et  $\Delta_i$  l'erreur fortuite. En admettant que  $\Delta'_i$  est normale  $N(\epsilon, \sigma^2)$ ,  $\Delta_i$  est normale standard  $N(0, \sigma^2)$  et  $X_i$  suit la distribution  $N(\mu, \sigma^2)$  où  $\mu = A + \epsilon$ .

### 2.9.2 Loi de propagation

Soit un résultat de mesure

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_k) \tag{2.102}$$

où chaque  $X_i$ , variable aléatoire, est un résultat partiel. Le problème se résume à trouver les propriétés statistiques de  $Y$  à partir de celles des  $X_i$ .

On caractérise individuellement chaque variable  $X_i$  par son espérance mathématique et sa variance uniquement :

$$\mu_i = E[X_i] \tag{2.103}$$

et

$$\sigma_i^2 = \text{Var}[X_i] \tag{2.104}$$

Ces grandeurs sont connues par leurs estimateurs non biaisés  $\bar{X}_i$  et  $\hat{S}_i^2$ .

Une relation de dépendance éventuelle entre  $X_i$  et  $X_j$  est décrite par leur covariance définie par :

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] \tag{2.105}$$

On a

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = E[\Delta_i \cdot \Delta_j] = \sigma_{ij}^2 = \sigma_{ji}^2 \tag{2.106}$$

par définition de  $\sigma_{ij}^2$  et  $\sigma_{ji}^2$ , et puisque

$$\Delta_i = X_i - \mu_i. \tag{2.107}$$

Cette covariance est connue théoriquement ou à travers l'estimateur non biaisé  $\hat{S}_{ij}^2$ . Soit  $n$  la taille des échantillons de chaque variable aléatoire  $X_i$ . La valeur numérique de la réalisation  $\hat{s}_{ij}^2$  de  $\hat{S}_{ij}^2$  s'obtient par l'équation :

$$\hat{s}_{ji}^2 = \hat{s}_{ij}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{l=1}^n (x_{il} - \bar{x}_i)(x_{jl} - \bar{x}_j) \tag{2.108}$$

Les notations utilisées sont explicitées à la figure 2.25. On montre (§ 2.11.4) que (2.108) est équivalent à

$$\hat{s}_{ij}^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{l=1}^n x_{il} x_{jl} - \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n x_{il} \sum_{j=1}^n x_{jl} \right\} \tag{2.109}$$

Tableau 2.25

	Echantillons	$E(X_i)$	Moyennes des échantillons	Variances estimées (§ 2.4.1)
Population $X_1$	$\rightarrow x_{11} \ x_{12} \ \dots \ x_{1n}$	$\mu_1$	$\bar{x}_1$	$\hat{s}_1^2$
Population $X_2$	$\rightarrow x_{21} \ x_{22} \ \dots \ x_{2n}$	$\mu_2$	$\bar{x}_2$	$\hat{s}_2^2$
Population $X_k$	$\rightarrow x_{k1} \ x_{k2} \ \dots \ x_{kn}$ Réalizations des $X_i$	$\mu_k$	$\bar{x}_k$ Réalizations des $\bar{X}_i$	$\hat{s}_k^2$ Réalizations des $S_i^2$

plus pratique pour le calcul numérique. Soient encore  $\mathbf{X}$  la variable aléatoire vectorielle dont les  $k$  composantes sont les variables  $X_i$ , et  $\boldsymbol{\mu}$  le vecteur  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ .

En admettant que les erreurs soient petites, le résultat final  $Y$  peut être exprimé par son développement en série de Taylor limité aux termes du premier ordre :

$$Y = f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) + \sum_{i=1}^k \left. \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\mu}} \Delta_i \quad (2.110)$$

Comme  $E[\Delta_i] = 0$ , on tire de (2.110),

$$E[Y] = f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) = \mu_y \quad (2.111)$$

L'estimateur de  $\mu_y$  est  $\hat{Y}$ ,

$$\hat{Y} = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_k) \quad (2.112)$$

Il reste à calculer la variance de  $Y$ . Par définition,

$$\text{Var}(Y) = E[(Y - E(Y))^2] \quad (2.113)$$

Compte tenu de (2.110),

$$\text{Var}(Y) = E \left\{ \left[ \sum_{i=1}^k \left. \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\mu}} \Delta_i \right]^2 \right\} \quad (2.114)$$

qui peut se mettre sous la forme

$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \left. \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\mu}} \left. \frac{\partial f}{\partial X_j} \right|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\mu}} \sigma_{ij}^2 = \sigma_y^2 \quad (2.115)$$

L'estimateur non biaisé  $\hat{S}_y^2$  de  $\sigma_y^2$  vaut :

$$\hat{S}_y^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \left. \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{\mathbf{X}=\bar{\mathbf{X}}} \left. \frac{\partial f}{\partial X_j} \right|_{\mathbf{X}=\bar{\mathbf{X}}} \hat{S}_{ij}^2 \quad (2.116)$$

où par convention d'écriture  $\hat{S}_{ii}^2 = \hat{S}_i^2$ , variance estimée de  $X_i$ .

Dans le cas où les résultats partiels  $X_i$  ne sont pas corrélés, (2.115) et (2.116) se réduisent à :

$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial f}{\partial X_i} \right)_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\mu}}^2 \sigma_i^2 = \sigma_y^2 \quad (2.117)$$

$$\hat{S}_y^2 = \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial f}{\partial X_i} \right)_{\mathbf{X}=\bar{\mathbf{X}}}^2 \hat{S}_i^2 \quad (2.118)$$

En conclusion, le résultat de mesure  $Y$  est une variable aléatoire caractérisée par :

- une espérance mathématique  $E(Y)$  dont l'estimateur non biaisé  $\hat{Y}$  est donné par (2.112);
- une variance  $\text{Var}(Y)$  dont l'estimateur non biaisé  $\hat{S}_y^2$  est donné par (2.116) dans le cas général et (2.118) si les résultats partiels  $X_i$  ne sont pas corrélés.

### 2.9.3 Cas particulier, distributions normales

Lorsque chaque variable  $X_i$  est indépendante des autres et possède une distribution normale  $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ , l'estimateur de la moyenne du résultat  $Y: \hat{Y} = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_k)$  suit également une distribution normale  $N(\mu_y, \sigma_y^2/n)$ , où  $\mu_y$  est donné par (2.111) et  $\sigma_y^2$  par (2.117),  $n$  représentant la taille unique de tous les échantillons des variables  $X_i$ . Ce résultat est une généralisation des propriétés de fluctuations d'échantillonnage de la moyenne énoncées au paragraphe 2.7.1.

En pratique,  $\mu_y$  et  $\sigma_y^2$  sont évaluées par leurs estimateurs  $\hat{Y}$  (2.112) et  $\hat{S}_y^2$  (2.118). En appelant  $\hat{S}_{\bar{y}}^2$  l'estimateur de la variance de  $\bar{Y}$ , on a :

$$\hat{S}_{\bar{y}}^2 = \hat{S}_y^2/n \quad (2.119)$$

Lorsque les tailles  $n_i$  des échantillons des  $X_i$  diffèrent les unes des autres, on admet en général pour le calcul de  $\hat{S}_{\bar{y}}^2$  la relation

$$\hat{S}_{\bar{y}}^2 = \sum_{i=1}^k \lambda_i \hat{S}_i^2 \quad (2.120)$$

où

$$\lambda_i = \frac{1}{n_i} \left. \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{\mathbf{X}=\bar{\mathbf{X}}} \quad (2.121)$$

On démontre alors [8] que la variable aléatoire

$$T = \frac{\hat{Y} - \mu_y}{\hat{S}_{\bar{y}}} \quad (2.122)$$

est distribuée selon la loi de Student pour  $\nu$  degrés de liberté, où

$$\nu = \hat{S}_{\bar{y}}^4 / \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i^2 \hat{S}_i^4}{n_i - 1} \quad (2.123)$$

Si la valeur de  $\nu$  n'est pas entière, on peut recourir à une interpolation linéaire de la loi de Student. La statistique  $T$  (2.122) permet de déterminer les zones de confiance et les zones critiques de  $\bar{Y}$  et l'usage de tests d'hypothèse selon la procédure du paragraphe 2.5.7.

## 2.10 REGRESSION ET CORRÉLATION

### 2.10.1 Introduction

Un résultat de mesure se présente parfois (§ 2.7.5) sous la forme d'un couple de variables aléatoires  $(X, Y)$ . Ce sont par exemple le taux d'impuretés et le champ électrique disruptif dans un diélectrique, le taux de défaillance d'un dispositif et son exposition aux rayonnements cosmiques, les grandeurs d'entrée et de sortie d'un équipement, etc. Deux questions se posent alors :

- Existe-t-il une relation entre  $X$  et  $Y$  ?
- Si oui, comment la représenter.

Une première réponse, de nature qualitative, est donnée par le diagramme de dispersion (§ 2.2.3). Le but de cette section est d'apporter des réponses quantitatives à ces questions.

### 2.10.2 Droite de régression

La meilleure approximation *linéaire* de la relation de dépendance entre  $X$  et  $Y$  est appelée *droite de régression* de  $Y$  en fonction de  $X$ . Il suffit de deux couples  $(x_i, y_i)$  pour fixer une droite dans le diagramme de dispersion, mais chaque couple possible donne en principe une droite différente. Il faut donc un critère d'optimisation. Soit

$$y_e = ax + b \quad (2.124)$$

l'équation de la droite de régression. Cette droite passe le mieux par l'ensemble des points, au sens du critère des *moindres carrés*, lorsque  $a$  et  $b$  minimisent

$$D = \sum_{i=1}^n (y_i - y_{ei})^2 \quad (2.125)$$

où  $y_{ei}$  est l'ordonnée sur la droite correspondant au point  $x_i$  et  $n$  la taille de l'échantillon. On a donc

$$D = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \quad (2.126)$$

Le minimum de  $D$  correspond aux solutions des équations canoniques

$$\frac{\partial D}{\partial a} = 0 ; \quad \frac{\partial D}{\partial b} = 0 \quad (2.127)$$

dont les solutions sont :

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (2.128)$$

et

$$b = \bar{y} - a \bar{x} \quad (2.129)$$

où  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  sont les moyennes calculées sur l'échantillon. Considérant (2.15) et le paragraphe 2.11.3, on constate que (2.128) peut être mise sous la forme concise suivante :

$$a = \hat{s}_{xy}^2 / \hat{s}_x^2 \quad (2.130)$$

Il est fondamental de remarquer que (2.127) a toujours des solutions, le cas exceptionnel d'une pente  $a = \infty$  étant réservé. Quelle que soit la distribution des points dans le diagramme de dispersion, il existe donc toujours une droite passant le mieux par ces points. *Le caractère représentatif de la droite de régression n'est donc pas acquis par le simple fait qu'elle existe.*

### 2.10.3 Corrélation

Les trois diagrammes de dispersion de la figure 2.26 conduisent à la même droite de régression.

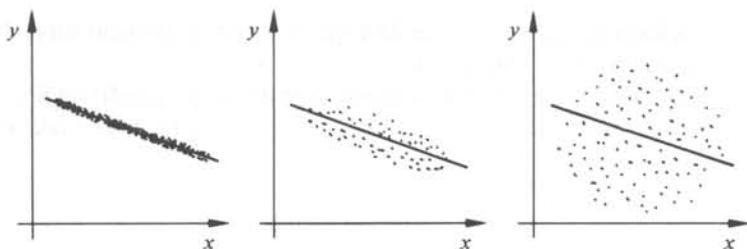


Fig. 2.26

Dans le premier cas, la droite est hautement significative, la relation  $X - Y$  est de nature quasi déterministe. Dans le second, une dépendance statistique entre  $X$  et  $Y$  apparaît assez clairement, tandis que dans le troisième, les variables  $X$  et  $Y$  sont complètement indépendantes l'une de l'autre.

Il y a plusieurs façons de mesurer le caractère représentatif de la droite de régression. La première est la variance  $s_e^2$  définie par

$$s_e^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - y_{ei})^2 \quad (2.131)$$

Lorsque la statistique des écarts  $y_i - y_{ei}$  est connue,  $s_e^2$  permet de tracer des zones de confiance sur le diagramme de dispersion (fig. 2.27).

La seconde est basée sur la covariance  $S_{XY}^2$ . Comme telle,  $S_{XY}^2$  présente l'inconvénient de ne pas être normée. Par conséquent, il n'est pas possible de dire a priori si

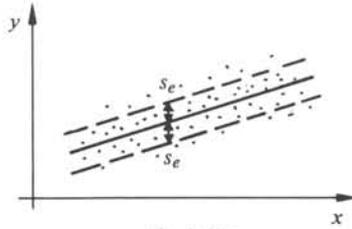


Fig. 2.27

telle ou telle covariance est grande (forte dépendance) ou petite. C'est pourquoi on utilise de préférence le *coefficient de corrélation*  $R$  défini par :

$$R = \frac{S_{XY}^2}{S_X S_Y} \quad (2.132)$$

Ce coefficient est lié à la pente de la droite de régression par

$$R = a \frac{S_X}{S_Y} \quad (2.133)$$

et à l'écart-type  $S_e$  des estimations (§ 2.11.5) par

$$S_e = S_Y \sqrt{1 - R^2} \quad (2.134)$$

Cette relation montre en outre que

$$-1 < R < +1 \quad (2.135)$$

Si  $|R| = 1$  tous les points du diagramme de dispersion sont exactement sur la droite de régression, puisque selon (2.134)  $s_e = 0$ .

A l'opposé si  $R = 0$ , la pente de la droite s'annule, ce qui signifie qu'il n'existe pas de relation entre  $X$  et  $Y$  puisque, à toute valeur  $x_i$  correspond la même valeur estimée  $y_{ei} = \bar{Y}$ .

Entre ces extrêmes, on peut dire que la relation  $X - Y$  est d'autant plus marquée que  $|R|$  s'approche de 1. L'écart-type étant une valeur toujours positive, (2.133) montre que  $R$  et la pente  $a$  de la droite de régression ont toujours le même signe.

La manière la plus rapide de calculer  $R$  est d'utiliser dans (2.132) les expressions (2.15) et (2.108) en prenant garde de faire figurer les deux fois soit  $n$ , soit  $(n - 1)$  au dénominateur.

#### 2.10.4 Test des valeurs de $R$

On peut montrer [5] que si  $X$  et  $Y$  suivent une loi normale bidimensionnelle et sont statistiquement indépendantes, la variable aléatoire

$$T = \frac{R}{\sqrt{1 - R^2}} \sqrt{n - 2} \quad (2.136)$$

suit une distribution de Student pour  $\nu = n - 2$  degrés de liberté où  $n$  représente la taille de l'échantillon de couples  $(x_i, y_i)$  sur lequel est calculé  $R$ .

Si par contre  $X$  et  $Y$  ne sont pas statistiquement indépendantes, et que leur coefficient de corrélation est égal à  $\rho$ , alors [9] la variable aléatoire

$$Z = \frac{U - \bar{U}}{\sigma_U} \quad (2.137)$$

où

$$U = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+R}{1-R} \quad (2.138)$$

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+\rho}{1-\rho} \quad (2.139)$$

et

$$\sigma_U = \frac{1}{\sqrt{n-3}} \quad (2.140)$$

est distribuée selon  $N(0,1)$ .

Les statistiques (2.136) et (2.137) permettent de tester la valeur d'un coefficient de corrélation mesuré selon la procédure générale du paragraphe 2.5.7. Avec (2.136) l'hypothèse nulle est obligatoirement « $R$  ne diffère pas significativement de zéro», alors que (2.137) permet la formulation plus générale: « $R$  ne diffère pas significativement de  $\rho$ ».

### 2.10.5 Changements de variables

Lorsque le diagramme de dispersion met en évidence une relation  $X - Y$  non linéaire, il est souvent possible de se ramener au cas linéaire par un changement de variable approprié, consistant par exemple à prendre le logarithme de l'une ou l'autre des variables.

## 2.11 EXERCICES

2.11.1 Démontrer que la valeur moyenne d'un ensemble de mesures peut s'obtenir à partir de l'histogramme au moyen de (2.10).

2.11.2 Démontrer, à partir de la définition, que la variance peut être calculée au moyen de (2.15), ou (2.16) dans le cas de données présentées sous la forme d'un histogramme.

2.11.3 Démontrer la relation (2.42).

2.11.4 Montrer, à partir de la définition (2.108), que la covariance d'un échantillon de résultats appariés  $(x_i, y_i)$  peut être calculée à partir de la formule

$$S_{xy}^2 = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i \right\}$$

où  $n$  est la taille de l'échantillon.

2.11.5 Démontrer la relation (2.134).



## BRUIT, MÉTHODES ACTIVES ET PASSIVES DE RÉDUCTION DU BRUIT

### 3.1 INTRODUCTION

#### 3.1.1 Généralités

La description formelle d'un système de mesure présentée au chapitre 1 a fait apparaître les notions de grandeur interférente et de grandeur modifiante. Une tâche importante de la métrologie est de réduire l'effet de ces grandeurs, opération sans laquelle certains processus ne sont tout simplement pas accessibles à la mesure. De très nombreux exemples peuvent illustrer cette situation. On en trouve dans toutes les techniques de pointe : radio-astronomie, exploration spatiale par sondes automatiques, détection sous-marine, appareils médicaux, etc., mais également dans tout problème plus simple, dès qu'un capteur doit travailler en-dessous de sa limite normale de sensibilité ou dans un environnement très perturbé.

L'étude des processus physiques responsables de l'existence des grandeurs interférentes et modifiantes, constitue le préalable indispensable à la mise en œuvre de techniques propres à limiter leurs effets.

#### 3.1.2 Bruits intrinsèques et extrinsèques. Définitions

Le signal de sortie  $y(t)$  de tout élément d'un système de mesure peut être mis sous la forme :

$$y(t) = y_0(t) + b_1(t) + b_2(t) \quad (3.1)$$

Par définition, on appelle *bruit intrinsèque* le bruit  $b_1(t)$  dû à l'élément lui-même, supposé soustrait à toute influence extérieure.

De même, on appelle *bruit extrinsèque* le bruit  $b_2(t)$  résultant exclusivement d'influences extérieures agissant sur l'élément.

$y_0(t)$  contient la contribution du bruit présent dans le signal appliqué à l'entrée de l'élément.

#### 3.1.3 Caractérisation du bruit

La réponse d'un système de mesure est le plus souvent donnée en termes de bande passante. C'est pourquoi le bruit est généralement caractérisé dans le *domaine fréquentiel*.

On suppose que le bruit est *stationnaire et ergodique*. La notion de stationnarité s'applique aux signaux de nature aléatoire ou déterministe. Elle signifie que les paramètres qui décrivent ces signaux sont indépendants du temps. La notion d'ergodicité

ne concerne que les signaux aléatoires. L'hypothèse ergodique entraîne que les résultats obtenus à partir de moyennes d'ensembles sont équivalents aux résultats obtenus à partir de moyennes temporelles [10].

Soit une observation  $b_i(t)$  d'un bruit  $b(t)$  dans l'intervalle de temps  $-T/2 < t < T/2$  (fig. 3.1).

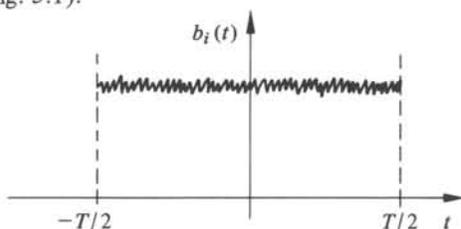


Fig. 3.1

La transformée de Fourier de ce signal, supposé nul hors de l'intervalle s'écrit :

$$B_i(f, T) = \int_{-T/2}^{T/2} b_i(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (3.2)$$

La puissance moyenne du signal dans l'intervalle, calculée dans le domaine des fréquences s'exprime par :

$$P_{i,T} = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |B_i(f, T)|^2 df \quad (3.3)$$

La densité spectrale de puissance de ce signal  $\Phi_i(f, T)$  vaut par définition :

$$\Phi_i(f, T) = \frac{1}{T} |B_i(f, T)|^2 \quad (3.4)$$

En pratique, c'est la densité spectrale de puissance du bruit  $b(t)$  lui-même qui est intéressante, davantage que celle résultant de l'observation  $b_i(t)$  durant un temps  $T$  limité. On montre (sect. VI.5.3) que cette densité, notée  $\Phi(f)$ , peut être déduite théoriquement d'un ensemble d'observations  $b_i(t)$  par les opérations suivantes :

Premièrement, calcul de l'espérance mathématique  $\Phi(f, T)$  des densités spectrales obtenues sur un certain nombre (théoriquement infini) d'échantillons  $b_i(t)$  de durée  $T$  :

$$\Phi(f, T) = E \{ \Phi_i(f, T) \} \quad (3.5)$$

Secondement, passage à la limite  $T \rightarrow \infty$  de manière à obtenir une résolution fréquentielle infinie.

$$\Phi(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \Phi(f, T) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{|B_i(f, T)|^2}{T} \right\} \quad (3.6)$$

En pratique, seule une approximation de  $\Phi(f)$  peut être obtenue. Cette approximation sera d'autant meilleure que le nombre d'échantillons  $b_i(t)$  sera élevé (fluctuations d'échantillonnage de l'amplitude de la densité spectrale) et la durée  $T$  importante (résolution fréquentielle de la densité spectrale).

En résumé, un bruit est complètement décrit par sa densité spectrale de puissance.

### 3.1.4 Densités bilatérale et unilatérale. Définitions

La densité spectrale de puissance  $\Phi(f)$  est une fonction paire, définie mathématiquement dans tout le domaine  $-\infty < f < +\infty$ . Or, seules les fréquences positives ont un sens physique. C'est pourquoi on utilise parfois la densité spectrale de puissance  $\Phi^+(f)$  définie seulement pour  $0 \leq f < \infty$  et telle que

$$\Phi^+(f) = 2\Phi(f) \quad 0 \leq f < \infty \quad (3.7)$$

On appelle  $\Phi^+(f)$  la *densité unilatérale* et, par opposition,  $\Phi(f)$  la *densité bilatérale*.

### 3.1.5 Bruit blanc. Définition

On appelle *bruit blanc*, un bruit dont la densité spectrale de puissance ne dépend pas de  $f$ . La puissance moyenne d'un bruit blanc dans tout le domaine  $-\infty < f < +\infty$  est théoriquement infinie. Mais aucun processus physique ne possède une telle bande passante de sorte qu'en pratique, explicitement ou implicitement, on n'utilise que le concept de *bruit blanc dans une bande de fréquence limitée*.

### 3.1.6 Dimension de la densité spectrale de puissance

La puissance, en théorie du signal, exprimée dans le domaine fréquentiel (3.3) ou dans le domaine temporel (3.8)

$$P_T = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [b(t)]^2 dt \quad (3.8)$$

ne correspond pas à la puissance définie en physique. Sauf exception, elle ne s'exprime pas en watt. Par exemple, si  $b(t)$  est un signal de tension, sa transformée de Fourier  $B(f)$  s'exprime en Vs; sa puissance en  $V^2$  et sa densité spectrale de puissance en  $V^2s$ , soit encore en  $V^2/Hz$ . De même, si  $b(t)$  est un signal de courant,  $B(f)$  s'exprime en As; la puissance en  $A^2$  et la densité spectrale de puissance en  $A^2s$  ou  $A^2/Hz$ .

### 3.1.7 Bande passante du bruit

Soit  $G(f)$  la fonction de transfert d'un système linéaire à l'entrée duquel est appliqué un bruit  $b(t)$ . Cette fonction est habituellement exprimée par un quotient de grandeurs (tensions, courants, ...) présentes à la sortie et à l'entrée du système.

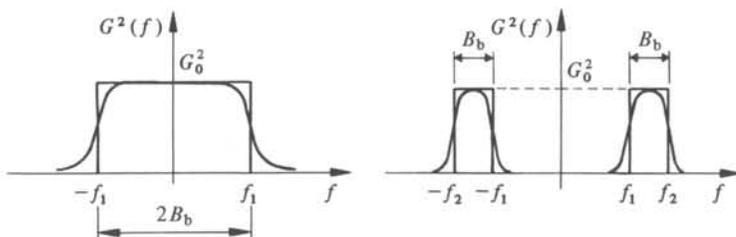


Fig. 3.2 Bandes passantes de bruit pour des fonctions de transfert de type passe-bas et passe-bande.

A toute fonction  $G(f)$  correspond une bande passante  $B_b$  laissant passer la même puissance de bruit blanc (fig. 3.2),

$$B_b = \frac{1}{G_0^2} \int_0^{\infty} G^2(f) df \quad (3.9)$$

On appelle  $B_b$  la *bande passante du bruit*.

### 3.1.8 Remarques

La bande passante du bruit diffère de la bande passante du signal, définie par les fréquences où  $G^2(f)$  atteint  $-3$  dB par rapport à une valeur centrale (maximum).

Strictement, la définition (3.9) ne s'applique que dans le cas d'un bruit blanc. Par extension, elle est encore utile lorsque la densité spectrale de puissance du bruit ne varie pas trop dans la bande de fréquence considérée. Si tel n'est pas le cas (bruit en  $1/f$  par exemple), la puissance du bruit doit être calculée par intégration de la densité spectrale de puissance, pondérée par le carré du module de la fonction de transfert correspondante. Par exemple :

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} G_U^2(f) \Phi(f) df = 2 \int_0^{\infty} G_U^2(f) \Phi(f) df \quad (3.10)$$

où  $\Phi(f)$  est exprimée en  $V^2/Hz$  et  $G_U(f)$  représente le rapport de la tension de sortie à la tension d'entrée du système.

Lorsque l'expression mathématique de  $G^2(f)$  n'est pas disponible, on détermine  $B_b$  par intégration graphique. Il faut alors prendre garde d'utiliser des échelles linéaires pour  $G^2(f)$  et la fréquence.

### 3.1.9 Circuit RC passe-bas

La bande passante du bruit pour le circuit de la figure 3.3 s'établit comme suit. La fonction de transfert est donnée par :

$$G_U(f) = \frac{U_s}{U_e} = \frac{1}{1 + j2\pi fRC} \quad (3.11)$$

soit encore, en posant :

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} \quad (3.12)$$

$$G_U(f) = \frac{1}{1 + jf/f_c} \quad (3.13)$$

d'où

$$B_b = \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + f^2/f_c^2} df = f_c \arctan\left(\frac{f}{f_c}\right) \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} f_c \quad (3.14)$$

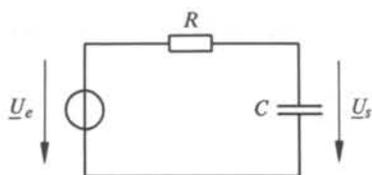


Fig. 3.3

On constate (fig. 3.4) que la bande passante du bruit est  $\pi/2 = 1,57$  fois plus large que la bande passante du signal. Ce résultat est valable pour tout circuit passe-bas représentable par un filtre à 1 pôle (affaiblissement de 20 dB/décade). La valeur de  $B_b/f_c$  décroît à mesure que le nombre de pôles augmente et ne vaut plus que 1,15 pour un filtre à 3 pôles (affaiblissement de 60 dB/décade).

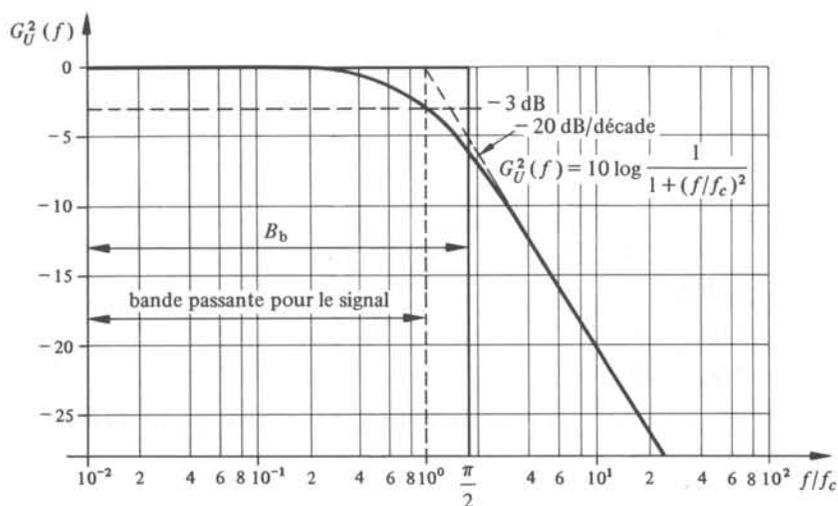


Fig. 3.4

### 3.1.10 Circuits résonants

Le circuit résonant parallèle de la figure 3.5 peut être représenté par la fonction de transfert

$$G_{UI}(f) = \frac{U}{I} = \frac{1}{1/R + j(2\pi fC - 1/2\pi fL)} \quad (3.15)$$

A la résonance,  $f = f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$ , la fonction de transfert passe par le maximum

$$G_{UI}(f_0) = R \quad (3.16)$$

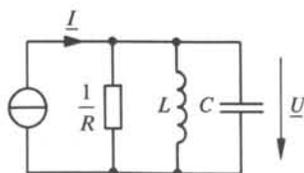


Fig. 3.5

En introduisant le facteur de qualité  $Q_0$  du circuit, à la résonance,

$$Q_0 = 2\pi f_0 RC = \frac{R}{2\pi f_0 L} \quad (3.17)$$

il vient

$$|G_{UI}(f)|^2 = \frac{R^2}{1 + Q_0^2 (f/f_0 - f_0/f)^2} \quad (3.18)$$

d'où, en tenant compte de (3.16)

$$B_b = \int_0^{\infty} (1 + Q_0^2 (f/f_0 - f_0/f)^2)^{-1} df \quad (3.19)$$

Après intégration, on obtient simplement

$$B_b = \frac{\pi f_0}{2Q_0} = \frac{1}{4RC} \quad (3.20)$$

Un calcul similaire pour le circuit résonant série de la figure 3.6 décrit par la fonction de transfert

$$G_{IU}(f) = \frac{I}{U} = \frac{1}{R + j(2\pi fL - 1/2\pi fC)} \quad (3.21)$$

conduit au résultat

$$B_b = \frac{\pi f_0}{2Q_0} = \frac{R}{4L} \quad (3.22)$$

où  $f_0$  est encore la fréquence de résonance et  $Q_0$  le facteur de qualité du circuit à cette fréquence :

$$Q_0 = \frac{2\pi f_0 L}{R} = \frac{1}{2\pi f_0 RC} \quad (3.23)$$

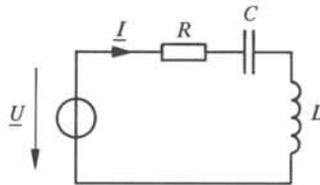


Fig. 3.6

## 3.2 SOURCES DE BRUIT

### 3.2.1 Bruits intrinsèques

Tous les bruits intrinsèques d'un circuit électrique sont liés d'une manière ou d'une autre au caractère stochastique que présentent, au niveau microscopique, les phénomènes de conduction électrique. En raison même de leurs origines, ils sont toujours

présents à un niveau supérieur ou égal à une limite théorique donnée par les lois de la physique. Les trois types de bruits intrinsèques les plus importants sont :

- *le bruit thermique*, lié à la vitesse thermique des porteurs de charge. On se rappelle que l'énergie cinétique des électrons de conduction dans un métal n'est jamais nulle, même à 0 K (sect. II.2.4);
- *le bruit de grenaille*, lié à la statistique qui gouverne le franchissement d'une barrière de potentiel, telle qu'on en trouve aux jonctions entre semiconducteurs dopés différemment, par exemple;
- *le bruit en  $1/f$*  ou bruit additionnel dont l'origine, moins bien définie, est attribuée à des phénomènes de contact et d'inhomogénéités dans les matériaux polycristallins.

Ces bruits sont décrits en valeur moyenne par leur densité spectrale de puissance, leur valeur instantanée suit une statistique gaussienne.

### 3.2.2 Bruit thermique

Soit une résistance  $R$  contenant un nombre volumique  $n$  d'électrons. Pour simplifier l'écriture, on supposera que la résistance est cylindrique, de longueur  $l$  et de section  $S$ , ce qui ne restreint pas la généralité du raisonnement. Soit encore  $U$  la tension aux bornes de  $R$  et  $\bar{V}$  la composante moyenne de la vitesse des électrons selon l'axe de la résistance. Les grandeurs  $U$  et  $\bar{V}$  fluctuent au cours du temps, ce sont des variables aléatoires. La loi d'Ohm et le bilan des charges dans une section de  $R$  donnent :

$$U = -R n e \bar{V} S \quad (3.24)$$

La quantité  $nSl$  représente le nombre total d'électrons dans la résistance. Par conséquent :

$$nSl\bar{V} = \sum_i V_i \quad \text{ms}^{-1} \quad (3.25)$$

la somme portant sur tous les électrons de  $R$  et  $V_i$  désignant la composante algébrique de la vitesse de l'électron n°  $i$  sur l'axe de la résistance. De (3.24) et (3.25), on tire :

$$U = \frac{-eR}{l} \sum_i V_i \quad (3.26)$$

On peut définir une variable aléatoire  $U_i$  représentant la contribution de l'électron n°  $i$  à la tension  $U$  :

$$U_i = \frac{-eR}{l} V_i \quad (3.27)$$

L'étude de  $U_i$  dans le but d'obtenir, en particulier, la densité spectrale de puissance  $\Phi_U$  de la tension aux bornes de  $R$ , passe donc par l'étude des propriétés statistiques de  $V_i$ .

La distribution de vitesse des électrons dans un milieu conducteur dépend de la nature de celui-ci (chap. II.2). On devrait donc s'attendre à ce que  $\Phi_U$  soit différente dans un semiconducteur de ce qu'elle est dans un électrolyte par exemple. En réalité, il n'en est rien, comme le montre le raisonnement suivant :

Soient  $R_a$  et  $R_b$  deux résistances de même valeur mais de natures différentes, dans lesquelles les porteurs de charge suivent respectivement la distribution de Boltzmann et de Fermi-Dirac. Lorsque les bornes de ces résistances sont réunies (fig. 3.7), toute la puissance produite par une résistance est absorbée par l'autre et réciproquement.

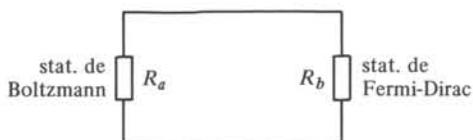


Fig. 3.7

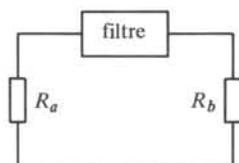


Fig. 3.8

A l'équilibre thermique, ces puissances doivent être égales, sinon l'une de ces résistances s'échaufferait aux dépens de l'autre. Il faut encore montrer que les densités spectrales de puissance sont les mêmes dans  $R_a$  et  $R_b$ . Il suffit pour cela de placer dans le circuit (fig. 3.8) un filtre passe-bande de largeur  $\Delta f$  aussi petite que l'on veut, et de reprendre le raisonnement précédent pour la seule puissance transmise par le filtre.

La densité spectrale de puissance du bruit thermique dans un circuit électrique est donc une fonction universelle de la résistance et de la température.

Cela tient au fait que, quel que soit le modèle de conduction utilisé (boules de billard, Sommerfeld, bandes d'énergie), le comportement d'un électron (ou de tout autre porteur de charge mobile) est assimilable à un processus de Gauss-Markov [11] possédant une fonction d'autocorrélation temporelle de  $U_i$  du type :

$$R(\tau) = \overline{U_i^2} \exp(-|\tau|/\tau_c) \quad (3.28)$$

où  $\tau_c$  représente le temps de collision moyen des électrons (fig. 3.9).

La densité spectrale de puissance  $\Phi_{1U}$  relative aux mouvements d'un seul électron se déduit de (3.28) par le théorème de Wiener-Kinchine (§ VI.5.3.3)

$$\Phi_{1U}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \quad (3.29)$$

d'où

$$\Phi_{1U}(f) = \left(\frac{eR}{l}\right)^2 \overline{V_i^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-|\tau|/\tau_c) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \quad (3.30)$$

soit encore, en vertu de la parité de  $R(\tau)$ :

$$\Phi_{1U}(f) = \left(\frac{eR}{l}\right)^2 \overline{V_i^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-|\tau|/\tau_c) \cos(2\pi f\tau) d\tau \quad (3.31)$$

Après intégration, il vient

$$\Phi_{1U}(f) = \left(\frac{eR}{l}\right)^2 \overline{V_i^2} \frac{2\tau_c}{1+(2\pi f\tau_c)^2} \quad (3.32)$$

Le terme  $(2\pi f\tau_c)^2$  est généralement très petit devant 1 et sera négligé dans la suite. En effet, le temps de collision  $\tau_c$  est de l'ordre de  $10^{-14}$  s dans les métaux, il atteint au maximum  $10^{-10}$  s dans certains semiconducteurs [12].

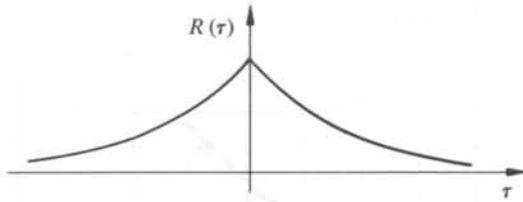


Fig. 3.9

Selon le principe d'équipartition de l'énergie [13], chaque électron possède en moyenne une énergie égale à  $\frac{1}{2} k_B T$  par degré de liberté. Considérant le degré de liberté correspondant à un déplacement parallèle à l'axe de la résistance, on a :

$$\frac{1}{2} m \overline{V_i^2} = \frac{1}{2} k_B T \quad \text{J} \quad (3.33)$$

où  $m$  est la masse au repos de l'électron,  $k_B$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température absolue.

En portant (3.33) dans (3.32) il vient :

$$\Phi_{1U}(f) = 2 \left( \frac{eR}{l} \right)^2 \frac{k_B T}{m} \tau_c \quad (3.34)$$

Or, le temps de collision est lié à la résistivité (équ. II.2.20) par :

$$\tau_c = \frac{1}{\rho} \frac{m}{ne^2} \quad (3.35)$$

De plus,

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (3.36)$$

d'où

$$\Phi_{1U} = \frac{2R k_B T}{nSl} \quad (3.37)$$

En sommant les contributions des  $nSl$  électrons contenus dans la résistance, on obtient finalement :

$$\Phi_U^*(f) = 4R k_B T, \quad f > 0 \quad \text{V}^2/\sqrt{\text{Hz}} \quad (3.38)$$

Tant que  $(2\pi f \tau_c)^2 \ll 1$ , soit pour  $0 < f < 10^{12}$  Hz dans les métaux et pour  $0 < f < 10^8$  Hz au minimum dans les semiconducteurs, la densité spectrale de puissance  $\Phi_U(f)$  du bruit thermique peut être considérée comme constante. Sauf exception **le bruit thermique peut donc être considéré comme un bruit blanc** (§ 8.4.2).

### 3.2.3 Vérification expérimentale

La validité de (3.38) a été largement démontrée, par les travaux de J.B. Johnson en particulier [14]. La valeur efficace  $\overline{U^2}$  de la tension de bruit aux bornes d'une résistance, mesurée dans la même bande passante et à la même température, est indépendante de la forme de la résistance, de la nature du milieu résistif, du type de conduction

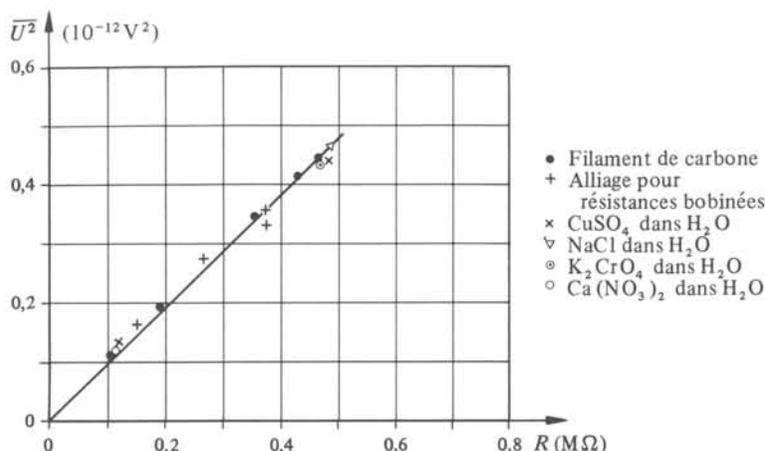


Fig. 3.10 Bruit thermique en fonction de la résistance dans diverses substances. Température:  $20^\circ \text{C}$ . Bande passante: 600 Hz, d'après [14].

(par électrons, ions lourds, ions légers). La dépendance linéaire de  $\overline{U^2}$  en fonction de la valeur de la résistance est confirmée par les résultats de la figure 3.10.

La figure 3.11 apporte une preuve de la variation linéaire de  $\overline{U^2}$  en fonction de la température.

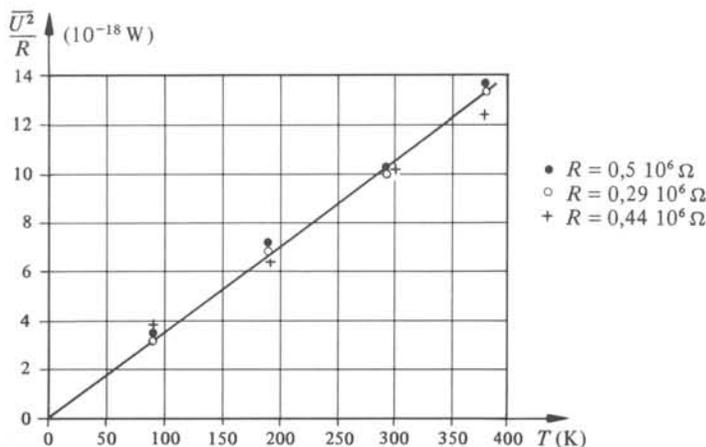


Fig. 3.11 D'après [14].

### 3.2.4 Spectre d'amplitude du bruit thermique

Le spectre d'amplitude de la tension de bruit dépend de la bande passante  $B_b$ . Cette tension résultant de la combinaison de contributions élémentaires dues à chaque porteur de charge, et le nombre de ceux-ci étant au minimum de l'ordre de  $10^{20} \text{ m}^{-3}$ , les conditions d'application du théorème central limite sont très largement satisfaites. Il en résulte que l'amplitude de la tension de bruit suit une distribution normale de moyenne nulle et de variance  $\sigma_U^2$  égale par définition au carré de la valeur efficace de  $U$ , soit  $\overline{U^2}$ , déductible de (3.38):

$$\sigma_U^2 = \overline{U^2} = \Phi_U^+(f) B_b = 4Rk_B T B_b \quad (3.39)$$

A titre d'illustration, la figure 3.12 représente l'écart-type de la tension de bruit en fonction de la résistance  $R$  avec la bande passante  $B_b$  comme paramètre, pour une température de  $20^\circ\text{C}$ .

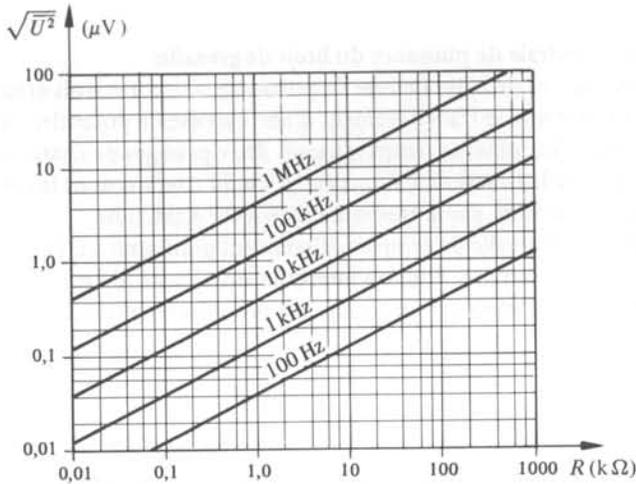


Fig. 3.12 Valeur efficace de la tension de bruit thermique aux bornes d'une résistance, à  $20^\circ\text{C}$ .

### 3.2.5 Schémas équivalents pour le bruit thermique

En vertu des théorèmes de Thévenin et de Norton, il est possible de représenter la génération du bruit thermique dans une résistance  $R$  au moyen d'une source réelle de tension (fig. 3.13) ou de courant (fig. 3.14).

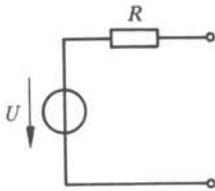


Fig. 3.13

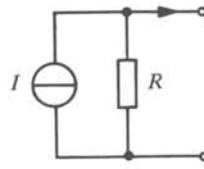


Fig. 3.14

La tension  $U$  et le courant  $I$  sont aléatoires, distribués selon  $N(0, 4k_B T B_b R)$  et  $N(0, 4k_B T B_b / R)$  respectivement. Les schémas équivalents pour des ensembles de résistances se déduisent aisément de ce qui précède par addition des variances, puisque les bruits thermiques sont statistiquement indépendants d'une résistance à l'autre.

### 3.2.6 Bruit de grenaille. Définition

On appelle *bruit de grenaille* (shot noise) les fluctuations statistiques du courant associées au franchissement d'une barrière de potentiel.

On sait en effet que le franchissement d'une barrière de potentiel par un porteur de charge constitue un phénomène aléatoire. La probabilité de passage et son complément à 1, la probabilité de réflexion sur la barrière, peuvent être calculées à partir des

solutions de l'équation de Schrödinger [15]. Les jonctions p-n et semiconducteur-métal, l'émission photoélectrique et thermo-électrique fournissent les exemples les plus courants de barrières de potentiel.

### 3.2.7 Densité spectrale de puissance du bruit de grenaille

L'établissement de cette densité de puissance comporte trois étapes. Il faut tout d'abord démontrer que le franchissement d'une barrière de potentiel est un processus de Poisson, puis déterminer le temps séparant deux passages de charge successifs et finalement calculer la fonction d'autocorrélation du courant dont la densité spectrale de puissance sera déduite par le théorème de Wiener-Kintchine.

Soit  $\Delta t$  un intervalle de temps suffisamment petit pour qu'il ne passe que 0 ou 1 électron à travers la barrière. Pour un intervalle ainsi limité, il est naturel d'admettre que la probabilité  $p$  d'observer un passage est proportionnelle à  $\Delta t$ . On pose :

$$p = \lambda \Delta t \quad (3.40)$$

et

$$q = 1 - \lambda \Delta t \quad (3.41)$$

où  $q$  est la probabilité de ne pas observer de passage. En admettant que les passages de charges ne sont pas corrélés, la probabilité d'observer  $N = k$  passages durant un intervalle de temps  $t = n\Delta t$  est donnée par la distribution binômiale

$$\text{Prob}[N(n\Delta t) = k] = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \quad (3.42)$$

Dans cette expression, le temps est une variable discrète variant par sauts de  $\Delta t$ . On rend au temps son caractère continu par les passages à la limite :  $n \rightarrow \infty$  et  $\Delta t \rightarrow 0$ . En posant  $\Delta t = t/n$  dans (3.42) il vient :

$$\text{Prob}[N(t) = k] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\lambda \frac{t}{n}\right)^k \left(1 - \lambda \frac{t}{n}\right)^{n-k} \quad (3.43)$$

soit encore

$$\text{Prob}[N(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^k (n-k)!} \left(1 - \lambda \frac{t}{n}\right)^n \left(1 - \lambda \frac{t}{n}\right)^{-k} \quad (3.44)$$

d'où

$$\text{Prob}[N(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.45)$$

On reconnaît en (3.45) la distribution de Poisson.

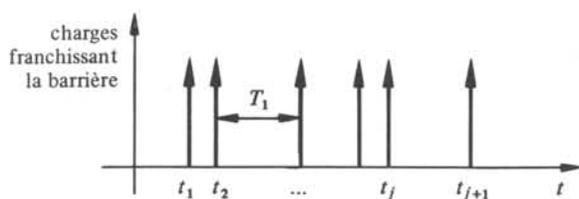


Fig. 3.15

Le courant  $i(t)$  à travers la barrière (fig. 3.15) est donné par l'équation

$$i(t) = \sum_j e \delta(t - t_j), \quad (3.46)$$

la somme sur  $j$  englobe tous les passages se produisant pendant 1 seconde. Pour calculer la fonction d'autocorrélation  $R_i(\tau)$  de  $i(t)$  il est nécessaire de connaître la densité de probabilité de l'intervalle de temps  $T_1$  séparant deux passages successifs. On peut écrire :

$$\text{Prob}[t \leq T_1 < t + \Delta t] = \text{Prob}[T_1 < t + \Delta t] - \text{Prob}[T_1 \geq t] \quad (3.47)$$

Le processus étant poissonnien  $\text{Prob}[T_1 \geq t]$  est donnée par (3.45) sous la forme :

$$\text{Prob}[N(t) = 0] = \exp(-\lambda t) \quad (3.48)$$

d'où

$$\text{Prob}[T_1 < t] = 1 - \exp(-\lambda t) \quad (3.49)$$

Par conséquent :

$$\text{Prob}[t \leq T_1 < t + \Delta t] = \{1 - \exp[-\lambda(t + \Delta t)] - [1 - \exp(-\lambda t)]\} \quad (3.50)$$

En développant  $\exp(-\lambda \Delta t)$  en série pour ne conserver que les termes d'ordre inférieur au deuxième, il vient

$$\text{Prob}[t \leq T_1 < t + \Delta t] = \lambda \Delta t \exp(-\lambda t) \quad (3.51)$$

d'où la densité de probabilité  $p_{T_1}$  de  $T_1$  :

$$p_{T_1} = \lambda \exp(-\lambda t) \quad (3.52)$$

Le calcul de  $R_i(\tau)$  à partir de (3.46) et (3.52) utilise la représentation de la fonction de Dirac comme cas limite de la fonction triangulaire. Cette procédure est donnée dans le paragraphe VI.5.8.3; il vient :

$$R_i(\tau) = (e\lambda)^2 + e^2 \lambda \delta(\tau) \quad (3.53)$$

Conformément à la définition de  $\lambda$ , qui représente le nombre moyen de porteurs de charges traversant la barrière par unité de temps, on peut écrire (3.53) sous la forme

$$R_i(\tau) = i_0^2 + ei_0 \delta(\tau) \quad (3.54)$$

où  $i_0$  représente la valeur moyenne du courant.

La densité spectrale de puissance  $\Phi_i(f)$  du courant  $i(t)$  est donnée par le théorème de Wiener-Kintchine appliqué à (3.54) :

$$\Phi_i(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_i(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau = i_0^2 \delta(f) + ei_0 \quad (3.55)$$

Le premier terme :  $i_0^2 \delta(f)$  est relatif à la valeur moyenne du signal (courant) imposé à travers la barrière de potentiel. Dans le cas d'un courant continu par exemple, sa contribution est une fonction de Dirac à l'origine, de poids  $i_0^2$ . Le second se rapporte au bruit de grenaille. La densité spectrale de puissance du bruit de grenaille  $\Phi_{ig}(f)$

vaut donc :

$$\Phi_{ig}(f) = e i_0 \quad -\infty < f < +\infty \quad (3.56)$$

En conclusion : *le bruit de grenaille est un bruit blanc, il n'existe que lorsqu'un courant  $i_0$  est imposé à travers la barrière de potentiel. Le spectre d'amplitude du courant correspondant au bruit de grenaille est distribué selon  $N(0, \sigma_i^2)$  avec*

$$\sigma_i^2 = 2B_b \Phi_{ig}(f) = 2e i_0 B_b \quad (3.57)$$

### 3.2.8 Bruit additionnel en $1/f$

En dessous de 500 Hz environ, on observe une composante de bruit dont la densité spectrale de puissance  $\Phi$  est du type

$$\Phi \sim \frac{1}{|f|^\alpha} \quad (3.58)$$

La valeur de  $\alpha$  est le plus souvent proche de 1 et reste en général comprise entre 0,8 et 1,3. Un grand nombre de processus sont générateurs de bruits du type (3.58). Dans les circuits électriques il s'agit principalement des phénomènes suivants :

- fluctuations statistiques dans les contacts entre conducteurs (connecteurs, interrupteurs, relais...);
- création-annihilation de paires électron-trou dans les niveaux d'énergie de surface (semiconducteurs);
- inhomogénéités des matériaux (résistances agglomérées...).

On observe aussi du bruit en  $1/f$  en mécanique, en thermique, en biologie, en géophysique, en astronomie...

Il existe un certain nombre de cas particuliers où la densité spectrale de puissance peut être déterminée théoriquement [16] mais l'origine exacte du bruit en  $1/f$  est encore loin d'être totalement élucidée. Dans les phénomènes électriques, on donne généralement à (3.58) la forme :

$$\Phi_{ia}^+ = \frac{K}{f} \quad (3.59)$$

et l'on admet que  $K \sim I_0^2$  où  $I_0$  représente le courant moyen dans le dispositif. La forme de (3.59) permet de calculer simplement la puissance de bruit dans la bande  $f_{\min} < f < f_{\max}$  :

$$\int_{f_{\min}}^{f_{\max}} \Phi_{ia}^+ df = K \text{Ln} \left( \frac{f_{\max}}{f_{\min}} \right) \quad (3.60)$$

Le cas limite  $f_{\min} = 0$  pour lequel (3.60) divergerait ne pose en réalité aucun problème, puisqu'il faudrait théoriquement un appareil capable de fonctionner un temps infini pour être à même de détecter l'amplitude du spectre de Fourier à 0 Hz.

L'équation (3.60) montre que la puissance de bruit en  $1/f$  est la même dans toute bande présentant le même rapport  $f_{\max}/f_{\min}$ . Il y a donc autant de bruit en  $1/f$  entre 0,01 Hz et 0,1 Hz qu'entre 10 Hz et 100 Hz.

### 3.2.9 Résistance à faible bruit

Le bruit dans les résistances dépend fortement du type de fabrication [17]. Les résistances bobinées sont celles dont le bruit s'approche le plus de la limite théorique (3.38). A l'opposé, les résistances agglomérées présentent le plus haut niveau de bruit, en raison d'une contribution importante de bruit en  $1/f$ , créé aux nombreuses interfaces entre les grains. Conformément à (3.59), cette contribution dépend du courant traversant la résistance (fig. 3.16).

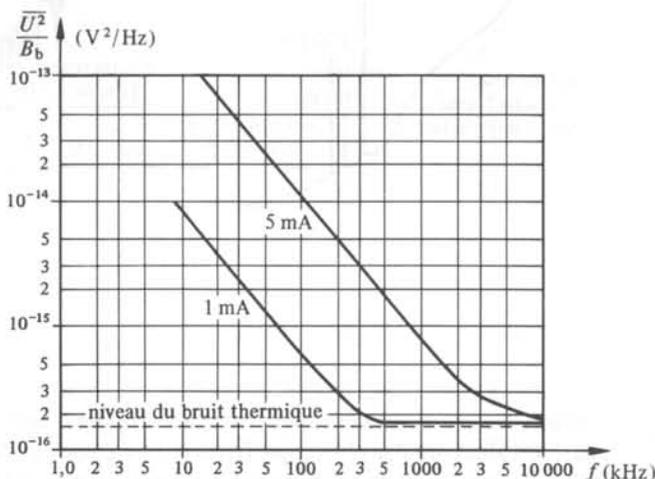


Fig. 3.16 Densité spectrale de puissance de la tension de bruit aux bornes d'une résistance agglomérée de  $10\text{ k}\Omega$ , d'après [22].

Sans égaler les résistances bobinées, les résistances à film métallique présentent un bruit nettement inférieur à celui des résistances agglomérées, la contribution en  $1/f$  étant fortement réduite grâce à une meilleure homogénéité du matériau résistif.

Dans les potentiomètres, le bruit prenant naissance au contact du curseur s'additionne au bruit dû à l'élément résistif lui-même.

### 3.2.10 Bruits extrinsèques

Tout phénomène électromagnétique constitue une source potentielle de bruits extrinsèques. L'origine de ceux-ci peut donc être extrêmement variée. Les sources les plus fréquemment rencontrées sont désignées, avec leurs propres domaines de fréquences, à la figure 3.17.

La forme des densités spectrales varie fortement d'une source à l'autre. Le secteur par exemple provoque un spectre de raies aux harmoniques de 50 Hz, il en est de même des commandes à thyristors, un émetteur radio ne fournit qu'une raie. Par contre, un arc électrique, une décharge corona, un ensemble collecteur-charbons produisent un spectre à large bande.

### 3.2.11 Interférence, influence, perturbation

Le bruit extrinsèque tel qu'il est défini au paragraphe 3.1.2 recouvre des notions fort différentes les unes des autres. Le terme de bruit est pleinement justifié lorsque le

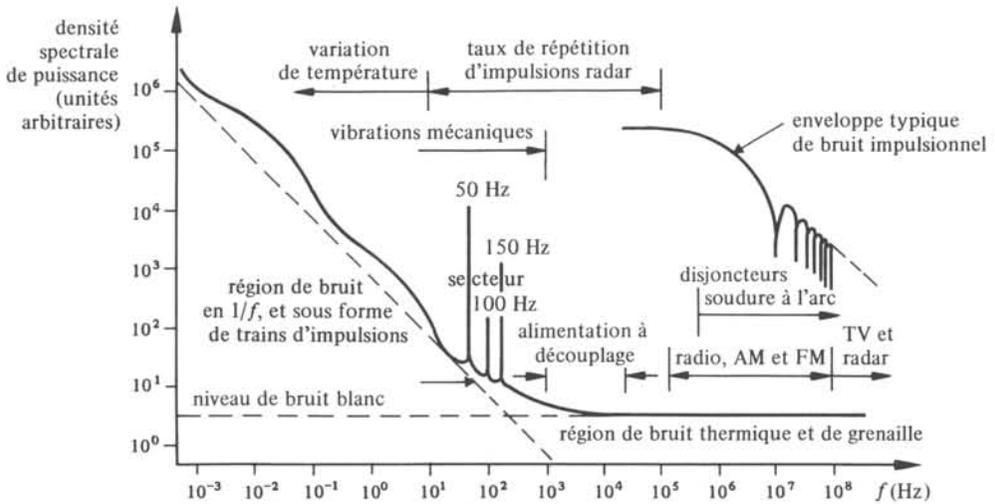


Fig. 3.17 Sources de bruits extrinsèques, d'après [23].

phénomène possède l'une au moins des caractéristiques suivantes : large spectre de fréquences, apparition aléatoire dans le temps, fluctuations aléatoires de l'amplitude. Lorsqu'il s'agit d'une tension parasite induite par le secteur par exemple, tout caractère aléatoire disparaît, souvent, on parle alors d'*interférence* ou d'*influence*. Le terme de *perturbation* est utilisé assez fréquemment comme synonyme de bruit extrinsèque.

### 3.2.12 Sommation des bruits

La puissance de bruit totale  $P$  dans la bande  $B_b$ , résultant de l'action de  $k$  sources *indépendantes* caractérisées par leur densité spectrale de puissance  $\Phi^+(f)$ , est donnée par la somme des contributions de chaque source :

$$P = \sum_{j=1}^k \int_{B_b} \Phi_j^+(f) df \quad (3.61)$$

## 3.3 BLINDAGES ET MISE À TERRE

### 3.3.1 Couplage des bruits extrinsèques

La réduction des bruits extrinsèques n'est pas toujours une tâche simple. En effet, s'il existe des modèles mathématiques puissants pour décrire le transfert d'énergie d'un circuit perturbateur vers un circuit perturbé, [18], il est rare que de tels modèles puissent s'appliquer intégralement aux cas rencontrés dans la pratique. Ils donnent cependant des lignes d'action et des règles générales permettant une approche rationnelle du problème.

Chaque cas particulier doit, avant toutes choses, faire l'objet d'une analyse détaillée visant à déterminer :

- les sources de perturbations;
- les éléments (portions de circuits, composants, etc.) sensibles à ces perturbations;
- les modes de couplage existant entre éléments perturbateurs et perturbés.

Sur la base de ces informations, il reste à étudier les trois solutions suivantes :

- la réduction de l'intensité des *sources* de bruit;
- l'augmentation de l'*immunité* au bruit des circuits sensibles;
- la réduction des *couplages*;

dans le but de mettre en œuvre la meilleure, ou, plus souvent, la meilleure combinaison de celles-ci. On distingue cinq modes de couplage principaux : capacitif, inductif, électromagnétique, par le secteur, par boucle de terre. Les procédés utilisés pour combattre ces couplages font l'objet des paragraphes suivants.

### 3.3.2 Blindage électrostatique

Le principe du *blindage électrostatique* est décrit à la figure 3.18.

Le conducteur ① est l'élément perturbateur, le conducteur ② porte le signal à mesurer  $\underline{U}_m$ , créé par la source  $\underline{U}_s$ . Lorsque le conducteur ③ n'entoure pas complètement ②, des lignes de champ électrique joignent ① et ②. Leur existence correspond

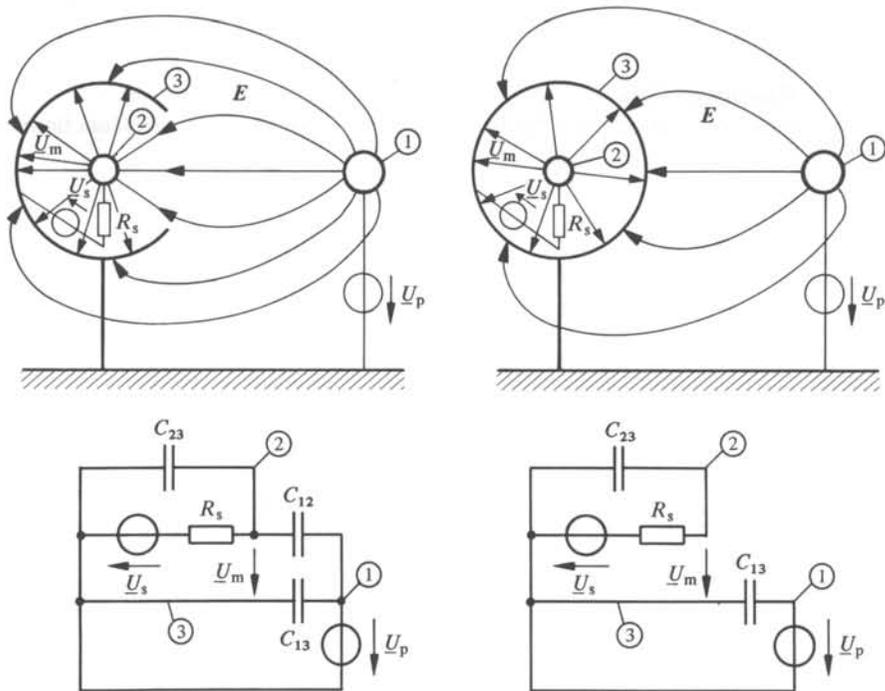


Fig. 3.18

à la présence de la capacité de couplage  $C_{12}$  dans le circuit équivalent. La tension  $\underline{U}_m$  dépend alors de  $\underline{U}_p$  via  $C_{12}$ . Pour réduire l'influence de  $\underline{U}_p$  sur  $\underline{U}_m$ , il faut diminuer  $C_{12}$  en entourant aussi complètement que possible ② par ③. Le conducteur ③ constitue alors un blindage électrostatique, réalisé généralement sous la forme du conducteur extérieur d'un câble coaxial ou d'une boîte métallique. L'efficacité de ce blindage se déduit des valeurs de  $R_s$ ,  $C_{12}$  et  $C_{23}$ .

En résumé et pratiquement, un blindage électrostatique n'est efficace que si les règles suivantes sont observées:

- Le blindage doit être connecté à la borne de masse de la source produisant le signal à protéger. Par conséquent, il faut autant de blindages isolés les uns des autres qu'il y a de sources à protéger dont les potentiels de masse sont différents. C'est un non-sens que de raccorder à la terre un blindage, si la masse du signal n'est pas elle-même à la terre.
- On a considéré implicitement que tous les points du blindage étaient au même potentiel. Ce n'est plus le cas si le blindage est parcouru par un courant, son efficacité s'en trouve alors diminuée. Une règle de blindage électrostatique est donc de raccorder celui-ci en un point seulement. Cette règle est en contradiction avec le fait que, pour diminuer un couplage inductif (§ 3.3.3), il faut précisément faire circuler un courant dans le blindage. Comme il est plus facile en général de réduire les couplages capacitifs que les couplages inductifs, on est souvent amené à soumettre le blindage à un courant.
- La mesure la plus simple, parfois suffisante, consiste à diminuer  $C_{12}$  en éloignant le circuit perturbateur du circuit perturbé.

### 3.3.3 Blindage magnétique

Les *blindages magnétiques* destinés à réduire les couplages inductifs fonctionnent selon le principe du courant de compensation illustré à la figure 3.19.

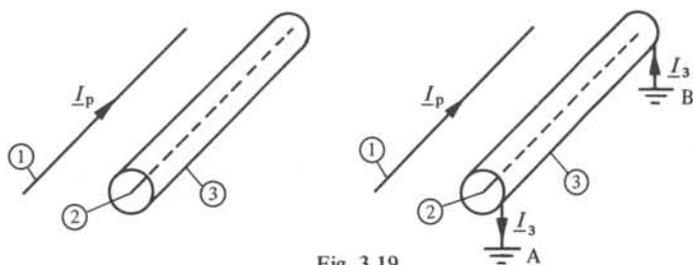


Fig. 3.19

Soit ① le conducteur portant le courant perturbateur  $\underline{I}_p$ , ② et ③ les conducteurs de la paire coaxiale portant le signal à mesurer, ③ jouant le rôle de blindage. Lorsque les extrémités de ② et ③ ne sont pas raccordées, ces conducteurs sont soumis à des tensions induites  $\underline{U}_{20}$  et  $\underline{U}_{30}$  provoquées par  $\underline{I}_p$

$$\underline{U}_{20} = j\omega M_{12} \underline{I}_p \quad (3.62)$$

$$\underline{U}_{30} = j\omega M_{13} \underline{I}_p \quad (3.63)$$

$M_{12}$  et  $M_{13}$  désignent les inductances mutuelles entre ① et ②, respectivement ① et ③

Dès que les extrémités de ③ sont raccordées à la terre, un courant  $\underline{I}_3$  circule dans le blindage. On a :

$$\underline{I}_3 (R_3 + j\omega L_3) = -j\omega M_{13} \underline{I}_p \quad (3.64)$$

où  $R_3$  et  $L_3$  désignent la résistance et l'inductance propre du blindage. (La résistance du circuit de terre entre A et B est supposée nulle). Le conducteur ② est maintenant soumis à l'influence de  $\underline{I}_p$  et  $\underline{I}_3$ , il devient le siège d'une tension induite  $\underline{U}_2$  donnée par :

$$\underline{U}_2 = j\omega M_{12} \underline{I}_p + j\omega M_{23} \underline{I}_3 \quad (3.65)$$

$M_{23}$  désignant l'inductance mutuelle entre les deux conducteurs de la paire coaxiale. En négligeant l'inductance intérieure de ③, on a simplement :

$$M_{23} = L_3 \quad (3.66)$$

D'autre part, on peut admettre généralement que  $M_{12} = M_{13}$ . On tire alors de (3.65), (3.64) et (3.62) l'atténuation relative de la tension induite dans ①, due à l'effet du blindage :

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_{20}} = \frac{R_3}{R_3 + j\omega L_3} \quad (3.67)$$

On définit encore le facteur de protection  $k$  (dB) du blindage par la relation

$$k = 10 \log \left| \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_{20}} \right|^2 = 10 \log \left( \frac{1}{1 + (f/f_c)^2} \right) \quad \text{dB} \quad (3.68)$$

où

$$f_c = \frac{1}{2\pi} \frac{R_3}{L_3} \quad (3.69)$$

est appelée *fréquence de coupure du blindage*. La figure 3.20 montre que le blindage est inefficace jusqu'aux alentours de  $f_c$ , ce qui n'est pas dramatique puisque la tension induite croît avec la fréquence, pour une valeur donnée de  $\underline{I}_p$ . En effet, on tire de

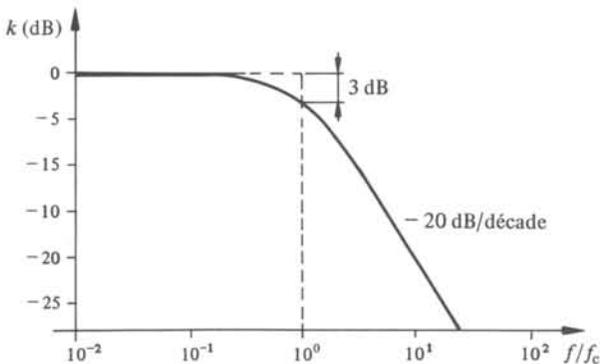


Fig. 3.20

(3.67) et (3.62):

$$\underline{U}_2 = \frac{j\omega M_{12}}{1 + j\omega/\omega_c} \underline{I}_p \quad (3.70)$$

où

$$\omega_c = R_3/L_3 \quad (3.71)$$

soit encore

$$|\underline{U}_2| = \frac{\omega M_{12}}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}} |\underline{I}_p| \quad (3.72)$$

et

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |\underline{U}_2| = M_{12} \omega_c |\underline{I}_p| \quad (3.73)$$

La fonction (3.72) est représentée à la figure 3.21. Aux fréquences élevées, le blindage limite la tension induite à une valeur maximale, atteinte asymptotiquement.

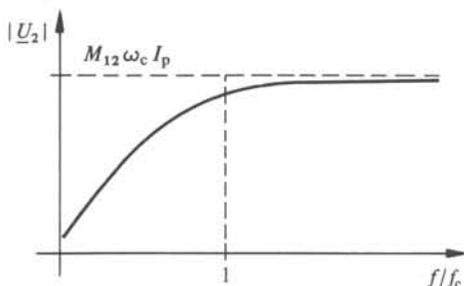


Fig. 3.21

Pour augmenter l'efficacité du blindage il faut, comme le montre (3.73) diminuer  $M_{12}$  et  $\omega_c$ . Réduire  $M_{12}$  revient, soit à diminuer la section de flux commun aux conducteurs ① et ② en choisissant judicieusement l'emplacement de ces conducteurs, soit à dévier le champ magnétique par un matériau à haute perméabilité agissant comme écran magnétique (§ 3.3.4). Pour diminuer  $\omega_c$  il faut soit diminuer la résistance du blindage en augmentant sa section, soit accroître son inductance propre, par exemple en guipant un ruban ferromagnétique à l'extérieur du blindage.

Pour les calculs pratiques, il est utile de se rappeler que l'inductance mutuelle de deux conducteurs cylindriques (fig. 3.22) est donnée par [19]:

$$M = \frac{\mu_0 \mu_r l}{2\pi} \text{Ln} \left( \frac{2D}{2D-d} \right) \quad (3.74)$$

où  $\mu_r$  est la perméabilité magnétique relative du milieu dans lequel sont plongés les conducteurs.

L'inductance propre d'un conducteur cylindrique, aux fréquences telles que la profondeur de pénétration du courant est grande par rapport au diamètre, vaut:

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r l}{8\pi} \quad (3.75)$$

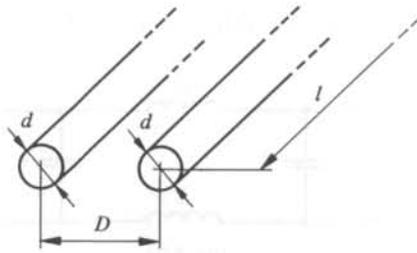


Fig. 3.22

### 3.3.4 Blindage aux fréquences radio-TV

Toute boucle de conducteur dont la dimension est au moins de l'ordre de la longueur d'onde  $\lambda$  d'une onde électromagnétique constitue une antenne. Comme telle, elle est susceptible d'introduire des signaux perturbateurs dans un circuit de mesure.

S'il s'agit d'un câble, on se protège habituellement en augmentant l'impédance de ce câble aux fréquences élevées. Une technique simple consiste à bobiner quelques spires du câble sur un tore de ferrite, gardant une perméabilité suffisante aux fréquences concernées (fig. 3.23).

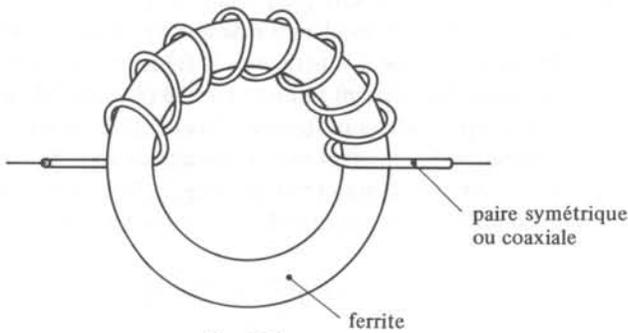


Fig. 3.23

Pour protéger un dispositif dans son ensemble, il est nécessaire de l'entourer d'un écran électromagnétique (cage de Faraday). Cet écran agit à la fois en réfléchissant partiellement l'onde incidente, et en atténuant la fraction de l'onde qui le traverse. L'efficacité d'un tel écran dépend de nombreux paramètres tels que : les épaisseurs et les propriétés électromagnétiques ( $\mu_r$  et  $\rho$ ) des matériaux utilisés; la fréquence; le type d'onde (plane ou sphérique); la géométrie des orifices, etc.

Les matériaux magnétiques protègent efficacement des champs magnétiques à basse fréquence. Les bons conducteurs atténuent fortement les champs électriques et les champs magnétiques à haute fréquence. On trouve dans la littérature spécialisée, [20, 21], les informations nécessaires à la conception de cages de Faraday.

### 3.3.5 Protection contre les bruits du secteur

Il arrive assez souvent que le secteur soit porteur de perturbations provoquées par des commandes à thyristors, l'enclenchement et le déclenchement de gros consommateurs tels que les fours, les collecteurs de machines mal déparasitées, les lasers pulsés, etc.

La solution consiste ici à placer à l'entrée du dispositif à protéger, un filtre passe-bas tel que celui de la figure 3.24.

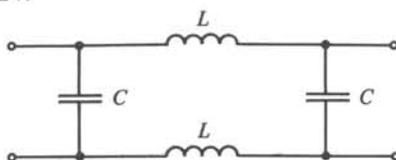


Fig. 3.24

Les éléments de ce filtre seront calculés en fonction de la fréquence de coupure  $f_c = (2\pi\sqrt{LC})^{-1}$  choisie et du courant capacitif admis ou de la disponibilité sur le marché de telles valeurs d'inductances.

### 3.3.6 Facteurs de protection pour quelques raccordements typiques

Trois types de câbles, une paire coaxiale, une paire symétrique non blindée et une paire symétrique blindée ont fait l'objet d'essais systématiques, en vue de déterminer expérimentalement le facteur de protection (3.68) en couplage inductif de chacun d'eux, en fonction des mises à terre [22]. Dans chaque cas, trois spires d'un diamètre de 18 cm ont été soumises à un champ magnétique sinusoïdal (fig. 3.25) dont la fréquence, 50 kHz, était largement supérieure à la fréquence  $f_c$  de coupure des câbles. Les deux extrémités des câbles étaient fermées sur une résistance de  $1\text{ M}\Omega$ , respectivement  $100\ \Omega$ . Les résultats présentés aux figures 3.26 et 3.27 montrent clairement que le *facteur de protection est nettement moins bon dès qu'un conducteur parcouru par le signal, est mis à la terre aux deux extrémités* (fig. 3.26). Ceci s'explique par le fait que ce conducteur est alors soumis aux tensions induites dans une boucle de terre.

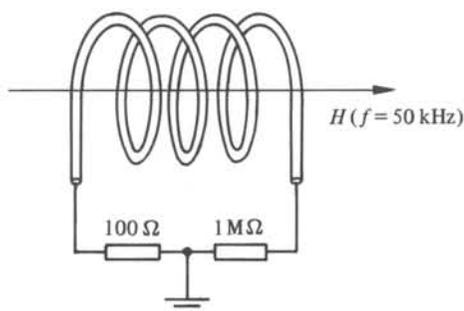


Fig. 3.25

Les variations constatées dans la figure 3.27 sont en partie imputables aux conditions d'expérience. L'excellent résultat du circuit G est attribué à une très faible valeur d'inductance mutuelle. L'écart entre les circuits H et I montre qu'en plus du champ magnétique, un champ électrique non négligeable était présent dans l'expérience.

La relativement mauvaise performance du circuit J pourrait s'expliquer par une dissymétrie capacitive des deux conducteurs de la paire par rapport au blindage, qui est parcouru dans cette configuration par un courant relativement important. Le circuit K cumule les avantages de la paire symétrique et de la paire coaxiale.

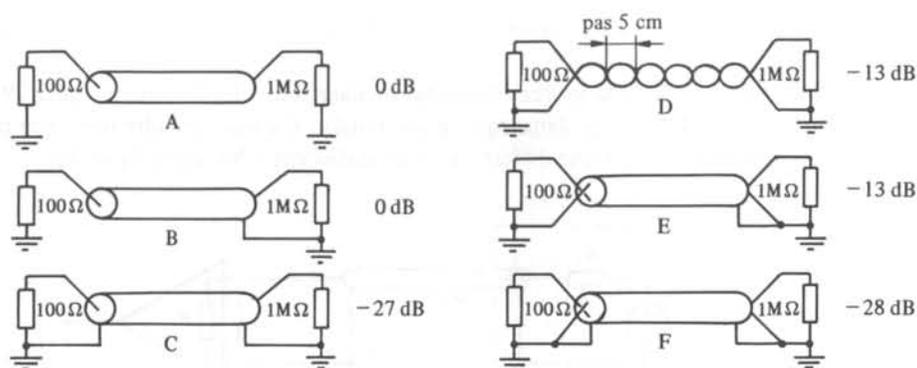


Fig. 3.26

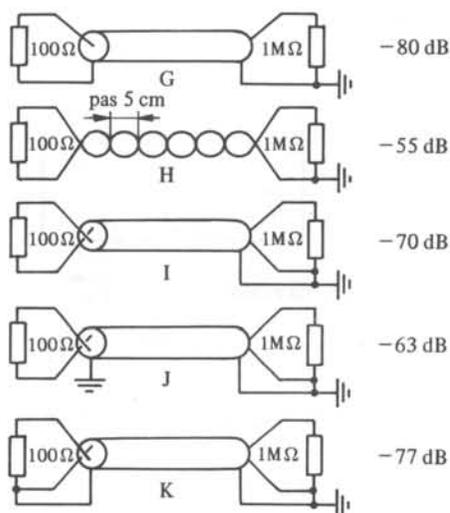


Fig. 3.27

Les résultats ci-dessus ont avant tout une valeur indicative. Il est presque toujours illusoire de vouloir déterminer un facteur de protection au décibel près.

### 3.3.7 Mise à terre, cas d'un amplificateur à entrée asymétrique

Si la source est à un potentiel flottant, le circuit de la figure 3.28 est le plus indiqué.

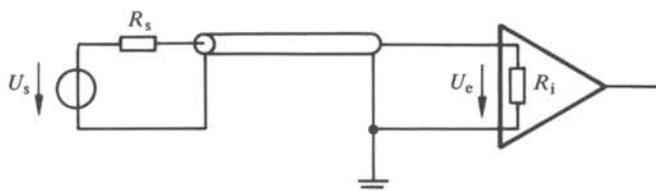


Fig. 3.28

Il correspond au schéma G de la figure 3.27 et présente l'avantage d'être dépourvu de boucle de terre.

Lorsqu'un pôle de la source est obligatoirement à la terre, le circuit (fig. 3.29) présente une boucle de terre B, dans laquelle une tension  $U_T$  peut prendre naissance par induction et sous l'effet d'une différence de potentiel entre les terres  $T_1$  et  $T_2$ .

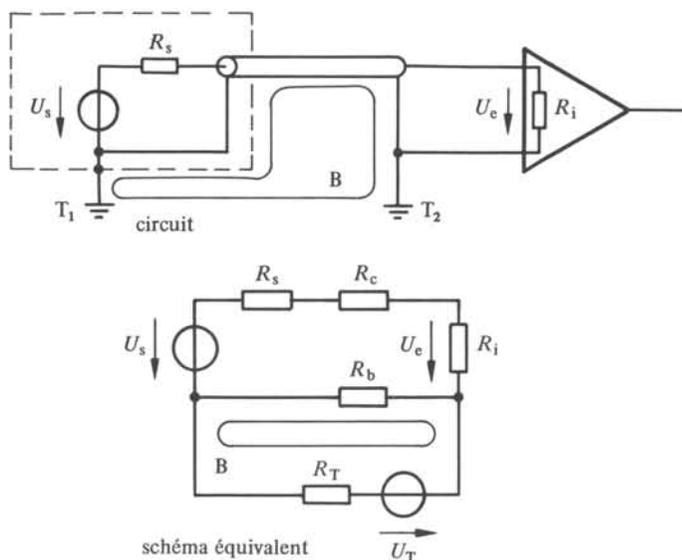


Fig. 3.29

La résistance d'entrée  $R_i$  de l'amplificateur est en général beaucoup plus grande que les résistances  $R_c$  et  $R_b$  des conducteurs de la paire coaxiale, que la résistance de la terre  $R_T$  entre  $T_1$  et  $T_2$  et que la résistance interne de la source  $R_s$ . Dans ces conditions, la composante  $U_{eT}$  de  $U_e$  due à  $U_T$  vaut :

$$U_{eT} = \frac{R_b}{R_T + R_b} U_T \quad (3.76)$$

Avec par exemple :  $R_T = 1 \Omega$  et  $R_b = 10 \Omega$ , on constate que  $U_T$  se répercute quasi sans atténuation à l'entrée de l'amplificateur. On peut remédier à cela en plaçant une résistance  $R_f$  (fig. 3.30) entre la borne de masse de l'amplificateur et la terre. D'une valeur

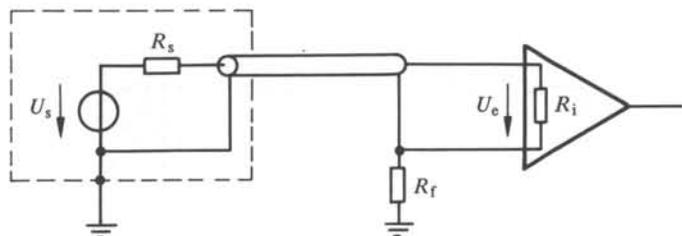


Fig. 3.30

généralement comprise entre  $50\ \Omega$  et  $1\ \text{k}\Omega$ ,  $R_f$  diminue  $U_{eT}$  qui devient :

$$U_{eT} = \frac{R_b}{R_T + R_b + R_f} U_T \quad (3.77)$$

### 3.3.8 Mise à terre : cas d'un amplificateur différentiel

Lorsque l'atténuation des perturbations prenant naissance dans la boucle de terre, obtenue par l'introduction de  $R_f$ , est insuffisante, l'utilisation d'un amplificateur différentiel s'impose. Le circuit est alors celui de la figure 3.31.

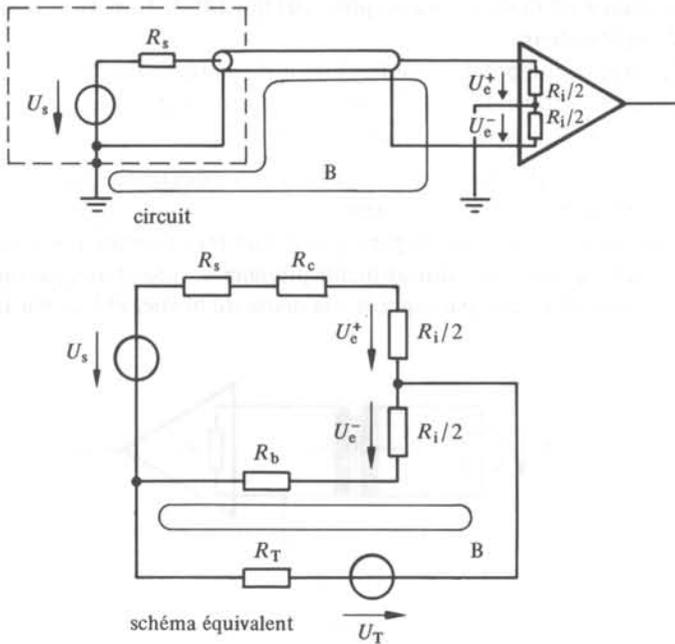


Fig. 3.31

L'analyse du schéma équivalent montre que la tension en mode différentiel  $\Delta U_T$ , présente à l'entrée de l'amplificateur et due à  $U_T$ , vaut simplement :

$$\Delta U_T = -\frac{2R_s}{R_i} U_T \quad (3.78)$$

à condition que  $R_c = R_b$  et que toutes les résistances soient très petites devant  $R_i$ , ce qui est généralement le cas. L'efficacité des schémas des figures 3.30 et 3.31 peut être comparée, en prenant par exemple  $R_s = 1\ \text{k}\Omega$ ,  $R_b = 10\ \Omega$ ,  $R_f = 500\ \Omega$  et  $R_i = 10\ \text{M}\Omega$ . On trouve selon (3.77)  $U_{eT}/U_T = 2 \cdot 10^{-2}$ , et selon (3.78)  $\Delta U_T/U_T = 2 \cdot 10^{-4}$ . L'immunité au bruit obtenue avec l'amplificateur différentiel est cent fois plus élevée.

L'utilisation d'une résistance  $R_f$  entre la borne de masse de l'amplificateur et la terre est également possible dans le circuit de la figure 3.31.

Les performances réelles du montage dépendent fortement de la symétrie des deux circuits aboutissant aux bornes d'entrée de l'amplificateur. L'usage d'une paire symétrique blindée est donc indiqué. Le taux de réjection du mode commun de l'amplificateur doit être choisi aussi élevé que possible. Si la source est elle-même symétrique (pont par exemple), l'immunité du circuit est encore augmentée.

### 3.3.9 Séparation galvanique

Une *séparation galvanique* entre la source et l'amplificateur s'impose lorsque la tension en mode commun dépasse la valeur maximum admissible. Cette situation se présente en particulier dans deux cas :

- la source est maintenue à un potentiel qui diffère trop du potentiel de terre de l'amplificateur ;
- la source, à un potentiel flottant ou non, est raccordée à l'amplificateur par une ligne susceptible de subir d'importantes perturbations en mode commun dues par exemple aux orages, à la proximité de lignes de transport d'énergie, etc.

La séparation galvanique peut être obtenue par des transformateurs spéciaux appelés *translateurs*, ou par des optocoupleurs.

Les qualités d'un translateur par rapport à un transformateur ordinaire sont les suivantes : haute symétrie des enroulements primaire et secondaire, par rapport au point milieu de ces enroulements, par rapport à la masse du boîtier et l'un par rapport à l'au-

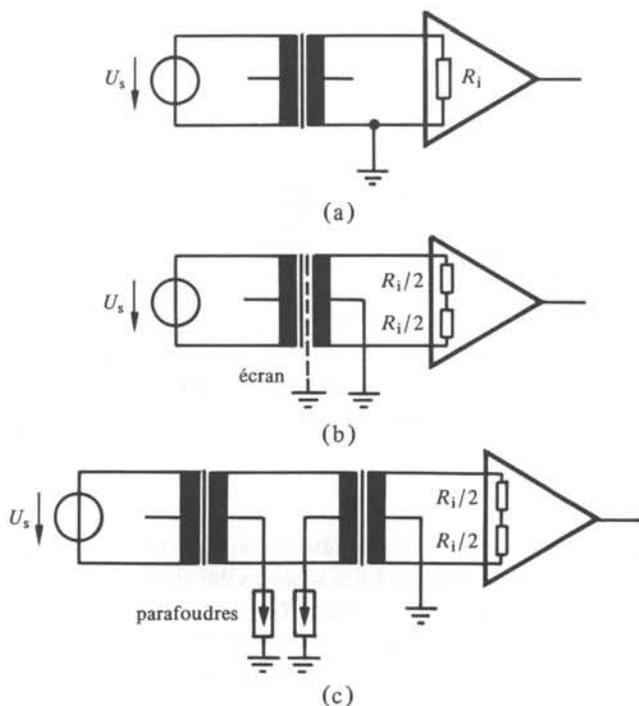


Fig. 3.32

tre (capacitivement); bande passante étendue; tension admissible élevée entre primaire et secondaire (plusieurs kV); présence éventuelle d'un écran électrostatique entre le primaire et le secondaire. Les optocoupleurs, constitués d'une diode émettrice de lumière couplée optiquement à un photodétecteur fournissent également une isolation galvanique jusqu'à plusieurs kV. Ce sont des dispositifs hautement non linéaires dont l'emploi est principalement limité aux signaux numériques et aux signaux analogiques en modulation de fréquence (signaux carrés). Contrairement aux translateurs, les optocoupleurs ne fonctionnent qu'en mode unidirectionnel.

Trois exemples de circuits utilisant des translateurs sont donnés à la figure 3.32.

Le circuit (b) donne une réjection du mode commun meilleure que le circuit (a). Le circuit (c) est destiné aux liaisons à plus longue distance.

Les deux procédés d'isolation galvanique mentionnés sont utilisés dans la technologie des circuits intégrés hybrides, pour la fabrication d'*amplificateurs d'isolation* (fig. 3.33).

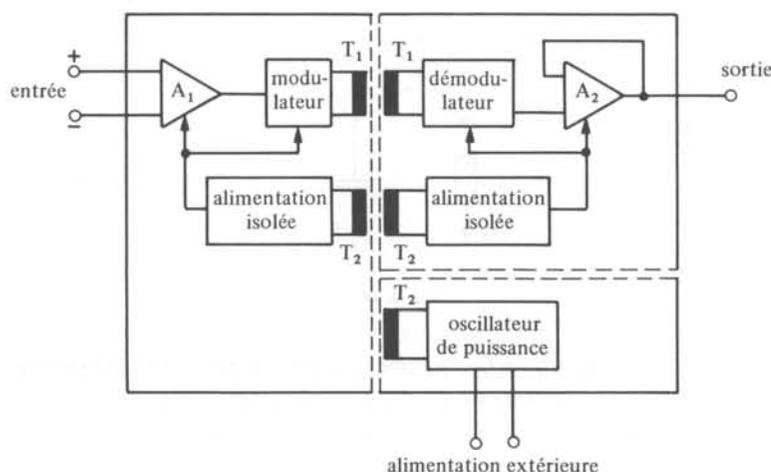


Fig. 3.33

De tels amplificateurs se décomposent en *trois parties*. La *première* comprend un amplificateur différentiel  $A_1$  dont le signal de sortie est modulé avant d'être appliqué au primaire du transformateur  $T_1$ . Cette modulation a deux buts: optimiser les performances et la construction (taille, poids) de  $T_1$  d'une part, permettre le fonctionnement de l'amplificateur d'isolation en continu d'autre part. Le secondaire de  $T_1$  est sur la *deuxième partie*, qui comprend le démodulateur et l'amplificateur de sortie  $A_2$ . Un oscillateur de puissance logé sur la *troisième partie* fournit l'énergie nécessaire à l'alimentation des circuits au travers de  $T_2$ . Chaque partie est isolée galvaniquement des autres par  $T_1$  et  $T_2$ . Typiquement, une tension de plusieurs kilovolts peut être appliquée entre l'entrée (mode commun) d'une part, la sortie et l'alimentation extérieure d'autre part. L'isolation entre l'entrée et la sortie est excellente, elle peut être représentée par une impédance formée d'une résistance de  $10^{12} \Omega$  en parallèle avec un condensateur de l'ordre de 10 pF. La bande passante peut être augmentée en remplaçant  $T_1$  par un optocoupleur.

### 3.3.10 Conducteurs de garde

On appelle *conducteur de garde* ou simplement *garde*, un conducteur auxiliaire destiné à empêcher l'établissement de courants de fuite susceptibles de modifier le potentiel d'un point sensible d'un circuit. La garde est placée au voisinage du point à protéger et maintenue au potentiel de ce point par une source auxiliaire à basse impédance. Correctement disposée, la garde collecte les courants de fuite qui, autrement, aboutiraient sur le point protégé. Aucun courant de fuite ne circule entre ce point et la garde, puisqu'ils sont tous deux au même potentiel.

Soit par exemple (fig. 3.34) une source  $U_s$  à très haute résistance interne  $R_s$  devant être raccordée à un amplificateur de gain unité à travers le tronçon de circuit A-B.

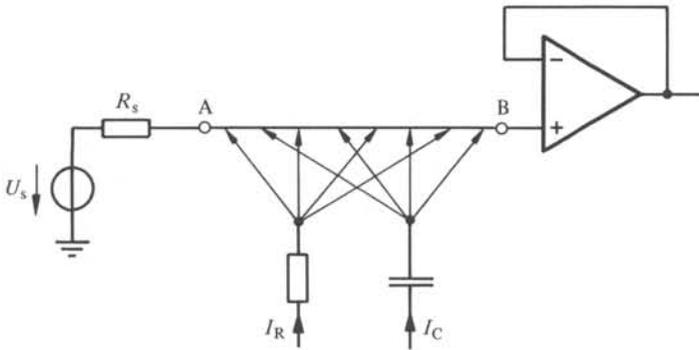


Fig. 3.34

Les courants de fuite  $I_R$  et  $I_C$  perturbent la tension présente à l'entrée de l'amplificateur. Leurs effets peuvent être supprimés par l'utilisation d'une garde (fig. 3.35) qui prend ici la forme d'un blindage raccordé à la sortie de l'amplificateur, par laquelle s'écouleront  $I_R$  et  $I_C$ .

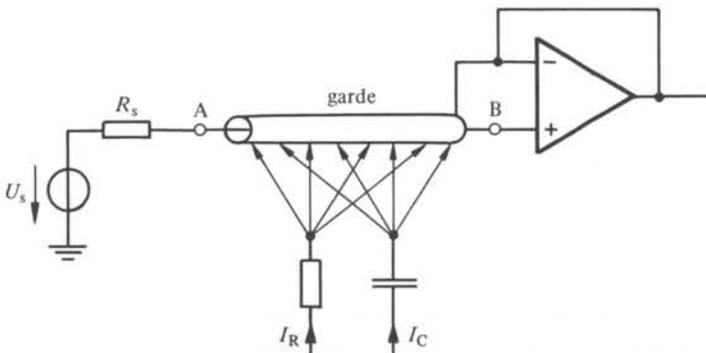


Fig. 3.35

La technique des conducteurs de garde est particulièrement importante en courant continu, lorsque des amplificateurs à très faible courant de polarisation sont utilisés.

### 3.4 AMPLIFICATEUR LOCK-IN OU AMPLIFICATEUR SYNCHRONE

#### 3.4.1 Introduction

La mesure d'un signal continu ou lentement variable  $x(t)$  noyé dans le bruit, se heurte à deux difficultés :

- la présence de bruit en  $1/f$  dans les circuits destinés à traiter  $x(t)$ ;
- l'impossibilité pratique d'effectuer sans autre un filtrage efficace du bruit au voisinage de  $f=0$ .

Ces deux problèmes sont résolus par l'emploi d'un *amplificateur lock-in* (*amplificateur synchrone*) [23], à condition que  $x(t)$  puisse être modulé en amplitude, à la source, par un signal de référence  $r(t)$ . L'amplificateur lock-in tire d'ailleurs son nom du fait que son fonctionnement est asservi au signal de référence.

Le signal  $x(t)$  étant continu ou lentement variable, son spectre  $X(f)$  est concentré au voisinage de l'origine  $f=0$ . La modulation de  $x(t)$  par le signal de référence de fréquence  $f_r$  produit un signal  $s(t)$  dont le spectre  $S(f)$  correspond à  $X(f)$  décalé de  $f=0$  à  $f=\pm f_r$ .

Le signal  $s(t)$  est amplifié par un amplificateur accordé à  $f_r$  (fig. 3.36). Un gain de  $10^9$ , soit 180 dB, ou même davantage peut être obtenu. Du même coup, tout le bruit situé hors de la bande passante de l'amplificateur accordé est éliminé.

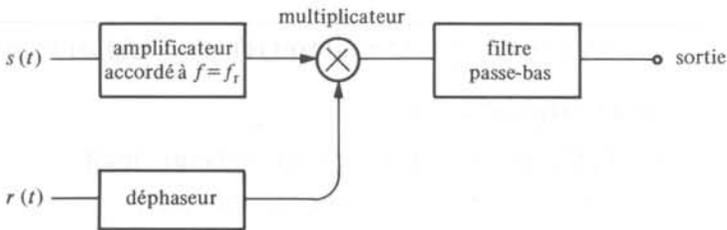


Fig. 3.36

Le signal délivré par l'amplificateur accordé est ensuite multiplié par  $r(t)$ , déphasé de manière adéquate. On retrouve ainsi les composantes de  $X(f)$  autour de  $f=0$ . Accessoirement, des composantes aux fréquences harmoniques de  $f_r$  apparaissent à la sortie du multiplicateur. Un filtre passe-bas permet d'éliminer ces composantes, et de réduire autant que nécessaire la bande passante autour de  $f=0$ . Des bandes passantes de 0,001 Hz et moins sont disponibles sur les appareils du commerce.

Le multiplicateur effectue ici une détection par démodulation synchrone (§ VI.11.2.6). Ce mode de détection permet aussi la mesure d'un déphasage (§ 3.4.3) ou la séparation des composantes réelle et imaginaire d'un signal complexe (§ 3.4.9). Pour décrire plus en détail le fonctionnement de l'amplificateur lock-in et les applications de la démodulation synchrone, il est nécessaire d'étudier l'effet d'un multiplicateur, dans le domaine spectral, pour divers types de signaux.

#### 3.4.2 Equation générale du multiplicateur

Pour ne pas compliquer l'écriture, on appellera  $s(t)$  et  $r(t)$  les signaux directement appliqués au multiplicateur (fig. 3.37).

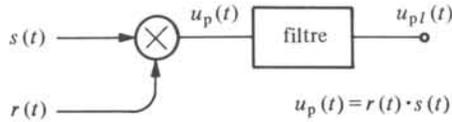


Fig. 3.37

Avec les notations habituelles pour la transformation de Fourier,

$$U_p(f) = F\{r(t) \cdot s(t)\} = R(f) * S(f) \quad (3.79)$$

En appelant  $G(f)$  la fonction de transfert du filtre,

$$U_{pl}(f) = U_p(f) \cdot G(f) \quad (3.80)$$

### 3.4.3 Cas 1 : $r(t)$ et $s(t)$ sont sinusoïdaux

Soient

$$r(t) = \sqrt{2} U_r \cos(2\pi f_r t - \phi_r) \quad (3.81)$$

et

$$s(t) = \sqrt{2} U_s \cos(2\pi f_s t - \phi_s) \quad (3.82)$$

On sait que

$$F\{A \cos(2\pi f_0 t - \phi)\} = \frac{A}{2} [\delta(f + f_0) \exp(j\phi) + \delta(f - f_0) \exp(-j\phi)] \quad (3.83)$$

Par conséquent, (3.79) prend la forme :

$$U_p(f) = U_r U_s [\delta(f + f_r) \exp(j\phi_r) + \delta(f - f_r) \exp(-j\phi_r)] \\ * [\delta(f + f_s) \exp(j\phi_s) + \delta(f - f_s) \exp(j\phi_s)] \quad (3.84)$$

En tenant compte de l'identité

$$\delta(f - f_1) * \delta(f - f_2) = \delta(f - f_1 - f_2) \quad (3.85)$$

d'une part, en posant  $f_r = f_s$  (cas synchrone) et supposant que le filtre qui suit le multiplicateur est du type passe-bas, tel que  $G(f=0) = 1$  et  $G(f \geq f_r + f_s) = 0$  d'autre part, on obtient par (3.80) et (3.84) le résultat suivant :

$$U_{pl}(f) = U_r U_s [\delta(f) \exp[j(\phi_s - \phi_r)] + \delta(f) \exp[-j(\phi_s - \phi_r)]] \quad (3.86)$$

d'où

$$u_{pl}(t) = 2 U_r U_s \cos(\phi_s - \phi_r) \quad (3.87)$$

En conclusion, le circuit de la figure 3.37 permet ici de mesurer directement le déphasage entre deux signaux sinusoïdaux d'amplitude connue.

### 3.4.4 Cas 2 : $r(t)$ sinusoïdal et $s(t)$ quelconque

Compte tenu de (3.81) et (3.83), l'équation (3.79) prend la forme :

$$U_p(f) = \frac{U_r}{\sqrt{2}} [\delta(f + f_r) \exp(j\phi_r) + \delta(f - f_r) \exp(-j\phi_r)] * S(f) \quad (3.88)$$

Sachant que

$$\delta(f-f_0) * X(f) = X(f-f_0) \quad (3.89)$$

on peut écrire (3.88) de la manière suivante :

$$U_p(f) = \frac{U_r}{\sqrt{2}} [S(f+f_r) \exp(j\phi_r) + S(f-f_r) \exp(-j\phi_r)] \quad (3.90)$$

On en déduit que le multiplicateur produit le décalage de  $S(f)$ , illustré à la figure 3.38.

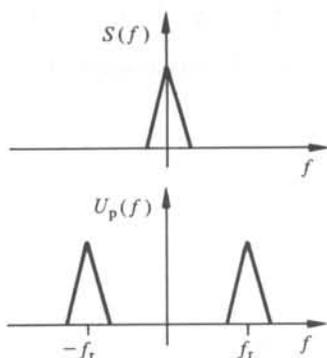


Fig. 3.38

### 3.4.5 Cas 3: $r(t)$ carré et $s(t)$ quelconque

Le signal carré représenté à la figure 3.39 correspond au développement

$$r(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos[(2n+1)(2\pi f_r t - \phi_r)] \quad (3.91)$$

La transformée de Fourier de  $r(t)$  s'obtient directement à partir de (3.83). Compte tenu de (3.89), l'équation (3.79) devient :

$$U_p(f) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} [S(f+(2n+1)f_r) \exp[j(2n+1)\phi_r] + S(f-(2n+1)f_r) \exp[-j(2n+1)\phi_r]] \quad (3.92)$$

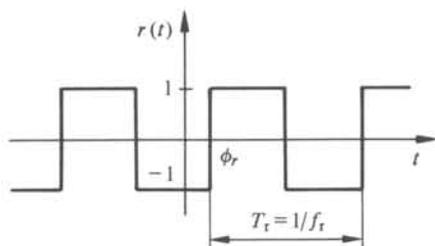


Fig. 3.39

Le multiplicateur produit donc une répétition avec atténuation de  $S(f)$ , aux harmoniques impaires de  $f_r$  (fig. 3.40).

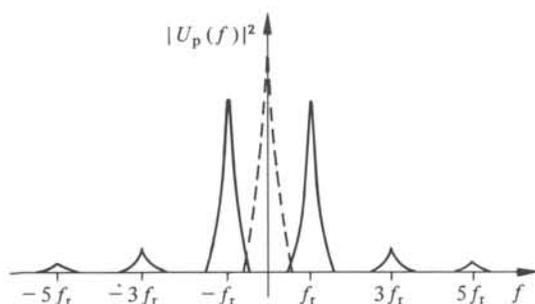


Fig. 3.40 En pointillé, la densité spectrale de puissance de  $s(t)$ , représentée à l'échelle 1:2.

### 3.4.6 Réalisation d'un multiplicateur

La technique lock-in requiert, sur une très grande dynamique, une très haute linéarité du multiplicateur des fonctions  $r(t)$  et  $s(t)$ . Le seul type de multiplicateur entrant pratiquement en considération est l'inverseur représenté à la figure 3.41. La fonction  $r(t)$  correspondante est un signal carré (fig. 3.39).

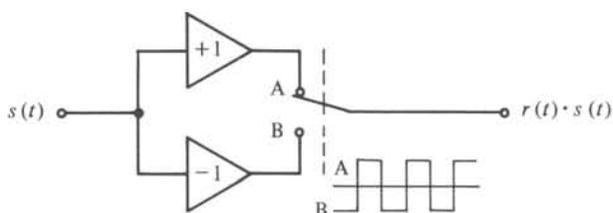


Fig. 3.41

### 3.4.7 Traitement du signal

On trouve à la figure 3.42 un amplificateur lock-in dans son environnement habituel de fonctionnement. La modulation à la source du signal à mesurer est représentée par une multiplication.

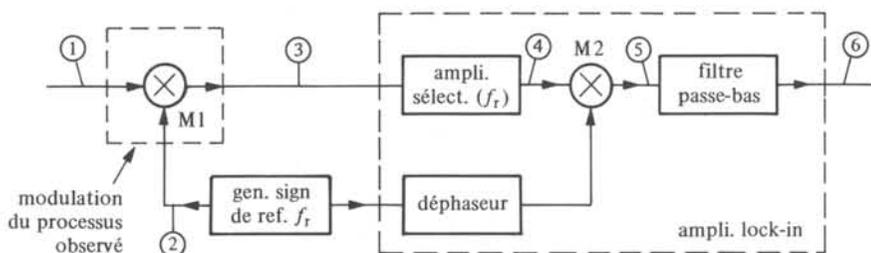


Fig. 3.42

Le traitement du signal effectué par l'ensemble du dispositif et par l'amplificateur lock-in en particulier est représenté dans le domaine des fréquences, à la figure 3.43. Pour la clarté du dessin, la composante utile du signal a été largement augmentée.

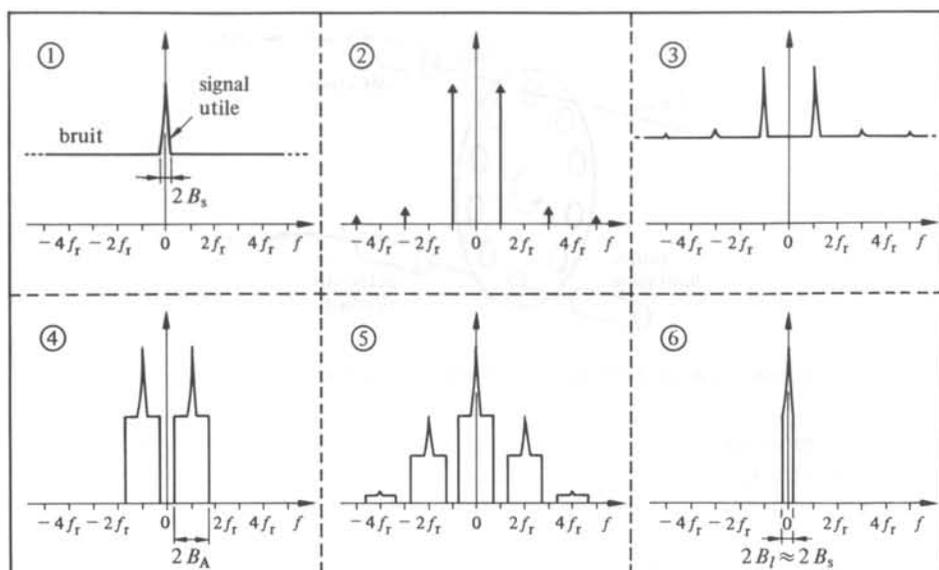


Fig. 3.43 Densité spectrale de puissance du signal aux points indiqués du circuit représenté à la figure 3.42.

On reconnaît en ① le signal utile occupant une bande de largeur  $B_s$  au voisinage de  $f=0$ , superposé à un important bruit blanc. La densité spectrale de puissance du signal de référence (carré) apparaît en ②. En admettant que le multiplicateur  $M_1$  est idéal, on trouve en ③ le résultat de la multiplication. Les composantes du signal utile sont maintenant centrées à  $\pm f_t$ . Des images affaiblies de ces composantes sont présentes aux harmoniques impaires de  $\pm f_t$ . A la sortie de l'amplificateur sélectif ④, dont la bande passante  $B_A$  est généralement plus grande que  $B_s$ , le signal utile amplifié est débarrassé de tout le bruit situé hors de  $B_A$ . Le multiplicateur  $M_2$  replace les composantes du signal utile autour de  $f_0$  ⑤, en créant des images de ces composantes autour des harmoniques paires de  $f_t$ . Ces images sont supprimées par le filtre passe-bas ⑥. La bande passante  $B_1$  de ce filtre est choisie proche des  $B_s$  de manière à diminuer au maximum le bruit restant dans la bande ( $B_A - B_s$ ). En comparant ① et ⑥, on constate que le dispositif a effectué une amplification sélective à une fréquence nulle.

Une dérive du signal d'entrée est éliminée à condition qu'elle corresponde à une composante spectrale hors de  $2B_s$ .

### 3.4.8 Exemples d'applications

La seule limitation à l'emploi d'un amplificateur lock-in est la nécessité de pouvoir moduler le signal à la source. La manière dont s'effectue cette modulation est propre à chaque type d'expérience. En optique, on utilise souvent un hacheur (chopper) mécanique, constitué d'un disque percé de trous (fig. 3.44).

Ce disque est mis en rotation à vitesse constante. Une source de lumière qui éclaire un détecteur auxiliaire fournit le signal de référence.

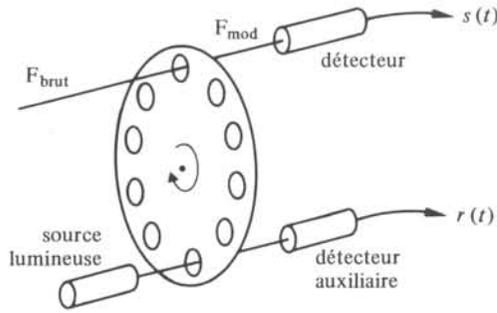


Fig. 3.44 F : faisceau dont l'intensité, très faible doit être mesurée.

La modulation des signaux d'un capteur est simple si celui-ci est placé dans un pont. Il suffit de moduler la tension d'alimentation du pont. Ailleurs, c'est le processus lui-même qui peut être modulé par une stimulation adéquate.

### 3.4.9 Mesure des composantes en phase et en quadrature

Les composantes d'un signal  $s(t)$  en phase et en quadrature par rapport à une référence de phase donnée par un signal sinusoïdal ou carré, peuvent être déterminées par un amplificateur lock-in à deux phases (fig. 3.45).

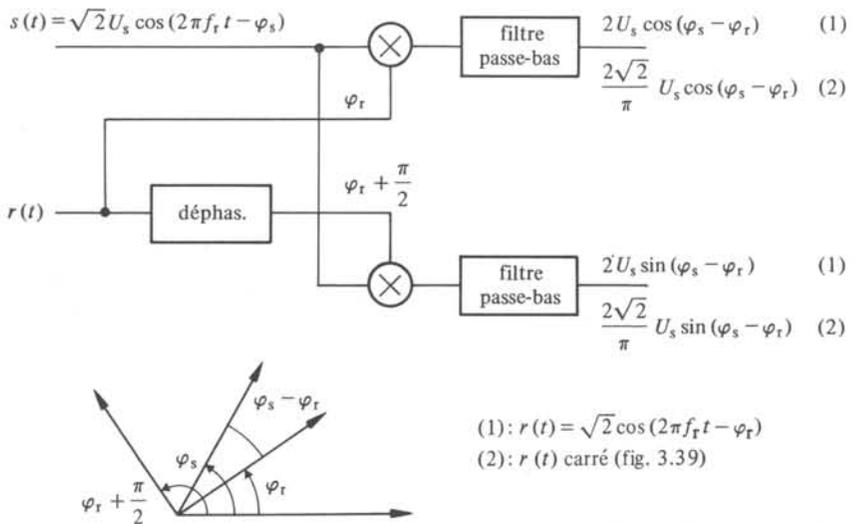


Fig. 3.45

Les signaux de sortie se déduisent immédiatement des équations développées aux paragraphes 3.4.3 et 3.4.5. Le circuit de la figure 3.45 est utilisé, par exemple, pour mesurer le déséquilibre d'un pont en courant alternatif. La tension d'alimentation du pont est le signal de référence, et la tension de déséquilibre,  $s(t)$ .

## CIRCUITS DE MESURE ANALOGIQUES

## 4.1 CIRCUITS PASSIFS

## 4.1.1 Introduction

Quelques circuits de mesure analogiques courants sont décrits ci-dessous. La liste ne saurait être exhaustive et la créativité du concepteur est toujours utile, sinon indispensable ! Les circuits en pont ont constitué, à l'origine, des appareils de mesure complets, avec leur assortiment d'étalons. Ils étaient destinés à la mesure de composants tels que les résistances, les condensateurs, les inductances, par la méthode de comparaison. L'intérêt que présentent les ponts reste considérable aujourd'hui, mais leur place est différente. On les trouve souvent à l'entrée d'un amplificateur ou d'un démodulateur synchrone. Leur point de fonctionnement s'écarte plus ou moins de la condition d'équilibre, la valeur de la grandeur à mesurer étant extraite des signaux que le pont délivre hors équilibre. L'élément variable du pont peut être un capteur. Avant tout, les ponts ont l'avantage spécifique de délivrer un signal de mesure différentiel, donc présentant simultanément une *haute sensibilité* et une *haute immunité aux perturbations*.

## 4.1.2 Doubles contacts de Kelvin

La mesure de faibles résistances, inférieures à  $0,1 \Omega$  par exemple, se heurte au problème des résistances de contact. Soit une résistance  $R$  à mesurer par la méthode tension-courant et  $R_c/2$  les résistances de contact au raccordement (fig. 4.1).

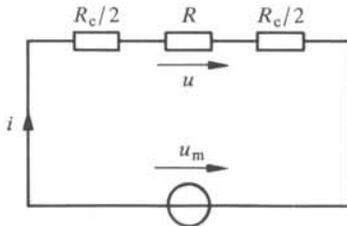


Fig. 4.1

Sans précaution spéciale, c'est la tension  $u_m$  qui est relevée. La valeur de la résistance  $R_m$  calculée à partir de  $u_m$  présente l'erreur relative :

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{R_m - R}{R} = \frac{R_c}{R} = \frac{u_m - u}{u} \quad (4.1)$$

Cette erreur ne peut être corrigée car  $R_c$  n'est pas connue, et d'ailleurs susceptible de varier assez fortement en fonction des conditions de contact. Si  $R = R_c$ , l'erreur atteint 100%.

La solution de ce problème consiste à séparer les circuits de mesure de la tension et du courant en établissant deux contacts séparés à chaque extrémité de  $R$ . Soit  $\textcircled{\text{Cu}}$  et  $\textcircled{\text{Ci}}$  les contacts destinés respectivement à prélever la tension et à convoier le courant (fig. 4.2).

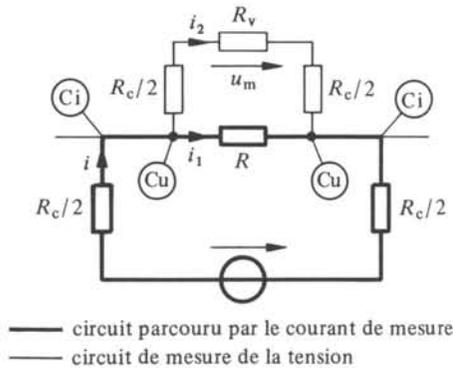


Fig. 4.2

$R_v$  représentant la résistance interne du voltmètre, l'erreur vaut maintenant :

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{u_m/i - R}{R} = \frac{R_v i_2/i - R}{R} = - \frac{R + R_c}{R_v + R + R_c} \quad (4.2)$$

Le circuit à doubles contacts permet donc théoriquement de mesurer  $R$ , même si  $R \ll R_c$ , quasiment sans erreur car  $R_v$  est toujours très grande par rapport à  $R$  et  $R_c$ . En pratique, la précision obtenue sur  $R$  dépend de la possibilité de faire circuler un courant assez élevé dans  $R$ , de manière à ce que  $u_m$  ne soit pas trop faible.

#### 4.1.3 Pont de Kelvin

Le principe du double contact de Kelvin peut être utilisé dans un montage en pont (fig. 4.3).

Soit  $R_x$  la résistance à mesurer par comparaison à la résistance étalon  $R_N$ . L'équilibre du pont correspond à  $u_m = 0$ , d'où

$$\frac{i_1 R_1}{i_2 R_2} = \frac{i_x R_x + i_3 R_3}{i_4 R_4 + i_N R_N} \quad (4.3)$$

car  $R_c$  est toujours négligeable devant  $R_1 + R_2$  et  $R_3 + R_4$ . De plus  $i_1 = i_2$  et  $i_3 = i_4$  et par conséquent  $i_x = i_N$ . Par élimination de  $i_4$  et  $i_N$  on obtient :

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} \left\{ R_N + \frac{i_3}{i_x} R_4 \right\} - \frac{i_3}{i_x} R_3 \quad (4.4)$$

La formule de  $R_x$  est indépendante du courant si

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad (4.5)$$

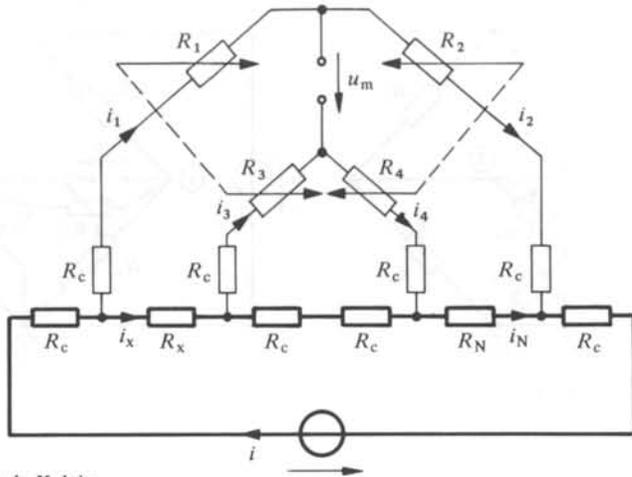


Fig. 4.3 Pont de Kelvin.

alors

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} R_N \quad (4.6)$$

Un couplage de  $R_1$  et  $R_3$  assure à chaque instant  $R_1 = R_3$ , chacune de ces résistances variant sur 5 décades, de  $0,1 \Omega$  à  $10 \text{ k}\Omega$  par exemple. Les résistances  $R_2 = R_4$  pourront avoir des valeurs discrètes plus espacées (par exemple 1; 10; 100;  $1000 \Omega$ ), l'équilibre étant obtenu par variation de  $R_1$  et  $R_3$ .

Ce pont sert à mesurer la résistance de conducteurs de section importante, se présentant sous la forme de barres ou de cordes. Il est nécessaire d'éloigner suffisamment les contacts de courant des contacts de tension, de manière à assurer une distribution uniforme de la densité de courant dans toute la section du conducteur, à l'endroit de mesure de la tension.

#### 4.1.4 Pont teraohm-mètre

La mesure de grandes résistances, supérieures par exemple à  $100 \text{ M}\Omega$ , par un circuit en pont se heurte à la difficulté d'obtenir des résistances de référence de cet ordre de grandeur qui soient stables et précises. On contourne la difficulté en simulant la résistance de référence (fig. 4.4).

Le schéma équivalent est obtenu par une conversion triangle  $\rightarrow$  étoile du circuit réel entre les points ①, ② et ③ (§ 1.6.6.3). Les résistances équivalentes sont données par les relations:

$$R_{ij} = R_i + R_j + \frac{R_i R_j}{R_k} \quad (4.7)$$

En comparant le schéma équivalent à un pont de Wheatstone classique, on constate que  $R_{12}$  n'intervient pas dans la condition d'équilibre; que  $R_{23}$  se trouve en parallèle avec  $R_b$ , résistance variable opposée à  $R_a$ ; finalement que la résistance de référence, opposée à  $R_x$ , est  $R_{13}$  seule. En prenant par exemple  $R_1 = R_3 = 10 \text{ M}\Omega$  on obtient,

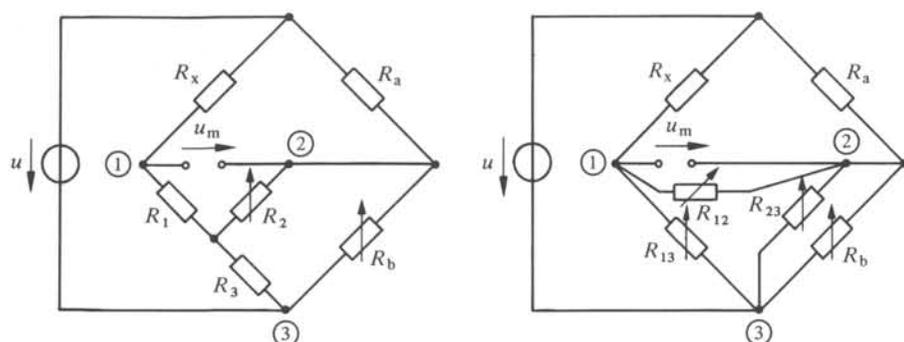


Fig. 4.4 Pont teraohm-mètre.

pour  $10\ \Omega < R_2 < 1\ \text{M}\Omega$ , une plage de variation de  $R_{13}$  à l'équilibre s'étendant de  $10^8\ \Omega$  à  $10^{13}\ \Omega$ . De telles valeurs de  $R_x$  sont donc mesurables avec un pont dont le rapport n'excède pas l'unité ( $R_a = R_b R_{23} / (R_b + R_{23})$ ).

L'équilibrage du pont s'obtient par une variation par pas de  $R_2$  et une variation continue de  $R_b$ . Ce choix est dicté par le fait que la variation de  $R_2$  affecte trois résistances du schéma équivalent, ce qui complique la relation d'équilibrage.

Le courant de déséquilibre qui peut être extrait de  $u_m$  est très faible, en raison des valeurs élevées de  $R_x$  et  $R_{13}$ . La tension d'alimentation  $u$  doit donc être suffisamment haute pour assurer un rapport signal/bruit adéquat.

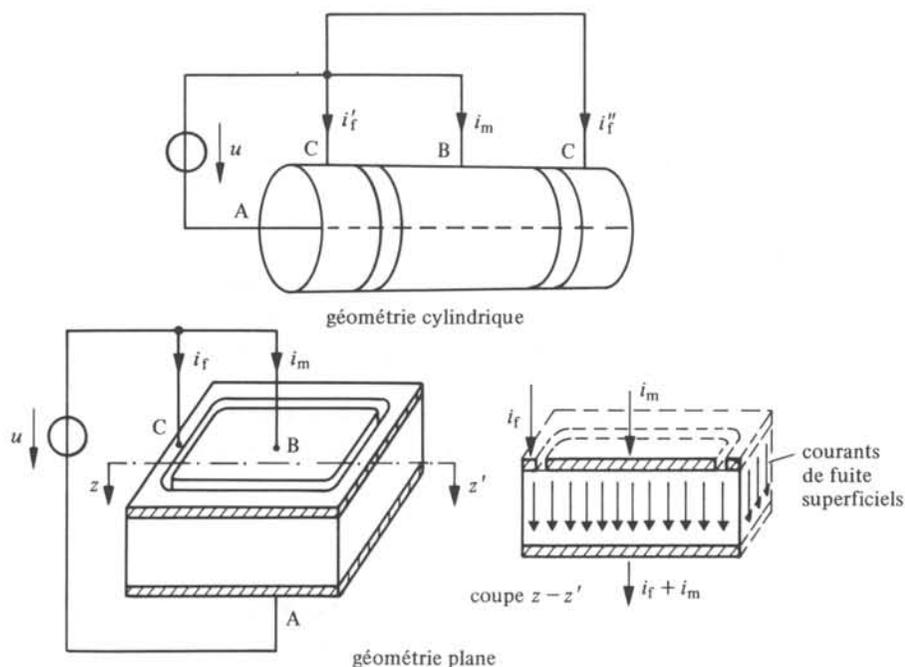


Fig. 4.5

### 4.1.5 Circuit de garde

La mesure de très grandes résistances, au moyen d'un pont teraohm-mètre ou par la méthode directe (rapport tension/courant) requiert en général un circuit de garde (§ 3.3.10). La structure d'un tel circuit, adapté par exemple à la mesure de la résistivité d'un diélectrique massif par la méthode directe, est illustrée à la figure 4.5.

On remarque la séparation entre le courant de mesure  $i_m$  et un courant de fuite  $i_f$  dû par exemple à une pollution de la surface du diélectrique. Le raccordement des trois bornes A, B et C du circuit de garde à un pont teraohm-mètre est indiqué à la figure 4.6.

Théoriquement, le circuit de garde modifie le rapport du pont. En pratique, cet effet est négligeable car  $R_a \ll R_x$  et  $R_x$  est elle-même inférieure ou du même ordre de grandeur que la résistance du circuit de garde. On peut également raccorder le point C à un pont auxiliaire (§ 4.1.6).

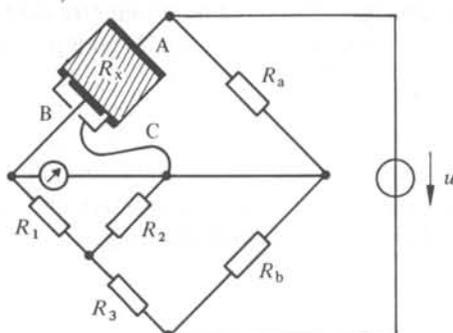


Fig. 4.6

### 4.1.6 Pont en régime alternatif

Les circuits en pont sont d'un usage plus délicat en régime alternatif en raison des perturbations provenant de couplages parasites. On a représenté schématiquement sur la

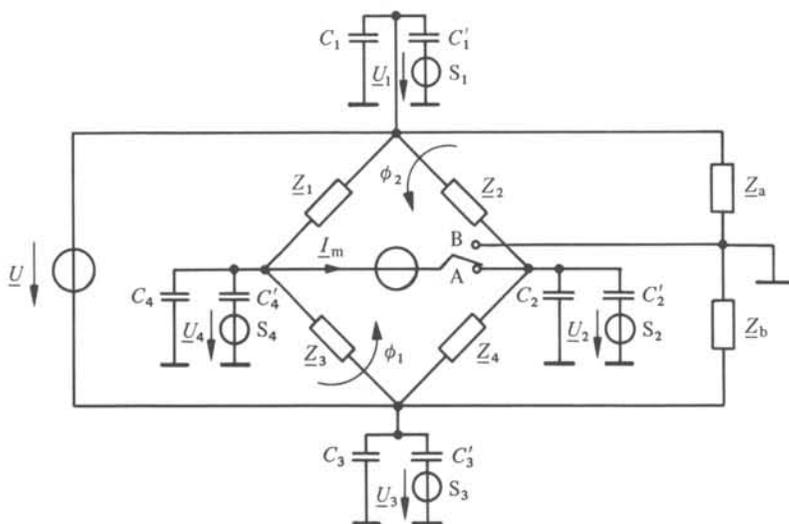


Fig. 4.7

figure 4.7 les couplages capacitifs contre terre par les condensateurs  $C_1$  à  $C_4$ , et les couplages capacitifs avec d'autres potentiels par les sources  $S_1$  à  $S_4$  et les condensateurs  $C'_1$  à  $C'_4$ . Les couplages inductifs sont représentés par les flux d'induction  $\phi_1$  et  $\phi_2$ .

L'équation d'équilibre du pont ( $I_m = 0$ ), qui serait idéalement

$$\underline{Z}_1/\underline{Z}_3 = \underline{Z}_2/\underline{Z}_4 \quad (4.8)$$

est modifiée par la présence de ces couplages, d'une manière qui n'est pas toujours aisément maîtrisable.

On réduit les couplages inductifs par l'usage de blindages en matériaux magnétiques à haute perméabilité et par une orientation des circuits diminuant autant que possible les flux magnétiques perturbateurs. Les couplages capacitifs sont réduits par des blindages électrostatiques.

L'effet des couplages capacitifs contre terre peut être maîtrisé, à l'équilibre et si  $\underline{U}_2 = \underline{U}_4 = 0$ , au moyen d'un pont auxiliaire. Quand le pont principal ( $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3, \underline{Z}_4$ ) et le pont auxiliaire formé des impédances  $\underline{Z}_1, \underline{Z}_3, \underline{Z}_a$  et  $\underline{Z}_b$  sont équilibrés, (commutateur A/B), le point A est au potentiel de la terre. Les condensateurs  $C_2, C'_2, C_4$  et  $C'_4$  sont alors sans effet, puisqu'ils ne sont parcourus par aucun courant.

Les courants traversant  $C_1, C'_1, C_3$  et  $C'_3$  sont fournis directement par la source et n'affectent donc pas l'équilibre du pont. La source doit être flottante, le seul point à la terre du circuit étant le point commun de  $\underline{Z}_a$  et  $\underline{Z}_b$ .

#### 4.1.7 Pont de Wien

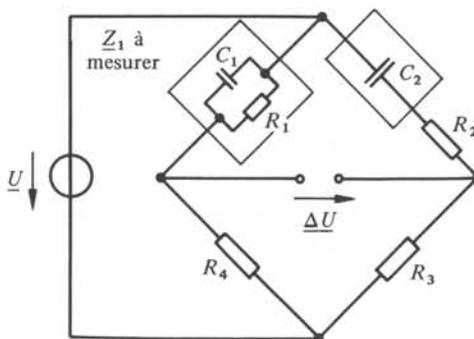
Ce pont est destiné à la mesure de condensateurs et plus généralement à la mesure d'éléments à composante réactive négative. L'élément inconnu,

$$\underline{Z}_1 = \frac{R_1}{1 + j\omega C_1 R_1} \quad (4.9)$$

est opposé (fig. 4.8) à une résistance pure  $R_4$ . Dans l'autre bras, on trouve un condensateur de référence  $C_2$ , supposé sans pertes, branché en série avec une résistance  $R_2$ .

Les conditions d'équilibre de ce pont sont données par (4.10) et (4.11).

$$R_1 = \frac{R_4}{R_3} \left( R_2 + \frac{1}{(\omega C_2)^2 R_2} \right) \quad (4.10)$$



$$\underline{Z}_1 = X_1(1 - j/\tan \delta_1)$$

$$X_1 = \frac{R_1}{1 + \omega^2 C_1^2 R_1^2}$$

$$\tan \delta_1 = 1/\omega C_1 R_1$$

Fig. 4.8 Pont de Wien.

et

$$C_1 = 1/(\omega^2 C_2 R_1 R_2) \quad (4.11)$$

Ces équations montrent qu'un grand choix de couples de variables peuvent en principe être utilisés pour équilibrer le pont. Ce sont les couples  $(C_2, R_2)$ ;  $(C_2, R_3)$ ;  $(C_2, R_4)$ ;  $(R_2, R_3)$ ;  $(R_2, R_4)$ . Les deux derniers ne font intervenir que des résistances. Ils présentent un intérêt pratique particulier, par le fait qu'il est plus facile d'obtenir des résistances variables précises que des condensateurs variables précis.

#### 4.1.8 Pont de Schering

Ce pont sert à la mesure de condensateurs soumis à des tensions élevées (kV). La valeur des éléments qui le constituent est choisie de manière à ce que la haute tension soit présente sur une moitié seulement du pont. Les éléments d'équilibrage  $C_3$  et  $R_4$  (fig. 4.9) sont placés sur la moitié basse tension du pont, pour la sécurité de l'opérateur et la simplification technique.

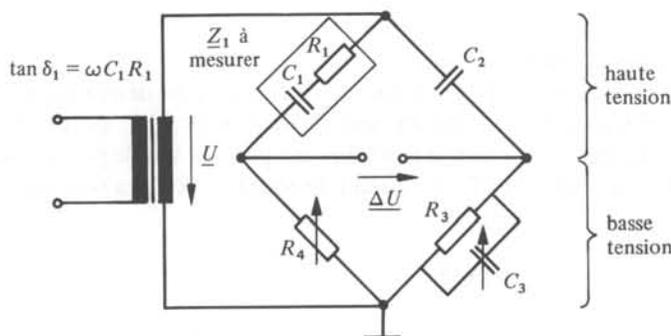


Fig. 4.9 Pont de Schering.

Les conditions d'équilibre sont :

$$C_1 = C_2 R_3 / R_4 \quad (4.12)$$

et

$$\tan \delta_1 = \omega C_3 R_3 \quad (4.13)$$

Le pont de Schering est utilisé essentiellement à la fréquence industrielle de 50 Hz. Un rapport élevé des tensions entre les deux moitiés du pont ne peut s'obtenir qu'au détriment de la sensibilité.

#### 4.1.9 Pont de Maxwell

C'est le pont classique destiné à la mesure d'inductances. Comme les inductances variables et précises sont onéreuses, ce pont utilise une configuration permettant d'atteindre l'équilibre au moyen de condensateurs de résistances variables uniquement (fig. 4.10).

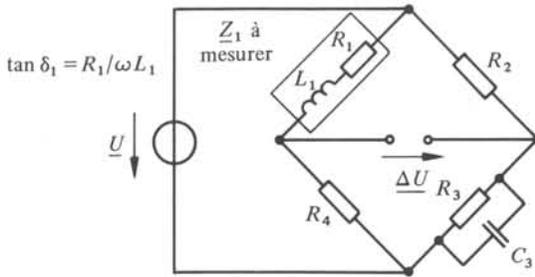


Fig. 4.10 Pont de Maxwell.

Les conditions d'équilibre sont :

$$L_1 = R_2 R_4 C_3 \quad (4.14)$$

et

$$\tan \delta_1 = 1/\omega C_3 R_3 \quad (4.15)$$

#### 4.1.10 Ponts hors équilibre

Comme indiqué dans l'introduction de ce chapitre, on détermine plus souvent l'élément inconnu d'un pont à partir du signal de déséquilibre  $\Delta u$ , que par un équilibrage strict du pont. La figure 4.11 donne la tension  $\Delta u$  pour un simple pont de Wheatstone dans lequel  $R_2 = R_3 = R_4 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_1$  variant de  $500 \Omega$  à  $2 \text{ k}\Omega$ . La tension d'alimentation est de  $1 \text{ V}$ .

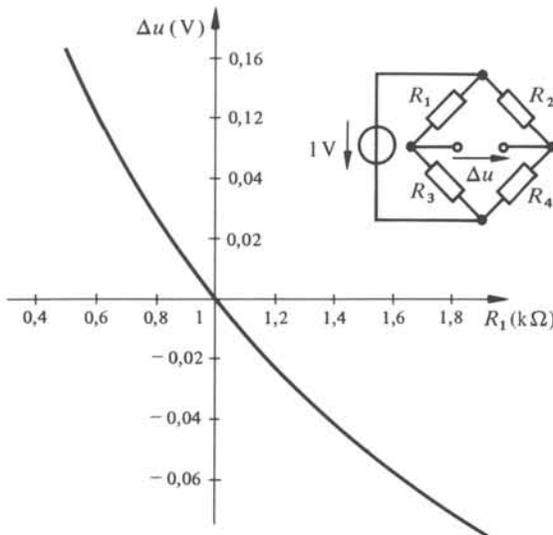


Fig. 4.11

Les figures 4.12 à 4.14 illustrent la variation de  $\Delta U$  pour deux ponts exploités en régime sinusoïdal. Pour le pont de Wien (fig. 4.8), l'impédance du condensateur inconnu est donnée sous la forme  $\underline{Z}_1 = X_1 (1 - j/\tan \delta_1)$ . On a choisi  $500 \Omega < X_1 < 2 \text{ k}\Omega$ , la condi-

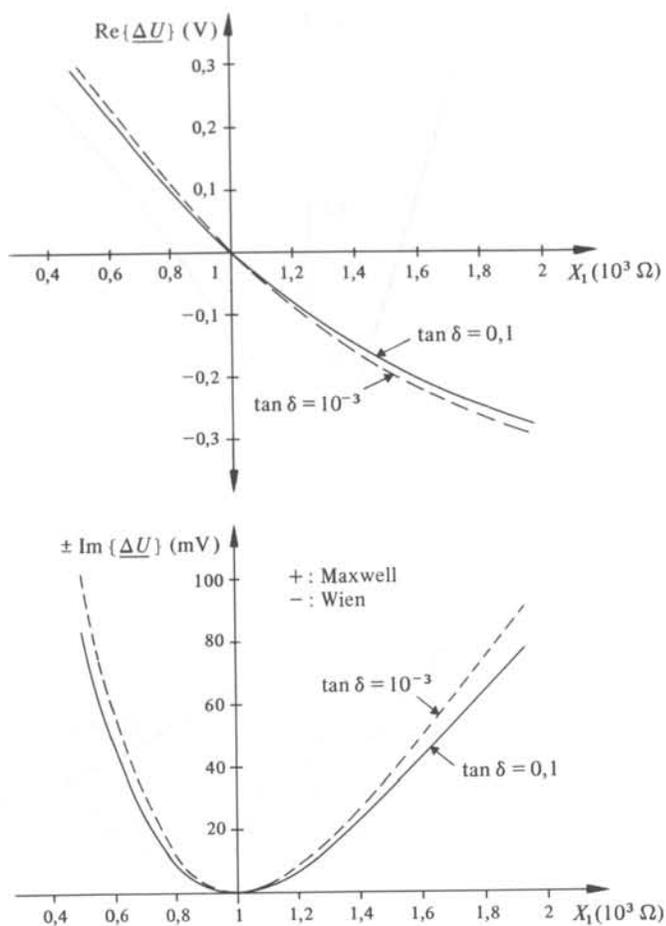


Fig. 4.12

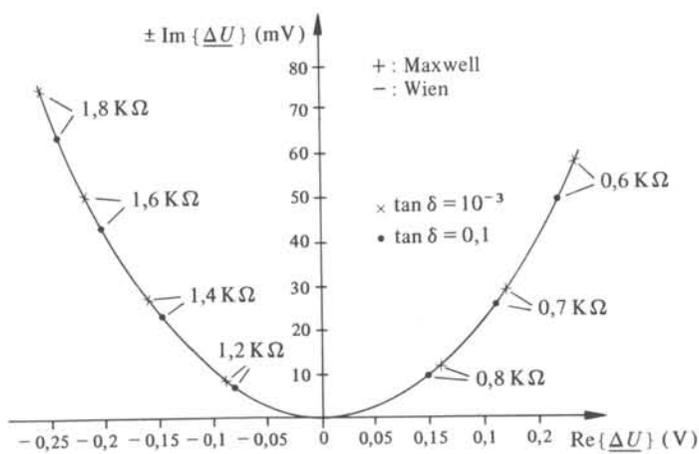


Fig. 4.13

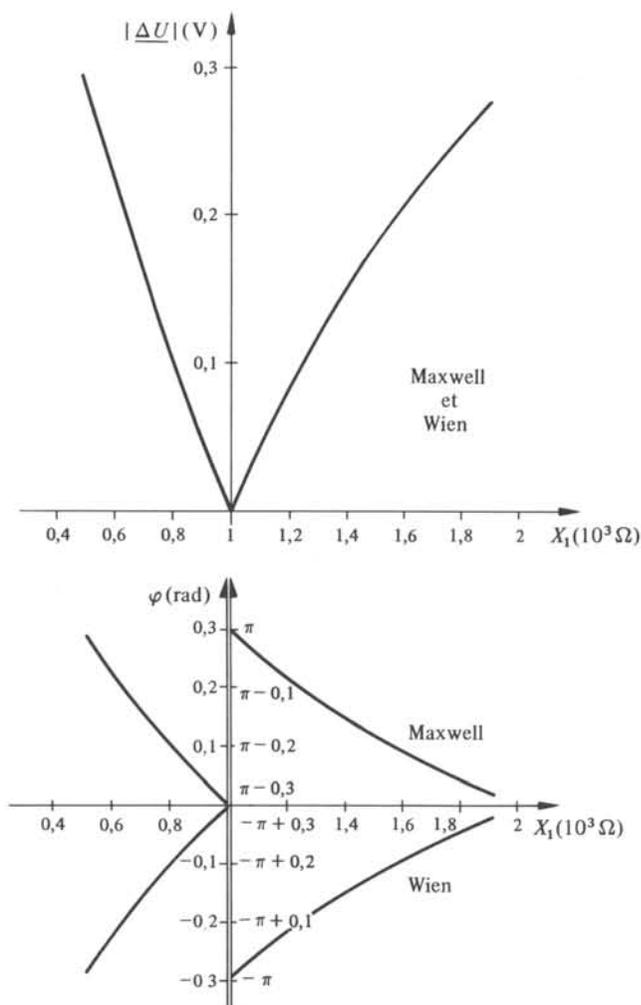


Fig. 4.14

tion d'équilibre étant atteinte pour  $X_1 = 1000 \Omega$ . La tangente de l'angle de perte  $\delta$ , qui figure comme paramètre, a la même valeur pour  $C_1$  et l'ensemble  $(C_2, R_2)$ . Par ailleurs  $R_2 = R_4 = 1 \text{ k}\Omega$ . L'angle  $\varphi$  représente le déphasage entre  $\Delta U$  et la tension d'alimentation, qui est de 1 V. Les conditions pour le pont de Maxwell (fig. 4.10) sont en tous points semblables. L'impédance de l'inductance inconnue vaut  $\underline{Z}_1 = X_1 (\tan \delta_1 + j)$  avec  $X_1 = \omega L_1$ . Les angles de pertes de  $L_1$  et  $C_3$  sont supposés identiques, d'autre part  $R_2 = R_4 = 1 \text{ k}\Omega$ .

On peut extraire les composantes réelle et imaginaire de  $\Delta U$  au moyen d'un amplificateur lock-in à deux phases (§ 3.4.9). Si nécessaire un voltmètre vectoriel détermine, à partir de ces composantes, l'amplitude et la phase de  $\Delta U$ . Ces opérations peuvent être réalisées à partir de circuits intégrés du commerce. Une procédure plus simple, consistant à mesurer seulement l'amplitude de  $\Delta U$  ou seulement sa phase, est parfois suffisante.

#### 4.1.11 Circuits résonants

Le phénomène de résonance peut être mis à profit pour mesurer les éléments réactifs. Il suffit pour cela de réaliser un circuit résonant comprenant l'élément à déterminer. La figure 4.15 illustre la mesure d'une inductance  $\underline{Z} = R + j\omega L$  par adjonction d'un condensateur en série.

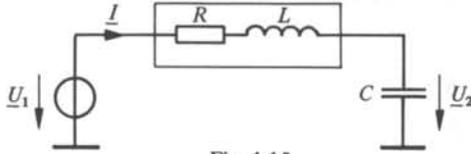


Fig. 4.15

Le courant dans ce circuit vaut

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_1}{R + j(\omega L - (\omega C)^{-1})} \quad (4.16)$$

Le carré du module et la phase  $\varphi$  de ce courant sont représentés à la figure 4.16, au voisinage de la pulsation de résonance  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

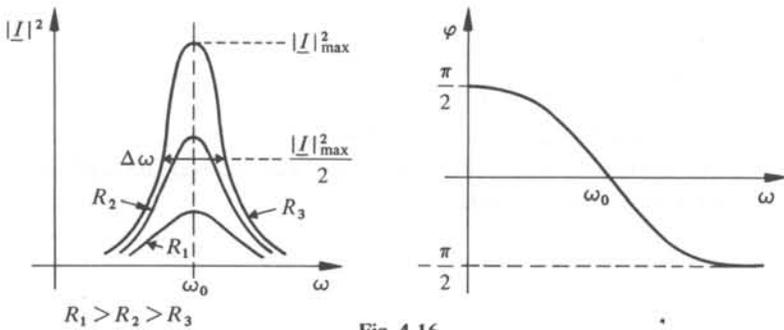


Fig. 4.16

Le coefficient de qualité  $Q_c$  de ce circuit est défini par la relation

$$Q_c = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (4.17)$$

où  $\Delta\omega$  est la largeur à mi-hauteur de la fonction normalisée

$$\frac{|I|^2(\omega)}{|I|^2(\omega = \omega_0)} = \frac{R^2}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \quad (4.18)$$

En calculant  $\Delta\omega$  à partir de (4.18) on constate que  $Q_c$  est égal au coefficient de qualité de l'inductance  $Q = \omega L/R$  à la résonance. Ce résultat est dû au fait que le condensateur  $C$  est supposé parfait.

Pour connaître complètement  $\underline{Z}$ , il faut donc déterminer  $\omega_0$  et  $\Delta\omega$  d'où l'on tire

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} \quad (4.19)$$

et

$$R = L \Delta\omega \quad (4.20)$$

Une méthode approchée permet de remplacer la mesure de  $\Delta\omega$  par la mesure, plus simple, de la valeur maximum du rapport  $|\underline{U}_2|/|\underline{U}_1|$ .

On tire de la condition  $\partial(|\underline{U}_2|/|\underline{U}_1|)/\partial\omega = 0$  la pulsation  $\omega'_0$  pour laquelle  $|\underline{U}_2|/|\underline{U}_1|$  est maximum. Sachant que

$$|\underline{U}_2|/|\underline{U}_1| = 1/\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \quad (4.21)$$

on obtient

$$\omega'_0{}^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2} \frac{R}{L} \quad (4.22)$$

soit encore

$$\omega'_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad (4.23)$$

A condition que  $Q$  soit assez élevé, on peut donc écrire (4.19) sous la forme :

$$L \cong \frac{1}{\omega_0'^2 C} \quad (4.24)$$

d'où, par (4.21),

$$[|\underline{U}_2|/|\underline{U}_1|]_{\max} \cong Q = \frac{\omega L}{R} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (4.25)$$

On obtient  $R$  en portant  $\Delta\omega$  tiré de (4.25) dans (4.20).

La détermination la plus précise de  $\omega_0$  se fait par la mesure de la phase  $\varphi$ . En effet  $\varphi = 0$ , pour  $\omega = \omega_0$  (fig. 4.16).

## 4.2 CIRCUITS ACTIFS

### 4.2.1 Introduction

Tous les circuits électroniques sont potentiellement utiles en métrologie ! On se borne ici à présenter quelques circuits particulièrement représentatifs du domaine, dans le but de dégager leurs principes de fonctionnement plutôt que d'en proposer une réalisation concrète. Cette dernière est étroitement conditionnée par le marché en constante évolution des circuits intégrés.

Dans ce qui suit, *l'amplificateur opérationnel est implicitement considéré comme idéal*. Les limites de cette hypothèse et le fonctionnement de l'amplificateur opérationnel en général sont étudiés dans le volume VIII du Traité d'Electricité.

### 4.2.2 Amplificateur d'instrumentation

Le schéma de la figure 4.17 constitue la solution classique adoptée pour l'étage d'entrée d'un système de mesure de haute qualité.

Les impédances d'entrée, tant en mode différentiel qu'en mode commun sont très élevées, comme le laisse présager le raccordement de AO1 et AO2. Le circuit est donc

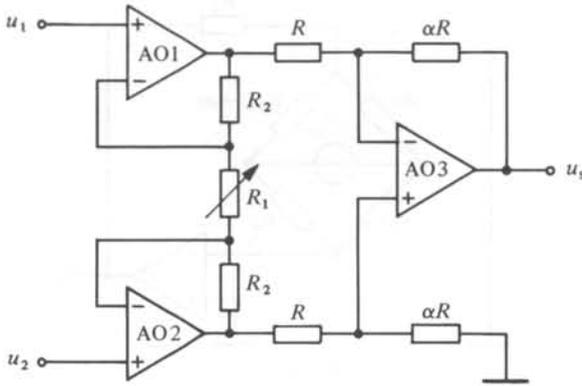


Fig. 4.17

pratiquement insensible à la dissymétrie pouvant exister entre les sources délivrant  $u_1$  et  $u_2$ . L'étage d'entrée constitué de AO1 et AO2 présente un gain unité pour le signal en mode commun et un gain  $G_1$  donné par

$$G_1 = \left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right) \quad (4.26)$$

pour le signal en mode différentiel. Un taux élevé de réjection du mode commun est donc atteignable en jouant sur le rapport  $R_2/R_1$ . Le deuxième étage (AO3) est un soustracteur symétrique avec gain, présentant une basse impédance de sortie. Cet étage étant lui-même alimenté par des sources à basse impédance (AO1 et AO2), les résistances  $R$ , de même que  $R_1$  et  $R_2$  peuvent être choisies relativement basses, ce qui contribue à améliorer la stabilité et la bande passante de l'ensemble. Le gain  $G$  de l'amplificateur vaut :

$$G = \frac{u_s}{u_2 - u_1} = \alpha \left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right) \quad (4.27)$$

On peut l'ajuster en modifiant la valeur d'une seule résistance :  $R_1$ .

### 4.2.3 Amplificateur pour pont de Wheatstone

Des solutions moins raffinées que l'amplificateur d'instrumentation sont utilisables pour mesurer le déséquilibre d'un simple pont à résistances. Trois circuits, dont un à réponse linéaire, sont présentés ci-dessous.

Le premier circuit (fig. 4.18) est régi par l'équation

$$u_s = \frac{u}{4} (1 + R_2/R_1) \frac{\alpha}{1 + \alpha/2} \quad (4.28)$$

Il délivre un signal proportionnel à la *tension* de déséquilibre du pont. Ce signal est indépendant de la résistance du pont ( $R_0$  ne figure pas dans (4.28)). Le circuit est donc insensible à une variation de  $R_0$ , sous l'effet de la température par exemple. Son principal inconvénient est de nécessiter une source de tension  $u$  flottante.

Le deuxième circuit (fig. 4.19) mesure la différence des *courants* qu'il faut injecter en B et C pour maintenir ces deux points au même potentiel.

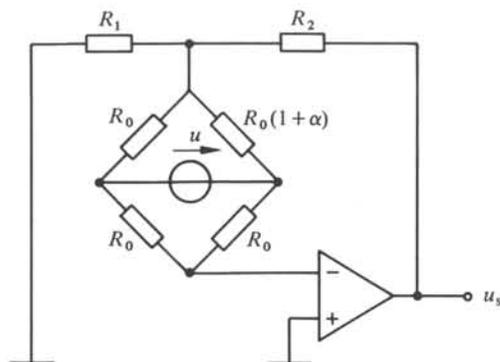


Fig. 4.18

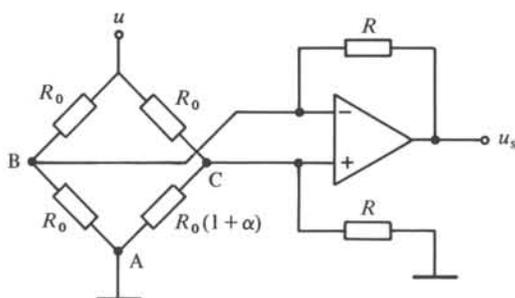


Fig. 4.19

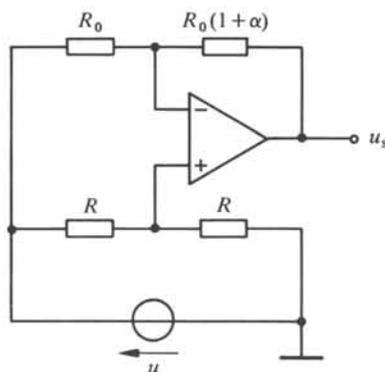


Fig. 4.20

Le signal qu'il délivre vaut :

$$u_s = \frac{u}{2} \frac{R}{R_0(1 + R_0/2R)} \frac{\alpha}{1 + \alpha} \quad (4.29)$$

Par rapport à la terre, le potentiel des points B et C peut être assez élevé. Il faut donc choisir un amplificateur opérationnel présentant un taux de réjection du mode commun suffisant. On peut diminuer ce potentiel en raccordant A à une source de tension négative.

Le troisième circuit (fig. 4.20) présente deux avantages importants : une réponse linéaire,

$$u_s = \frac{u}{2} \alpha \quad (4.30)$$

et le raccordement d'un point de la source à la terre.

Sa réponse est indépendante de la résistance  $R_0$  du pont.

L'inconvénient de ce circuit est de ne pas fournir d'amplification.

#### 4.2.4 Mesure de courant libre de potentiel

La mesure d'un courant contre terre au moyen d'un amplificateur opérationnel ne pose pas de problème (fig. 4.21).

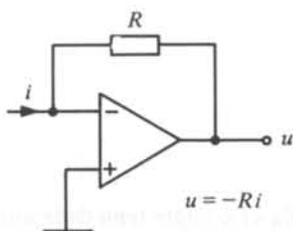


Fig. 4.21

La situation est un peu plus délicate s'il s'agit de mesurer un courant en un point dont le potentiel est flottant. Une solution consiste à placer dans le circuit un shunt dont les bornes seront raccordées à un amplificateur d'instrumentation. Il est possible de se passer de shunt en recourant au schéma de la figure 4.22.

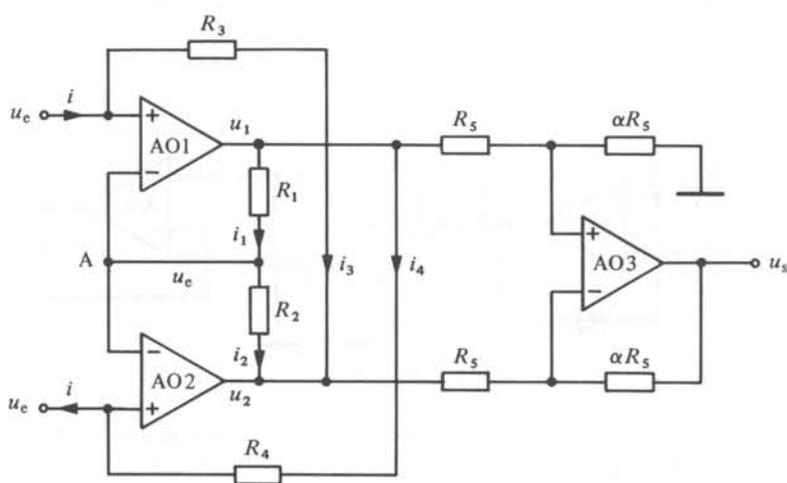


Fig. 4.22

Les contre-réactions de AO1 par  $R_1$  et AO2 par  $R_2$  ont pour effet de maintenir les bornes positives de ces amplificateurs et le point A au même potentiel. Par ailleurs,  $i_1 = i_2$ , ce qui permet d'écrire

$$\frac{u_1 - u_e}{R_1} = -\frac{u_2 - u_e}{R_2} \quad (4.31)$$

D'autre part,

$$u_1 = R_4 i_4 + u_e \quad (4.32)$$

et

$$u_2 = -R_3 i_3 + u_e \quad (4.33)$$

En portant ces équations dans (4.31) il vient :

$$i_4 = \frac{R_1 R_3}{R_2 R_4} i_3 \quad (4.34)$$

A condition que

$$R_1 R_3 = R_2 R_4 \quad (4.35)$$

il vient

$$i_3 = i_4 = i \quad (4.36)$$

En posant  $R = R_3 = R_4$  et compte tenu de la soustraction opérée par AO3,

$$u_s = 2 \alpha R i \quad (4.37)$$

Ce circuit supprime l'erreur systématique due à la présence d'un shunt.

#### 4.2.5 Mesure de la valeur de crête d'une tension

Le principe de cette mesure consiste à charger un condensateur à travers une diode. Afin d'éliminer l'erreur systématique d'environ 0,7 V due à la chute de tension aux bornes de la diode, on place cette dernière dans un circuit de contre-réaction. Un exemple de détecteur de crête est donné à la figure 4.23.

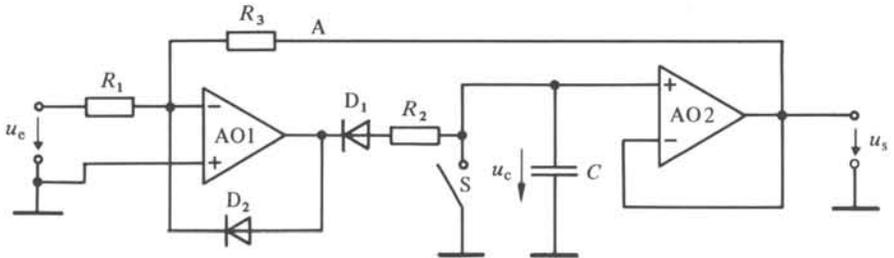


Fig. 4.23

AO1 fonctionne en inverseur. Sa boucle de contre-réaction est formée de quatre éléments en série  $D_1$ ,  $R_2$ , AO2 et  $R_3$ , branchés en parallèle avec  $D_2$ . L'amplificateur AO2 est un adaptateur d'impédance de gain unité. Son rôle est de maintenir la tension  $u_c = u_s$  au point A, sans décharger le condensateur. Tant que  $u_e > -u_s$ ,  $D_1$  conduit et charge  $C$  à la tension  $-u_e$ , avec une rapidité qui dépend du produit  $R_2 C$  d'une part, des valeurs maximales de la tension et du courant délivrés par AO1 d'autre part. Dès que  $u_e$  commence à être inférieur à  $|u_c|$ , la tension de sortie de AO1 devient positive. La charge de  $C$  s'arrête et la contre-réaction de AO1 passe par  $D_2$ , dont la fonction est d'empêcher AO1 d'atteindre la saturation. Le condensateur  $C$  conserve donc, changée de signe, la valeur de crête de la tension appliquée à l'entrée du circuit.

Dans le temps, la charge de  $C$  est affectée par les courants de fuite à travers  $D_1$  et le diélectrique, ainsi que par le courant de polarisation de AO2. Une mémorisation de longue durée nécessite donc une conversion A/D de  $u_s$ , déclenchée par exemple par le changement de signe de la tension de sortie de AO1. L'interrupteur  $S$  sert à remettre  $u_c$  à zéro avant la mesure.

#### 4.2.6 Redresseur idéal

On obtient un *redresseur idéal à une alternance* en modifiant légèrement la partie gauche de la figure 4.23 (fig. 4.24).

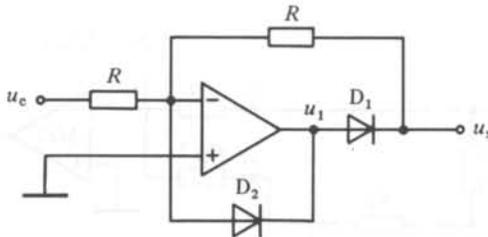


Fig. 4.24

La chute de tension  $u_D$  dans  $D_1$  est exactement compensée, car la résistance de contre-réaction est branchée après cette diode.  $D_2$  empêche l'amplificateur d'entrer en saturation pendant l'alternance coupée. Il convient de choisir un amplificateur rapide pour éviter une distorsion de  $u_s$  lorsque  $u_e$  est proche de zéro. La remarque vaut également pour les deux redresseurs décrits ci-dessous.

La figure 4.25 montre un redresseur idéal à double alternance.

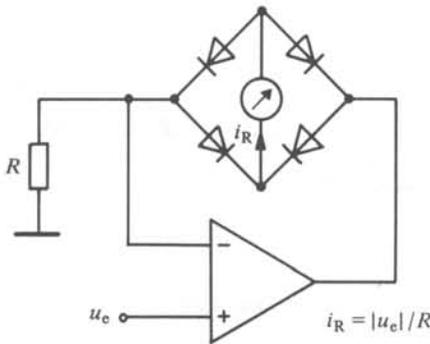


Fig 4.25

Le signal redressé délivré par le pont de diodes se présente sous la forme d'un courant  $i_R$  circulant dans une portion de circuit à potentiel flottant. Ce redresseur convient bien à la mesure de la valeur moyenne d'une tension redressée, au moyen d'un indicateur à cadre mobile.

Un signal redressé sous la forme d'une tension contre terre est beaucoup plus pratique dans tous les cas où ce signal doit être repris pour traitement par d'autres circuits électroniques. On a recours alors au schéma de la figure 4.26.

Le fonctionnement de ce redresseur est illustré à la figure 4.27.

Le courant  $i_2$  délivré par AO1 (redresseur à simple alternance) vaut :

$$i_2 = \begin{cases} -2 u_e / R_2 & \text{si } u_e > 0 \\ 0 & \text{si } u_e < 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

D'autre part :

$$i_1 = u_e / R_2 \quad (4.39)$$

La tension à la sortie de AO2 fonctionnant comme sommateur vaut :

$$u_s = -R_2(i_1 + i_2) = |u_e| \quad (4.40)$$

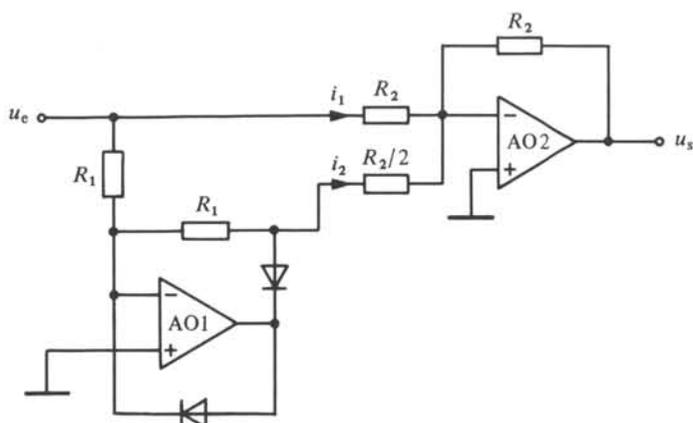


Fig. 4.26 Redresseur idéal à double alternance, à sortie contre terre.

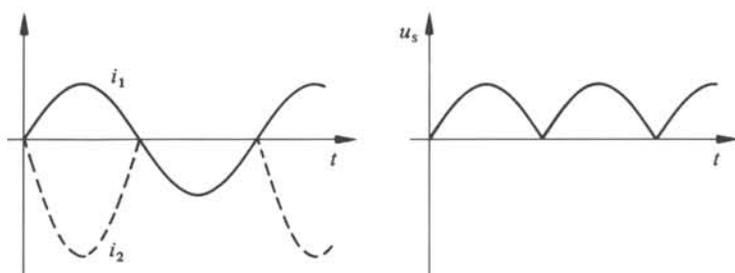


Fig. 4.27

#### 4.2.7 Circuit de linéarisation

On cherche fréquemment à corriger les non-linéarités d'un capteur ou d'un autre élément d'un système de mesure. Le choix de la méthode à mettre en œuvre dépend largement de l'environnement et de l'importance de la correction à apporter. Dans un système par ailleurs largement numérisé, on effectuera la correction par voie numérique. Il est possible par exemple d'utiliser une ROM comme table de conversion d'une valeur brute à la valeur exacte : l'adresse représente la valeur brute et le contenu de la mémoire à cette adresse, la valeur corrigée. Cette solution réclame une capacité de mémoire importante mais permet une correction absolument quelconque. Une réduction de la taille de la mémoire nécessaire est possible en stockant seulement les corrections, en principe d'amplitude réduite par rapport à la valeur à corriger. Si de plus on peut admettre une correction fixe par plage de la valeur brute, la capacité de mémoire requise est encore réduite : les adresses de la ROM ne correspondent plus qu'aux bits les plus significatifs de la valeur brute.

À l'opposé de ces techniques, on trouve le calcul de la correction au moyen d'une fonction ad hoc donnée le plus souvent sous forme polynomiale.

Une linéarisation par voie purement analogique est également possible et efficace si la correction varie d'une manière assez régulière pour qu'on puisse l'approcher valablement par des segments de droite en nombre limité. La méthode met en jeu des éléments

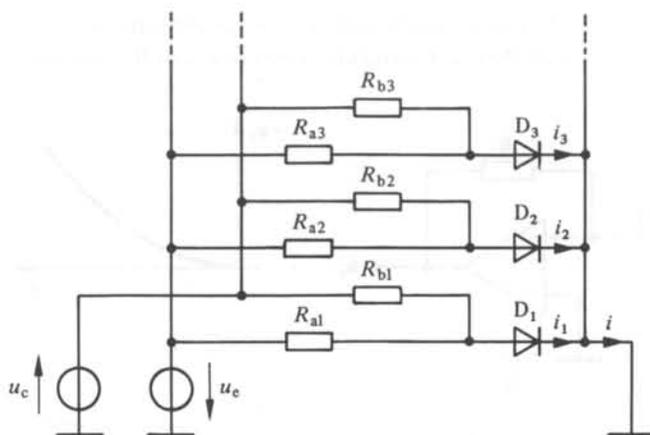


Fig. 4.28

à caractéristiques tension-courant non linéaires et des amplificateurs opérationnels. Un exemple d'élément non linéaire est donné à la figure 4.28.

En supposant les diodes idéales, le courant dans la diode n°  $i$  vaut :

$$\left. \begin{aligned} i_i &= 0 && \text{pour } u_e < u_c \frac{R_{ai}}{R_{bi}} \\ i_i &= \frac{u_e}{R_{ai}} - \frac{u_c}{R_{bi}} && \text{pour } u_e > u_c \frac{R_{ai}}{R_{bi}} \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

Le courant total est représenté à la figure 4.29.

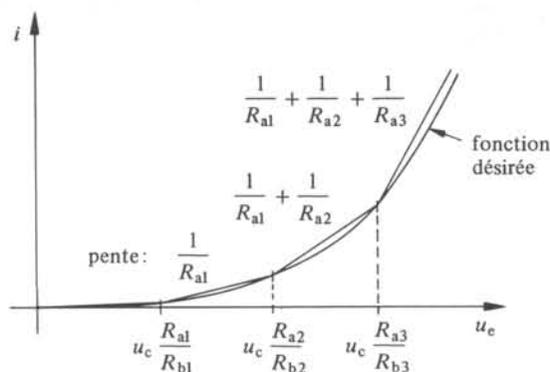


Fig. 4.29

La compensation de la tension de seuil de la diode et de sa variation en fonction de la température peut être obtenue de différentes manières, dont un exemple est donné au paragraphe VII.6.6.6.

On constate qu'en jouant sur les valeurs de  $R_{ai}$ ,  $R_{bi}$  et  $u_c$  on peut ajuster les segments de droite sur n'importe quelle fonction croissante dont la concavité est orientée vers le haut.

En combinant un tel élément non linéaire avec un amplificateur opérationnel, on peut faire varier l'orientation de la concavité et obtenir une transformation tension-tension (fig. 4.30).

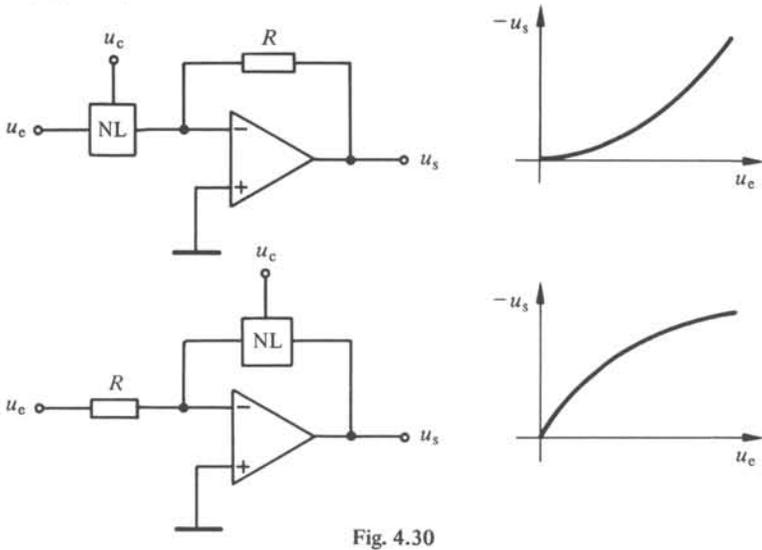


Fig. 4.30

Une légère modification de l'élément non linéaire, et l'adjonction d'une deuxième tension de référence  $u'_c$  de signe opposé à  $u_c$  permettent d'étendre la fonction  $u_s = f(u_e)$  aux valeurs négatives de  $u_e$ .

En utilisant plusieurs éléments non linéaires et plusieurs amplificateurs opérationnels, on peut en principe générer n'importe quelle fonction [24] mais les méthodes numériques s'imposent très rapidement lorsque la complexité croît.

Il faut signaler pour terminer le cas de la linéarisation de composants à réponse exponentielle, comme les thermistances, par un amplificateur logarithmique (fig. 4.31).

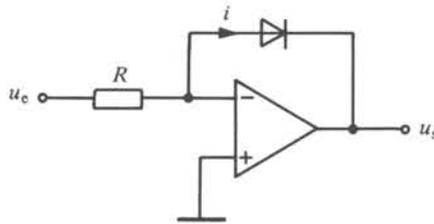


Fig. 4.31 Amplificateur logarithmique à diode.

On sait (§ VII 3.2.6) que le courant  $i$  circulant dans une diode soumise à une tension  $u$  dans le sens direct est donné par

$$i = i_s \left[ \exp \left( \frac{u}{nU_T} \right) - 1 \right] \cong i_s \exp \left( \frac{u}{nU_T} \right) \quad \text{A} \quad (4.42)$$

où  $i_s$ ,  $n$  et  $U_T$  sont des constantes caractéristiques de la diode.

La tension à la sortie de l'amplificateur vaut donc

$$u_s = -n U_T \operatorname{Ln} \left( \frac{u_e}{R i_s} \right) \quad (4.43)$$

Pour réaliser des amplificateurs logarithmiques précis, peu dépendants de la température et fonctionnant sur 9 ou 10 décades, il faut utiliser des montages différentiels dans lesquels les éléments non linéaires peuvent être des transistors et non des diodes (§ VIII 3.4.2), [25].

#### 4.2.8 Porte d'échantillonnage

Le circuit de la figure 4.32 est utilisé fréquemment dans les systèmes d'acquisition rapide. Il permet de brancher et débrancher une source de tension  $u_e$  à une charge  $R$ . Le temps de commutation peut être extrêmement court, inférieur à 1 ns avec des diodes de type Schottky.

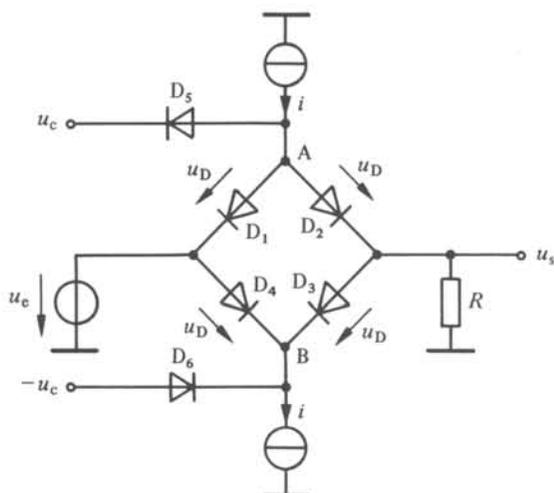


Fig. 4.32 Porte d'échantillonnage.

Lorsque la tension de commande  $u_c$  est positive,  $D_5$  et  $D_6$  sont polarisées en sens inverse. Le courant  $i$  s'écoule à travers  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  et  $D_4$ , qui présentent alors une tension  $u_D$  de l'ordre de 0,7 V. Les potentiels des points A et B étant flottants,  $u_s = u_e$ .

Lorsque  $u_c$  est négative,  $D_5$  et  $D_6$  conduisent. Le potentiel de A devient négatif, celui de B, positif. Les diodes  $D_1$  à  $D_4$  sont alors polarisées en sens inverse, de sorte que la charge  $R$  se trouve isolée de la source. On trouve une étude complète de la porte d'échantillonnage dans [26].

#### 4.2.9 Mesure d'un composant in situ

Il est possible de mesurer la valeur d'un composant in situ, sur un circuit imprimé par exemple, sans qu'il soit nécessaire de le déconnecter, grâce au circuit de la figure 4.33.

Soit  $R_x$  la résistance à déterminer,  $R_1$  et  $R_2$  les résistances équivalentes à l'ensemble des résistances connectées aux bornes de  $R_x$ . On raccorde en A une source de ten-

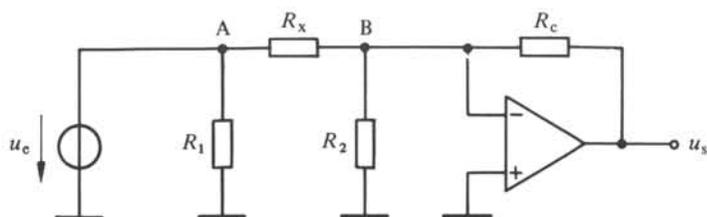


Fig. 4.33

sion  $u_e$ . Le courant  $i$  qu'elle produit dans  $R_x$  est indépendant de  $R_1$ . On branche B à la borne « moins » d'un amplificateur opérationnel. Cette dernière étant maintenue au potentiel de la terre par la boucle de contre-réaction, aucun courant ne circule dans  $R_2$ , d'où

$$R_x = R_c u_e / u_s \quad (4.44)$$

Ce raisonnement présuppose que la source délivrant  $u_e$  est la seule source qui alimente le circuit auquel appartient  $R_x$ , pendant la mesure.

Le montage permet également la mesure d'une impédance, à condition de mesurer le module et la phase de  $u_s$  par rapport à  $u_e$ .

## ACQUISITION INFORMATIQUE DES MESURES

### 5.1 INTRODUCTION

#### 5.1.1 Rôle de l'ordinateur

Au-delà d'un certain seuil de complexité, la conception et la réalisation d'un système de mesure est fortement influencée par l'existence des ordinateurs: micro-processeurs et microordinateurs essentiellement. En plus des fonctions traditionnellement dévolues à l'ordinateur, il convient alors d'exécuter par voie informatique, certaines tâches relevant autrement de la circuiterie. Ce transfert de matériel vers le logiciel produit simultanément, lorsqu'il est bien compris, une élévation des performances et un abaissement des coûts.

Parmi les tâches typiques susceptibles d'être confiées à l'ordinateur, on peut citer:

- la gestion, dynamique ou fixe, d'un ensemble de canaux de mesure;
- la combinaison de résultats provenant de plusieurs canaux selon un algorithme établi;
- les rétroactions de toutes sortes;
- la surveillance de paramètres, le déclenchement d'alarmes hiérarchisées;
- l'envoi de résultats sur un réseau téléphonique ou téléinformatique;
- l'extraction du signal par autocorrélation, intercorrélation, filtrage numérique, moyennage, etc.;
- l'analyse fréquentielle des signaux par transformation de Fourier rapide;
- les analyses statistiques: tests paramétriques, domaines de confiance, extrapolations, synthèses;
- la présentation graphique de résultats.

Des logiciels standard sont fournis par les fabricants d'ordinateurs pour la majorité de ces fonctions. Les méthodes numériques de traitement du signal font l'objet du volume XX de cette collection.

#### 5.1.2 Conversion et multiplexage

L'agencement d'un système de mesure autour d'un ordinateur dépend largement des interfaces dont celui-ci est doté au départ. L'utilisation d'un ordinateur, machine logique par excellence, requiert toujours une conversion préalable de tous les signaux analogiques à traiter en signaux digitaux (conversion A/D). Réciproquement, les résultats fournis par l'ordinateur sont souvent reconvertis en signaux analogiques (conversion D/A) lorsqu'il s'agit par exemple de contrôler un processus. D'autre part, l'ordi-

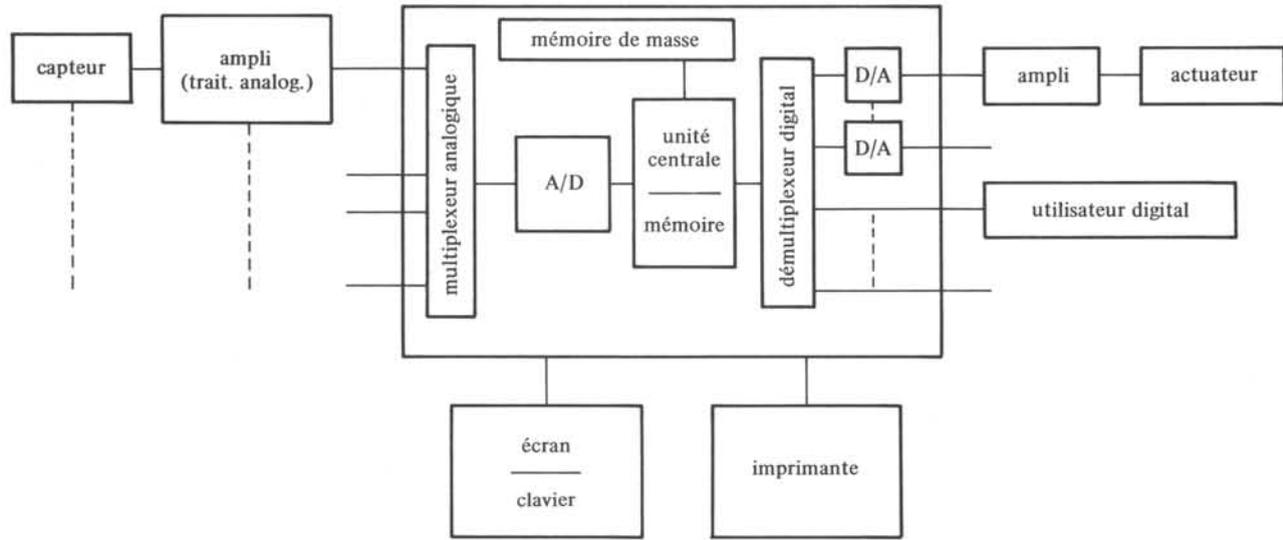


Fig. 5.1

nateur ne traitant en principe qu'un signal à la fois, il est nécessaire de lui raccorder successivement, selon une séquence définie et généralement à haute vitesse, tous les canaux de mesure. C'est la fonction du *multiplexeur* (MUX). De même, tous les résultats produits séquentiellement par l'ordinateur sur le même canal de sortie doivent être dirigés vers les utilisateurs respectifs par un *démultiplexeur* (DEMUX).

Les performances générales du système de mesure dépendent très largement des caractéristiques des convertisseurs A/D et D/A ainsi que des multiplexeurs et démultiplexeurs.

### 5.1.3 Organisation d'un système de mesure informatisé

Trois exemples d'organisation, en fonction du matériel utilisé, sont donnés ci-dessous. La figure 5.1 correspond au cas d'une calculatrice de table dotée d'interfaces d'entrée et de sortie analogiques. La présence dans la calculatrice elle-même des convertisseurs A/D et D/A, ainsi que des multiplexeurs et démultiplexeurs, simplifie les raccordements et la programmation.

Une solution plus souple et plus performante en général est représentée à la figure 5.2. L'ordinateur, (calculatrice de table), possède une interface de mesure normalisée, correspondant par exemple au BUS IEEE 488 [27, 28]. Le bus lui-même est constitué d'un câble à 16 conducteurs reliant en parallèle tous les appareils (ordinateur, multimètres, compteurs, analyseurs, sources...) qui forment le système. Chaque appareil est doté de l'interface IEEE 488, ensemble de circuits électroniques lui permettant de fonctionner alternativement comme émetteur, récepteur ou contrôleur.

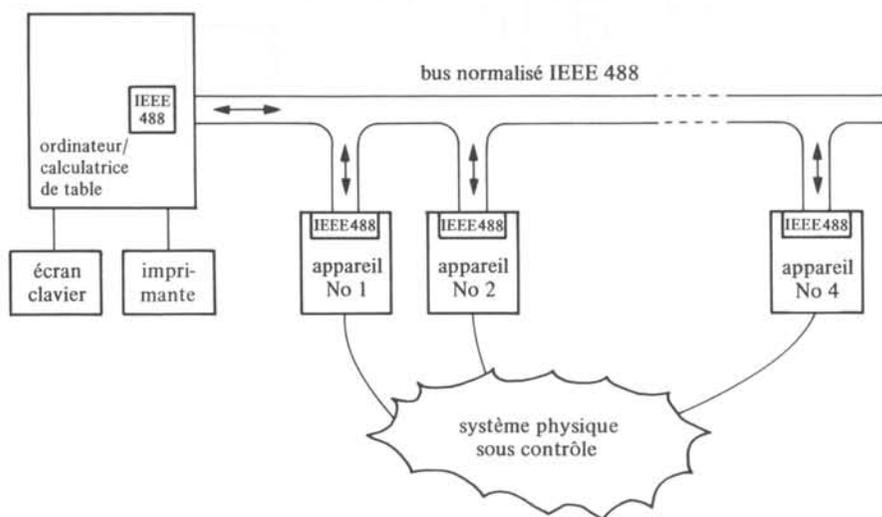


Fig. 5.2

En tant qu'émetteur, il envoie par le bus des données vers un ou plusieurs récepteurs désignés. En tant que récepteur, il reçoit de telles données. Le rôle de contrôleur est en général joué par l'ordinateur. Il consiste essentiellement à désigner à chaque instant quel appareil doit émettre ses données et quel appareil doit les recevoir.

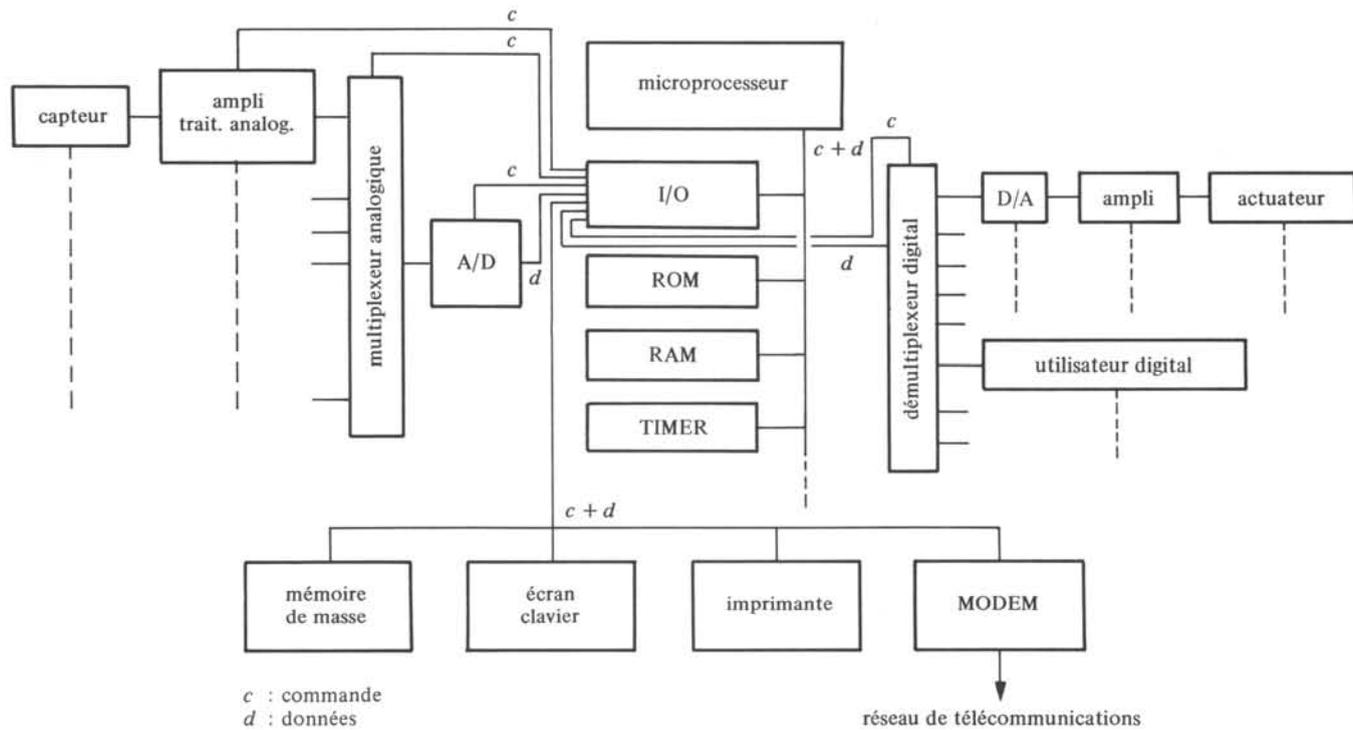


Fig. 5.3

Fonctionnellement, le bus IEEE 488 est divisé en trois parties : le bus de données, formé de huit conducteurs, transfère les données selon le mode parallèle-série : les bits formant un byte en parallèle, les bytes en série. Certains ordres du contrôleur transitent également par ce bus. Le bus de transfert, constitué de trois conducteurs, exécute les protocoles de transmission : synchronisation d'un émetteur prêt à émettre avec le récepteur auquel le message est destiné. Un dernier bus formé de cinq conducteurs, principalement utilisé par le contrôleur, sert à la gestion générale du système.

La figure 5.3 représente un système typique, construit autour d'un microprocesseur.

On retrouve les convertisseurs A/D et D/A, le multiplexeur et le démultiplexeur présents à la figure 5.1, à la différence près que les fonctions correspondantes sont réalisées par des circuits séparés et non plus dans le calculateur lui-même. Le microprocesseur est entouré des circuits habituels :

- I/O (Input/Output) : Interface d'entrée-sortie ;
- ROM (Read-Only Memory) : Mémoire contenant le programme ;
- RAM (Random Access Memory) : Mémoire de travail et de stockage intermédiaire ;
- TIMER : Horloge servant de base de temps pour le déroulement des opérations.

Le clavier et l'écran, respectivement l'imprimante, sont soit présents à demeure, soit en phase de mise au point uniquement, selon les cas. La mémoire de masse et le modem ne figurent pas dans tous les systèmes.

#### 5.1.4 Quantification de l'amplitude et du temps

Le convertisseur A/D fait correspondre à une grandeur d'entrée continûment variable et de valeur bien définie à chaque instant, une succession de messages numériques. Chacun de ces messages représente la valeur codée de la grandeur d'entrée, c'est le « code » apparaissant à la sortie du convertisseur. Par nature, le code comporte un nombre fini de bits. Par conséquent, toute valeur du signal d'entrée est obligatoirement tronquée ou arrondie pour être représentée par le code correspondant à la valeur immédiatement inférieure ou supérieure (fig. 5.4).

Le convertisseur A/D introduit donc une *quantification de l'amplitude*.

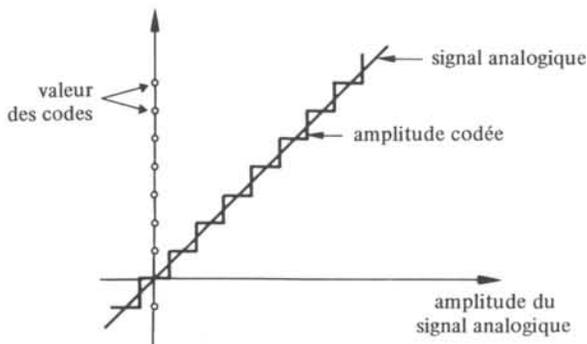


Fig. 5.4 Quantification de l'amplitude.

D'autre part, les codes ne peuvent être produits à une cadence infinie, ce qui revient à dire que les codes ne sont remis à jour que périodiquement. Entre les instants de remise à jour, la valeur de la grandeur d'entrée est ignorée (fig. 5.5).

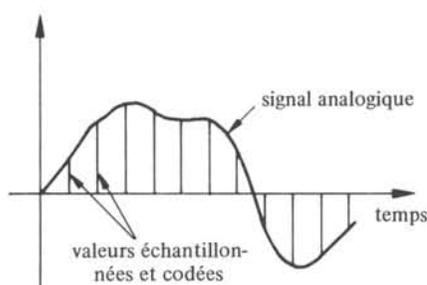


Fig. 5.5 Échantillonnage.

En plus de la quantification de l'amplitude, le convertisseur A/D produit donc une sorte de *quantification du temps*, correspondant à un *échantillonnage* de la grandeur d'entrée.

Le convertisseur D/A proprement dit fait correspondre à chaque code numérique une amplitude discrète valable à l'instant d'échantillonnage. Toutefois, la trace des deux quantifications est en général atténuée par un circuit d'interpolation ou d'extrapolation, capable de restituer une valeur de sortie entre deux échantillonnages. Le circuit le plus simple est l'*extrapolateur d'ordre zéro*, qui maintient l'amplitude constante jusqu'au prochain échantillonnage. Il agit soit par mémorisation du code numérique, soit par maintien analogique de la tension de sortie.

## 5.2 ÉCHANTILLONNAGE

### 5.2.1 Introduction

L'échantillonnage d'un signal analogique apparaît certes comme une opération très brutale. Correctement effectué, l'échantillonnage permet cependant de conserver toute l'information contenue dans le signal analogique. Pour obtenir un tel résultat, il faut connaître l'action du processus d'échantillonnage sur le spectre du signal à échantillonner, de manière à s'assurer que ce dernier n'est pas appauvri ou modifié de manière irréversible dans l'opération. Le problème de l'échantillonnage des signaux est développé en détail dans le chapitre 9 du volume VI, seuls les principaux résultats sont rappelés ici sans démonstration.

### 5.2.2 Échantillonnage périodique idéalisé

Un échantillonneur périodique idéal effectue le produit du signal à échantillonner  $x(t)$  par une suite périodique d'impulsions de Dirac espacées d'un temps  $T_e = 1/f_e$  où  $f_e$  est la fréquence d'échantillonnage. Soit  $X(f)$  et  $\Phi_x(f)$  respectivement la transformée de Fourier et la densité spectrale de puissance de  $x(t)$ . De même, soit  $x_e(t)$ ,

$X_e(f)$  et  $\Phi_e(f)$  respectivement le signal échantillonné, sa transformée de Fourier et sa densité spectrale de puissance. On a :

$$x_e(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) \quad (5.1)$$

$$X_e(f) = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nf_e) \quad (5.2)$$

$$\Phi_e(f) = f_e^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f - nf_e) \quad (5.3)$$

Dans le cas d'un signal  $x(t)$  possédant une densité spectrale de puissance trapézoïdale, limitée à  $f_{\max} < f_e/2$ , les équations ci-dessus correspondent à la figure 5.6. Les fonctions de Dirac sont représentées par des flèches, dont la longueur est proportionnelle au poids de la fonction.

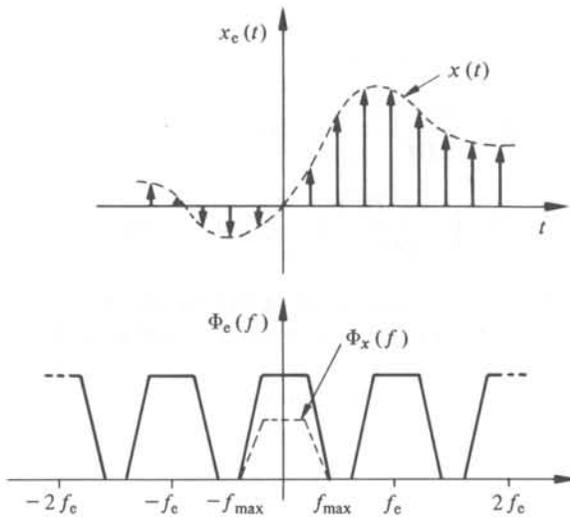


Fig. 5.6

A un facteur multiplicatif près sur l'amplitude, la densité spectrale de puissance du signal échantillonné correspond à une répétition périodique de la densité spectrale de puissance du signal original  $x(t)$ . La période de répétition est égale à la fréquence d'échantillonnage. Il en est de même pour  $X_e(f)$ .

A l'intérieur de la bande  $[-f_{\max}, +f_{\max}]$ , le spectre du signal original se retrouve donc sans déformation dans le spectre du signal échantillonné, à condition que  $f_{\max} < f_e/2$ . Toute l'information de  $x(t)$  est donc contenue dans  $x_e(t)$  (§ 5.2.5). Si la fréquence d'échantillonnage n'était pas supérieure, à la limite égale, à  $2f_{\max}$ , il y aurait recouvrement partiel des trapèzes voisins et altération du spectre dans les régions concernées.

En réalité, l'échantillonnage s'écarte toujours plus ou moins de l'échantillonnage idéal. Il en résulte une déformation du spectre du signal échantillonné, analysée dans les paragraphes suivants.

### 5.2.3 Échantillonnage périodique avec maintien

A chaque échantillon, la valeur instantanée du signal est mémorisée pendant une durée  $D$ . Le signal échantillonné  $x_{em}(t)$  se présente donc sous la forme d'une suite d'impulsions rectangulaires dont les amplitudes correspondent aux valeurs de l'échantillonnage idéal (fig. 5.7).

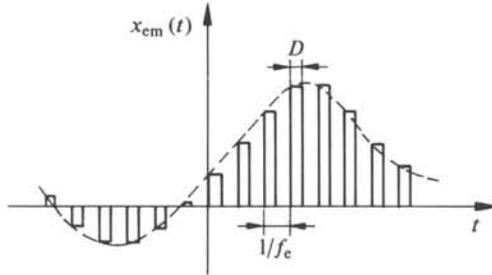


Fig. 5.7

Soit  $X_{em}(f)$  et  $\Phi_{em}(f)$  respectivement la transformée de Fourier et la densité spectrale de puissance du signal échantillonné. On montre que :

$$X_{em}(f) = D f_e \frac{\sin(\pi D f)}{\pi D f} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - n f_e) \exp(-j \pi n D f) \quad (5.4)$$

$$\Phi_{em}(f) = D^2 f_e^2 \left( \frac{\sin(\pi D f)}{\pi D f} \right)^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f - n f_e) \quad (5.5)$$

Par comparaison avec le spectre du signal échantillonné idéalement (5.2), on constate que le spectre du signal échantillonné avec maintien présente une fonction de pon-

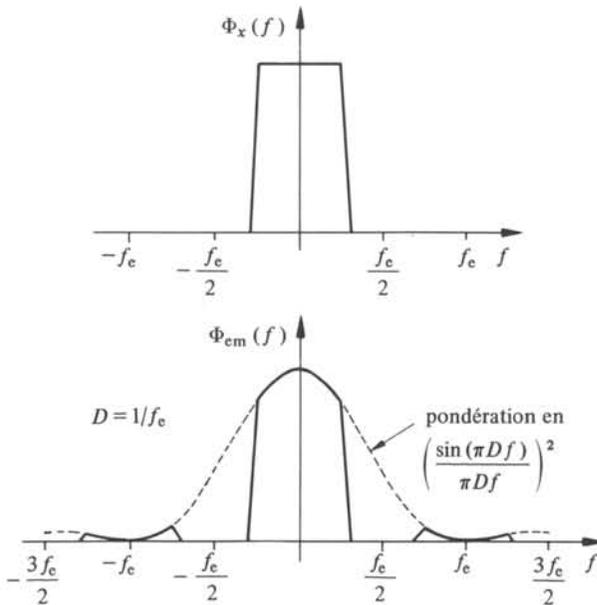


Fig. 5.8

dération en  $\sin(\pi Df)/(\pi Df)$ . En conséquence, on ne retrouve dans  $\Phi_{em}(f)$  qu'une image déformée de  $\Phi_x(f)$ . La déformation est sensible bien avant la fréquence limite de  $f=f_e/2$ , comme le montre la figure 5.8 tracée pour le cas  $D=1/f_e$ .

L'écart relatif de  $X_{em}(f)$  par rapport à  $X(f)$ , est représenté à la figure 5.9.

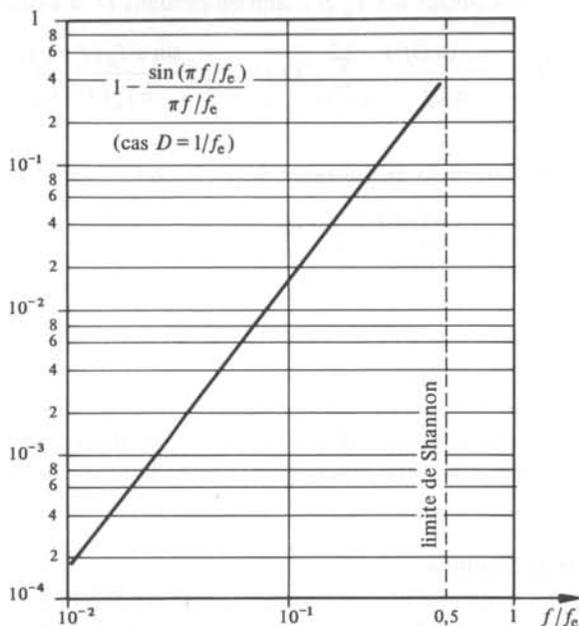


Fig. 5.9

On constate qu'il atteint 10% pour  $f=f_e/4$  et ne devient inférieur à 1‰ que pour  $f < f_e/40$ . Il faut doubler ces erreurs lorsqu'on considère les densités spectrales de puissance. La nécessité de choisir une fréquence d'échantillonnage suffisamment élevée est donc évidente. On note le retard introduit par la fonction de maintien, traduit par le facteur  $\exp(-j\pi fD)$  dans (5.4).

#### 5.2.4 Échantillonnage périodique avec moyennage

En toute rigueur, aucun dispositif concret n'est capable de déterminer la valeur instantanée de l'amplitude d'un signal  $x(t)$ . Seule la valeur moyenne de cette amplitude pendant une durée  $T_\mu$ ,

$$x_\mu(t) = \bar{x}(t, T_\mu) = \frac{1}{T_\mu} \int_{t-T_\mu}^t x(\tau) d\tau \quad (5.6)$$

est une grandeur mesurable. On appelle  $x_\mu(t)$  la *moyenne glissante* sur l'intervalle  $T_\mu$ . On doit donc considérer que l'échantillonnage porte sur  $x_\mu(t)$  et non sur  $x(t)$ . Dans le domaine fréquentiel, la transformation de  $x(t)$  en  $x_\mu(t)$  par (5.6) s'écrit :

$$X_\mu(f) = X(f) G(f) \quad (5.7)$$

avec la fonction de transfert

$$G(f) = \frac{\sin(\pi f T_\mu)}{\pi f T_\mu} \exp(-j\pi f T_\mu) \quad (5.8)$$

La transformée de Fourier  $X_{e\mu}(f)$  du signal résultant de l'échantillonnage de  $x(t)$ , à la fréquence  $f_e$ , avec moyennage sur  $T_\mu$  et maintien pendant  $D$  se déduit de (5.8) et (5.4):

$$X_{e\mu}(f) = D f_e \frac{\sin(\pi D f)}{\pi D f} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - n f_e) \frac{\sin \pi T_\mu (f - n f_e)}{\pi T_\mu (f - n f_e)} \exp[-j\pi f (D + T_\mu)] \quad (5.9)$$

De même, sa densité spectrale de puissance  $\Phi_{e\mu}(f)$  vaut:

$$\Phi_{e\mu}(f) = D^2 f_e^2 \left( \frac{\sin(\pi D f)}{\pi D f} \right)^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f - n f_e) \left\{ \frac{\sin \pi T_\mu (f - n f_e)}{\pi T_\mu (f - n f_e)} \right\}^2 \quad (5.10)$$

On vérifie immédiatement que (5.9) et (5.10) tendent vers (5.4) et (5.5) pour  $T_\mu \rightarrow 0$ . La durée de moyennage  $T_\mu$  induit une déformation du spectre de  $x(t)$  correspondant à un filtrage passe bas avant l'échantillonnage. Cette déformation s'ajoute à celle résultant du maintien pendant  $D$ , représentée à la figure 5.8. On cherche par conséquent à diminuer  $T_\mu$  autant que possible. C'est une fonction de l'échantillonneur-bloqueur (sect. 5.3).

### 5.2.5 Théorème de Shannon

Les paragraphes précédents ont mis en évidence les déformations spectrales liées au mode d'échantillonnage. De manière plus fondamentale, la question se pose de savoir sous quelles conditions le signal original peut être *reconstitué* à partir de ses échantillons, *l'échantillonneur étant supposé idéal*. La réponse est donnée par le théorème de Shannon:

Le signal analogique  $x(t)$  est entièrement décrit par la suite infinie de ses échantillons, obtenus au moyen d'un échantillonneur idéal opérant à la fréquence  $f_e$  à condition que le spectre de  $x(t)$  ne contienne aucune composante de fréquence supérieure à  $f_e/2$ .

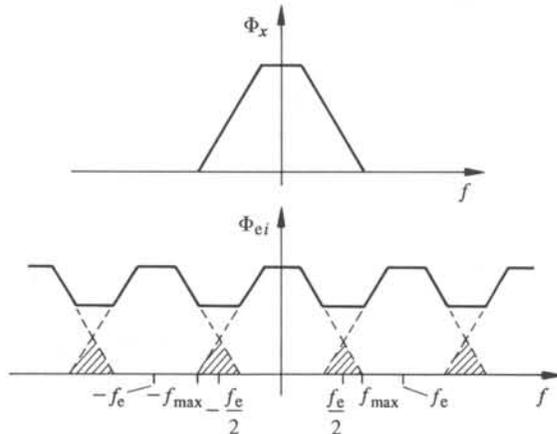


Fig. 5.10 Recouvrement spectral.

En d'autres termes, si  $f_{\max}$  est la fréquence la plus élevée apparaissant dans le spectre de  $x(t)$ , la condition de Shannon s'exprime par

$$f_e = 1/T_e \geq 2f_{\max} \quad (5.11)$$

Le non-respect de cette condition entraîne un recouvrement des composantes, qu'il devient impossible de séparer après l'échantillonneur (fig. 5.10).

La condition  $f_e \geq 2f_{\max}$  est nécessaire mais non suffisante pour assurer la reconstitution de  $x(t)$  sans déformation. Il faut encore disposer d'un filtre passe-bas idéal présentant une fréquence de coupure égale à  $f_e/2$  de manière à extraire la portion de  $\Phi_e(f)$  représentant  $\Phi_x(f)$ .

### 5.2.6 Filtre anti-repliement

Aucun signal physique ne possède un spectre limité en fréquence, ne serait-ce que parce qu'il présente toujours une composante de bruit blanc. La condition de Shannon ne peut donc jamais être respectée strictement. On s'en approche autant que possible en limitant l'amplitude des composantes indésirables de fréquence supérieure à  $f_e/2$  en plaçant, avant l'échantillonneur, un filtre passe bas appelé dans ce cas *filtre anti-repliement* (anti-aliasing). La fonction de transfert  $G(f)$  de ce filtre (fig. 5.11) détermine la fréquence d'échantillonnage minimum à utiliser pour une erreur admise donnée, due au recouvrement spectral.

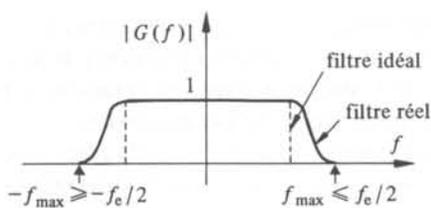


Fig. 5.11

On peut mesurer cette erreur par le rapport  $\xi = 10 \log(P_r/P_x)$  où  $P_r$  représente la puissance du signal filtré correspondant à l'erreur de recouvrement et  $P_x$  la puissance totale de ce signal. Elle est représentée à la figure 5.12 pour le cas d'un filtre de Butterworth d'ordre  $n$ , possédant une fréquence de coupure  $f_c$ , agissant sur un signal dont le spectre  $X(f)$  est uniforme.

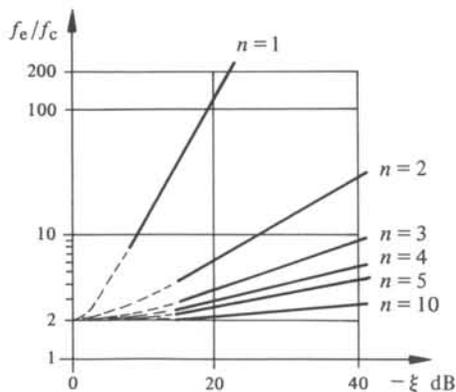


Fig. 5.12 D'après (§ VI 9.3.6).

Pour maintenir l'erreur inférieure à 1% (-20 dB) avec un simple filtre RC ( $n = 1$ ), la fréquence d'échantillonnage doit être environ 130 fois plus élevée que la fréquence de coupure  $f_c$ . On est loin de la limite de Shannon! Avec un filtre du troisième ordre, le rapport  $f_e/f_c$  tombe à trois environ. En pratique, on réalise un optimum en dosant, pour une erreur fixée, l'élévation de la fréquence d'échantillonnage et l'accroissement de la complexité du filtre liée à l'augmentation de  $n$ .

### 5.2.7 Remarque

C'est une erreur d'interprétation du théorème de Shannon que de penser que l'échantillonnage supprime toutes les fréquences du signal supérieures à  $f_e/2$ . Si, effectivement, après filtrage passe-bas du signal échantillonné, aucune composante n'apparaît à de telles fréquences, ces composantes n'ont pas disparu pour autant mais se retrouvent, par suite du recouvrement spectral, dans la bande utile du signal où il est devenu impossible de les dissocier de celles du signal original.

## 5.3 ÉCHANTILLONNEUR-BLOQUEUR

### 5.3.1 Introduction

L'échantillonneur-bloqueur (sample-and-hold) a deux buts : premièrement préciser l'instant d'échantillonnage, en réduisant notamment le temps de moyennage  $T_\mu$  (§ 5.2.4). Deuxièmement, maintenir constante la tension à l'entrée du convertisseur A/D pendant toute la durée nécessaire à la conversion.

Il fonctionne donc en deux temps. Durant la *phase d'acquisition*, la tension aux bornes d'un condensateur de mémorisation suit fidèlement la tension d'entrée. Au moment de l'échantillonnage, l'ouverture d'un interrupteur isole ce condensateur de l'entrée. Il conserve donc la tension qui était présente à l'entrée à l'instant d'ouverture. C'est la *phase de mémorisation*.

### 5.3.2 Circuiterie

La plupart des échantillonneurs-bloqueurs sont réalisés selon l'un ou l'autre des schémas ci-dessous. Dans le circuit de la figure 5.13, le condensateur de mémorisation  $C$  se trouve à l'entrée d'un amplificateur non-inverseur de gain unité. Il est chargé directement par le signal à mesurer, à travers l'interrupteur  $S$ . C'est donc l'impédance de la source qui détermine la rapidité avec laquelle un condensateur de valeur donnée est chargé.

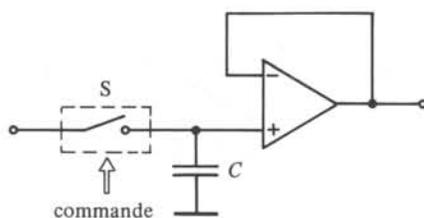


Fig. 5.13

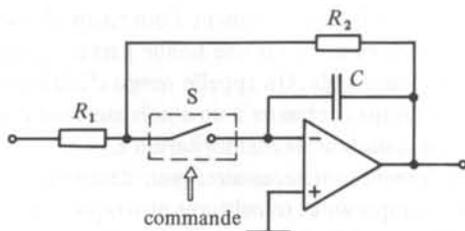


Fig. 5.14

A la figure 5.14, le condensateur de mémorisation est placé dans la contre-réaction d'un amplificateur inverseur. La rapidité de charge dépend donc du courant de sortie maximum de cet amplificateur et de la constante de temps  $R_2 C$ . Par rapport au précédent, ce circuit présente l'avantage d'une impédance d'entrée purement résistive, donc indépendante de la fréquence. Cette impédance varie en fonction de la position de l'interrupteur.

Dans les deux cas, le courant de fuite total déchargeant le condensateur est la somme du courant de polarisation de l'amplificateur, du courant de fuite à travers l'interrupteur et du courant à travers le diélectrique du condensateur lui-même. En ce qui concerne la conservation de la tension mémorisée, les deux circuits sont donc équivalents, s'ils sont réalisés au moyen des mêmes composants.

Les interrupteurs sont généralement des transistors à effet de champ (FET). Pour une exécution où le condensateur de mémorisation est un élément discret, on choisira un condensateur au polystyrène, au polycarbonate ou au polypropylène, en raison des faibles pertes de ces diélectriques. Dans une exécution intégrée, ce condensateur est généralement de type MOS. Enfin, l'amplificateur opérationnel comportera un étage d'entrée à FET afin de réduire autant que possible le courant de polarisation.

### 5.3.3 Spécification d'un échantillonneur-bloqueur

En phase d'acquisition, le condensateur de mémorisation  $C$  et les éléments qui l'entourent peuvent être considérés comme un filtre passe-bas à un pôle, caractérisé par sa bande passante ou son temps d'établissement, appelé ici *temps d'acquisition* (acquisition time). Ce temps est l'un des paramètres les plus importants d'un échantillonneur-bloqueur. Il définit la durée minimum de fermeture de l'interrupteur, compatible avec une erreur de charge du condensateur donnée. La bande passante traduit l'aptitude du circuit à échantillonner des signaux à haute fréquence.

Trois paramètres décrivent le passage de la phase d'acquisition à la phase de mémorisation. Il est important de connaître avec une grande exactitude l'instant d'ouverture de l'interrupteur, qui correspond à l'instant d'échantillonnage. Les circuits constituant l'interrupteur introduisent un retard entre l'application de la commande et l'ouverture effective, appelée *retard d'ouverture*  $t_0$  (aperture delay). Un retard d'ouverture constant est sans influence sur les possibilités d'analyse du signal par échantillonnage, puisqu'il correspond à un simple déphasage.

En réalité,  $t_0$  n'est pas constant, il varie faiblement, de manière aléatoire d'une part, de manière déterministe en fonction de la température et de la tension d'entrée d'autre part. Cette variation est appelée *incertitude d'ouverture* ou *gigue d'ouverture*  $t_1$

(aperture uncertainty, aperture jitter). Finalement, l'ouverture de l'interrupteur s'accompagne de phénomènes transitoires dus pour une bonne part aux couplages capacitifs parasites avec la tension de commande. On appelle *temps d'établissement au blocage*  $t_b$  (sample to hold settling) le temps nécessaire à un amortissement donné de ces composantes transitoires sur le condensateur de mémorisation  $C$ .

Trois paramètres également sont nécessaires pour décrire la phase de mémorisation. Intégrées à la fin de  $t_b$  les composantes transitoires provoquent sur  $C$  une tension parasite appelée *décalage au blocage*  $\Delta V_b$  (sample to hold offset) ou *décalage de charge* (charge offset), exprimée en mV ou  $\mu V$ . L'interrupteur ouvert, la charge du condensateur varie lentement sous les effets conjugués du courant de polarisation de l'amplificateur et des résistances de fuite du diélectrique et de l'interrupteur. Il en résulte une variation de tension à la sortie du convertisseur appelée *pente de décharge*  $dV/dt \geq 0$  (hold mode droop rate). Enfin, même en phase de mémorisation, la sortie du circuit n'est pas totalement isolée de l'entrée. On appelle *taux de réjection* (hold mode feed-through) le rapport de la variation du signal de sortie à la variation du signal d'entrée, lorsque l'interrupteur est ouvert. Le taux de réjection est exprimé en dB et correspond à un signal de fréquence donnée, de forme sinusoïdale ou carrée.

### 5.3.4 Diagramme des temps

La figure 5.15 illustre le fonctionnement de l'échantillonneur-bloqueur. On y retrouve une partie des grandeurs définies ci-dessus.

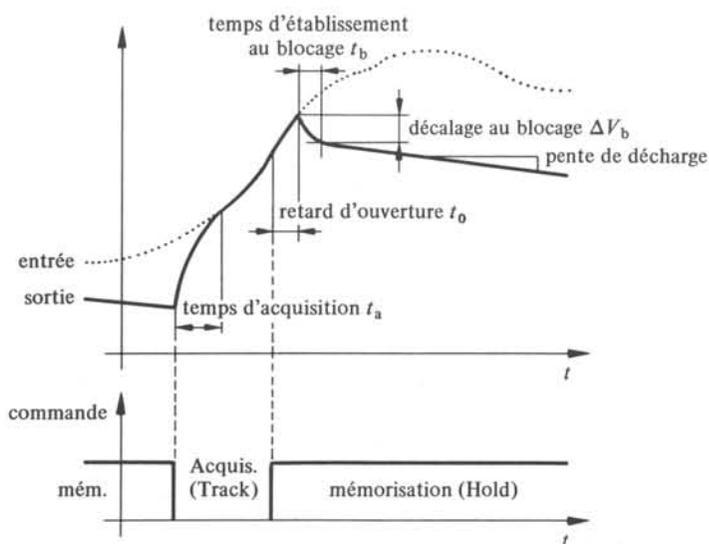


Fig. 5.15

### 5.3.5 Erreurs dues à un échantillonneur-bloqueur

Les erreurs dues à un échantillonneur-bloqueur se déduisent directement de ses spécifications, à l'exception de l'erreur relevant de l'incertitude d'ouverture. Cette erreur

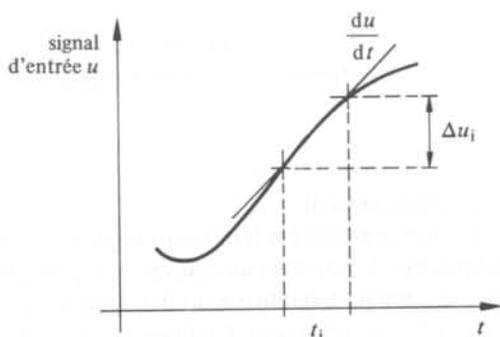


Fig. 5.16

$\Delta u_i$  dépend de la pente du signal d'entrée  $du/dt$  au moment de l'échantillonnage (fig. 5.16).

On a :

$$\Delta u_i = t_i \frac{du}{dt} \quad (5.12)$$

Il faut donc connaître la densité de probabilité de la pente du signal à mesurer pour connaître parfaitement  $\Delta u_i$ . On se contente généralement d'estimer cette erreur en admettant qu'elle ne dépasse pas l'erreur maximum pour un signal sinusoïdal de fréquence  $f$  égale à la fréquence maximum présente dans le signal et d'amplitude  $A$  correspondant à la valeur maximum admissible. Alors

$$\Delta u_i = t_i (2\pi f A) \quad (5.13)$$

soit encore, en valeur relative :

$$\Delta_r u_i = \frac{\Delta u_i}{2A} = \pi f t_i \quad (5.14)$$

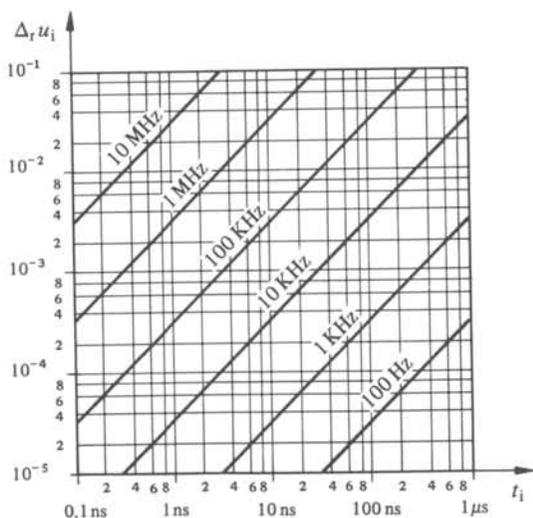


Fig. 5.17

La relation 5.14 est représentée à la figure 5.17. On constate que  $t_i$  est un paramètre assez critique; une incertitude d'ouverture de 32 ns produit déjà une erreur de 1‰ à 10 kHz.

### 5.3.6 Fonctionnement avec recouvrement

Lorsque le signal à mesurer présente des transitions rapides, telles qu'on les trouve dans un système à multiplexeur où les mesures successives sont prises sur des canaux différents, il faut tenir compte des temps d'établissement des amplificateurs et des filtres placés entre le multiplexeur et l'échantillonneur. La durée minimale de la phase d'acquisition s'en trouve augmentée.

On peut alors profiter de l'isolation entre l'entrée et la sortie de l'échantillonneur pendant la période de mémorisation. Si on synchronise les transitions du signal à mesurer avec le début de cette période, l'établissement des éléments de la chaîne de mesure peut se faire en même temps que la conversion de l'échantillon précédent. La durée de conversion est généralement suffisamment longue pour que le signal à l'entrée de l'échantillonneur soit correctement établi. Une augmentation de la durée d'acquisition n'est plus nécessaire dans ce cas. On appelle *fonctionnement avec recouvrement* (overlapping mode) ce mode d'utilisation (fig. 5.18).

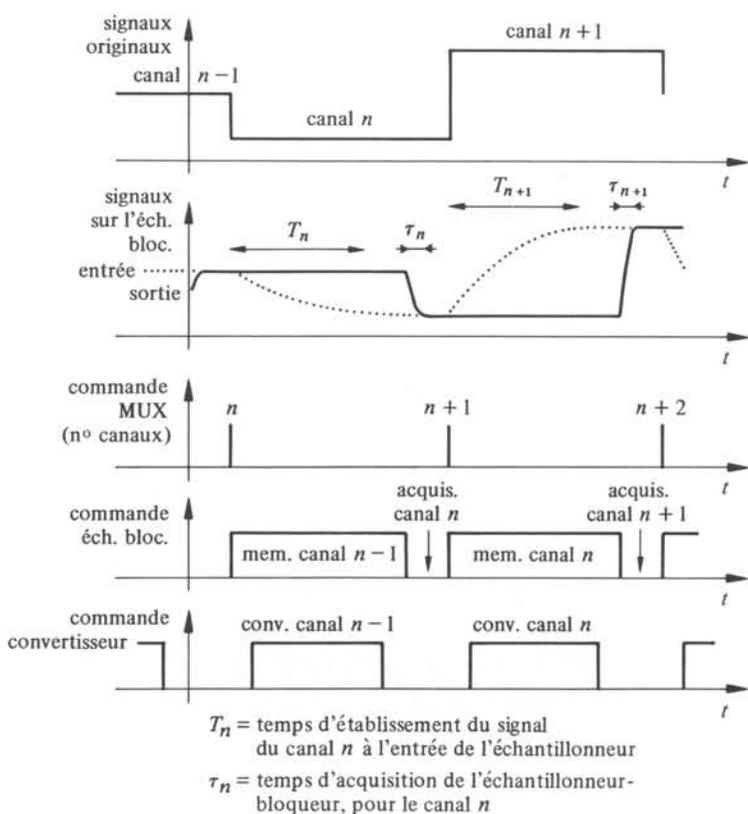


Fig. 5.18

## 5.4 CONVERTISSEUR DIGITAL-ANALOGIQUE

## 5.4.1 Introduction

Le convertisseur digital-analogique D/A (digital to analog converter DAC) est une interface à travers laquelle un ordinateur transmet ses informations aux dispositifs fonctionnant avec des grandeurs analogiques. C'est aussi un composant présent dans de nombreux convertisseurs analogiques-numériques. Il existe plusieurs principes de conversion D/A, correspondant chacun à un comportement et des spécifications caractéristiques du convertisseur [29-31]. Trois modes de conversion courants sont décrits ci-dessous.

## 5.4.2 Conversion parallèle par somme de courants pondérés

Ce mode de conversion exploite le fait que chaque bit d'un code numérique possède un poids invariant. Il consiste à créer des courants de valeur proportionnelle au poids de chaque bit et à sommer les courants correspondant aux bits enclenchés du code numérique à convertir. Il convient aux codes binaires et décimaux codés binaire (BCD).

On peut penser créer ces courants en appliquant une tension constante aux bornes de résistances proportionnelles aux inverses des poids à réaliser. Cette solution conduit rapidement à des problèmes de stabilité des caractéristiques provenant de l'étendue des valeurs des résistances nécessaires. Pour un code à 12 bits, les résistances passent, en valeur relative, de 1 à 4096. C'est pourquoi on utilise habituellement des diviseurs récurifs appelés *réseaux de résistances en échelle* (resistor ladder). Un tel réseau (fig. 5.19) ne nécessite que trois valeurs de résistances :  $R_0$ , appelée *résistance caractéristique du réseau*,  $R_1$  et  $R_2$ . Son intérêt réside dans le fait que le rapport du courant  $i_n$  soutiré à la cellule  $n$ , au courant soutiré à la cellule suivante, est une constante  $k$  :

$$i_n / i_{n+1} = k > 1 \quad (5.15)$$

à condition que

$$R_1 = \frac{k}{k-1} R_0 \quad \Omega \quad (5.16)$$

et

$$R_2 = (k-1) R_0 \quad \Omega \quad (5.17)$$

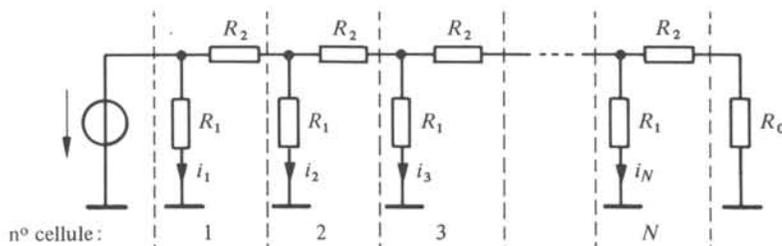


Fig. 5.19

Pour un code binaire :  $k = 2$  d'où  $R_1 = 2R_0$  et  $R_2 = R_0$ . Pour un code BCD avec les poids (1, 2, 4, 8) on utilisera 4 cellules pour code binaire par chiffre décimal. Pour un code décimal,  $k = 10$  d'où  $R_1 = (10/9) R_0$  et  $R_2 = 9R_0$ .

On constate que le réseau en échelle permet de créer des courants pondérés dans une plage étendue à l'aide de résistances de valeurs relativement proches. Il en résulte une meilleure stabilité du réseau (vieillesse, coefficients de température), ainsi qu'une plus grande précision sur le facteur  $k$ . C'est l'une des raisons de la prépondérance des convertisseurs à code binaire.

Les courants pondérés sont orientés, à l'aide de commutateurs électroniques commandés par les bits correspondants, soit sur le point de sommation d'un amplificateur opérationnel lorsque le bit vaut 1, soit vers la terre lorsque le bit vaut 0. La borne « moins » de l'amplificateur étant une terre virtuelle, les conditions de fonctionnement du réseau tel que représenté à la figure 5.19 sont respectées quelles que soient les positions des commutateurs.

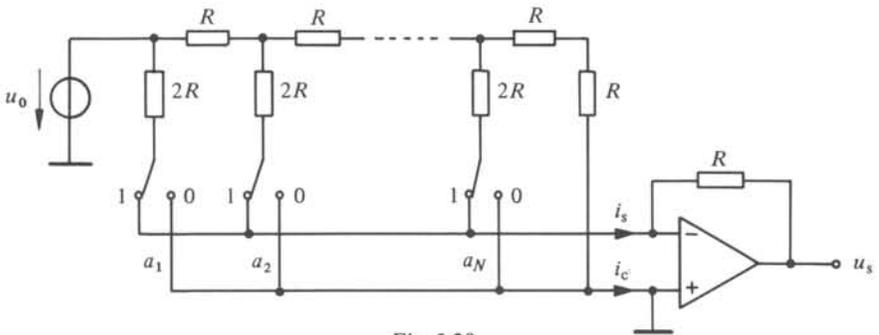


Fig. 5.20

La figure 5.20 correspond à un convertisseur binaire à  $N$  bits. Soit  $A$  le nombre binaire à convertir :

$$A = a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + \dots + a_N 2^{-N} \quad (5.18)$$

où  $a_i$  est la variable booléenne traduisant la présence ( $a_i = 1$ ) ou l'absence ( $a_i = 0$ ) du bit considéré. Le bit de poids le plus lourd (Most Significant Bit : MSB) correspond à  $i = 1$ , respectivement le bit de poids le plus léger correspond à  $i = N$  (Least Significant Bit : LSB). On vérifie facilement les relations suivantes :

$$0 \leq A \leq 1 - 2^{-N} \quad (5.19)$$

$$i_s = A u_0 / R \quad (5.20)$$

$$i_c = (1 - A) u_0 / R \quad (5.21)$$

$$u_s = -A u_0 \quad (5.22)$$

### 5.4.3 Caractéristiques du convertisseur parallèle par somme des courants pondérés

Ce type de convertisseur se distingue par sa très haute rapidité et par la possibilité qu'il offre d'effectuer une multiplication de la valeur du code d'entrée par un facteur donné sous forme analogique et représenté par la valeur de  $u_0$ .

Ce procédé de conversion implique un caractère cyclique de l'erreur : en effet, l'erreur sur le courant pondéré correspondant à un bit se répercute de la même manière sur tous les codes dans lesquels ce bit est enclenché.

Les convertisseurs à courants pondérés présentent toujours des *parasites de commutation* (glitches) à chaque changement de code. Il est en effet impossible d'assurer un fonctionnement instantané et simultané de tous les inverseurs. Ces parasites sont d'autant plus importants qu'un grand nombre de bits changent d'un code à l'autre, le cas le plus critique étant le passage de 011... 1 à 100... 0. La bande passante limitée des circuits réduit ces parasites dont la présence n'est pas gênante dans un grand nombre d'applications. Si nécessaire, on supprime ces parasites au moyen d'un échantillonneur-bloqueur placé à la sortie du convertisseur D/A. En phase de mémorisation pendant la durée d'apparition des parasites, il maintient la valeur correspondant au code précédent, après quoi il est mis en phase d'acquisition assurant ainsi une transition régulière vers la nouvelle valeur de sortie.

#### 5.4.4 Convertisseurs D/A parallèles indirects

Lorsque la grande rapidité des convertisseurs à courants pondérés est superflue, on peut utiliser des *convertisseurs indirects*. Ceux-ci transforment en première étape le code digital en un signal analogique simple à obtenir. Celui-ci est constitué, par exemple, d'une suite d'impulsions de largeur variable ou d'une suite d'impulsions de largeur fixe mais de fréquence variable. Le signal de sortie est ensuite produit par un moyennage approprié de ce signal analogique intermédiaire. La figure 5.21 montre un exemple d'un tel convertisseur à  $N$  bits.

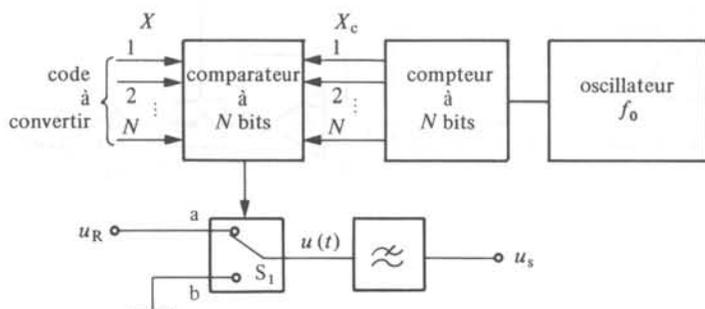


Fig. 5.21

Un oscillateur de fréquence fixe  $f_0$  entraîne un compteur à  $N$  bits qui se remet automatiquement à zéro par dépassement de capacité, avec une période  $T = 2^N/f_0$ . Le comparateur reçoit en permanence sous forme codée l'état du compteur (valeur  $X_c$ ) et le code à convertir (valeur  $X$ ), maintenu constant pendant  $T$ . L'interrupteur  $S_1$  branche le filtre passe-bas à la tension de référence  $u_R$  tant que  $X_c < X$ , et à la terre dès que  $X_c \geq X$  (fig. 5.22). Les valeurs de  $X$  vont de 0 à  $2^N - 1$ .

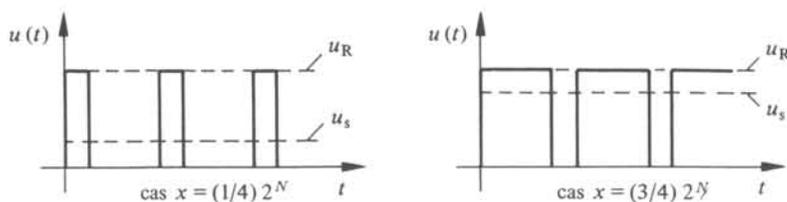


Fig. 5.22

Après le temps d'établissement du filtre, la tension de sortie vaut :

$$u_s = X u_R / 2^N \quad (5.23)$$

On obtient un convertisseur bipolaire en raccordant la borne b de  $S_1$  à une tension  $-u_R$  au lieu de la terre.

La précision du convertisseur ne dépend que de la qualité de la tension de référence, de la stabilité à court-terme de l'oscillateur et des caractéristiques de commutation de  $S_1$ . C'est pourquoi on trouve principalement ce type de convertisseur dans les applications demandant une grande précision : calibrateurs de tension, circuits d'étalonnage, etc. Le temps de réponse est forcément lent. Il correspond à la durée d'extraction de la valeur moyenne du signal analogique intermédiaire. Normalement, le temps d'établissement du filtre passe-bas utilisé à cet effet doit être tel que l'ondulation résiduelle de  $u_s$  soit inférieure à la valeur d'un LSB.

#### 5.4.5 Convertisseur D/A série à transfert de charge

Le principe d'un tel convertisseur, utilisable avec un code binaire uniquement, est représenté à la figure 5.23.

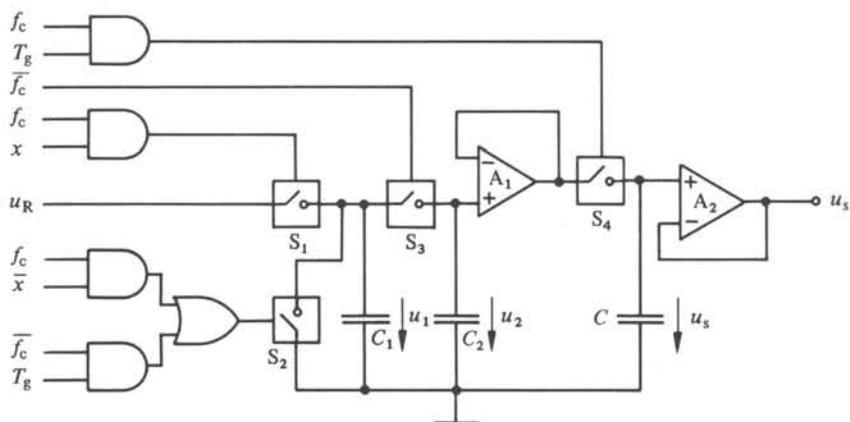


Fig. 5.23

A chaque première demi-période d'horloge un condensateur  $C_1$  est chargé, à travers  $S_1$ , à une tension de référence  $u_R$  si le bit à convertir vaut 1, respectivement  $C_1$  est déchargé par mise à terre à travers  $S_2$  si le bit vaut zéro. Durant la deuxième demi-période d'horloge,  $S_1$ ,  $S_2$  sont ouverts et  $S_3$  se ferme, provoquant un transfert de charges entre  $C_1$  et  $C_2$  aboutissant à une égalisation des tensions et des charges sur ces deux condensateurs dont les capacités sont les mêmes. Un signal de synchronisation  $T_g$  désigne le début du code qui est lu dans le sens du LSB vers le MSB. Pendant la première demi-période d'horloge où  $T_g$  est présent, le résultat de la conversion, représenté par la tension sur  $C_2$ , est transféré via  $S_4$  sur  $C$  qui sert de mémoire pendant la conversion du code suivant. Une demi-période plus tard, le convertisseur est remis à zéro par décharge de  $C_2$  à travers  $S_2$  et  $S_3$ , il est prêt à recevoir le code suivant.

A titre d'illustration, la figure 5.24 montre le diagramme des temps pour un code à 8 bits:  $x = 00101011 (= 43)$ . Les tensions  $u'_1$  et  $u'_2$  sur  $C_1$  et  $C_2$  pendant la première demi-période d'horloge sont indiquées au tableau 5.25, pour une tension de référence  $u_R = 1$  volt. Pendant chaque deuxième demi-période, hormis la 9ème, la tension sur  $C_2$  s'établit à

$$u_2 = (u'_1 + u'_2)/2 \quad (5.24)$$

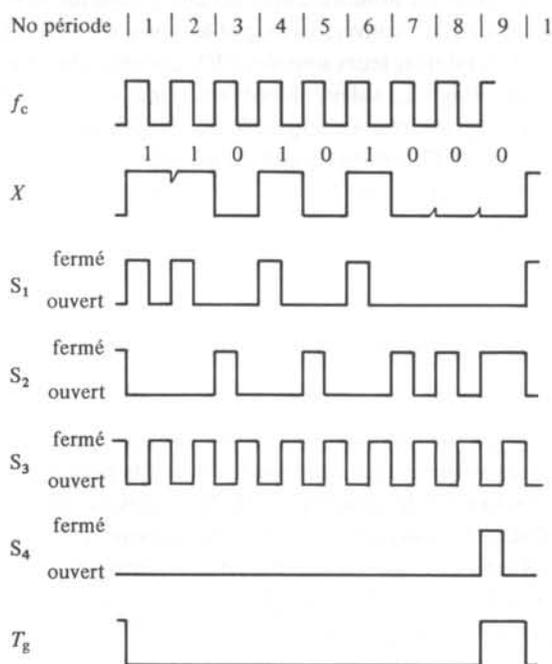


Fig. 5.24

Tableau 5.25

$x$	$u'_1$	$u'_2$	$u_2$	Période d'horloge
0 0 1 0 1 0 1 1				
				1
				2
				3
				4
				5
				6
				7
				8
				9

La tension finale  $u_2 = (43/256)u_R$  est directement proportionnelle au code à convertir. Une caractéristique intéressante de ce type de convertisseur est qu'il fonctionne, sans aucune modification du circuit, pour un code à n'importe quel nombre de bits. Ce nombre est déterminé par la durée pendant laquelle  $T_g = 0$ .

Les performances du convertisseur dépendent essentiellement de la qualité des interrupteurs  $S_1$  à  $S_4$  et des condensateurs  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C$ . Dans l'état ouvert, les interrupteurs doivent présenter une conductance et une capacité résiduelle très faibles. La résistance résiduelle à l'état fermé est moins critique car elle détermine seulement la vitesse maximale de fonctionnement du convertisseur, par le temps d'établissement des tensions sur les condensateurs. Les interrupteurs sont des FET, capables de commuter des tensions  $u_R$  de 10 V ou davantage. La valeur absolue des condensateurs n'est pas critique, mais l'écart entre  $C_1$  et  $C_2$  doit rester négligeable sur toute la gamme de températures envisagée. La valeur de  $C_1$  et  $C_2$  est dictée par la capacité résiduelle des interrupteurs, les capacités parasites en parallèle avec  $C_1$  et  $C_2$  et la vitesse désirée du convertisseur.

## 5.5 CONVERTISSEUR ANALOGIQUE-DIGITAL

### 5.5.1 Introduction

Avant d'être traitées sur ordinateur, les grandeurs analogiques, en principe des tensions, doivent être transformées en nombres. C'est le rôle principal du convertisseur analogique-digital A/D. Comme le convertisseur D/A, le convertisseur A/D fonctionne soit par une méthode directe, dans laquelle le code numérique se déduit immédiatement de la tension à convertir, soit par une méthode indirecte consistant à transformer d'abord la tension en une fréquence ou une durée proportionnelle, puis à convertir cette nouvelle grandeur en code numérique par un simple comptage [27-29].

De manière générale, les méthodes directes se caractérisent par une vitesse élevée, alors que les méthodes indirectes, beaucoup plus lentes sont, à prix égal, nettement plus précises.

### 5.5.2 Convertisseur A/D à approximations successives

C'est le type de convertisseur par méthode directe le plus répandu. Son principe est illustré à la figure 5.26.

Un système logique génère un code numérique appliqué à l'entrée d'un convertisseur D/A à courants pondérés, délivrant une tension  $u_c$  proportionnelle à ce code. Cette tension est comparée à la tension  $u_x$  à convertir. Le système logique modifie le code en fonction du résultat en procédant du MSB au LSB. La conversion apparaît donc comme une suite d'essais (ou approximations) successifs, le code se rapprochant à chaque étape de la valeur exacte. La figure 5.27 décrit le processus en détail.

Le premier code correspond au seul MSB. La tension  $u_c$  délivrée par le convertisseur D/A vaut donc  $u_R/2$ . Le résultat de la comparaison ( $u_x > u_c$ ) indique qu'il faut conserver le MSB. A l'étape suivante, on ajoute le bit de poids immédiatement inférieur ce qui entraîne  $u_c = (3/4)u_R$ . La comparaison ( $u_x < u_c$ ) indique que ce bit vaut zéro, il faut donc annuler ce bit pour la suite, etc. Le processus continue jusqu'à ce que tous les

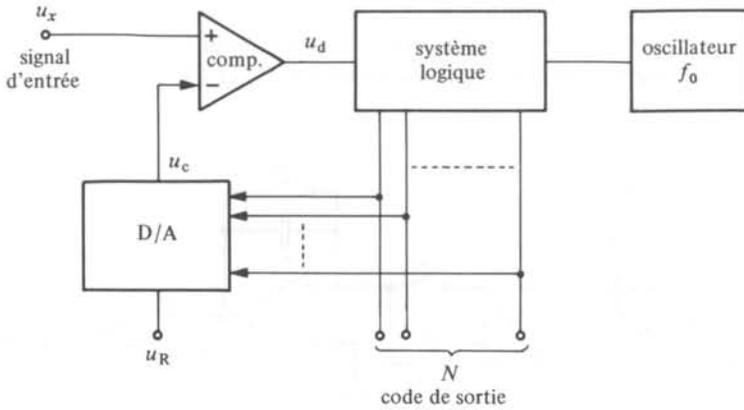


Fig. 5.26 Convertisseur A/D à approximations successives.

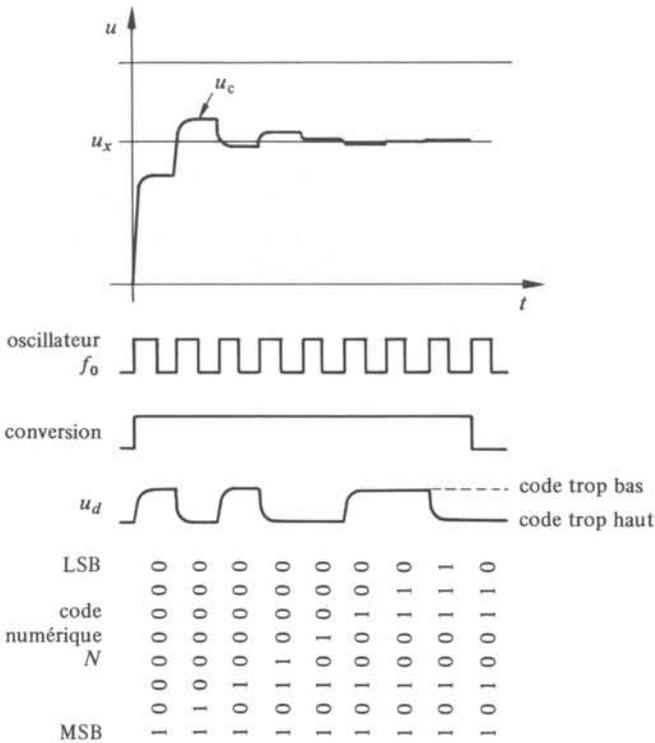


Fig. 5.27

bits du code soient déterminés à raison d'un bit par période  $T_0 = 1/f_0$ . La durée de conversion vaut donc  $NT_0$  où  $N$  est le nombre de bits du code.

Les applications de ces convertisseurs concernent principalement l'acquisition de données avec multiplexeur (plusieurs canaux sur un même convertisseur en maintenant une fréquence d'échantillonnage suffisante) et l'analyse de phénomènes rapides non répétitifs.

### 5.5.3 Convertisseur A/D à transfert de charge

Ce type de convertisseur produit des codes binaires sur le mode série par transfert de charge entre deux condensateurs de même valeur :  $C_1$  et  $C_2$ . Le schéma de principe est donné à la figure 5.28.

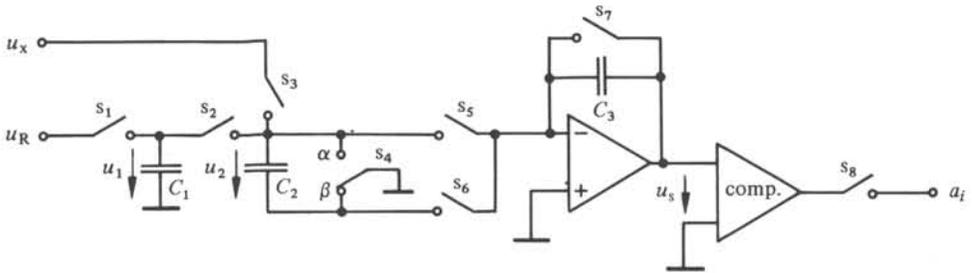


Fig. 5.28 Convertisseur A/D à transfert de charge.

La succession des opérations correspondant à la conversion d'une tension  $u_x = 7,9 \text{ V}$  prise comme exemple, est présentée à la figure 5.29.

Au cours d'une phase d'initialisation,  $C_1$  est chargé à la tension de référence  $u_R$ ,  $C_2$  à la tension à mesurer  $u_x$ .  $C_3$  est déchargé puis reçoit intégralement la charge de  $C_2$ . La tension aux bornes de ce dernier condensateur est donc nulle au début de la conversion. Les condensateurs  $C_2$  et  $C_3$  ayant même capacité, la tension  $u_x$  se retrouve exactement sur  $C_3$ . L'état du comparateur à cet instant correspond au signe de  $u_x$ , codé par le premier bit.

La conversion s'effectue ensuite, en commençant par le MSB.  $C_2$  est chargé à  $u_R/2 = 5 \text{ V}$ , car les valeurs des capacités  $C_1$  et  $C_2$  sont les mêmes, puis cette charge est soustraite de celle de  $C_3$  dont la tension passe de  $7,9 \text{ V}$  à  $2,9 \text{ V}$ . La tension sur  $C_3$  restant positive, cela signifie que  $u_x > u_R/2$  et par conséquent que le premier bit est un 1. L'opération est répétée pour chaque bit. A chaque fois, la charge que reçoit  $C_2$  (de  $C_1$ ) est divisée par 2, puis soustraite ou additionnée à celle de  $C_3$  selon que  $u_s$ , avant le transfert, est positive ou négative, respectivement. La valeur absolue de  $u_s$  tend ainsi vers zéro, à la valeur du LSB près, lorsque la conversion est achevée. Le convertisseur fonctionne pour un nombre quelconque de bits, ce nombre étant déterminé par la durée de  $S_8$ .

Ce type de convertisseur se prête bien à l'intégration (technologie CMOS). Il peut être utilisé en liaison directe avec un capteur par exemple, ce qui contribue à résoudre les problèmes de bruit et de perturbations sur une ligne de transmission.

### 5.5.4 Convertisseur A/D parallèle

Lorsque la rapidité des convertisseurs à approximations successives se révèle insuffisante, on utilise les *convertisseurs parallèles*. Leur principe est de comparer simultanément la tension à convertir  $u_x$  (inférieure à la tension de référence  $u_R$ ) à chacun des niveaux de tension correspondant à la transition entre deux codes numériques successifs (fig. 5.30).

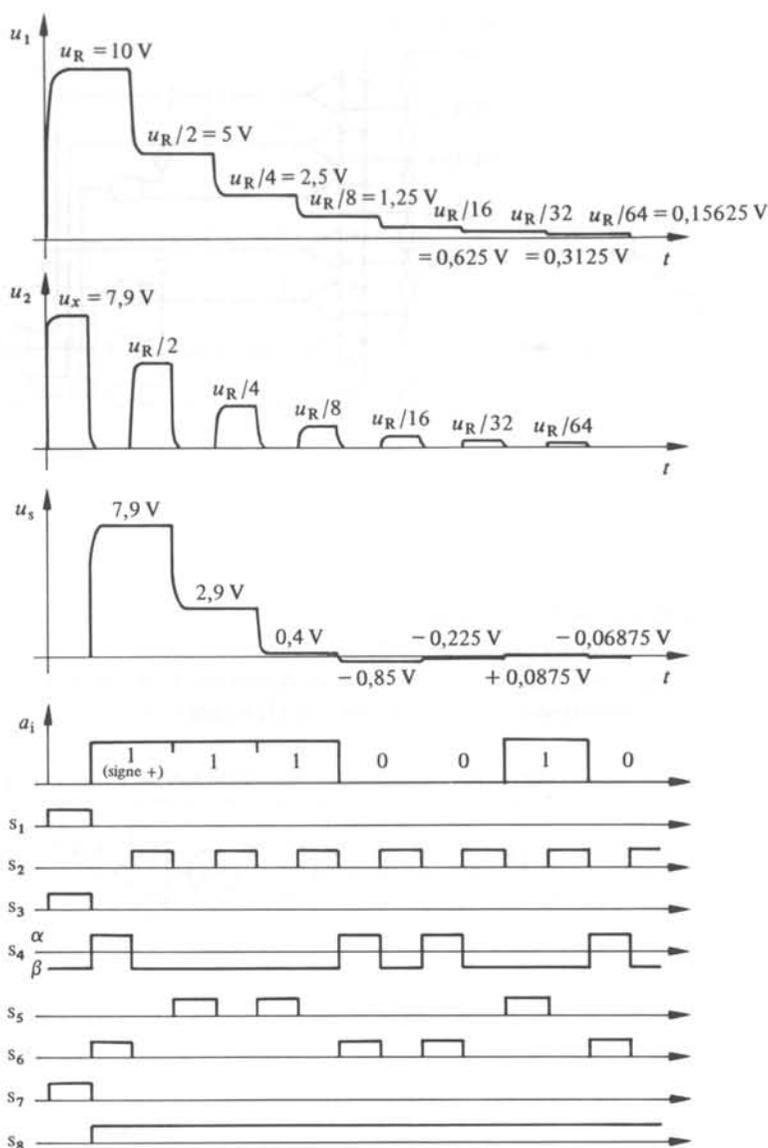


Fig. 5.29

La rapidité de conversion n'est limitée que par les temps de propagation dans les comparateurs et dans le système logique. La complexité du circuit augmente très rapidement avec la résolution désirée. Il faut en effet un comparateur par niveau de transition soit, pour un code binaire à  $N$  bits,  $2^N - 1$  comparateurs. Actuellement, la majorité de ces convertisseurs sont à 8 bits (255 comparateurs), plus rarement à 10 bits (1023 comparateurs). Ils sont employés essentiellement en transmission numérique et en traitement de l'information (signaux vidéo) avec des fréquences d'échantillonnage se rapprochant de 100 MHz (6 bits), respectivement 80 MHz (8 bits).

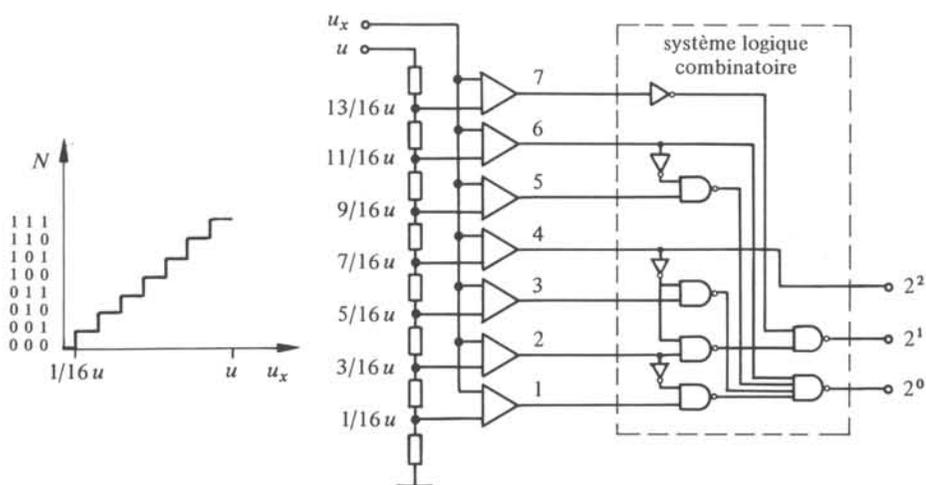


Fig. 5.30 Convertisseur A/D parallèle.

### 5.5.5 Convertisseur A/D en cascade

Le convertisseur en cascade présente un compromis rapidité-résolution intéressant, obtenu par la combinaison des procédés de conversion en parallèle et en série. L'exemple d'un convertisseur à 12 bits est donné à la figure 5.31.

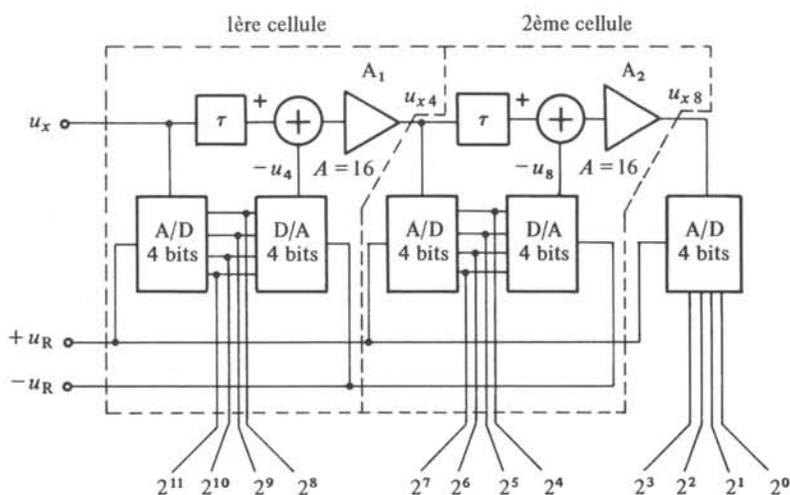


Fig. 5.31 Convertisseur A/D en cascade.

La tension à mesurer  $u_x$  est appliquée à un premier convertisseur A/D parallèle, fournissant les quatre MSB. Ces quatre bits sont repris par un convertisseur D/A, délivrant une tension  $-u_4$  correspondant à la valeur des quatre MSB calculée pour une dynamique de  $-u_R$ . La différence  $u_x - u_4$  représente la valeur des bits encore indéterminés. Elle est amplifiée d'un facteur 16 (valeur relative maximale de quatre bits) avant

d'être appliquée à une deuxième cellule, identique à la première, qui détermine les quatre bits suivants. Finalement, les quatre bits de plus faible poids sont déterminés par un dernier convertisseur A/D, opérant seul puisque le résidu après la conversion (valeur de bits supplémentaires) n'a pas à être pris en considération. Les éléments de retard  $\tau$  évitent l'apparition de signaux transitoires importants à la sortie des amplificateurs, en compensant le temps de propagation à travers les convertisseurs A/D et D/A de chaque cellule. Les exigences de précision de la 1ère cellule doivent correspondre à celles d'un convertisseur à 12 bits, bien que la cellule ne convertisse que 4 bits.

### 5.5.6 Convertisseur à double rampe

Le *convertisseur à double rampe* est lent, mais il permet d'atteindre à peu de frais une précision élevée. Il exploite un procédé indirect, transformant la tension à mesurer  $u_x$  en une impulsion de durée proportionnelle  $T_x$  avant de convertir celle-ci en code numérique par comptage (fig. 5.32).

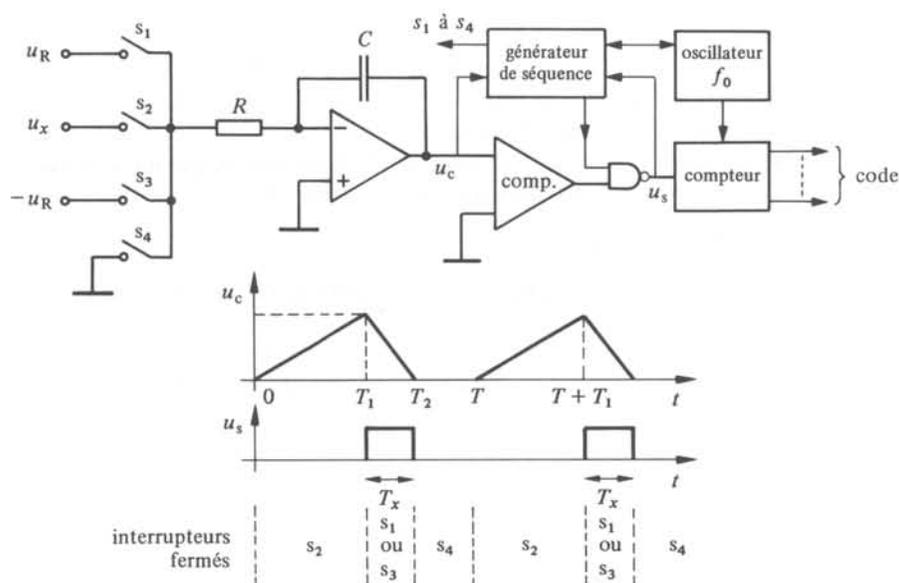


Fig. 5.32 Convertisseur A/D à double rampe.

La mesure de  $u_x$  se fait en trois phases, commandées par le générateur de séquence. Entre  $t = 0$  et  $t = T_1$ , le circuit intègre  $u_x$ ,

$$u_c(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t u_x(t') dt' \quad (5.25)$$

Si  $u_x(t)$  est constant dans l'intervalle  $0 \leq t \leq T_1$ , la tension sur le condensateur en  $T_1$  vaut:

$$u_c(T_1) = -\frac{1}{RC} u_x T_1 \quad (5.26)$$

Dès l'instant  $T_1$ , l'entrée du circuit est raccordée à la tension de référence  $-u_R$  si  $u_x > 0$ , respectivement  $+u_R$  si  $u_x < 0$ , ce qui provoque la décharge du condensateur  $C$  par un courant constant valant  $\pm u_R/R$ . Dès lors, pour  $u_x > 0$ ,

$$u_c(t) = u_c(T_1) + \frac{1}{RC} \int_{T_1}^t u_R dt' \quad (t \geq T_1) \quad (5.27)$$

Le compteur est enclenché de  $T_1$  jusqu'à l'instant  $T_2$  où  $u_c$  s'annule. A ce moment,

$$-\frac{u_x T_1}{RC} + \frac{(T_2 - T_1)u_R}{RC} = 0 \quad (5.28)$$

d'où

$$T_x = T_2 - T_1 = (u_x/u_R)T_1 = \frac{1}{u_R} \int_0^{T_1} u_x(t) dt \quad (5.29)$$

La durée  $T_1$  étant constante on constate que  $T_x$ , et le contenu du compteur en  $T_2$  sont directement proportionnels à  $u_x$  ou plus exactement à la moyenne de  $u_x$  entre  $t = 0$  et  $t = T_1$ . On obtient le même résultat si  $u_x < 0$ .

Pratiquement, la période d'intégration  $T_1$  est déterminée par un comptage à  $n$  bits de la fréquence  $f_0$  de l'oscillateur utilisée pour mesurer  $T_x$ .

$$T_1 = 2^n / f_0 = 2^n T_0 \quad (5.30)$$

Soit  $N_x$  la valeur du code correspondant à  $T_x$  relevé sur le compteur. On a :

$$N_x = T_x f_0 = T_x / T_0 = (u_x / u_R) 2^n = \frac{1}{u_R T_0} \int_0^{2^n T_0} u_x(t) dt \quad (5.31)$$

Ce résultat montre que la précision de ce convertisseur est indépendante des valeurs de  $f_0$ ,  $R$  et  $C$ . Seule importe la stabilité de ces grandeurs pendant la période de mesure. Il en est de même pour un éventuel décalage du comparateur, puisque les deux limites d'intégration sont déterminées par le même comparateur.

Le convertisseur à double rampe effectue un échantillonnage périodique avec moyennage. La déformation du spectre du signal qui en résulte a été étudiée au paragraphe 5.2.4. En particulier, toutes les composantes dont les fréquences sont des multiples de  $1/T_1$  sont éliminées. C'est pourquoi on choisit généralement  $T_1$  égale à un multiple de 20 ms, de manière à supprimer les perturbations éventuelles dues au réseau.

Il existe plusieurs variantes du schéma de principe illustré à la figure 5.32. Elles visent soit à réduire la durée  $T - T_1$  pendant laquelle le signal d'entrée est ignoré, soit à permettre une correction du décalage de zéro dans l'intégrateur et l'amplificateur précédant éventuellement le convertisseur, complétée par une augmentation de la résolution, obtenue en augmentant le nombre des périodes d'intégration.

Pour terminer, il faut signaler que ce convertisseur mesure également le rapport de deux tensions  $u_x/u_R$  (5.29). Cette propriété est exploitée dans de nombreux appareils (mesures d'impédances, composantes de vecteurs, etc.).

### 5.5.7 Convertisseur à oscillateur commandé

Le *convertisseur à oscillateur commandé* (VCO, Voltage Controlled Oscillator) transforme tout d'abord la tension à convertir  $u_x$  en un signal de fréquence  $f_x$  proportionnelle à son amplitude, puis compte le nombre de périodes de ce signal dans une durée fixe. La figure 5.33 montre un circuit de conversion tension-fréquence unipolaire par transfert de charge.

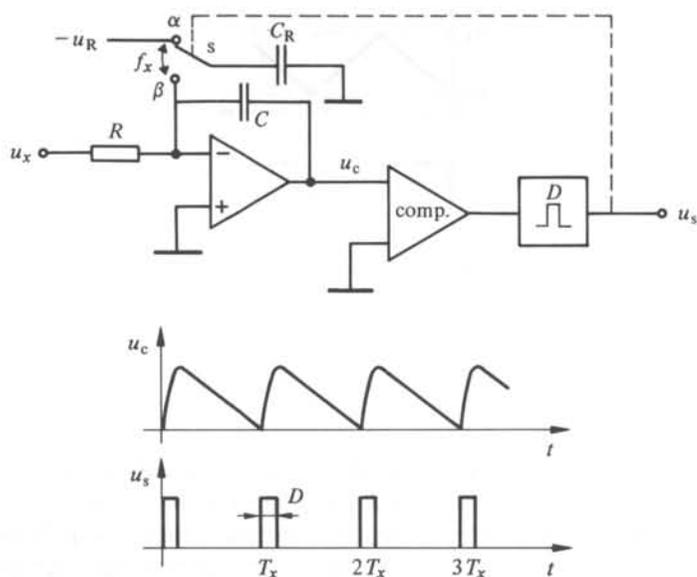


Fig. 5.33 Oscillateur VCO à transfert de charge.

L'intégrateur est relié en permanence à  $u_x$ , ( $u_x \geq 0$ ). En  $t = 0$ , la tension sur  $C$  préalablement déchargé, est portée à la valeur

$$u_c(t = 0) = \frac{C_R}{C} u_R \quad (5.32)$$

en amenant  $S$  pendant  $D$  en position  $\beta$ . La tension  $u_x$ , supposée constante, provoque une décharge de  $C$  à la vitesse

$$\frac{du_c}{dt} = -\frac{1}{RC} u_x \quad (5.33)$$

Dès que  $u_c$  s'annule, le comparateur déclenche un circuit monostable qui remet  $S$  en position  $\beta$  pendant  $D$  et le processus recommence, avec une fréquence

$$f_x = \frac{1}{T_x} = \frac{1}{RC} \frac{u_x}{u_R} \quad (5.34)$$

Un autre principe de VCO est illustré à la figure 5.34. Il consiste à charger et décharger le condensateur d'intégration entre deux niveaux de référence, par un courant proportionnel à  $u_x$ .

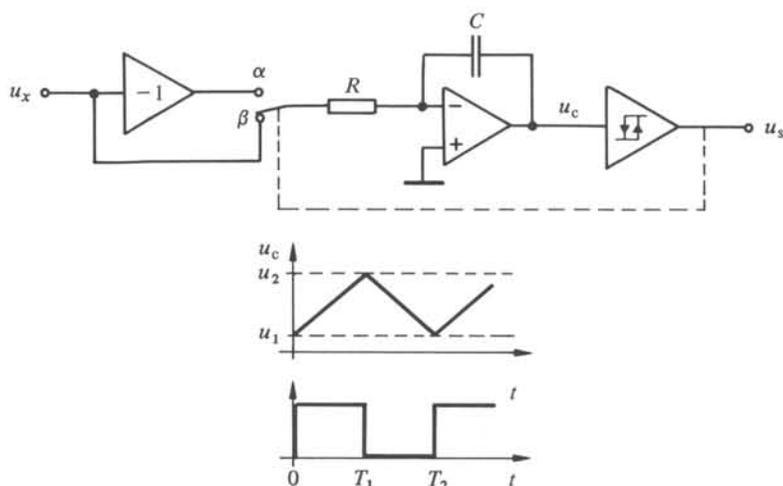


Fig. 5.34

On vérifie facilement que

$$f_x = \frac{u_x}{2RC(u_2 - u_1)} \quad (5.35)$$

Les équations (5.34) et (5.35) montrent que les circuits VCO nécessitent des éléments de précision. Ils sont donc plus délicats à réaliser que les convertisseurs à double rampe. Dans un système de mesure, leur principal intérêt réside dans le fait qu'ils permettent de convertir le signal  $u_x$  à l'endroit même où il est créé (capteur par exemple), de transmettre le résultat sous une forme peu sensible aux bruits et perturbations, sur une simple ligne bifilaire, puis d'obtenir le code numérique à l'endroit où il est utilisé.

## 5.6 CALIBRATION ET PERFORMANCES DES CONVERTISSEURS A/D

### 5.6.1 Erreur de quantification

La quantification de l'amplitude introduite par le convertisseur A/D fait correspondre à chaque valeur numérique, un petit domaine de variation de la grandeur analogique. Si ces domaines sont tous de même largeur, cas le plus fréquent en métrologie, on parle de *quantification uniforme*. La largeur des domaines est alors appelée *pas de quantification* ou, en faisant référence au codage électrique de la grandeur numérique, un LSB ou encore un *digit* (unité du dernier chiffre affiché).

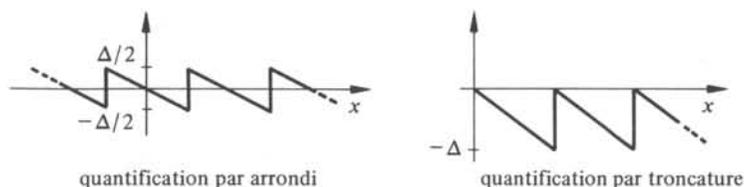


Fig. 5.35 Erreur de quantification.

La quantification introduit une erreur spécifique se présentant sous la forme d'une suite de triangles dont la hauteur est égale au pas de quantification  $\Delta$  (fig. 5.35).

Selon le type de convertisseur, l'erreur oscille symétriquement autour de zéro, ou est toujours négative.

Pour une loi de quantification uniforme, l'erreur de quantification peut être considérée comme un bruit blanc non corrélé avec le signal, à densité de probabilité uniforme, dont la variance vaut  $\Delta^2/12$  (§ VI.10.3.10).

### 5.6.2 Autocalibration

Les systèmes de mesure à hautes performances sont généralement munis de dispositifs d'*autocalibration* permettant de compenser automatiquement les dérives de zéro et les variations de gain pouvant se produire au cours du temps et sous l'effet de grandeurs modifiantes telles que la température. Pour compenser le zéro, un interrupteur déconnecte à intervalles réguliers la grandeur à mesurer et impose un zéro à l'entrée du système. Le signal apparaissant à la sortie est mémorisé sous forme analogique ou numérique afin d'être soustrait des mesures suivantes. La compensation d'un intégrateur doit se faire en amont de celui-ci lorsque les durées de différentes phases d'intégration sont les paramètres intéressants. La calibration du gain est plus délicate car elle requiert des grandeurs de référence précises, pour lesquelles les valeurs du signal de sortie du système sont parfaitement définies. Les écarts entre ces valeurs et celles qui sont réellement observées sont mémorisés, analogiquement ou numériquement, afin d'appliquer les corrections nécessaires. Ces dernières peuvent être effectuées analogiquement, par modification du gain d'un amplificateur, ou numériquement.

### 5.6.3 Mesure des performances d'un convertisseur A/D

Les méthodes classiques de mesure des performances d'un système de mesure telles que l'étalonnage statique, le relevé de la réponse indicelle ou de la réponse harmonique sont complétées dans le cas des convertisseurs A/D par d'autres méthodes dont les résultats sont plus immédiatement utiles, en particulier pour la prévision des erreurs dans le cas de signaux variant rapidement. Les principes de deux de ces méthodes sont brièvement décrits ci-dessous.

### 5.6.4 Méthode de l'histogramme des codes

On applique à l'entrée du convertisseur un signal  $u_x$  dont la densité de probabilité de l'amplitude  $p(u_x)$  est connue, et on relève l'histogramme d'apparition des codes. Si la fréquence d'échantillonnage et la fréquence de  $u_x$  sont statistiquement indépendantes, le nombre d'apparitions de chaque code doit être proportionnel à l'intégrale de  $p(u_x)$  dans le domaine correspondant au code considéré. La comparaison des nombres d'apparition réels et théoriques de chaque code donne une indication immédiate des non-linéarités différentielles du convertisseur. Elle permet de reconstituer la largeur réelle de chaque pas de quantification, donc de déterminer l'erreur systématique du convertisseur sur toute son étendue de fonctionnement.

L'idéal serait de prendre un signal à  $p(u_x)$  uniforme, de manière à simplifier au maximum l'analyse. Un tel signal est triangulaire, son spectre de Fourier est infini. La bande passante finie des générateurs a pour effet de déformer les triangles au voisinage des sommets, ce qui est inadmissible ici. C'est pourquoi l'analyse doit être soit limitée à la zone rectiligne du triangle, soit basée sur un signal sinusoïdal à très faible distorsion. Dans tous les cas, les erreurs sur  $p(u_x)$  se reportent directement sur les résultats de l'analyse.

### 5.6.5 Méthode du taux de distorsion harmonique

On cherche ici à qualifier la non-linéarité du convertisseur par l'amplitude des harmoniques qu'il génère. On applique à l'entrée un signal sinusoïdal d'amplitude égale à la pleine échelle et dont la fréquence est inférieure de  $\Delta f$  à la fréquence limite maximum  $f_1$ , correspondant à la moitié de la fréquence d'échantillonnage s'il n'y a pas de filtre antirepliement. On calcule ensuite la transformée de Fourier du signal converti. Les harmoniques générées par le système sont évidemment au-dessus de  $f_1$ , mais par le phénomène du recouvrement spectral (§ 2.5.2), on les retrouve dans la bande  $0 < f < f_1$  (fig. 5.36).

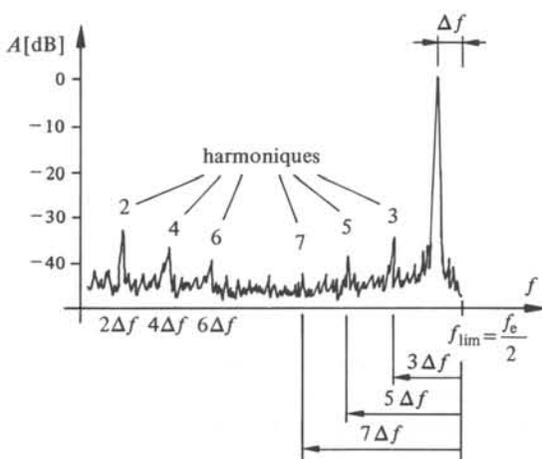


Fig. 5.36 Repliement des harmoniques générées par le convertisseur.

## SOURCES LUMINEUSES

## 6.1 ÉNERGIE LUMINEUSE, RADIOMÉTRIE

## 6.1.1 Énergie rayonnante, définition

L'énergie  $W$  (J) émise par une source de lumière incohérente sous forme de rayonnement porte le nom d'*énergie rayonnante* ou d'*énergie lumineuse*.

Soit  $dS$  un élément de surface de la source  $S$ ,  $\mathbf{n}$  la normale à cet élément,  $\mathbf{s}$  la direction de l'angle solide élémentaire  $d\Omega$ ,  $f$  la fréquence de la lumière émise et  $dt$  le temps que dure cette émission (fig. 6.1), alors, on *postule* la validité de la relation différentielle :

$$dW = \cos \theta L_f(\mathbf{s}) dS d\Omega df dt \quad \text{J} \quad (6.1)$$

où  $\theta$  est l'angle entre  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{s}$ , et  $L_f(\mathbf{s})$  est défini au paragraphe 6.1.2.

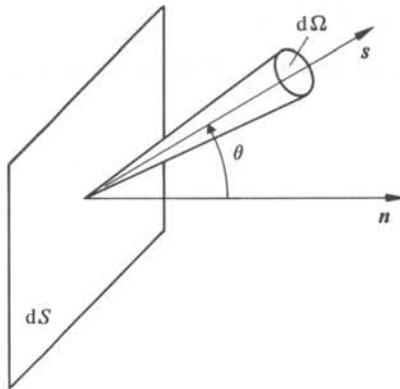


Fig. 6.1 Définitions des éléments géométriques de la relation (6.1).

## 6.1.2 Radiance spectrale, définition

Par définition, la grandeur  $L_f(\mathbf{s})$  ( $\text{Wsr}^{-1} \text{m}^{-2} \text{Hz}^{-1}$ ) de la relation (6.1) porte le nom de *radiance spectrale*.

Cette grandeur caractérise complètement la source  $S$ . Elle peut aussi s'exprimer en fonction de la longueur d'onde de la lumière émise, grâce à la relation  $\lambda f = v$ , où  $v$  est la vitesse de la lumière. Dans ce cas, on parle de *radiance spectrique*. La figure 6.2 présente la radiance solaire spectrique, qui est indépendante de la direction d'observation  $\mathbf{s}$ .

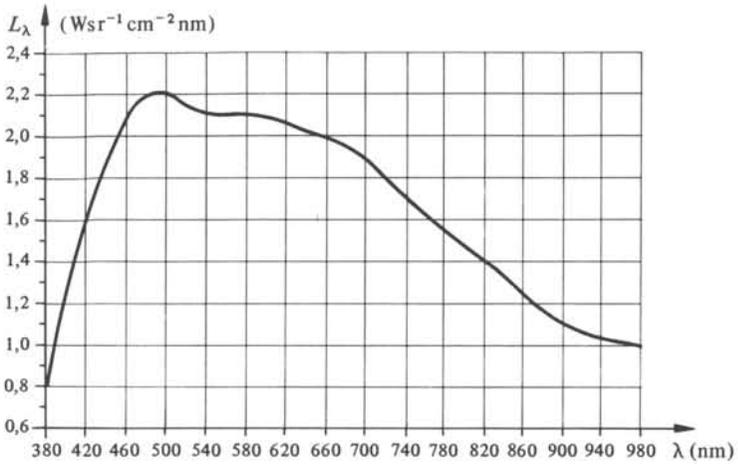


Fig. 6.2 Radiance solaire spectrique [32].

### 6.1.3 Puissance rayonnante, définition

L'énergie rayonnante émise par unité de temps  $dW/dt$  porte le nom de *puissance rayonnante*  $P$  :

$$dP = \cos \theta L_f(s) dS d\Omega df \quad \text{W} \quad (6.2)$$

On utilise aussi fréquemment l'expression de *flux énergétique*  $\phi$  pour la puissance rayonnante.

### 6.1.4 Exitance énergétique, définition

La puissance rayonnante quittant la surface émissive  $S$  par unité de surface,  $dP/dS$ , porte le nom d'*exitance énergétique*  $M$ .

$$dM = \cos \theta L_f(s) d\Omega df \quad \text{Wm}^{-2} \quad (6.3)$$

### 6.1.5 Remarque

Par définition de  $M$ , on a :

$$P = \int_S M dS \quad \text{W} \quad (6.4)$$

où l'intégrale s'étend à toute la surface  $S$  de la source lumineuse. Par extension, l'expression (6.4) reste vraie pour une surface quelconque  $S'$  qui intercepte un flux énergétique. Dans ce cas, on emploie le nom d'*émittance énergétique* pour la grandeur  $M$ , et  $S'$  doit être considérée comme une source secondaire. Dans le cas particulier où  $S'$  est la surface d'un récepteur (écran, détecteur), on réserve à  $M$  le nom d'*éclairage énergétique*.

### 6.1.6 Intensité énergétique, définition

La puissance rayonnante émise par unité d'angle solide dans la direction  $\mathbf{s}$ ,  $dP/d\Omega$ , s'appelle *intensité énergétique*  $I$ . D'après (6.2), on a :

$$dI = \cos\theta L_f(\mathbf{s}) dS df \quad \text{Wsr}^{-1} \quad (6.5)$$

### 6.1.7 Loi de Lambert

L'intensité d'une source lumineuse en fonction de la direction d'observation  $\mathbf{s}$  peut s'exprimer par une relation du type :

$$I = I_n F(\mathbf{s}) \quad \text{Wsr}^{-1} \quad (6.6)$$

où  $F$  est une fonction de la seule direction d'observation  $\mathbf{s}(\theta, \varphi)$ ,  $\varphi$  étant l'angle traditionnellement associé à  $\theta$  en coordonnées sphériques, et  $I_n = I(\mathbf{s} = \mathbf{n})$ .

Pour la majorité des sources, il existe une symétrie de la puissance rayonnée par rapport à  $\mathbf{n}$ ; dans ce cas, (6.6) se réduit à

$$I = I_n F'(\theta) \quad \text{Wsr}^{-1} \quad (6.7)$$

où  $F'$  ne dépend que de  $\theta$ .

Dans le cas particulier où (6.7) prend la forme

$$I = I_n \cos\theta \quad \text{Wsr}^{-1} \quad (6.8)$$

on dit que la *loi de Lambert* est satisfaite. On peut vérifier qu'une source est lambertienne si chaque élément de surface de cette source émet un rayonnement isotrope. Pour une source lambertienne, on a

$$L_f(\mathbf{s}) = L_f \quad \text{Wsr}^{-1} \text{m}^{-2} \text{Hz}^{-1} \quad (6.9)$$

La radiance spectrale ne varie pas en fonction de la direction d'observation. Le soleil par exemple, qui nous apparaît comme un disque également brillant en tout point de sa surface, est une source lambertienne.

On compare les sources lambertiennes et non-lambertiennes à l'aide de leurs diagrammes polaires (fig. 6.3).

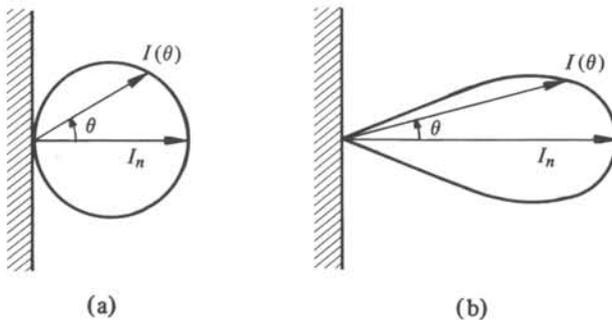


Fig. 6.3 Diagrammes polaires: (a) source lambertienne; (b) source non-lambertienne.

## 6.2 SOURCES À INCANDESCENCE

## 6.2.1 Corps noir

Dans une enceinte fermée, isolée thermiquement de l'extérieur, la température  $T$  (sect. 9.1) fixe complètement l'énergie rayonnante volumique  $w$  ( $\text{Jm}^{-3}$ ), lorsque les conditions d'équilibre thermique sont satisfaites. Si l'enceinte est percée d'une petite ouverture (fig. 6.4), la surface libre de cette ouverture possède les propriétés suivantes :

- Elle absorbe complètement le rayonnement qui tombe sur elle : il se trouve piégé dans l'enceinte.
- Elle émet le rayonnement de l'enceinte à l'équilibre, car une petite ouverture ne perturbe pratiquement pas les conditions d'équilibre thermique.
- L'intensité émise est lambertienne. L'ouverture se comporte donc comme un *corps noir*.

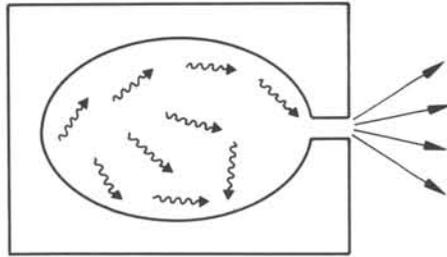


Fig. 6.4 Enceinte à l'équilibre thermique.

On montre [32] que l'énergie rayonnante volumique spectrale dans la cavité  $w_f(T)$  ( $\text{Jm}^{-3}\text{Hz}^{-1}$ ) est donnée par la *loi de Planck* :

$$w_f(T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} \frac{hf}{\exp\{hf/k_B T\} - 1} \quad \text{Jm}^{-3}\text{Hz}^{-1} \quad (6.10)$$

où  $k_B$  est la constante de Boltzmann, et  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide (7.23). La relation (6.10) est représentée à la figure 6.5(a). On peut également exprimer la loi de Planck en fonction de la longueur d'onde (fig. 6.5(b)).

## 6.2.2 Loi du déplacement de Wien

La figure 6.5(a) montre que la fonction  $w(f)$  présente un maximum pour une fréquence  $f_M$  qui croît avec la température. On vérifie aisément (§ 6.7.3) que la longueur d'onde  $\lambda_M$  correspondant à la fréquence pour laquelle  $w(f)$  est maximum, suit la *loi du déplacement de Wien* (fig. 6.6)

$$\lambda_M = \frac{1}{T} (2897,8 \pm 0,4) \quad \text{nm} \quad (6.11)$$

La loi de Wien explique les changements de couleur apparente des corps en fonction de la température. C'est l'équation maîtresse de la pyrométrie optique.

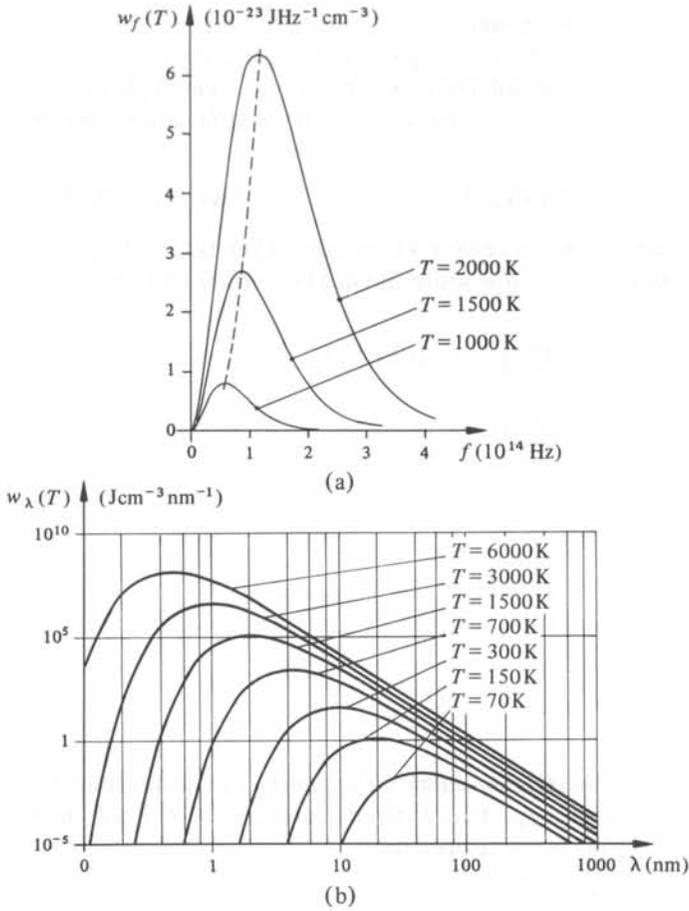


Fig. 6.5 Loi de Planck: (a) énergie rayonnante volumique spectrale; (b) énergie rayonnante volumique spectrique.

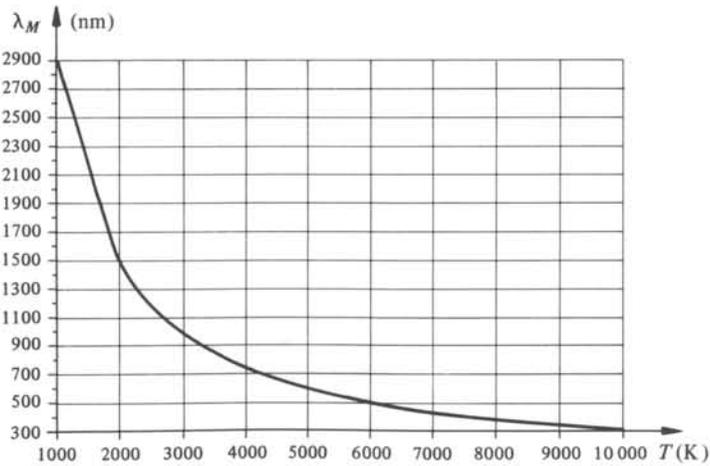


Fig. 6.6 Loi du déplacement de Wien.

### 6.2.3 Loi de Stefan-Boltzmann

L'énergie rayonnante volumique spectrale par unité d'angle solide s'obtient en divisant (6.10) par l'angle solide d'émission, soit  $4\pi$ . En multipliant cette grandeur par la vitesse de propagation du rayonnement  $c$ , on trouve la radiance spectrale du corps noir,  $L_{CN}$ :

$$L_{CN,f}(T) = w_f(T) c / 4\pi \quad \text{Wsr}^{-1} \text{m}^{-2} \text{Hz}^{-1} \quad (6.12)$$

La grandeur directement accessible à la mesure est l'exittance,  $M_{CN}$  (§ 6.1.4). Elle se calcule à partir de (6.12) en se souvenant que l'ouverture est lambertienne:

$$M_{CN}(T) = \int_0^{\infty} df \int_{2\pi} L_{CN,f}(T) \cos \theta \, d\Omega \quad \text{Wm}^{-2} \quad (6.13)$$

En tenant compte de (6.12), (6.13) se réduit à la loi de Stefan-Boltzmann:

$$M_{CN}(T) = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2} T^4 = \sigma T^4 \quad \text{Wm}^{-2} \quad (6.14)$$

où  $\sigma = (5,66961 \pm 0,00096) \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{K}^{-4}$  est la *constante de Stefan-Boltzmann*. Ainsi, la puissance émise par unité de surface du corps noir est proportionnelle à la quatrième puissance de sa température.

### 6.2.4 Émissivité

On définit l'*émissivité spectrale directionnelle* dans la direction  $\theta$ ,  $\epsilon_f(\theta)$ , comme le rapport de la radiance spectrale  $L_f(\theta)$  du corps considéré, à celle du corps noir  $L_{CN,f}$  (6.12), rapportée à la même température:

$$\epsilon_f(\theta) = L_f(\theta) / L_{CN,f} \quad (6.15)$$

On définit de la même manière l'*émissivité* d'un corps, par le rapport de son exittance, à celle du corps noir à la même température. La radiance spectrale  $L_f(\theta)$  d'un corps rayonnant, à la température  $T$ , peut se déterminer à partir de celle du corps noir (6.12), en employant (6.15). Dans le cas où la source de rayonnement est lambertienne, sa radiance spectrale est indépendante de la direction:  $L_f(\theta) = L_f$ ; alors, la connaissance de son émissivité spectrale est suffisante pour calculer son exittance, à partir de celle du corps noir, d'après l'équation (6.14).

### 6.2.5 Corps gris

Par définition, un *corps gris* est un corps dont l'émissivité spectrale (§ 6.2.4) ne dépend pas de la fréquence:  $\epsilon_f = \epsilon = \text{constante}$ . Son exittance  $M(T)$  est alors directement proportionnelle à celle du corps noir à la même température:

$$M(T) = \epsilon \sigma T^4 \quad \text{Wm}^{-2} \quad (6.16)$$

La figure 6.7 donne l'émissivité de différents métaux, qui, en première approximation, peuvent être considérés comme des corps gris.

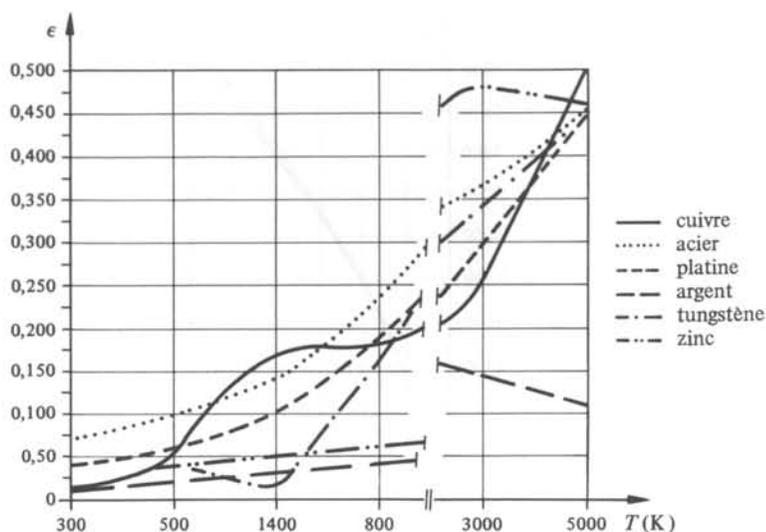


Fig. 6.7 Emissivité des métaux [33].

### 6.2.6 Exemple : lampe à filament de tungstène

Les propriétés de rayonnement des lampes à filament de tungstène sont essentiellement celles d'un corps gris : le rayonnement du tungstène est lambertien, l'émissivité vaut environ 0,33 aux alentours de 3000 K (fig. 6.8).

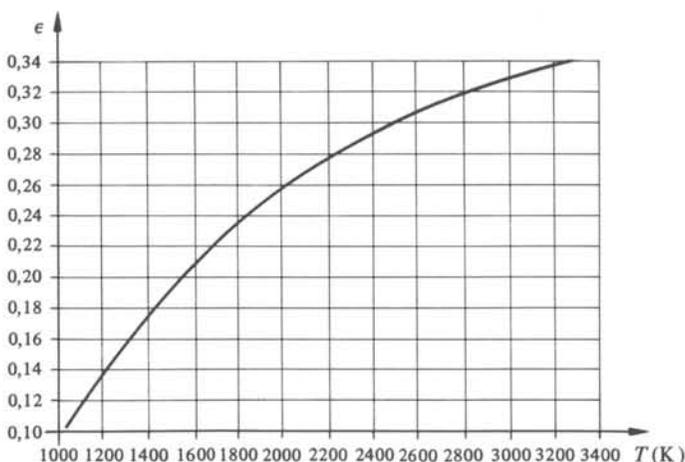


Fig. 6.8 Emissivité du tungstène.

Les températures de fonctionnement de telles lampes se situent précisément aux alentours de 3000 K afin d'éviter une évaporation trop rapide du filament. Le courant nécessaire pour maintenir le filament à différentes températures est donné à la figure 6.9, pour des ampoules conventionnelles.

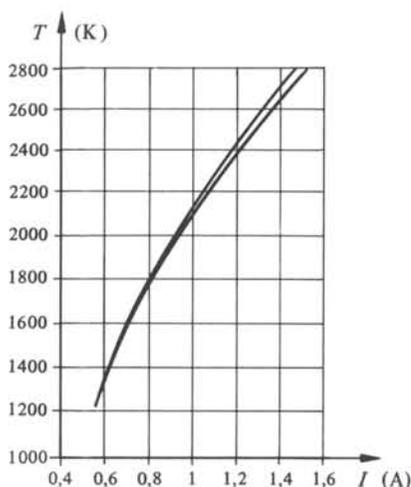


Fig. 6.9 Relation température-courant pour un filament de tungstène d'une ampoule conventionnelle. (La courbe supérieure est celle d'un corps parfaitement gris, équivalent du filament pour  $T = 1200$  K).

Conformément à la loi du déplacement de Wien (§ 6.2.2),  $w$  atteint son maximum pour  $\lambda \cong 1 \mu\text{m}$  (infrarouge). L'énergie rayonnée dans le visible est inférieure à 10% de l'énergie rayonnante totale.

Les principaux avantages des lampes à filament de tungstène se résument à :

- une énergie rayonnante importante;
- un spectre d'émission étendu;
- un faible coût.

Leurs inconvénients majeurs sont :

- une grande fragilité;
- une durée de vie courte (1000 h);
- très peu de rayonnement dans le visible;
- une grande inertie thermique;
- l'absence de directivité du rayonnement émis.

## 6.3 SOURCES LUMINESCENTES

### 6.3.1 Photon

Les manifestations ondulatoires et corpusculaires des phénomènes physiques sont complémentaires, tout en s'excluant mutuellement. On observe tantôt une onde (en propagation) et tantôt un corpuscule (lors d'interaction).

Le corpuscule associé à une onde lumineuse monochromatique est nommé *photon*. L'énergie  $W$  et l'impulsion  $\mathbf{p}$  du photon sont liées à la pulsation  $\omega$  et au vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  de l'onde lumineuse par les relations de Planck-de Broglie :

$$W = \hbar\omega \quad \text{J} \quad (6.17)$$

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \quad \text{kgms}^{-1} \quad (6.18)$$

Selon la convention habituelle, on a posé  $\hbar = h/2\pi$ , avec  $h = 6,6262 \cdot 10^{-34} \text{ J s}^{-1}$  (constante de Planck).

### 6.3.2 Emission de lumière

L'énergie libérée lors d'une transition électronique entre deux niveaux d'énergie  $W_2$  et  $W_1 < W_2$  peut être émise sous la forme d'un photon (fig. 6.10). On parle alors de *transition radiative*.

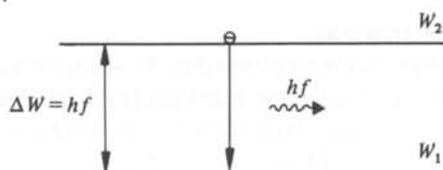


Fig. 6.10 Transition radiative.

Conformément à (6.17), l'énergie du photon ainsi créé vaut

$$W = hf = W_2 - W_1 \quad \text{J} \quad (6.19)$$

L'émission lumineuse résulte toujours d'un état de déséquilibre, au sens de la thermodynamique : des électrons possèdent l'énergie  $W_2$  alors que le niveau d'énergie  $W_1$  n'est pas entièrement rempli.

On parle d'émission par *incandescence* lorsque ce déséquilibre provient d'un effet thermique uniquement et d'émission par *luminescence* dans les autres cas.

Selon l'origine de l'excitation électronique, on distingue différents types de luminescence (tab. 6.11).

Tableau 6.11 Les différents types de luminescence.

Type de luminescence	Processus d'excitation
Photoluminescence	Optique
Catholuminescence	Electronique
Triboluminescence	Mécanique
Radioluminescence	Rayons X ou $\gamma$
Electroluminescence	Electrique

La suite de cette section est entièrement dédiée au cas très important de l'électroluminescence. On se limite à la présentation du modèle à deux niveaux, qui consiste à faire l'hypothèse que seuls les niveaux d'énergie  $W_2$  et  $W_1$  sont présents, ceci quel que soit l'environnement des électrons radiatifs.

### 6.3.3 Cas des semiconducteurs

Les schémas des niveaux d'énergie des semiconducteurs se caractérisent par la présence d'une bande d'énergie interdite (gap) de largeur  $W_g$  qui sépare les niveaux occupés

par les électrons de conduction de ceux des trous de la bande de valence (chap. II.2). L'émission de lumière par un semiconducteur est donc une transition radiative d'un électron de la bande de conduction vers la bande de valence, ou encore une *recombinaison radiative* d'un électron et d'un trou. Dans le modèle à deux niveaux, l'énergie  $W_1$  représente l'énergie maximale d'un trou, et l'énergie  $W_2$  l'énergie minimale d'un électron de conduction (§ VII.9.2.5).

### 6.3.4 Recombinaisons électron-trou

Toutes les recombinaisons électron-trou dans les semiconducteurs ne sont pas de nature radiative. En effet, il existe d'autres manières de dissiper l'énergie résultant d'une telle recombinaison. On doit donc distinguer les processus radiatifs des autres. Par définition, la durée  $\tau_r$  que passe en moyenne un électron dans l'état d'énergie  $W_2$  avant de disparaître et créer un photon porte le nom de *durée de vie radiative* de l'électron. Par opposition, on appelle le temps  $\tau_n$  passé par un électron dans  $W_2$  avant de subir une recombinaison non-radiative sa *durée de vie non-radiative*. Dans les deux cas, il s'agit de temps moyens mesurés sur un grand nombre de recombinaisons.

Comme valeurs typiques, on a :

- $\tau_r \cong 10^{-9}$  s ;
- $\tau_n \cong 10^{-8}$  s .

### 6.3.5 Emission spontanée

On parle d'*émission spontanée* lorsque le processus de recombinaison radiative est entièrement aléatoire : les photons émis le sont à des instants indépendants, et ne présentent aucune sorte de corrélation entre eux. Le taux  $t_{sp}$  d'émissions spontanées de photons par unité de volume et de temps dépend des probabilités  $p_2$  que le niveau d'énergie  $W_2$  possède un électron,  $(1 - p_1)$  que celui d'énergie  $W_1$  contienne un trou :

$$t_{sp} = A(1 - p_1)p_2 \quad \text{m}^{-3}\text{s}^{-1} \quad (6.20)$$

où  $A$  est la *constante de transition radiative spontanée* de  $W_2$  vers  $W_1$  (fig. 6.12).

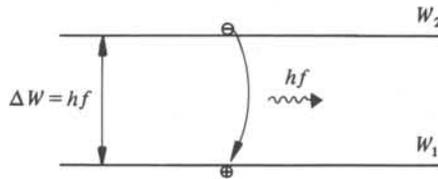


Fig. 6.12 Emission spontanée.

### 6.3.6 Injection d'électrons et de trous; homojonction

On réalise l'injection des électrons et des trous en polarisant une jonction p - n. La figure 6.13 illustre le cas d'une *homojonction* (HO), acronyme de jonction homogène.

Lorsque l'homojonction n'est pas polarisée (fig. 6.13(b)), le courant électrique de dérive créé par la différence de potentiel entre la région p et la région n compense exac-

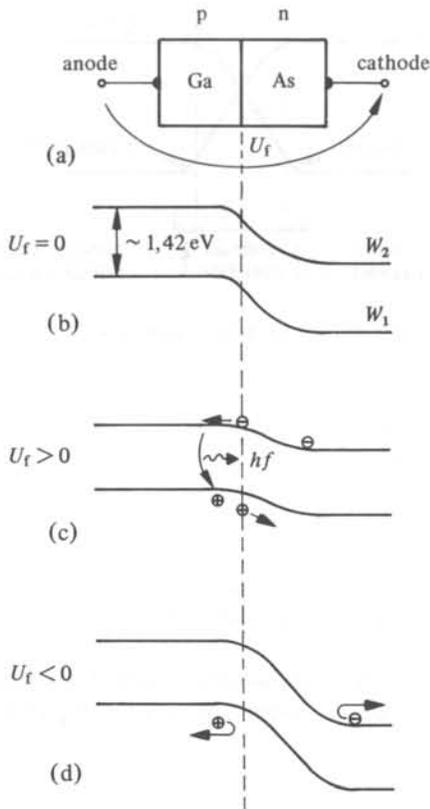


Fig. 6.13 Principe de l'homojonction: (a) représentation schématique; (b) position des bandes d'énergie; (c) polarisation en sens direct; (d) polarisation en sens inverse.

tement le courant de diffusion résultant du gradient de concentration des porteurs de charge au voisinage de la jonction.

En polarisant l'homojonction dans le sens direct (fig. 6.13(c)), on augmente le courant de diffusion et diminue celui de dérive. Il s'établit un régime stationnaire caractérisé par un courant net à travers la jonction, égal au courant de recombinaison des paires électron-trou dans un cas idéal.

Lorsque la jonction est polarisée dans le sens inverse (fig. 6.13(d)), la différence de potentiel entre les régions p et n est augmentée, empêchant tout passage de courant à travers l'homojonction.

### 6.3.7 Zone de déplétion, zone de recombinaison

Il se crée, vers le centre de l'homojonction, une charge spatiale résultant du déplacement global des électrons et des trous. Selon la prédominance d'un des porteurs, cette charge est positive ou négative. La région dans laquelle cette charge de porteurs majoritaires est effective porte le nom de *zone de déplétion* (fig. 6.14).

La *zone de recombinaison* électron-trou s'étend sur la région de diffusion des électrons, ou des trous *injectés* grâce à la tension  $U_f$ . C'est donc une zone définie par les

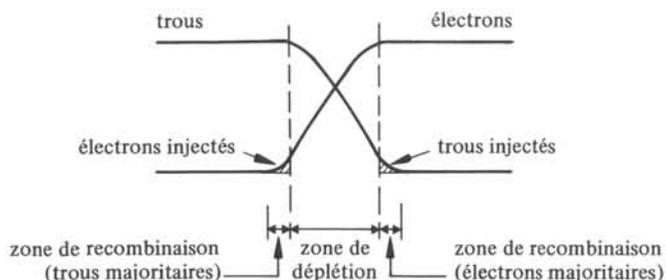


Fig. 6.14 Concentrations des électrons et des trous à la jonction.

porteurs minoritaires, dans laquelle peuvent s'effectuer les recombinaisons électron-trou. On l'appelle aussi *zone active*.

L'étendue de la zone de recombinaison est un paramètre essentiel du processus des transitions électroluminescentes. Trop petite, les interactions photons-porteurs minoritaires y sont importantes et diminuent la production nette des photons; trop grande, elle permet un accroissement des recombinaisons non-radiatives, et restreint aussi l'efficacité du dispositif. De plus, le comportement global des homojonctions varie fortement avec la température.

Pour ces raisons, on préfère utiliser d'autres jonctions semiconductrices que les homojonctions, lorsqu'on veut des sources aux caractéristiques stables.

### 6.3.8 Hétérojonction

Une simple *hétérojonction* (SH) est une jonction réalisée entre deux semiconducteurs de nature fortement dissemblable. La présence de part et d'autre de la jonction de deux matériaux différents donne des possibilités remarquables pour la conception de dispositifs électroluminescents. Ces possibilités résultent de l'existence de deux bandes interdites de largeur différente, et de deux indices de réfraction de valeur différente (§ 7.2.4).

La figure 6.15(b) présente un schéma de bandes d'énergie dans le cas d'une hétérojonction, comparé à celui d'une homojonction, en pointillé.

La discontinuité de la largeur de bande interdite à la jonction permet un confinement des porteurs de charge à l'interface, lorsque la jonction est polarisée en sens direct (fig. 6.15(c)). On arrive ainsi à augmenter le taux de recombinaison. La différence d'indice de réfraction entre les régions p et n permet d'astreindre la lumière à se propager dans le milieu où elle est moins atténuée. Il en résulte une amélioration du rendement global pour l'énergie rayonnée.

### 6.3.9 Diodes électroluminescentes

Comme leur nom l'indique, les *diodes électroluminescentes* (LED : Light Emitting Diode) sont des dispositifs émettant de la lumière par recombinaisons radiatives de porteurs minoritaires injectés dans une jonction semiconductrice polarisée en sens direct.

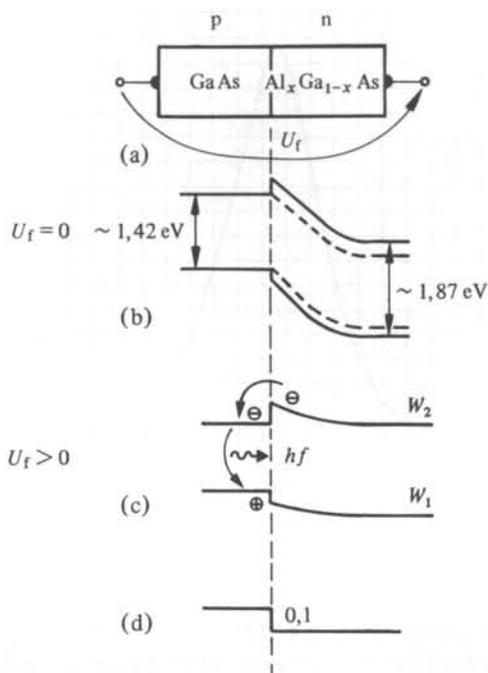


Fig. 6.15 Principe de l'hétérojonction simple [34]: (a) représentation schématique; (b) position des bandes d'énergie; (c) polarisation en sens direct; (d) profil de l'indice de réfraction.

Les LED les plus efficaces sont basées sur des structures à double hétérojonction (§ 6.4.9), qui permettent une zone de recombinaison bien définie et donc une grande radiance. On trouve cependant aussi des LED à hétérojonction simple et même à homojonction, moins efficaces, mais aussi moins chères. Les diodes électroluminescentes émettent principalement dans l'infrarouge proche ou dans le visible (AsGa, GaP, InP). La longueur d'onde centrale d'émission  $\lambda_c$  est donnée par:

$$\lambda_c = hc/W_g \quad \text{nm} \quad (6.21)$$

Ici,  $W_g$  est la largeur de bande interdite du semiconducteur dans lequel se produisent les recombinaisons.

Il existe des possibilités d'émission entre 350 et 1200 nm, selon les semiconducteurs utilisés [35].

### 6.3.10 Spectres d'émission des LED

La lumière émise par une LED n'est pas rigoureusement monochromatique (fig. 6.16).

La largeur typique d'émission se situe autour de 40 nm (mesurée à mi-hauteur).

Lorsque la température croît, le spectre se translate vers les grandes longueurs d'onde, car  $W_g$  est une fonction de la température. Pour l'AsGa par exemple,  $dW_g/dT \cong -5 \cdot 10^{-4} \text{ eVK}^{-1}$  [35].

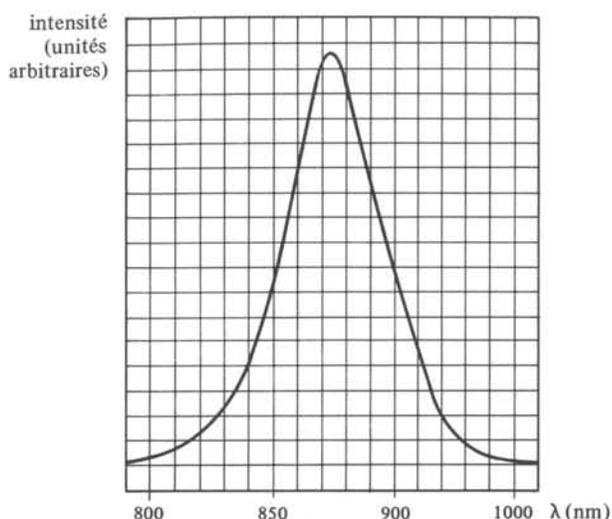


Fig. 6.16 Spectre d'émission d'une LED GaAs, pour  $T = 300\text{ K}$ .

### 6.3.11 Diagrammes de rayonnement des LED

Le rayonnement des LED est représenté sur un diagramme polaire (§ 6.1.7). Il est susceptible de varier fortement en fonction de la structure de la diode ou de l'intégration d'une microlentille dans le dispositif, comme le montre la figure 6.17.

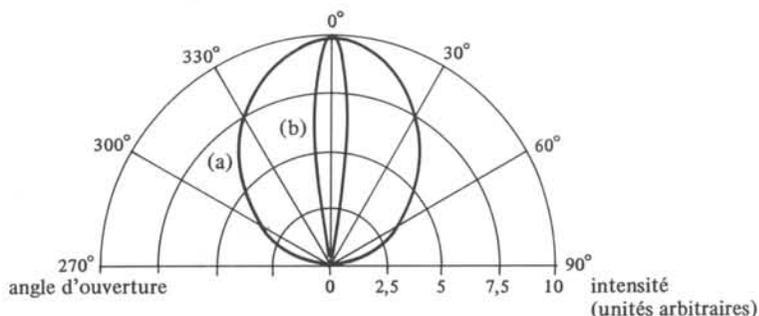


Fig. 6.17 Diagrammes de rayonnement des LED: (a) diode lambertienne; (b) diode directive.

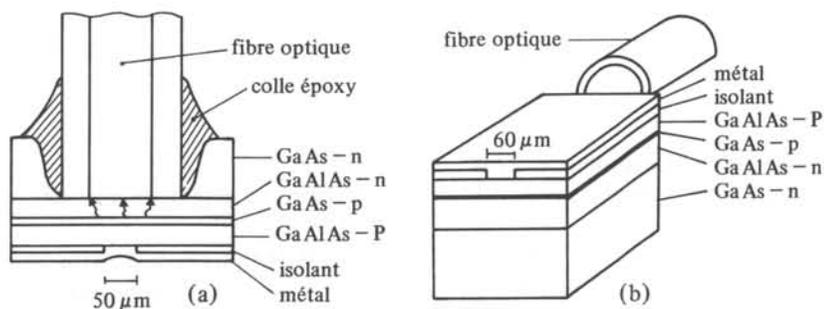


Fig. 6.18 Deux types de LED [36]: (a) diode émettant par la surface; (b) diode émettant par la tranche. La taille des zones actives est indiquée. On montre les méthodes de couplage avec des fibres optiques.

La caractéristique (a) est typiquement celle des diodes émettant par la surface, ou *diodes Burrus* (fig. 6.18). Les *diodes émettant par la tranche* présentent une caractéristique du genre de (b). Le diagramme de rayonnement est d'une importance primordiale lors du couplage des LED, par exemple avec des fibres optiques. Le diagramme de rayonnement n'est pas le même dans le plan de la jonction et dans le plan perpendiculaire à celle-ci.

### 6.3.12 Couplage LED-fibre optique

L'efficacité du couplage entre une LED et une fibre dépend à la fois du diagramme de rayonnement de la LED et de l'ouverture numérique NA de la fibre. Il est plus intéressant de coupler une diode émettant par la tranche qu'une diode Burrus, comme le prouve la figure 6.19.

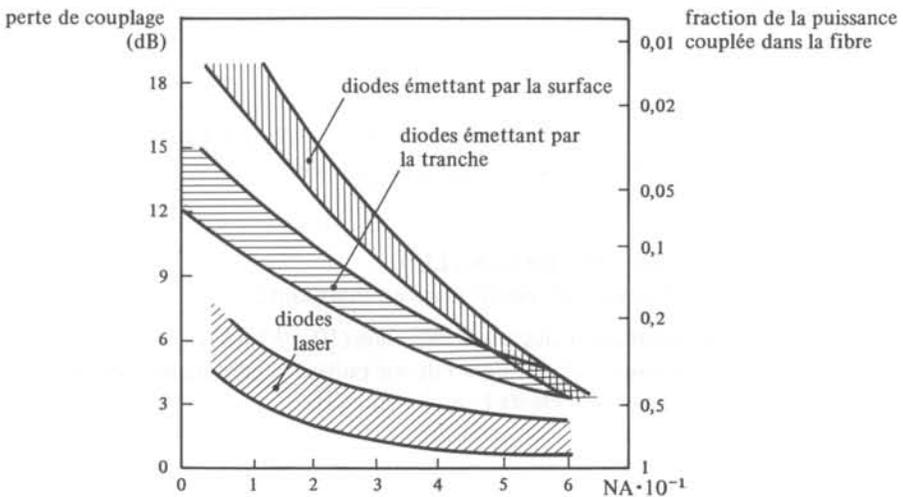


Fig. 6.19 Couplage des LED aux fibres optiques multimodes à saut d'indice [36].

### 6.3.13 Schéma équivalent électrique

Le circuit équivalent électrique d'une LED fait l'objet de la figure 6.20 [37].

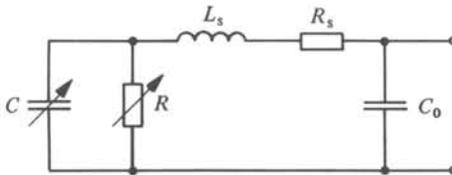


Fig. 6.20 Schéma équivalent électrique des LED.

Les éléments non-linéaires  $R$  et  $C$  représentent la jonction elle-même. Ils varient fortement avec la tension de polarisation  $U_f$ . Les éléments  $L_s$ ,  $R_s$  et  $C_o$  dépendent des connexions à la puce, du boîtier et des portions de semiconducteur hors de la jonction.

Tant que  $R_s \ll R$ , la caractéristique d'une LED d'un point de vue statique est sensiblement la même que celles des diodes à semiconducteurs courantes. L'ordre de grandeur moyen de  $C$  se situe aux alentours de 1nF pour un courant  $I \cong 100$  mA.

### 6.3.14 Modulation des LED

La modulation de la puissance émise par une LED s'obtient simplement en agissant sur le courant d'alimentation.

Les bandes passantes des LED sont déterminées par la durée de vie  $\tau_r$  des porteurs injectés dans la zone active de la diode (§ 6.3.4) bien plus que par les capacités parasites de la jonction, du moins pour des densités de courant suffisamment grandes. En général, les conditions d'utilisation garantissent une densité de courant supérieure à 40 A/cm<sup>2</sup> et dans ce cas, les temps de montée et de descente de l'impulsion lumineuse sont sensiblement égaux à  $\tau_r$ , qui lui-même est de l'ordre de la nanoseconde. Par conséquent, les LED sont modulables dans une bande de fréquence allant de zéro à quelques centaines de mégahertz. Expérimentalement, on a mesuré des bandes passantes allant jusqu'à 200 MHz (-3 dB optiques).

Par contre, lorsqu'on applique une impulsion très brève de courant (par exemple < 1 ns), l'impulsion lumineuse fournie par la diode est élargie. La durée de l'impulsion ne descend guère en-dessous de quelques nanosecondes.

### 6.3.15 Caractéristiques principales des LED

Les avantages des diodes électroluminescentes sont :

- une consommation électrique moyenne (10-500 mA);
- une assez bonne linéarité de la relation puissance rayonnante-courant (fig. 6.21);
- une bande passante élevée (jusqu'à 200 MHz);
- une bonne résistance aux chocs;
- une très bonne fiabilité ( $> 10^7$  h).

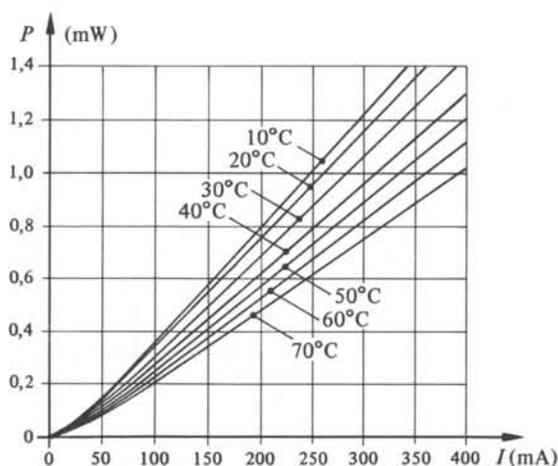


Fig. 6.21 Caractéristique puissance rayonnante-courant d'alimentation pour différentes températures d'une LED homogène simple en AsGa [37].

Les inconvénients les plus graves sont :

- les faibles puissances optiques disponibles ( $< 100 \text{ mW}$ );
- d'assez fortes dépendances en température de la puissance optique disponible (fig. 6.21).

On peut encore citer un certain nombre de caractéristiques des diodes électroluminescentes, qui peuvent apparaître soit comme des avantages, soit comme des désavantages, selon l'emploi de ces dispositifs :

- une largeur de bande spectrique assez réduite, typiquement  $40 \text{ nm}$ ;
- une ouverture numérique importante;
- un choix de la longueur d'onde d'émission limité, tout particulièrement dans le visible;
- une radiance élevée ( $8 \text{ Wcm}^{-2} \text{ sr}^{-1}$  typiquement).

## 6.4 SOURCES LASER

### 6.4.1 Introduction

Les sources de rayonnement *laser* (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) ont acquis une importance primordiale dans tous les dispositifs optiques dès leur apparition en 1960, importance due principalement à une très grande radiance et aux nombreuses qualités optiques que présente ce rayonnement.

La démonstration d'une émission laser par une jonction p - n date de 1962 [38], [39]; mais il fallut attendre huit ans pour que la technologie soit suffisamment développée pour permettre l'utilisation des structures à hétérojonction, (proposées dès 1963 [40]), et qui ouvraient la voie au laser à faible courant de seuil.

Cette section et la suivante ont pour but de donner un bref aperçu des caractéristiques de fonctionnement et d'émission des sources laser (essentiellement celles à semi-conducteurs), du point de vue de l'utilisation et de l'intégration de telles sources dans d'autres dispositifs optiques, tels que ceux décrits au chapitre 7.

### 6.4.2 Transitions stimulées

Parmi les transitions donnant lieu à la création ou à la recombinaison d'une paire électron-trou, on distingue les *transitions stimulées* des *transitions spontanées*.

Les transitions stimulées nécessitent la présence d'un photon inducteur dans leur processus. Ce sont l'émission stimulée et l'absorption d'un photon, phénomènes inverses l'un de l'autre, au sens strict.

L'émission spontanée (§ 6.3.5) est le type même de transition non-stimulée : elle n'est liée à la présence d'aucun photon, son processus dépend du hasard seul.

### 6.4.3 Emission stimulée

Un photon possédant une énergie  $hf$  égale à celle de la largeur de la bande interdite  $W_g$  est susceptible d'induire une transition radiative, avec production d'un second photon de même fréquence  $f$ , et par conséquent de même énergie  $hf$  que le photon induc-

teur (fig. 6.22). De plus, le photon induit possède la *même phase* que le photon inducteur. Ce processus constitue l'émission stimulée.

Le taux volumique d'émissions stimulées  $t_{st}$  dépend :

- de la probabilité  $p_2$  d'avoir un électron sur le niveau d'énergie  $W_2$  ;
- de la probabilité  $(1 - p_1)$  d'avoir un trou au niveau  $W_1$  ;
- du nombre volumique  $\rho(hf)$  de photons présents possédant l'énergie  $hf$  ;
- de la constante d'émission stimulée  $B_{21}$ .

On a :

$$t_{st} = B_{21}(1 - p_1)p_2\rho(hf) \quad \text{m}^{-3}\text{s}^{-1} \quad (6.22)$$

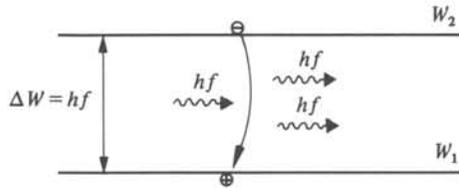


Fig. 6.22 Emission stimulée.

#### 6.4.4 Relations d'Einstein

La constante d'émission stimulée  $B_{21}$ , la constante d'absorption  $B_{12}$  (§ 8.2.2) et la constante d'émission spontanée  $A$  (§ 6.3.5), sont des fonctions complexes de la structure des bandes du semiconducteur. On peut cependant montrer (§ 6.7.5) qu'elles vérifient les *relations d'Einstein* :

$$B_{12} = B_{21} = B \quad \text{s}^{-1} \quad (6.23)$$

$$A/B = 8\pi hf^3/c^3 \quad \text{W/m}^3 \quad (6.24)$$

#### 6.4.5 Inversion de population

Il y a *inversion de population* dans un système à deux niveaux lorsque la probabilité de présence  $p_2$  d'un électron dans le niveau supérieur est plus grande que la probabilité  $p_1$  qu'il se trouve au niveau inférieur :

$$p_2 > p_1 \quad (6.25)$$

En remarquant que les probabilités  $p_i$  ( $i = 1, 2$ ) suivent des distributions de Fermi-Dirac (sect. II.7.4)

$$p_i = \left( \exp \left\{ - \frac{W_i - W_{F_i}}{k_B T} \right\} + 1 \right)^{-1} \quad (6.26)$$

où  $W_{F_i}$  est le quasi-niveau de Fermi des électrons de la bande  $W_i$  hors-équilibre [35], on voit que (6.25) peut se ramener, dans un semiconducteur, à la *condition de Bernard-Duraffourg* [41] :

$$W_{F_2} - W_{F_1} > W_2 - W_1 \quad (6.27)$$

Cette inégalité fixe les bandes d'énergies au-dessus et en-dessous de la bande interdite, dans lesquelles se produit l'inversion de population (fig. 6.23).

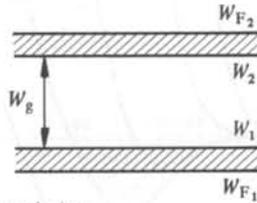


Fig. 6.23 Zones en inversion de population.

### 6.4.6 Gain optique

Le taux volumique de production nette des photons  $t_p$  résulte du bilan des taux d'émission spontanée, d'émission stimulée et d'absorption :

$$t_p = t_{sp} + t_{st} - t_{abs} \quad \text{m}^{-3} \text{s}^{-1} \quad (6.28)$$

En remplaçant ces différents taux par leurs valeurs (6.20), (6.22) et (8.9), et en tenant compte de (6.23) et (6.24), (6.28) devient

$$t_p = \left[ \frac{8\pi hf^3}{c^3} (1-p_1)p_2 + \rho(hf)(p_2-p_1) \right] B \quad \text{m}^{-3} \text{s}^{-1} \quad (6.29)$$

Par définition du coefficient d'absorption  $\alpha$  (§ 8.2.3), on a :

$$\alpha = -B(p_2-p_1) \frac{n}{c} \quad \text{m}^{-1} \quad (6.30)$$

où  $n$  est l'indice de réfraction du milieu et  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide. L'expression de (6.29) se ramène à :

$$t_p = \frac{8\pi hf^3}{c^3} (1-p_1)p_2 B - \frac{\rho(hf)c}{n} \alpha \quad \text{m}^{-3} \text{s}^{-1} \quad (6.31)$$

Le premier terme de (6.31) décrit l'émission spontanée, et le second le bilan partiel entre l'émission stimulée et l'absorption. Lorsque l'émission stimulée est plus importante que l'absorption,  $\alpha$  est négatif et le taux net de photons produits est supérieur à celui de l'émission spontanée, on a un *gain optique*. La relation (6.29) montre que le gain optique commence lorsque la condition d'inversion de population (6.25) est effective.

On peut aussi analyser l'apparition du gain optique en fonction du nombre volumique  $\Delta\rho$  des porteurs injectés dans la jonction (fig. 6.24). En l'absence de polarisation directe de la jonction (courbe  $\Delta\rho_0$ ), l'absorption est effective pour tous les photons tels que  $hf > W_g$ . En polarisant la jonction, on crée ainsi des densités de porteurs injectés allant en augmentant. Tout d'abord (courbe  $\Delta\rho_1$ ), le matériau devient moins absorbant pour les photons dont l'énergie est proche de  $W_g$ , car l'émission stimulée augmente. Lorsque la condition d'inversion de population est vérifiée (courbes suivantes), la jonction devient amplificatrice pour toute une bande de longueurs d'onde (région hachurée), appelée *bande de gain*. La largeur typique de ce domaine est pour l'AsGa et pour  $\Delta\rho = 2 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$  de l'ordre de 38 nm [34].

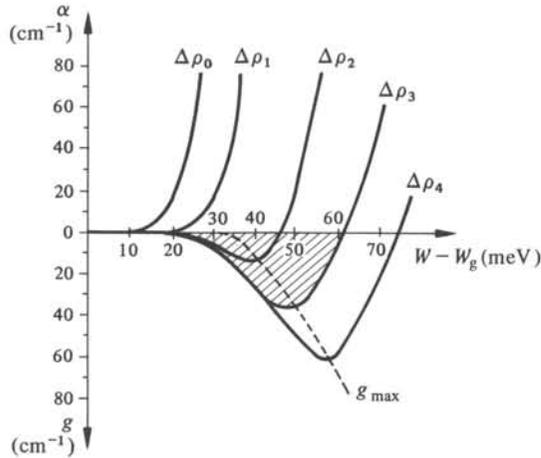


Fig. 6.24 Courbes de gain de l'AsGa [42].

On montre [42] que l'expression du maximum de la courbe de gain augmente quasi-linéairement avec la densité de courant injecté  $J$  ( $\text{A}/\text{cm}^2$ ) (fig. 6.24, en pointillé)

$$g_{\max} = \beta \left( \eta_i \frac{J}{d} - J_0 \right) \quad (6.32)$$

où  $\eta_i$  est le rendement quantique interne (§ VII.9.3.6) de l'émission spontanée,  $d$  l'épaisseur de la zone de recombinaison,  $\beta$  le coefficient de gain, et  $J_0$  une caractéristique du matériau (densité de courant de seuil d'amplification). Pour l'AsGa, on a  $\beta \cong 0,05 \text{ cm}\mu\text{m}/\text{A}$  et  $J_0 \cong 4,5 \cdot 10^3 \text{ A}/\text{cm}^2\mu\text{m}$ .

#### 6.4.7 Cavité résonante

Une source laser est constituée d'une part d'un milieu assurant un gain optique suffisant, et d'autre part d'un « circuit oscillant » optique permettant un asservissement par contre-réaction du dispositif, en réglant la phase de la lumière.

Le circuit oscillant est presque toujours formé d'un résonateur optique de type Fabry-Pérot [43], constitué de deux miroirs plans parallèles éloignés d'une distance  $L$ . Les modes propres longitudinaux créés par cette cavité résonante vont permettre de conserver une densité suffisante de photons de même phase afin d'entretenir l'oscillation laser.

En effet (fig. 6.25), pour une onde entrant dans la cavité donnée par  $E(x) = E_0 \exp(-jkx)$ , cette onde devient, après passage à travers le premier miroir  $E'_T(0) = T_1 E_0$ . Après passage par le second miroir, on a  $E''_T(L) = T_1 T_2 \exp(-jkL) E_0$ . Les parties réfléchies à ces interfaces s'écrivent respectivement  $E'_R(0) = R_1 E_0$  et  $E''_R(L) = T_1 R_2 \exp(-jkL) E_0$ . Les coefficients  $R_i$  et  $T_i$  de ces équations représentent les constantes de réflexion et de transmission du miroir  $i$ . L'onde réfléchie sur le second subit toute une suite de réflexions et de transmission. L'onde transmise totale s'écrit finalement :

$$E_T = E_0 \exp\{-jkL\} T_1 T_2 \cdot [1 + R_1 R_2 \exp\{-2jkL\} + R_1^2 R_2^2 \exp\{-4jkL\} + \dots] \quad (6.33)$$

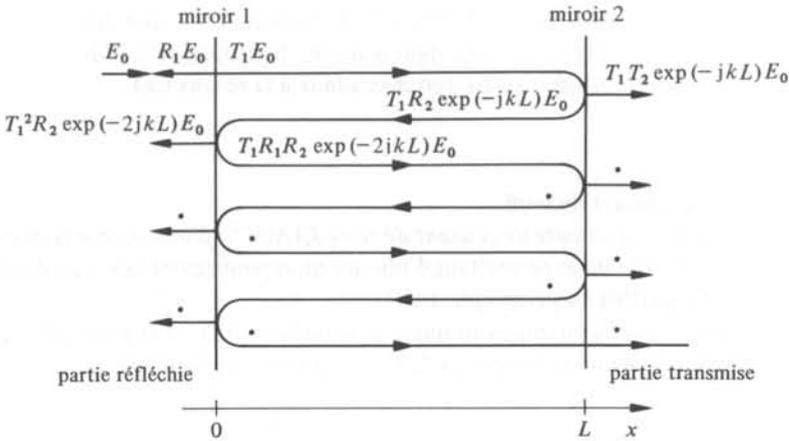


Fig. 6.25 Représentation schématique d'une onde à travers une cavité Fabry-Pérot.

ou encore :

$$E_T = \frac{E_0 \exp\{-jkL\} T_1 T_2}{1 - R_1 R_2 \exp\{-2jkL\}} \quad (6.34)$$

La condition de résonance ( $E_T \rightarrow \infty$ ) est satisfaite lorsque le dénominateur de (6.31) s'annule, c'est-à-dire si

$$R_1 R_2 \exp\{-2jkL\} = 1 \quad (6.35)$$

En présence d'atténuation ou de gain, le coefficient de propagation de l'onde est complexe. On peut l'écrire [35]:

$$\underline{k} = \frac{\omega}{c} \left( n + j \frac{gc}{2\omega} \right) \quad (6.36)$$

On obtient, en séparant les parties réelle et imaginaire de (6.35), en tenant compte de (6.36), les deux relations

$$g = \alpha_0 - \frac{1}{2L} \text{Ln } r_1 r_2 \quad (6.37)$$

$$m \frac{\lambda_0}{n} = 2L \quad (6.38)$$

où

- $r_i$  : coefficient de réflexion du miroir  $i$  ;
- $\alpha_0$  : coefficient d'absorption supplémentaire (perte par diffusion sur les porteurs libres) ;
- $m$  : entier ;
- $\lambda_0$  : longueur d'onde dans le vide ;
- $n$  : indice de réfraction à l'intérieur de la cavité.

L'équation (6.37) impose que le gain doit être suffisant pour compenser les pertes de la cavité et des miroirs, à la résonance. On parle de *condition imposée sur le gain*.

La relation (6.38) signifie que la longueur de la cavité résonante doit être un multiple entier de la demi-longueur d'onde dans le milieu de propagation. Elle est connue sous le nom de *condition sur la phase* (pour satisfaire à la résonance).

#### 6.4.8 Densité de courant de seuil

Par définition, la *densité de courant de seuil*  $J_s$  ( $\text{Am}^{-2}$ ) d'une source laser est la densité de courant minimale permettant d'obtenir un rayonnement laser, c'est-à-dire présentant les propriétés du paragraphe 6.5.1.

On peut calculer  $J_s$  en imposant que le gain de la cavité (6.37) soit égal au gain optique du matériau semiconducteur (6.32), multiplié par un facteur  $\Gamma$  :

$$\Gamma g_{\max} = g \quad \text{cm}^{-1} \quad (6.39)$$

Le facteur  $\Gamma$ , appelé *gain modal*, représente la fraction du mode de propagation fondamental de la lumière confinée dans la région active. Sa valeur typique est 0,5 (la moitié du mode se propage en dehors de la région active) pour les sources laser conventionnelles. On obtient, en explicitant (6.37) :

$$J_s = \frac{J_0 d}{\eta_i} + \frac{d}{\eta_i \beta \Gamma} \left( \alpha_0 - \frac{1}{L} \text{Ln } R \right) \quad \text{Am}^{-2} \quad (6.40)$$

Valeur typique pour l'AsGa :  $J_s = 1300 \text{ A/cm}^2$  (fig. 6.26).

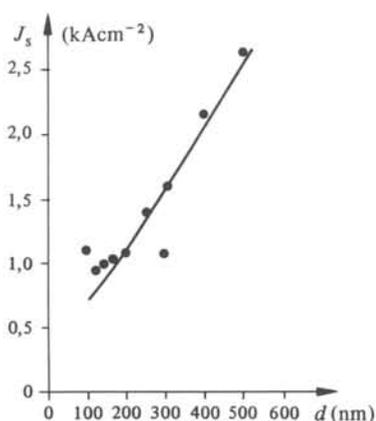


Fig. 6.26 Densité de courant de seuil  $J_s$  en fonction de l'épaisseur  $d$  de la zone active [44], pour une diode  $\text{Ga}_{0,7}\text{Al}_{0,3}\text{As}$ .

#### 6.4.9 Diodes laser

Les sources laser à semiconducteur sont appelées, en raison de leur structure, *diodes laser* (LD).

Ces diodes sont principalement réalisées selon la structure de la *double hétérojonction* (DH). Cette technique consiste à placer une couche de semiconducteur à faible largeur de bande interdite entre deux semiconducteurs à bandes interdites plus larges.

Les avantages de la double hétérojonction pour la fabrication du laser sont les suivants (fig. 6.27) :

- Les porteurs injectés dans la région N - p sont «arrêtés» à la seconde hétérojonction p - P et restent ainsi confinés dans la zone de recombinaison, pour autant que  $d$  soit plus petite que la zone de diffusion. L'injection dans la zone active est donc accrue.
- La couche p intermédiaire possède un indice de réfraction légèrement plus élevé que les couches qui l'entourent. Les deux hétérojonctions délimitent de cette façon un guide d'onde diélectrique pour la lumière générée dans la zone active. La densité de photons est donc augmentée dans cette zone, ce qui est fondamental pour assurer une bonne efficacité du dispositif.

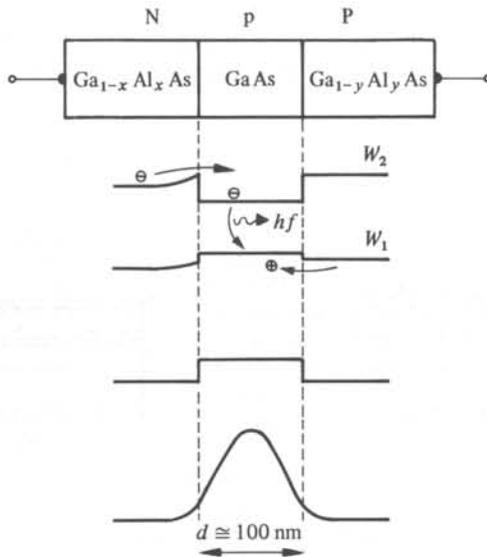


Fig. 6.27 Principe d'une double hétérojonction [36] : (a) représentation schématique; (b) diagramme des bandes d'énergie sous polarisation directe; (c) profil de l'indice de réfraction; (d) intensité du mode fondamental de la lumière émise.

D'un point de vue pratique, les diodes laser ne diffèrent des diodes électroluminescentes que par la présence de contacts métalliques importants, nécessaires pour assurer des densités élevées de porteurs injectés. Ces contacts se présentent souvent sous la forme de rubans de quelques microns de large, situés au-dessus de la zone active. On parle d'ailleurs de diodes à *géométrie ruban*. La figure 6.28 est une représentation schématique d'une telle diode, à partir de laquelle plusieurs variantes d'exécution ont été réalisées.

#### 6.4.10 Diodes laser à guidage par le gain

Dans le cas de la diode de la figure 6.28, la largeur du ruban détermine celle de la zone active : seule la région sous le ruban, où le confinement du courant est suffisant

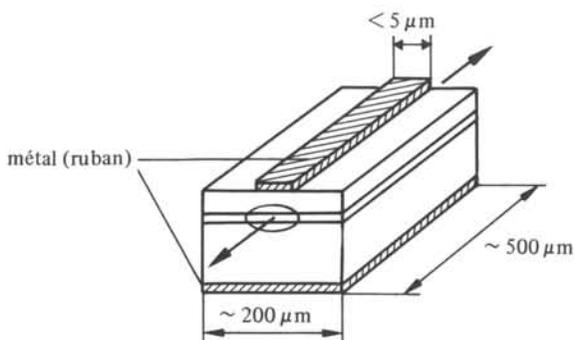


Fig. 6.28 Diode laser à géométrie ruban.

présente un gain optique. A cause de cette distribution transversale du gain, la lumière résultant de l'émission laser semble guidée transversalement : on parle de *diode à guidage par le gain*.

Il existe de nombreuses variantes de structures à guidage par le gain (fig. 6.29). Elles ont été réalisées dans les systèmes AsGa-GaAlAs et InP-GaInAsP principalement.

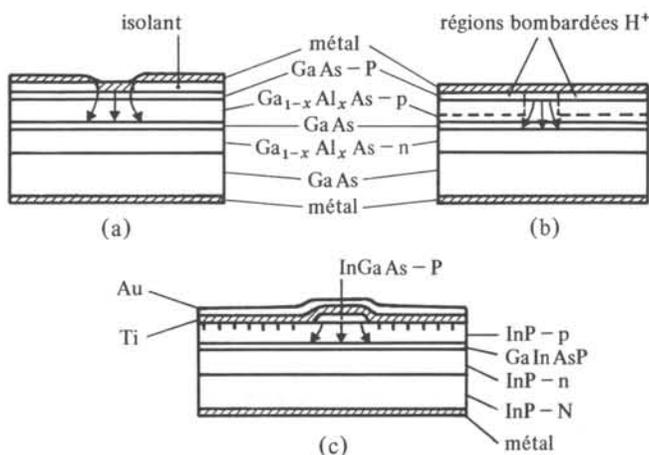


Fig. 6.29 Structures de diodes laser à guidage par le gain [36]: (a) localisation du courant par isolant; (b) localisation du courant par bombardement  $H^+$ ; (c) localisation du courant par diodes Schottky.

#### 6.4.11 Diodes laser à guidage par l'indice

Outre la localisation du courant injecté par l'intermédiaire du ruban, les diodes de la figure 6.30 présentent un confinement optique transversal. Ce guidage optique est obtenu en créant un guide optique passif dans la région active. La différence d'indice de réfraction nécessaire à ce guidage est souvent obtenue par des variations d'épaisseur de la couche active. On nomme ces types de diodes laser des *diodes à guidage par l'indice*.

Le cas du *laser à ruban enterré* (BH) (fig. 6.30 (c)) est un cas particulier de guidage par l'indice. En plus d'un bon confinement des photons, obtenu par une grande diffé-

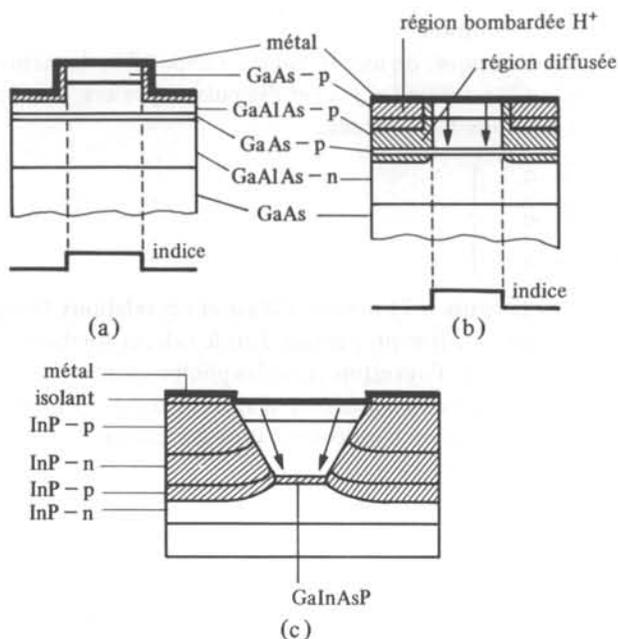


Fig. 6.30 Structure de diodes laser à guidage par l'indice [36]: (a) laser « ridge »; (b) laser « D.B.S »; (c) laser enterré.

rence d'indice de réfraction, les hétérostructures latérales permettent de confiner l'ensemble des porteurs injectés dans la zone active. Cette structure est donc particulièrement favorable à l'obtention d'un très faible courant de seuil (§ 6.5.8). Elle est malheureusement aussi très difficile à réaliser techniquement.

## 6.5 PROPRIÉTÉS OPTIQUES DES SOURCES LASER

### 6.5.1 Introduction

Cette section a pour but de préciser les différences entre l'émission d'une source laser et celle d'une source conventionnelle incohérente.

La diode laser (LD) servira le plus souvent d'exemple, mais les propriétés décrites s'appliquent à l'ensemble des sources laser.

Le rayonnement laser possède l'une au moins des propriétés spécifiques suivantes :

- une quasi-monochromaticité;
- une grande cohérence spatiale;
- une bonne cohérence temporelle;
- une grande directivité;
- une grande radiance.

Les définitions de la cohérence sont traitées dans les paragraphes suivants. Les autres propriétés sont plus immédiates, ou découlent de celles de la cohérence.

### 6.5.2 Mode spatial, définition

En physique quantique, on montre qu'il est impossible de mesurer avec une précision absolue à la fois la position  $(x, y, z)$  et l'impulsion  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  d'une particule. Ce fait se traduit par les relations d'incertitude :

$$\left. \begin{aligned} \Delta x \Delta p_x &\gtrsim h \\ \Delta y \Delta p_y &\gtrsim h \\ \Delta z \Delta p_z &\gtrsim h \end{aligned} \right\} \quad (6.41)$$

L'exemple de la figure 6.31 permet d'illustrer ces relations. On considère une onde plane  $\exp[j(\omega t - kz)]$  se propageant dans le vide, et tombant sur une ouverture de largeur  $\Delta x$ . A gauche de l'ouverture, tous les photons sont indiscernables, ils possèdent la même énergie et la même impulsion, d'après (§ 6.3.1). Au moment où un photon franchit l'ouverture, sa position n'est connue qu'à  $\Delta x$  près, et (6.41) permet d'évaluer son incertitude sur  $\mathbf{p}$ , dirigée selon  $Ox$  :

$$\Delta p_x \cong h/\Delta x \quad (6.42)$$

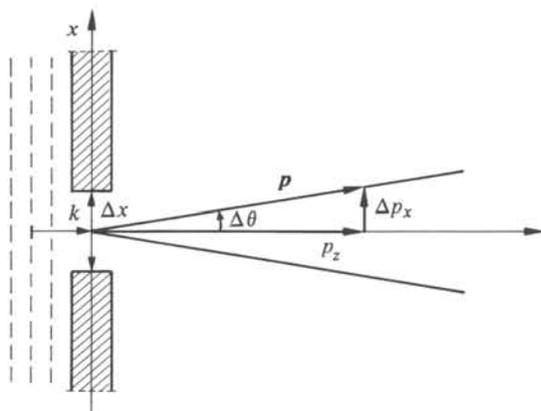


Fig. 6.31 Diffraction d'une onde plane.

L'impulsion est donc comprise entre les limites de l'angle d'ouverture  $\Delta\theta$ , donné par :

$$\sin \Delta\theta \cong \Delta\theta = \Delta p_x/p \quad (6.43)$$

En remplaçant dans (6.43)  $p$  par  $h/\lambda$  et  $\Delta p_x$  par son expression (6.42), on obtient

$$\Delta\theta \cong \lambda/\Delta x \quad (6.44)$$

Les photons compris dans l'angle d'ouverture  $\Delta\theta$  sont indiscernables, puisque leurs impulsions diffèrent les unes des autres de moins que  $\Delta p_x$ . Par définition, on dit qu'ils font partie du même *mode spatial* (ou *mode transverse*); on parle aussi de *photons spatialement cohérents*.

De plus, l'équation (6.44) montre qu'une onde plane passant par une ouverture de dimensions finies s'élargit après l'ouverture, et occupe un angle solide défini. On appelle ce phénomène la *diffraction*.

### 6.5.3 Mode temporel, définition

Les photons appartenant au même mode spatial sont néanmoins discernables par l'instant où ils franchissent l'ouverture. Soit  $\Delta z$  l'épaisseur de l'écran dans lequel l'ouverture est aménagée. En tenant compte de (6.17), on peut écrire :

$$p = W/c \quad (6.45)$$

Ceci permet de mettre (6.43) sous la forme suivante :

$$\Delta z \Delta f / c \cong 1 \quad (6.46)$$

où  $f$  est la fréquence de l'onde plane. En définissant l'incertitude sur l'instant de passage des photons à travers l'ouverture par :

$$\Delta t = \Delta z / c \quad (6.47)$$

(6.46) devient

$$\Delta t \Delta f \cong 1 \quad (6.48)$$

Les photons ayant traversé l'ouverture au « même instant » (à  $\Delta t$  près) occupent une bande de fréquence centrée autour de  $f$ , de largeur  $\Delta f$ . Ils sont indiscernables, puisque leurs énergies diffèrent entre elles de moins que  $h \Delta f$ . Par définition, ils font partie du même *mode temporel* (ou *longitudinal*); on dit qu'ils sont *temporellement cohérents*.

### 6.5.4 Cohérence spatiale des laser

La cohérence spatiale des laser dépend directement de la géométrie du résonateur optique (§ 6.4.7), qui définit les modes propres de la cavité résonante. Ces modes sont souvent TEM, ou quasi TEM (sect. XIII.2.2). Les modes transverses sont désignés par TEM<sub>*mn*</sub>, où les indices entiers  $m$  et  $n$  désignent le nombre de zéros du champ électrique selon les axes  $Ox$  et  $Oy$ , perpendiculaires à la direction d'émission du laser. La distribution du champ électrique pour ces modes est donnée par l'expression de son champ scalaire (§ 7.2.9) [45]:

$$\underline{E}(\mathbf{r}, t) = A \cdot c_0 \frac{w_0}{w(z)} \underline{H}_m \left( \frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) \underline{H}_n \left( \frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \right] \exp[-j\phi(\mathbf{r})] \exp[-j(\omega t - kz)] \quad (6.49)$$

$$c_0 = (2^{(m+n)} m! n!)^{-1/2}, \quad (6.50)$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{x^2 + y^2}{R(z)} \frac{\pi}{\lambda} - (n + m + 1) \arctan \left( \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right), \quad (6.51)$$

$\underline{H}_q(u)$  est le polynôme d'Hermite d'ordre  $q$ , défini par

$$\underline{H}_q(u) = (-1)^q \exp(u^2) \frac{d^q}{du^q} \exp(-u^2) \quad (6.52)$$

$A$  est une constante,  $w_0$  et  $w(z)$ , comme  $R(z)$  sont définis dans le paragraphe 6.5.5. La figure 6.32 montre la distribution des champs des modes d'ordres les plus bas, pour un résonateur à miroirs confocaux.

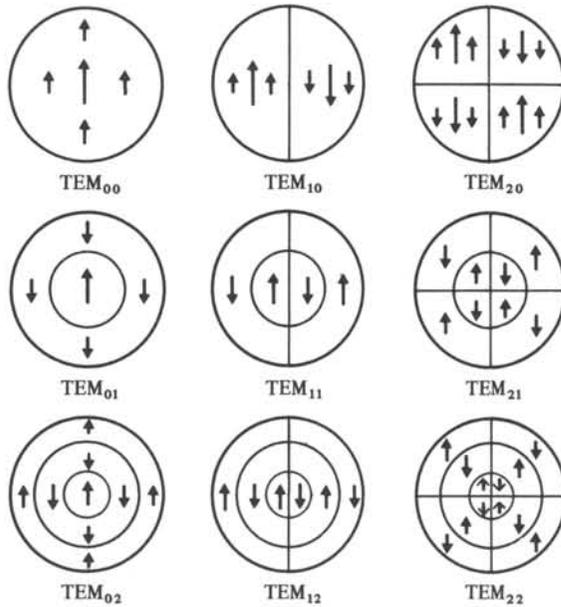


Fig. 6.32 Distribution spatiale des champs pour les ordres les plus bas.

### 6.5.5 Propagation du mode fondamental

Dans les laser, les pertes allant croissant avec  $m$  et  $n$ , il est possible de ne conserver que le mode fondamental  $TEM_{00}$ . On parle alors de laser monomode spatialement ou transversalement.

En ne conservant que l'amplitude complexe (§ 7.2.9) du champ scalaire, (6.49) devient, à une phase près:

$$\underline{U}(x, y, z) = \underline{A} \exp\{-(x^2 + y^2)/\underline{w}^2(z)\} \quad (6.53)$$

L'équation (6.53) montre que le mode fondamental de propagation est gaussien. On parle de faisceau laser gaussien, ou plus brutalement de rayon gaussien, sans faire appel à son origine. En posant  $w(z=0) = w_0$ , on montre [46] que

$$\underline{w}^2(z) = \underline{w}_0^2 [1 + (2z/k\underline{w}_0^2)^2] \quad (6.54)$$

(6.54) détermine la *taille du faisceau gaussien* à l'intérieur et à l'extérieur de la cavité. De plus, les surfaces équiphasées peuvent être considérées comme sphériques, et leur rayon de courbure est donné par:

$$\underline{R}(z) = z [1 + (k\underline{w}_0^2/2z)^2] \quad (6.55)$$

Le demi-angle d'ouverture  $\theta$  du faisceau laser peut se déduire de (6.55) (fig. 6.33)

$$\theta \cong 2/k\underline{w}_0^2 \quad (6.56)$$

Par passage à travers un système de lentilles optiques un rayon gaussien possède la propriété importante de rester gaussien [46]. Ainsi, la mesure d'un seul paramètre d'un rayon laser gaussien, son angle d'ouverture  $\theta$  par exemple, détermine le champ scalaire associé en tout lieu.

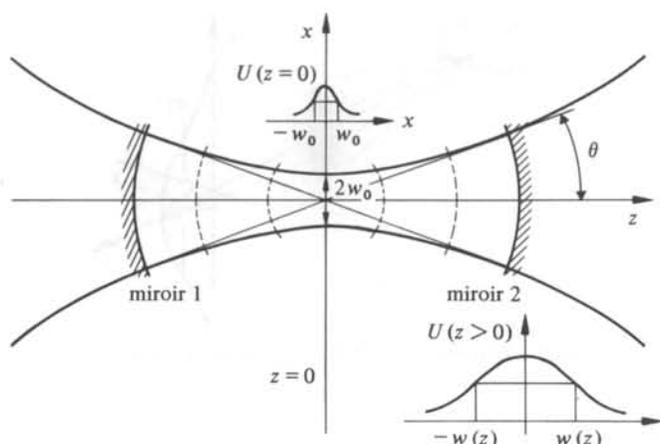


Fig. 6.33 Taille du faisceau laser et profils d'intensité.

### 6.5.6 Exemples

L'émission du laser à ruban enterré est celle qui se rapproche le plus d'une propagation gaussienne du mode fondamental (fig. 6.34). Cependant, en raison de la grande différence entre la largeur et la hauteur de la zone active, la taille du rayon gaussien est différente selon les axes  $x$  et  $y$  (fig. 6.35).

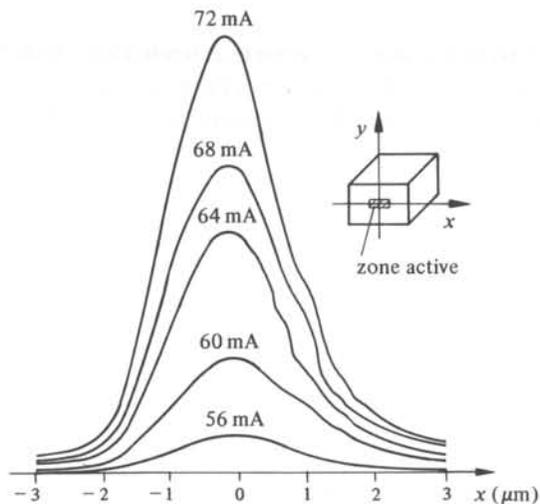


Fig. 6.34 Profil en intensité selon  $Ox$  pour une diode laser à ruban enterré [36].

Dans le cas des laser à guidage par le gain, un comportement plus complexe est souvent rencontré. Il en résulte une divergence accrue ( $30^\circ$ ), et surtout la présence possible d'*astigmatisme* dans le rayon : l'origine du faisceau gaussien n'est pas la même dans les deux plans  $xz$  et  $yz$ . Ces origines se situent à l'intérieur même de la zone active (fig. 6.36).

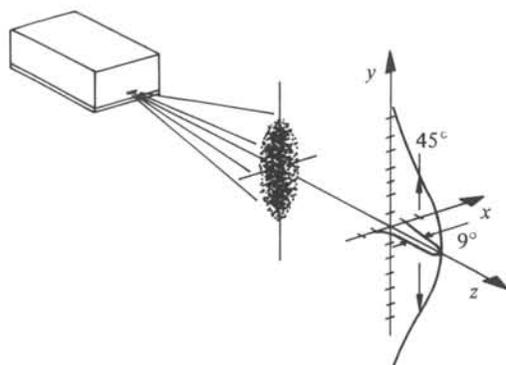


Fig. 6.35 Représentation schématique de la forme du faisceau émis par une diode laser.

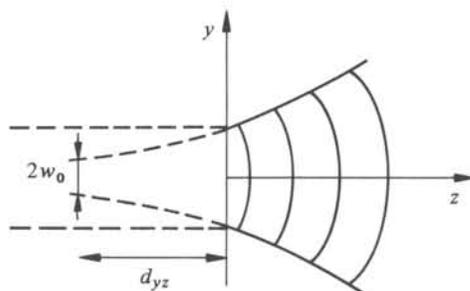


Fig. 6.36 Surfaces d'onde apparentes de l'onde guidée.

### 6.5.7 Caractéristique puissance rayonnante-courant d'une diode laser

Cette caractéristique fait l'objet de la figure 6.37. On remarque deux régions distinctes. Dans la première région, la diode fonctionne en LED, la puissance émise est relativement faible. Dans la seconde région, la diode émet un rayonnement stimulé, c'est un laser.

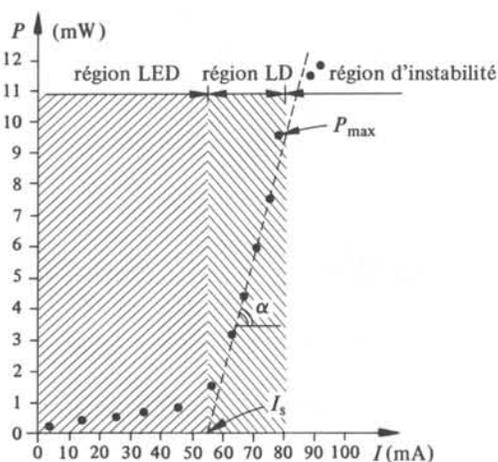


Fig. 6.37 Puissance rayonnée par une face en fonction du courant d'alimentation dans une diode laser à guidage par le gain.

La connaissance de la puissance maximale émise  $P_{\max}$  est souvent utile pour les applications. Elle dépend du type de structure de la diode laser. Dans le cas des structures à guidage par le gain, dès 8 mW environ, on observe des délocalisations du mode fondamental ou même l'apparition d'autres modes, de même que des défauts de linéarité. Des puissances supérieures ( $> 10$  mW) entraînent des dégâts irréversibles à la structure (miroirs, etc.).

Les diodes à guidage par l'indice à ruban enterré ont un meilleur comportement en puissance : les problèmes de non-linéarité ne se font sentir qu'à des puissances  $P_{\max} \cong 20$  mW.

À des puissances rayonnantes plus faibles que  $P_{\max}$ , une diode laser peut conserver une caractéristique stable pendant une période de l'ordre de  $10^5$  h, en régime continu. En raison de la forte pente de la caractéristique, *toutes les diodes laser sont très vulnérables aux transitoires de courant*. Aussi est-il impératif de placer des circuits de protection sur l'alimentation.

En régime de modulation sinusoïdale du courant, la puissance optique  $P$  suit la modulation jusqu'à des fréquences de l'ordre du gigahertz.

### 6.5.8 Courant de seuil

La caractéristique de la figure 6.37 est quasi linéaire dans la région où la diode fonctionne en laser. Le courant  $I_s$  (A), défini par l'intersection de la droite de linéarité avec l'axe  $I$ , porte le nom de *courant de seuil*. C'est aussi la valeur minimale du courant pour laquelle la diode fonctionne en laser.

Le courant de seuil est fonction de différents paramètres :

- Il dépend de la densité de courant de seuil (§ 6.4.8).
- Il est fonction du type de diode laser. Pour les diodes à guidage par l'indice,  $I_s \cong 20$  mA, et peut descendre jusqu'à quelques mA dans le cas des structures à ruban enterré. Pour les structures à guidage par le gain, une valeur typique est  $I_s \cong 100$  mA.
- Il varie fortement en fonction de la température, selon la loi [34] :

$$I_s = I_{s_0} \exp \left( \frac{T + \Delta T_T}{T_0} \right) \quad (6.57)$$

où  $\Delta T_T$  est l'échauffement de la zone active par effet Joule ( $\Delta T_T \cong 3$  K), et  $T_0$  une valeur expérimentale dépendant du type de diode laser,  $T_0 = 150$ - $200$  K pour l'AsGaAl et  $T_0 = 50$ - $70$  K pour les diodes laser GaInAs-P.

### 6.5.9 Rendement quantique différentiel externe

Par définition, le *rendement quantique différentiel externe*  $\eta_D$  est le rapport du nombre de photons s'échappant de la diode laser au nombre d'électrons injectés; on montre que

$$\eta_D = 2 \frac{\Delta P}{hf} \frac{e}{\Delta I} = \frac{2}{W_g} \operatorname{tg} \alpha \quad (6.58)$$

où  $f$  est la fréquence centrale d'émission du laser,  $W_g$  étant exprimé en eV.

On observe les valeurs typiques suivantes :

$\eta_D = 25\%$  pour une structure à guidage par le gain et  $\eta_D = 50\%$  pour des structures guidage par l'indice (jusqu'à 80% pour les structures à ruban enterré).

### 6.5.10 Cohérence temporelle des laser

La cohérence temporelle des laser (ou leur monochromaticité) dépend du nombre de modes longitudinaux existant simultanément dans le résonateur optique. A chaque mode correspond une longueur d'onde différente (6.38). Seules sont présentes effectivement les longueurs d'onde pour lesquelles (fig. 6.24) l'amplification est suffisante. La *caractéristique spectrique* du laser, soit la répartition de l'intensité en fonction de la longueur d'onde, se déduit de ces considérations (fig. 6.38).

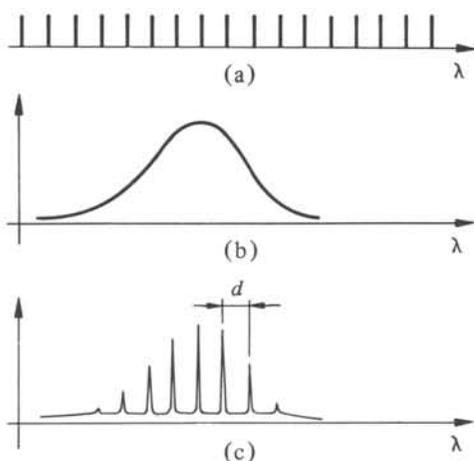


Fig. 6.38 Caractéristique spectrale: (a) longueurs d'onde permises; (b) courbe de gain; (c) spectre d'émission.

La différence  $d$  de longueur d'onde entre deux modes s'obtient en dérivant (6.38). On trouve

$$d \cong \frac{\lambda_0^2}{2nL} \quad \text{m} \quad (6.59)$$

On voit ainsi que  $d$  est inversement proportionnelle à la longueur de la cavité Fabry-Pérot.

### 6.5.11 Caractéristiques spectrales des diodes laser

En pratique, le spectre d'une diode laser à différents niveaux de puissances rayonnantes  $P$  (fig. 6.39) diffère sensiblement de celui prévu à la figure 6.38. De nombreuses causes peuvent être à l'origine de ces modifications :

- La vitesse de thermalisation des porteurs injectés peut être suffisante pour varier la fréquence de ceux qui se recombinent. La courbe de gain se déforme (« hole burning ») et son élargissement devient asymétrique.

- Des variations locales thermiques ou géométriques de la cavité peuvent entraîner des modifications de gain.
- Les diodes laser à guidage par le gain sont très multimodes, à cause de la largeur relativement importante de la courbe de gain (env. 5 nm) (fig. 6.39(a)). Comme la longueur de la cavité est  $L \cong 400$  nm, on trouve une séparation entre les modes  $d \cong 0,3$  nm.
- Les diodes laser à guidage par l'indice sont quasi-monochromatiques, mais *toute réflexion parasite dans la cavité détruit la contre-réaction et modifie la stabilité d'émission spectrale.*

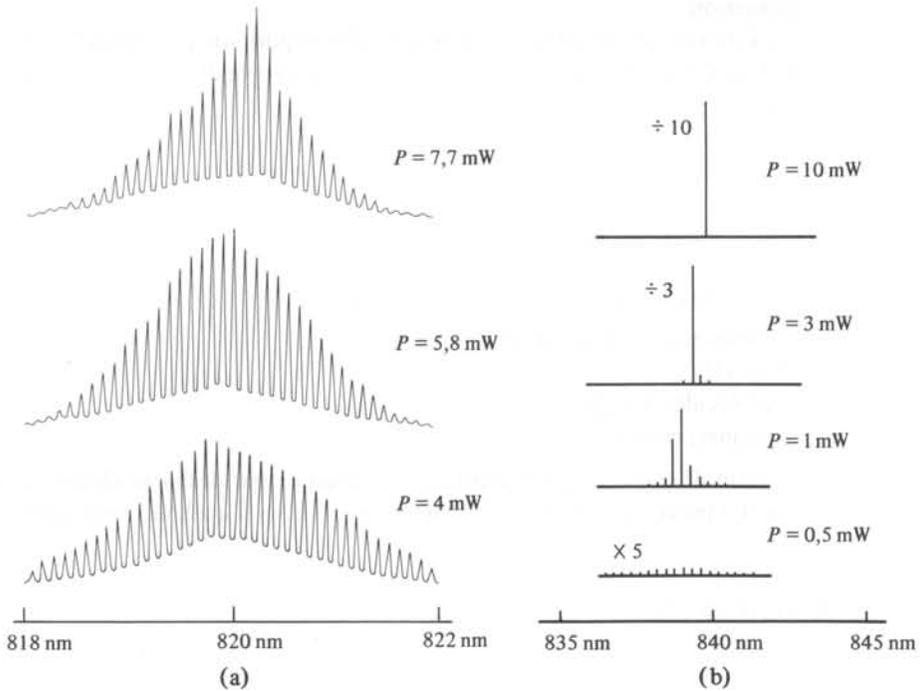


Fig. 6.39 (a) Spectre d'une diode laser à guidage par le gain; (b) spectre d'une diode laser à guidage par l'indice.

Tableau 6.40 Principaux semiconducteurs et leurs longueurs d'onde d'émission.

Semiconducteur	$W_g$ (eV)	$\lambda_c$ (nm)
GaAs	1,42	870
AlGaAs	1,42-2,17	570-870
InP	1,35	920
InGaAs	0,42-1,42	870-2950
InAlAl	0,42-2,17	570-2950
InP-In <sub>0,53</sub> Ga <sub>0,47</sub> As	0,86	1440
InP-In <sub>0,53</sub> Al <sub>0,47</sub> As	1,46	850
InGaAsP	0,71-1,35	920-1675
InGaAlAs	0,80-1,50	825-1550

### 6.5.12 Longueur d'onde centrale d'émission

La longueur d'onde centrale d'émission  $\lambda_c$  des diodes laser est une caractéristique importante, qui dépend du matériau utilisé dans la zone active, puisque tout le spectre est en général très ramassé autour de cette valeur (fig. 6.39). La plupart des longueurs d'onde disponibles se situent dans le proche infrarouge (tab. 6.40).

## 6.6 AUTRES TYPES DE LASER

### 6.6.1 Introduction

Bien qu'elles occupent une place de plus en plus importante pour les télécommunications et les capteurs, les diodes laser ne sont qu'un exemple de laser commercialement disponibles.

### 6.6.2 Laser à gaz

Ils sont d'une grande importance, puisque leurs longueurs d'onde centrales d'émission se situent souvent dans la partie visible du spectre.

Le milieu laser est un gaz, qui peut être formé :

- d'atomes neutres (gaz rares);
- d'ions (Hg);
- de molécules ( $\text{CO}_2$ );
- d'excimères (ArF).

L'inversion de population est généralement obtenue par décharge électrique à travers le gaz. Ce processus limite les rendements de tels laser à quelques pour cents.

### 6.6.3 Exemple: laser He-Ne

Le laser à hélium-néon (He-Ne) est certainement le type le plus courant des laser actuels dans les gammes de faibles puissances continues; son milieu amplificateur est un mélange de gaz He-Ne dans des proportions pouvant varier entre 5:1 et 10:1. Ce gaz est contenu dans une enceinte de verre, pourvue d'une anode et d'une cathode, sous une pression de 1 mbar environ (fig. 6.41).

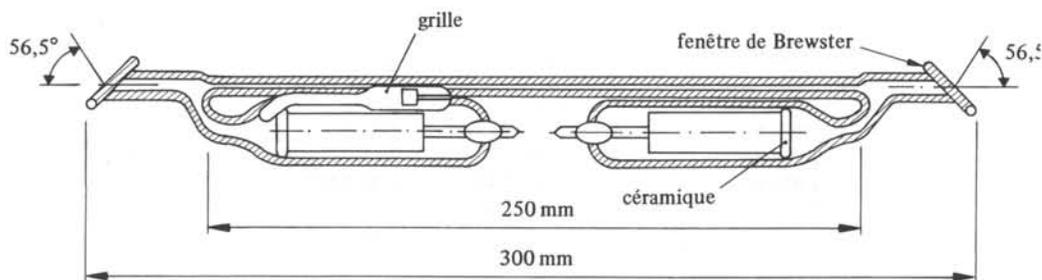


Fig. 6.41 Laser He-Ne.

Les décharges produites à l'intérieur de l'enceinte (10 mA sous 3 kV) excitent les atomes d'hélium, qui par collisions, excitent à leur tour les états  $3S_2$  et  $2S_2$  du néon (chap. II.1.2.7). Les transitions laser permises sont alors  $3S_2 \rightarrow 2P_4$  ( $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ ),  $2S_2 \rightarrow 2P_4$  ( $\lambda = 1,152 \mu\text{m}$ ) et  $3S_2 \rightarrow 3P_4$  ( $\lambda = 3,391 \mu\text{m}$ ) (fig. 6.42).

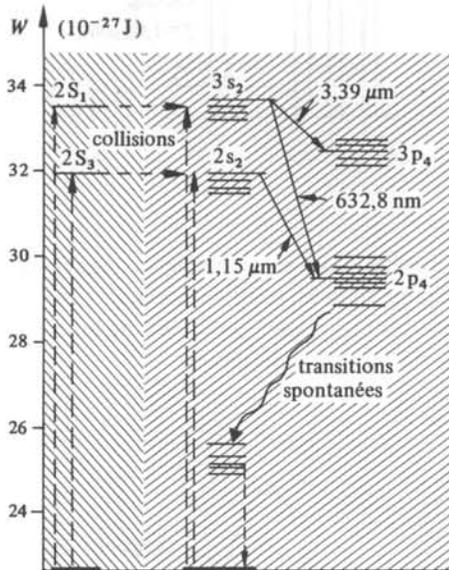


Fig. 6.42 Niveaux d'énergie du laser He-Ne.

Le milieu laser est limité par deux miroirs de très grande réflectivité (99,9%), dont un est pourvu d'une fenêtre laissant échapper le rayonnement laser utile. La puissance maximale de sortie des laser He-Ne est limitée à quelques mW.

#### 6.6.4 Laser à corps solides

Le milieu laser de ce type de source est constitué de dopants (terres rares, métaux de transition) implantés dans des matrices transparentes (cristaux ou verres). L'inversion de population est obtenue optiquement par lampe flash. Les longueurs d'onde d'émission couvrent le spectre de 550 nm à 2,69  $\mu\text{m}$ . Ces laser sont spécialement utilisés lorsqu'une grande puissance rayonnante est nécessaire, par exemple, pour l'usage.

#### 6.6.5 Exemple : laser YAG-Nd

Le milieu laser est constitué de néodyme implanté dans une matrice synthétique de grenat (YAG). L'émission se produit à  $\lambda_0 \cong 1 \mu\text{m}$ . Aux températures normales, le niveau  $W_1$  (fig. 6.43) est quasiment vide, ce qui permet d'obtenir une très forte inversion de population. Ainsi, des puissances rayonnantes de l'ordre du kW sont possibles en régime continu.

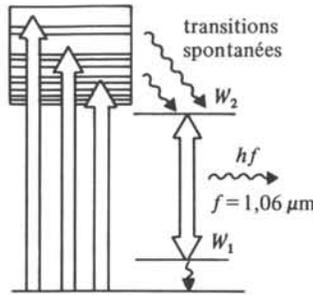


Fig. 6.43 Niveaux d'énergie du laser YAG-Nd.

### 6.6.6 Laser à colorants

Les laser à colorants utilisent des colorants organiques fluorescents comme milieu laser. Ils sont excités par lampe flash ou par d'autres laser. Leur principal avantage est d'être continûment réglable sur une plage assez grande de longueurs d'onde (fig. 6.44). Ces laser couvrent toute la partie visible du spectre.

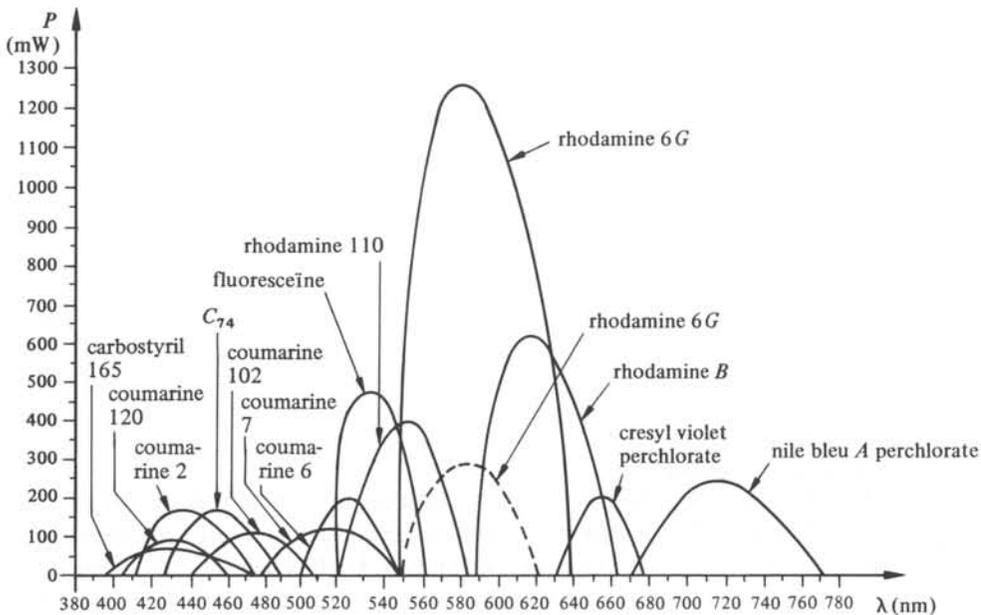


Fig. 6.44 Largeurs spectrale et puissances des laser à colorants [45].

## 6.7 EXERCICES

6.7.1 Exprimer l'élément d'angle solide  $d\Omega$  en coordonnées sphériques.

6.7.2 Montrer qu'une source lambertienne possède une radiance constante quelle que soit la direction d'observation.

6.7.3 A l'aide de la loi de Planck (6.10), vérifier la validité de la loi du déplacement de Wien (6.11).

6.7.4 Couplage d'une lampe à filament de tungstène à une fibre optique. On considère la situation schématique idéale de la figure 6.45 :

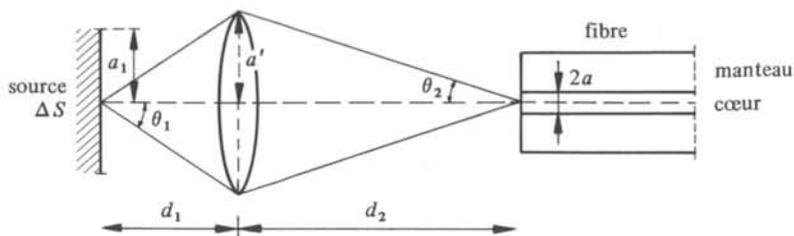


Fig. 6.45 Couplage lampe-fibre.

Un filament de tungstène assimilé à un élément de surface  $\Delta S$  émet un rayonnement focalisé dans le cœur d'une fibre optique au moyen d'une lentille mince.

- Vérifier en premier lieu qu'une lentille de faible diamètre conserve la radiance de la source. Il suffit en fait de vérifier que le produit  $\Delta S \Delta \theta$  est conservé, puisque la puissance rayonnée l'est (lentille parfaitement transparente).
- Vérifier que, pour une fibre multimode à saut d'indice, le rapport  $r$  de la puissance émise à celle injectée vaut :

$$r = k(\text{NA})^2 a^2 / a_1^2 \theta_1^2 \quad (6.60)$$

où  $k$  est la fraction de puissance émise qui traverse la lentille, NA est l'ouverture numérique de la fibre, de rayon du cœur égal à  $a$ .

- Obtenir une formule semblable à (6.60) pour les fibres monomodes.
- Etablir un tableau des puissances injectées, en fonction de la température du filament de la lampe de tungstène.

6.7.5 Vérifier les relations d'Einstein (§ 6.4.4) en exprimant qu'à l'équilibre thermique, l'émission doit exactement compenser l'absorption du semiconducteur, que l'on considère comme un corps noir (§ 6.2.1).



## CAPTEURS OPTIQUES PASSIFS

## 7.1 CLASSIFICATION

## 7.1.1 Capteurs optiques

Les capteurs optiques sont, à strictement parler, des transducteurs opto-électroniques. La plupart de ces capteurs font appel aux propriétés intrinsèques de la matière à un niveau microscopique. Dans ce sens, les mécanismes de base se situent au niveau 0 de l'introduction du Traité d'Electricité. Ils sont décrits plus particulièrement dans le volume II, et se laissent aborder par le modèle corpusculaire de la lumière (chap. 6 et 8). Les détecteurs lumineux à semiconducteurs sont les exemples les plus connus de ce type de capteurs.

D'un point de vue plus général, un capteur optique est un capteur utilisant une modification de la lumière par la grandeur à mesurer (fig. 7.1). Dans la plupart des cas, le capteur comprend une source lumineuse, un milieu dans lequel la lumière se propage, un élément capteur massif, et un détecteur. La description des phénomènes impliqués se situe toujours au niveau fondamental, mais, dans la majeure partie des applications, le modèle des équations de Maxwell (vol. III) est suffisant pour décrire la propagation de la lumière.

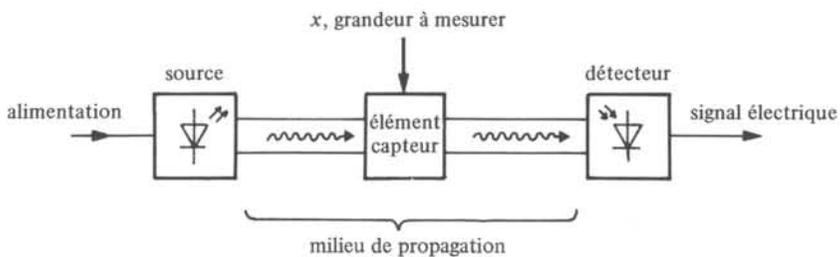


Fig. 7.1 Capteur optique à propagation.

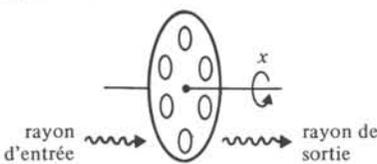
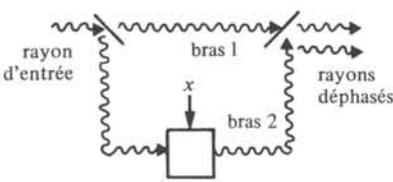
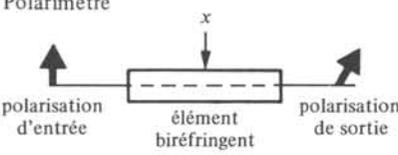
Il importe d'avoir une vision d'ensemble des capteurs optiques: l'émission, la transmission et la détection lumineuse font partie d'un tout. Chaque phénomène ne cesse de prendre de l'importance par rapport aux autres avec le développement des composants opto-électroniques.

Le chapitre 7 traite du modèle ondulatoire de la lumière et des capteurs optiques utilisant un phénomène de propagation.

### 7.1.2 Classification des capteurs passifs

On peut diviser ces capteurs en trois classes (tab. 7.2).

Tableau 7.2 Classification des capteurs optiques passifs.

Grandeur optique modulée	Exemple de réalisation
Intensité	Système « tout-ou-rien » 
Phase	Interféromètre 
Polarisation	Polarimètre 

Les capteurs à variation d'intensité sont les plus simples à mettre en œuvre. Ils n'imposent pas d'exigence particulière quant à la source de lumière ou le détecteur. L'intensité de l'onde après la traversée d'un milieu atténuateur ou dispersif est la grandeur captée par le détecteur optique (§ 7.2.14).

Les capteurs à variation de phase sont plus sophistiqués et ont une sensibilité très grande à la fois au signal à mesurer et aux perturbations. Ils nécessitent souvent une compensation des grandeurs interférentes. Les éléments optiquement actifs insérés dans un des bras du dispositif (s'il s'agit d'un interféromètre) ont pour effet de changer la phase de l'onde les traversant (§ 7.2.16).

Les capteurs à variation de polarisation contiennent un élément biréfringent (sect. 7.4). La détermination de l'état de polarisation de la lumière nécessite la mesure de plusieurs paramètres (sect. 7.3).

La propagation de la lumière dans l'air présente un certain nombre de contraintes, en particulier :

- la propagation en ligne droite implique des longueurs de parcours réduites, inférieures à quelques mètres en général;
- le contrôle des propriétés du milieu dans le temps et dans l'espace;

- les pertes aux interfaces air-matériau actif, qui nécessitent souvent l'usage de dépôts anti-reflets.

Pour se libérer de ces contraintes, on transmet souvent la lumière dans des milieux connus, dont les pertes sont limitées: les fibres optiques et les guides d'onde utilisés en optique intégrée. On trouve à la section XVIII.3.7 une description de la structure et des paramètres fondamentaux des fibres optiques, tandis que leurs propriétés de propagation (modes) sont décrites dans la section XIII.2.10. On se limite dans ce qui suit à parler des propriétés des fibres optiques directement utilisables dans le domaine des capteurs. Le lecteur intéressé par les propriétés spécifiques aux télécommunications se reportera au chapitre 13 du volume XVIII. Une revue complète des capteurs à fibres optiques se trouve dans [47].

## 7.2 PROPAGATION DE LA LUMIÈRE

### 7.2.1 Optique ondulatoire, définition

L'*optique ondulatoire* est l'étude à l'aide du modèle de Maxwell (vol. III) des phénomènes lumineux visibles pour l'œil humain. Elle concerne donc la bande du spectre électromagnétique entre  $\lambda = 0,38 \mu\text{m}$  et  $\lambda = 0,77 \mu\text{m}$ . Les techniques mises en appli-

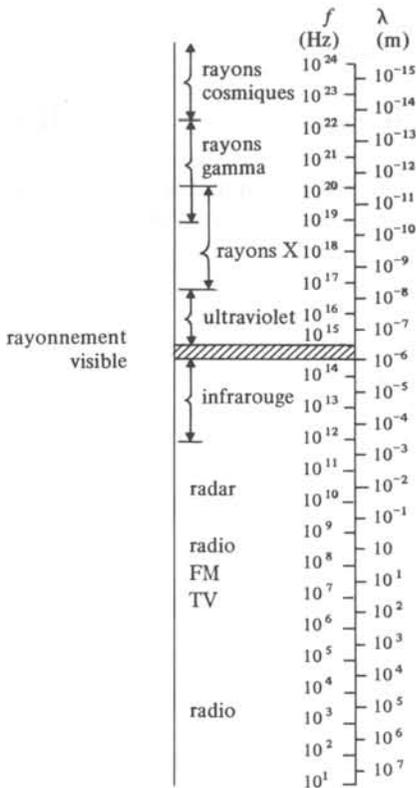


Fig. 7.3 Spectre électromagnétique.

cation (guidage, focalisation) étant essentiellement les mêmes pour les rayonnements ultraviolets et infrarouges proches, on étend généralement la définition de l'optique à ces bandes du spectre (fig. 7.3).

D'ailleurs, les résultats de l'optique sont encore applicables dans d'autres domaines plus éloignés du spectre électromagnétique. Le formalisme de l'optique géométrique, par exemple, est suffisant pour décrire les propriétés de certaines antennes utilisées en télécommunications (chap. III.7).

### 7.2.2 Equations des milieux transparents

Un milieu est *transparent* lorsque l'atténuation des ondes lumineuses y est faible, donc négligeable. La nature électromagnétique de la lumière implique que seules les matières pratiquement isolantes électriquement peuvent être transparentes. En effet, la profondeur de pénétration  $\delta_p$  d'une onde plane dans un milieu de résistivité  $\rho$ , où  $\epsilon = \epsilon_0$  et  $\mu = \mu_0$  est donnée (§ III.6.1.2) par :

$$\frac{1}{\delta_p} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 + \sqrt{(\omega^2 \mu_0 \epsilon_0)^2 + (\omega \mu_0 / \rho)^2}} \quad \text{m}^{-1} \quad (7.1)$$

En tirant  $\rho$  de cette expression, on obtient :

$$\rho = \frac{\omega \mu_0 \delta_p}{2 \sqrt{\delta_p^{-2} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0}} \quad \Omega \text{ m} \quad (7.2)$$

Aux fréquences optiques (7.2) se réduit à :

$$\rho = \frac{\delta_p}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cong 188 \Omega \cdot \delta_p \quad \Omega \text{ m} \quad (7.3)$$

On remarque que la profondeur de pénétration ne dépend plus de la fréquence, contrairement à ce qu'on observe aux fréquences utilisées en électricité. La relation (7.3) est représentée à la figure 7.4.

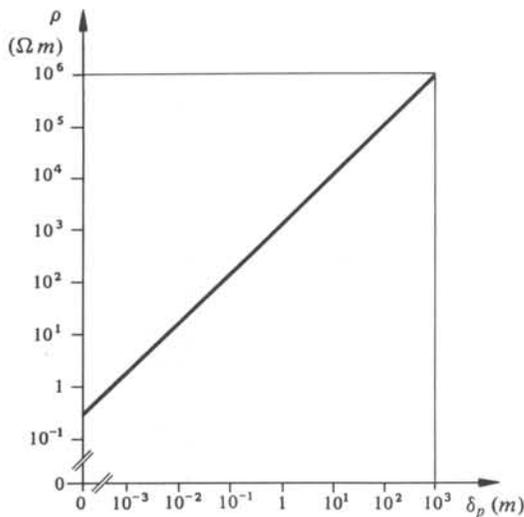


Fig. 7.4 Résistivité et profondeur de pénétration.

Dans ce qui précède, l'atténuation de l'onde est liée à  $\rho$  exclusivement; elle est donc due aux courants de Foucault induits dans la matière par l'onde elle-même. Souvent, on fait abstraction de ce type d'atténuation, soit parce qu'il est connu, soit parce qu'il est négligeable. Dans ces conditions, on peut appliquer aux milieux transparents les équations de Maxwell pour les diélectriques (absence de charge et de courant):

$$\nabla \wedge \underline{E} + \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{Vm}^{-2} \quad (7.4)$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \quad \text{Tm}^{-1} \quad (7.5)$$

$$\nabla \wedge \underline{H} - \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} = 0 \quad \text{Am}^{-2} \quad (7.6)$$

$$\nabla \cdot \underline{D} = 0 \quad \text{Cm}^{-3} \quad (7.7)$$

Dans ces équations, les champs sont des vecteurs complexes (chap. III.5).

On remarque enfin que si un milieu transparent est forcément un diélectrique (ou un semiconducteur), la réciproque est fautive, comme le montre l'expérience quotidienne. Ceci est dû à l'existence des pertes diélectriques de polarisation (§ II.4.6.1).

### 7.2.3 Caractéristiques des milieux de propagation

Les équations de Maxwell ne sont pas suffisantes pour décrire la propagation des ondes lumineuses, même dans le vide. Il est nécessaire de faire apparaître les propriétés du milieu de propagation. Elles interviennent par l'intermédiaire des relations liant  $\underline{D}$  à  $\underline{E}$  et  $\underline{B}$  à  $\underline{H}$ . En toute généralité, on admet que ces relations sont développables en puissance des champs.

Dans la plupart des matériaux, une relation linéaire entre les champs est suffisante. Seuls quelques phénomènes s'expliquent par les termes quadratiques du développement; c'est notamment le cas si les champs sont très intenses, ou la densité d'énergie électromagnétique très élevée (section 7.5). On parle alors d'*optique non-linéaire*.

Si on se restreint à l'optique linéaire, on a pour les composantes des champs:

$$\underline{D}_i = \epsilon_0 \epsilon_{ik} \underline{E}_k \quad \text{Cm}^{-2} \quad (7.8)$$

$$\underline{B}_i = \mu_0 \mu_{ik} \underline{H}_k \quad \text{T} \quad (7.9)$$

avec

$(\epsilon_{ik})$ : tenseur de permittivité relative;

$(\mu_{ik})$ : tenseur de perméabilité relative.

Pour la quasi totalité des phénomènes lumineux, les milieux, presque toujours diélectriques peuvent être considérés comme non-magnétiques. L'équation (7.9) se réduit alors à:

$$\underline{B} = \mu_0 \underline{H} \quad \text{T} \quad (7.10)$$

avec  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m, perméabilité du vide. *Sauf mention explicite du contraire, on suppose la relation (7.10) valable pour tous les milieux de propagation.*

### 7.2.4 Indice de réfraction. Définition

Dans un milieu isotrope, les champs  $\underline{D}$  et  $\underline{E}$  sont colinéaires, et (7.8) devient

$$\underline{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \underline{E} \quad \text{Cm}^{-2} \quad (7.11)$$

où  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$  est la permittivité du vide et  $\epsilon_r$  la permittivité relative du matériau.

Pour des raisons historiques et pratiques, l'optique utilise à la place de  $\epsilon_r$ , une autre grandeur, sans dimension elle aussi: l'*indice de réfraction* du milieu,  $n$ , défini par

$$n = \sqrt{\epsilon_r} \quad (7.12)$$

### 7.2.5 Equation d'onde

L'équation d'onde est la relation fondamentale de la propagation des ondes électromagnétiques. Sous l'hypothèse d'une propagation dans un milieu isotrope sans perte (7.11) s'écrit, tenant compte de (7.12)

$$\underline{D} = \epsilon_0 n^2 \underline{E} \quad \text{Cm}^{-2} \quad (7.13)$$

En introduisant (7.13) et (7.10) dans les équations (7.4) et (7.6), il vient

$$\nabla \wedge \underline{E} + \mu_0 \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} = 0 \quad \text{Vm}^{-2} \quad (7.14)$$

$$\nabla \wedge \underline{H} - \epsilon_0 n^2 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = 0 \quad \text{Am}^{-2} \quad (7.15)$$

En appliquant l'opérateur  $\nabla \wedge$  à (7.14), on a

$$\nabla (\nabla \cdot \underline{E}) - \nabla^2 \underline{E} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \wedge \underline{H}) = 0 \quad \text{Vm}^{-3} \quad (7.16)$$

Le premier terme peut être transformé grâce à (7.7):

$$\nabla \cdot \underline{D} = \epsilon_0 \nabla \cdot (n^2 \underline{E}) = (\nabla n^2) \cdot \underline{E} + n^2 \nabla \cdot \underline{E} = 0 \quad \text{Cm}^{-3} \quad (7.17)$$

Donc

$$-\nabla \left( \frac{\nabla n^2}{n^2} \cdot \underline{E} \right) - \nabla^2 \underline{E} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon_0 n^2 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad \text{Vm}^{-3} \quad (7.18)$$

En regroupant les termes, et en faisant l'hypothèse supplémentaire

$$\frac{\nabla n^2}{n^2} = \nabla \text{Ln}(n^2) = 2 \nabla \text{Ln}(n) = 0 \quad (7.19)$$

qui est satisfaite, par exemple, dans les milieux homogènes, on a finalement:

$$\nabla^2 \underline{E} - \mu_0 \epsilon_0 n^2 \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{Vm}^{-3} \quad (7.20)$$

C'est l'équation d'onde du champ électrique. Par un calcul semblable, on trouve l'équation d'onde du champ magnétique :

$$\nabla^2 \underline{H} - \mu_0 \epsilon_0 n^2 \frac{\partial^2 \underline{H}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{Am}^{-3} \quad (7.21)$$

### 7.2.6 Vitesse de la lumière

On remarque d'après (7.20) et (7.21) que les vitesses des champs électrique et magnétique sont égales, et valent

$$v = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad \text{ms}^{-1} \quad (7.22)$$

La théorie de la relativité postule que cette vitesse dans le vide, (où  $\epsilon_r = n^2 = 1$ ), est une constante universelle,  $c$ , indépendante de l'observateur :

$$c = 299' 792' 458 \quad \text{ms}^{-1} \quad (7.23)$$

Ce point de vue permet d'interpréter l'indice de réfraction comme le rapport de la vitesse dans le vide à celle dans le milieu de propagation, puisque, d'après (7.22) :

$$n = \frac{c}{v} \quad (7.24)$$

### 7.2.7 Représentation spectrale

En utilisant les ressources de l'analyse harmonique, on admet que les solutions des équations (7.20) et (7.21) sont exprimables par les intégrales :

$$\underline{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{\omega} \underline{E}(\mathbf{r}, \omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad \text{Vm}^{-1} \quad (7.25)$$

$$\underline{H}(\mathbf{r}, t) = \int_{\omega} \underline{H}(\mathbf{r}, \omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad \text{Am}^{-1} \quad (7.26)$$

En remplaçant (7.25) et (7.26) dans (7.20) et (7.21) on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \underline{E} + n^2 \frac{\omega^2}{c^2} \underline{E} &= 0 \\ \nabla^2 \underline{H} + n^2 \frac{\omega^2}{c^2} \underline{H} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.27)$$

Par définition, les vecteurs-phaseurs (sect. III.5.2)

$$\left. \begin{aligned} \underline{E}(\mathbf{r}, \omega) \\ \underline{H}(\mathbf{r}, \omega) \end{aligned} \right\} \quad (7.28)$$

représentent des *ondes monochromatiques* de pulsation  $\omega$ , tandis que les ondes (7.25) et (7.26) sont *polychromatiques*. On voit à l'aide de (7.27) que l'étude des solutions des équations d'onde peut se ramener à l'étude des ondes monochromatiques.

### 7.2.8 Définitions relatives aux ondes monochromatiques

Pour une onde monochromatique se propageant dans un milieu donné d'indice  $n$ , on définit :

- la *nombre d'onde*  $k$  par

$$k = n \frac{\omega}{c} \quad \text{m}^{-1} \quad (7.29)$$

- la *longueur d'onde*  $\lambda$  par

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad \text{m} \quad (7.30)$$

- la *période de l'onde*  $T$  par

$$T = \frac{n\lambda}{c} \quad \text{s} \quad (7.31)$$

- la *fréquence de l'onde*  $f$  par

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{Hz} \quad (7.32)$$

Toutes ces grandeurs sont liées; par exemple, on a :

$$\lambda f = \frac{c}{n} = v \quad \text{ms}^{-1} \quad (7.33)$$

Le nombre d'onde et la longueur d'onde dépendent du milieu de propagation. Dans le vide on les note  $k_0$  et  $\lambda_0$  respectivement.

### 7.2.9 Champ scalaire

Les équations (7.27) sont en fait un ensemble de six équations scalaires présentant chacune la forme de l'équation de Helmholtz

$$\nabla^2 \underline{U} + k^2 \underline{U} = 0 \quad (7.34)$$

Ici,  $\underline{U}$  est une composante quelconque des champs  $\underline{H}$  ou  $\underline{E}$ . Dans beaucoup d'applications, la connaissance de  $\underline{U}$  est suffisante pour résoudre complètement le problème, sans remonter à  $\underline{E}$  et  $\underline{H}$ . On utilise alors le *champ scalaire*  $\underline{V}(\mathbf{r}, t)$  défini par

$$\underline{V}(\mathbf{r}, t) = \underline{U}(\mathbf{r}) \exp(j\omega t) \quad (7.35)$$

où  $\underline{U}(\mathbf{r})$  est l'*amplitude complexe du champ scalaire*.

Deux types de phénomènes ne peuvent *pas* être décrits par l'approximation du champ scalaire.

- Les phénomènes où interviennent les propriétés vectorielles des champs, comme la polarisation (sect. 7.3).
- Les phénomènes où interviennent les conditions aux limites pour  $\underline{E}$  et  $\underline{H}$  (sect. III.1.4).

### 7.2.10 Exemples: ondes planes et ondes sphériques

On vérifie sans peine que

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = A \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (7.36)$$

est une solution de (7.34) si  $\mathbf{k}$  est un vecteur dont le module est égal au nombre d'onde. On appelle  $\mathbf{k}$  le *vecteur d'onde*.

Il existe donc une solution pour chaque vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Toutes ces solutions sont des *ondes planes*, puisque l'ensemble des points  $\mathbf{r}$  pour lesquels  $\underline{U}$  est constant est un plan perpendiculaire à  $\mathbf{k}$  (fig. 7.5). Le vecteur  $\mathbf{k}$  est colinéaire à la direction de propagation de l'onde. On appelle  $A$  l'*amplitude* de l'onde et  $(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  sa *phase*.

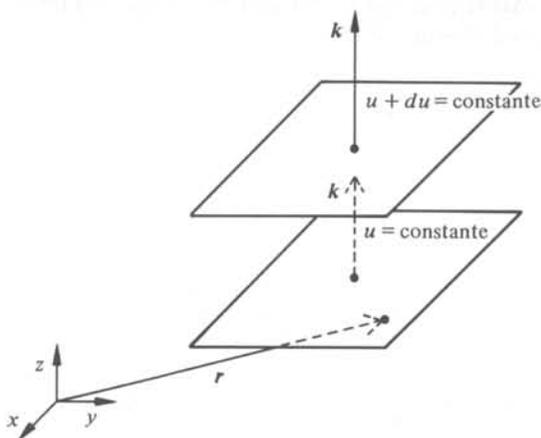


Fig. 7.5 Onde plane.

De la même manière, on vérifie que :

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = \frac{A}{|\mathbf{r}|} \exp(-jk|\mathbf{r}|) \quad (7.37)$$

est une solution pour laquelle l'ensemble des points à  $\underline{U}$  constant est une sphère (ici centrée à l'origine). Une telle onde se propageant uniformément dans toutes les directions, (pour autant que le milieu soit lui-même uniforme) est appelée *onde sphérique*.

### 7.2.11 Optique géométrique

Dans de nombreuses situations rencontrées en optique, on peut se contenter d'une approximation grossière en termes d'ondes planes, ou plus exactement, de « morceaux d'onde plane ». Toutes les sources lumineuses émettent des ondes qui, observées à une certaine distance et dans une portion limitée de l'espace, ne sont pas très différentes d'ondes planes. Cette approche constitue le modèle de l'*optique géométrique*. Ce modèle n'est utilisable que si on se limite aux grandes dimensions devant la longueur d'onde  $\lambda$ , tant pour l'observation que pour l'interaction. En effet, si on agit sur une onde lumineuse avec un objet de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde, les perturbations *locales* des champs sont importantes. Le modèle implique qu'on les néglige. On suppose donc que les dimensions des objets sont beaucoup plus grandes que la longueur

d'onde ou, ce qui revient au même, que la longueur d'onde est négligeable, comparée aux autres dimensions. Mathématiquement, cela correspond au passage à la limite  $\lambda_0 \rightarrow 0$ , ou encore  $k_0 \rightarrow \infty$ .

On peut décrire l'onde quasi-plane admise dans le modèle par l'équation :

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp[jk_0 S(\mathbf{r})] \quad (7.38)$$

dans laquelle  $S$  est une fonction réelle de  $\mathbf{r}$  seulement et  $k_0$  le nombre d'onde dans le vide. Par substitution dans (7.34), on obtient :

$$\nabla^2 A + jk_0(2\nabla A \cdot \nabla S + A\nabla^2 S) + Ak_0^2(n^2 - (\nabla S)^2) = 0 \quad (7.39)$$

Une condition nécessaire pour que (7.39) demeure valable à la limite  $k_0 \rightarrow \infty$  est d'exiger que le terme en  $k_0^2$  s'annule, d'où :

$$n^2 = (\nabla S)^2 \quad (7.40)$$

Cette équation, dite *équation d'eikonale*, permet de déterminer la fonction  $S(\mathbf{r})$  à une constante près, donc la forme des surfaces de phase constante que sont les *fronts d'onde* (fig. 7.6).

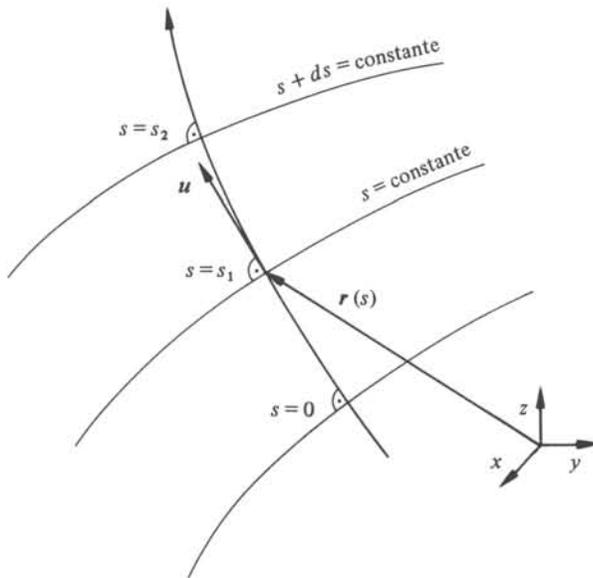


Fig. 7.6 Fronts d'onde et rayons.

### 7.2.12 Equation des rayons

L'expérience montre que les fronts d'onde se déplacent perpendiculairement à eux-mêmes, c'est-à-dire suivant la normale  $\mathbf{u}$  qui est parallèle au gradient de  $S$  :

$$\mathbf{u} = (\nabla S)/|\nabla S| \quad (7.41)$$

On tire de l'équation d'eikonale :

$$\mathbf{u} = (\nabla S)/n \quad (7.42)$$

Il est naturel de décrire la trajectoire  $\mathbf{r}$  d'un rayon lumineux en fonction de l'abscisse curviligne  $s$  comptée le long de ce rayon:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ . Dans ce cas, le vecteur tangent est unitaire. Il doit bien entendu coïncider avec le déplacement des fronts d'onde,  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = (\nabla S)/n \quad (7.43)$$

En utilisant (7.40) et (7.43) on voit que:

$$n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \nabla S = n \frac{dS}{ds} = n^2 \quad (7.44)$$

La longueur du rayon entre deux fronts d'onde est donc inversement proportionnelle à l'indice de réfraction  $n$ , ou si l'on préfère, directement proportionnelle à la vitesse  $v$  de l'onde.

En tenant compte de l'identité vectorielle

$$\nabla (\nabla S)^2 \equiv 2 \nabla S \nabla \cdot (\nabla S) \quad (7.45)$$

(7.43) devient

$$\nabla (\nabla S)^2 = 2n(\mathbf{u} \cdot \nabla) \cdot \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) \quad (7.46)$$

Or, l'opérateur  $\mathbf{u} \cdot \nabla$  représente la dérivée dans la direction  $\mathbf{u}$ , ici  $d/ds$ . En utilisant (7.42) une dernière fois, on obtient l'équation de la trajectoire des rayons lumineux :

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n \quad (7.47)$$

A l'aide de cette équation, on retrouve les lois de l'optique géométrique, dont les principales sont rappelées dans le tableau 7.7.

### 7.2.13 Exemple

On vérifie que dans un milieu homogène, les rayons lumineux se propagent en lignes droites. En effet, si le milieu est homogène,  $\nabla n = 0$  et  $n d\mathbf{r}/ds$  est égal à une constante vectorielle indépendante de  $s$ . Il s'ensuit que  $\mathbf{r}$  est une fonction linéaire de  $s$ , et que  $\mathbf{r} = \mathbf{f}(s)$  est une droite.

### 7.2.14 Capteurs à variation d'intensité

Les capteurs à variation d'intensité sont aussi divers que le sont les moyens de modifier l'intensité lumineuse. Le tableau 7.8 donne une liste d'exemples et de références. Dans bon nombre de cas, il est important d'avoir:

- une bonne directivité du rayon incident, et une faible grandeur du spot;
- une intensité suffisante, afin de permettre une détection aisée.

Ces deux exigences peuvent être satisfaites de plusieurs manières, parmi lesquelles on peut citer:

- l'emploi d'un laser (solution coûteuse);

Tableau 7.7 Règles d'optique géométrique.

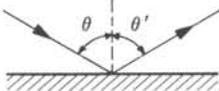
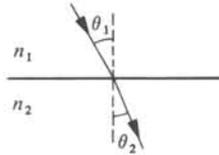
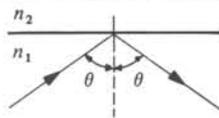
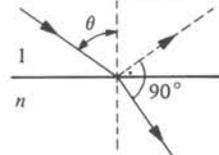
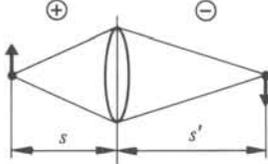
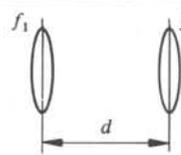
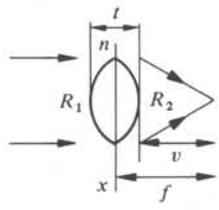
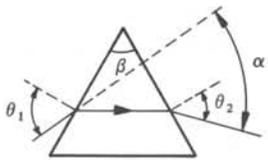
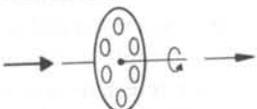
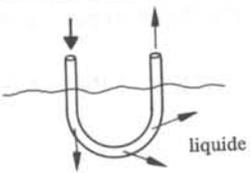
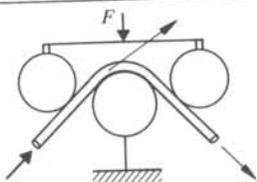
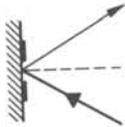
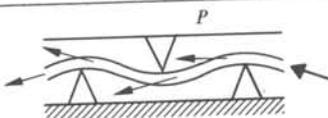
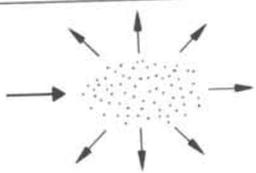
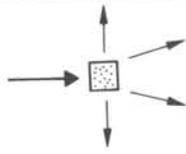
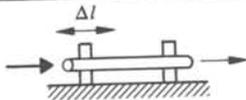
Règle	Schéma	Relation
Loi de la réflexion		$\theta = \theta'$ . Le rayon incident, le rayon réfléchi et la normale sont dans un même plan.
Loi de Descartes		$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ . Le rayon incident, le rayon réfracté et la normale sont dans le même plan.
Réflexion totale		Angle critique : $\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$ . Réflexion totale pour $\theta > \theta_c$
Loi de Brewster		$\operatorname{tg} \theta = n$ . Le rayon réfracté est linéairement polarisé perpendiculairement au plan d'indidence (§ 7.3.4).
Loi des lentilles		$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'}$ . Distance focale = $f$ . Grandissement = $s'/s$ .
Combinaison de 2 lentilles		$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d}$ . Focale résultante du système.
Lentille épaisse $x$ : plan principal		$\frac{1}{f} = (n-1) \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{t(n-1)}{nR_1R_2} \right]$ $V = f \left[ 1 - \frac{t(n-1)}{nR_1} \right]$ $f = \frac{vn + t}{n}$
Déplacement angulaire dans un prisme		$\alpha + \beta = \theta_1 + \theta_2$

Tableau 7.8 Exemples de capteurs optiques à variation d'intensité.

Type de propagation	Capteur	Effet utilisé	Schéma	Référence
Transmission	Hacheur	« Tout-ou-rien »		
	Réfractomètre	Variation des pertes avec $n$		[48]
	Force	Variation des pertes avec le rayon de courbure		[49]
	Densité	Absorption		
Réflexion	Codeur en barres	« Tout-ou-rien »		[50]
	Pression	Variation des pertes avec la courbure		[51]
	Densité	Diffusion		
	Température	Fluorescence		[52]
	Autre	Force	Allongement des temps de parcours	

- l'emploi d'une source conventionnelle, par exemple une diode électroluminescente (LED) et d'une fibre optique multimode pour assurer la directivité à l'entrée du capteur, et, le cas échéant, à la sortie.

Si l'emploi d'un laser reste une nécessité pour des puissances de l'ordre de plusieurs watt, l'usage des LED tend à se généraliser dans le cas des puissances moyennes (mW) et faibles ( $\mu\text{W}$ ), surtout depuis la commercialisation de composants intégrant diode lumineuse et fibre, ou détecteur et fibre.

Les laser à semiconducteurs et les LED permettent une modulation électrique très simple du signal optique, et par conséquent, une amélioration importante du rapport signal/bruit.

Les capteurs optiques à variation d'intensité ont envahi le marché, pour les raisons suivantes :

- une très grande fiabilité;
- un fonctionnement en environnements extrêmes (basses et hautes températures, corrosion, forts champs);
- peu ou pas d'entretien;
- un coût faible à modéré.

En nombre d'unités produites, ils restent de loin les plus fabriqués. Parmi les nombreuses utilisations possibles on peut citer la lecture des « codes barres » [50], la surveillance anti-feu [54], et la lecture des disques « compacts » [55].

### 7.2.15 Accéléromètre à fibres optiques, exemple [56]

Le capteur proprement dit d'un tel accéléromètre est représenté à la figure 7.9. Il se compose d'un boîtier rigide étanche, dans lequel se font face deux fibres multimodes. La première (A) est la fibre d'injection par laquelle arrive la lumière. Elle possède un bras libre de 2 cm auquel est attaché une masse  $m$ . La seconde (B) est la fibre réceptrice, dont le cœur est soigneusement aligné sur celui de la fibre d'injection, à une distance de

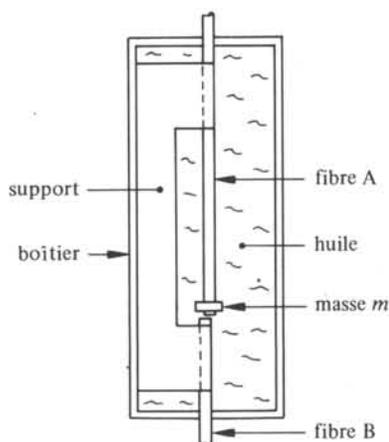


Fig. 7.9 Schéma d'un accéléromètre à fibres optiques.

l'ordre de  $10\ \mu\text{m}$ . Un liquide visqueux (huile) remplit le boîtier de façon à amener les oscillations de la fibre (A) dans leur régime d'amortissement critique (§ 1.3.11).

L'accélération est mesurée par la variation de l'intensité lumineuse dans la fibre B, en fonction du déplacement des cœurs des fibres (fig. 7.10).

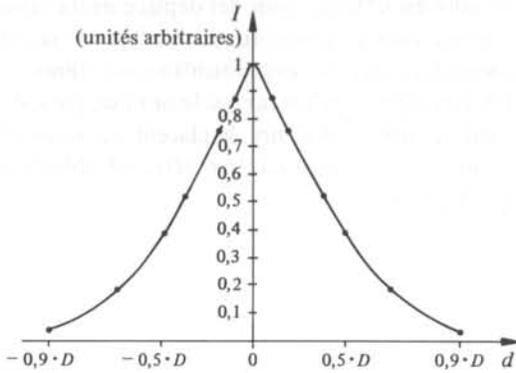


Fig. 7.10 Intensité couplée dans B en fonction du déplacement latéral  $d$  des fibres;  $D$  est le diamètre du cœur.

Un tel capteur est avant tout conçu pour des mesures d'accélération résultant de vibrations. Il convient d'adapter la fréquence propre du capteur à celle des vibrations. On montre que la pulsation de résonance  $\Omega$  du système vaut :

$$\Omega = \left[ \frac{3 E_y I_z}{(m + 0,23 \cdot m_f) l^3} \right]^{1/2} \quad (7.52)$$

où

- $E_y$  : module d'élasticité de la fibre ( $\text{kg s}^{-2} \text{m}^{-1}$ );
- $I_z$  : moment d'inertie de la fibre ( $\text{m}^2 \text{kg}$ );
- $m_f$  : masse de la fibre libre A (kg);
- $l$  : longueur de la fibre (m).

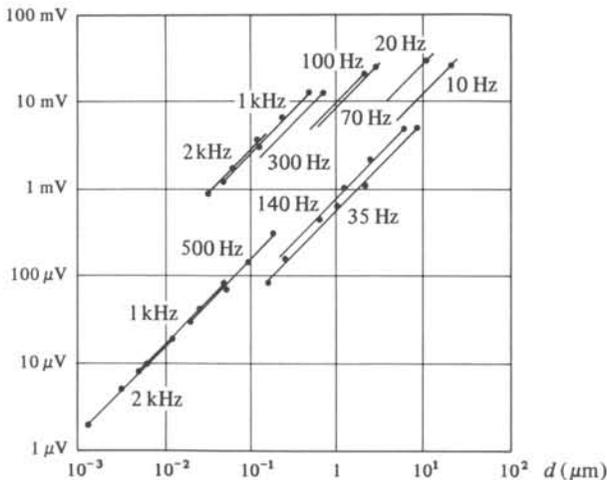


Fig. 7.11 Signal de sortie en fonction de  $d$ .

En adaptant les différents paramètres, on arrive à ajuster la fréquence de résonance entre 10 Hz et 2 kHz.

Le signal de sortie en fonction du déplacement relatif des fibres,  $d$ , pour diverses fréquences, est représenté à la figure 7.11.

Une bonne linéarité est obtenue pour des déplacements variant d'une puissance de dix environ. Ce capteur est un capteur directionnel de par sa construction même : il mesure les accélérations dans un plan perpendiculaire aux fibres.

Le seuil est déterminé principalement par le bruit de grenaille du détecteur optique. Les calculs, confirmés par l'expérience, le placent aux environs de  $0,6 \cdot 10^{-12}$  m. Convertie en seuil de pression lorsque l'accéléromètre est utilisé comme hydrophone, cette valeur correspond à 6 mPa.

### 7.2.16 Capteur à variation de phase. Définition

Une part de l'information que transporte une onde monochromatique plane du type (7.36) est contenue dans son intensité (proportionnelle à  $A^2$ ), une autre dans sa phase  $\phi$  :

$$\phi = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \quad (7.53)$$

La phase comporte deux parties, l'une dépendant du temps et l'autre de la position. On nomme la première,  $\omega t$ , la *phase temporelle*, tandis que  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  est la *phase spatiale*. Une phase, temporelle ou spatiale, se mesure en principe par rapport à une phase de référence (déphasage). Les capteurs à variation de phase spatiale font l'objet du paragraphe 7.2.18.

Il faut, pour détecter une variation de phase temporelle

$$\Delta\phi = \Delta\omega t \quad (7.54)$$

que la fréquence de l'onde change.

Le seul effet connu susceptible de changer continûment la fréquence d'une onde monochromatique est l'effet Doppler : lorsque la source émettrice et l'observateur de l'onde ont une vitesse relative  $v$ , on a pour les fréquences optiques

$$f \pm \Delta f = f \sqrt{\frac{1 \pm \frac{v}{c}}{1 \mp \frac{v}{c}}} \quad \text{Hz} \quad (7.55)$$

Pour obtenir une variation de phase temporelle significative, il faut donc que le rapport  $v/c$  ne soit pas négligeable par rapport à l'unité. On peut alors observer le spectre de la lumière et mesurer directement la vitesse  $v$  (vélocimétrie Doppler lumineuse).

D'autre part, on augmente la variation de phase temporelle en allongeant le temps de propagation (7.54). Ceci est rendu possible par l'emploi de fibres optiques. Un exemple de ce procédé, le gyromètre à fibre optique, fait l'objet du paragraphe suivant.

### 7.2.17 Gyromètre à fibre optique, exemple

Le gyromètre à fibre optique est un bon exemple des différents problèmes à résoudre dans les capteurs à fibres optiques de types interférentiel ou polarimétrique. Ce capteur utilise un interféromètre de Sagnac (fig. 7.12), lequel présente la particularité suivante : les deux faisceaux empruntent exactement le même parcours, ils ne se distinguent l'un de l'autre que par le sens de propagation de la lumière.

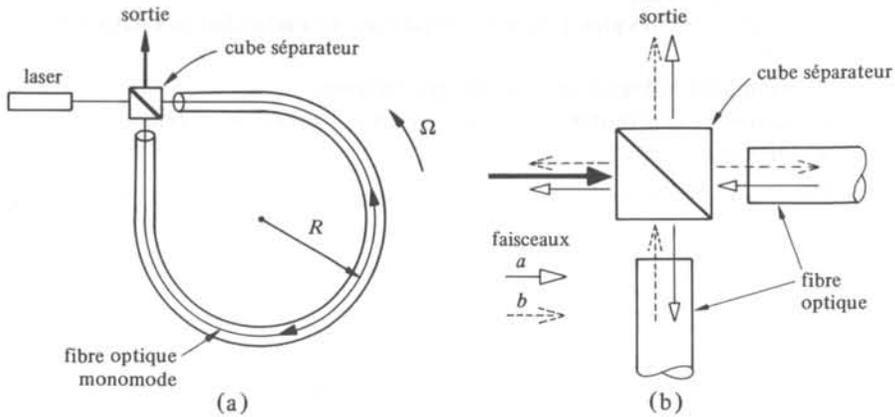


Fig. 7.12 Principe de l'interféromètre de Sagnac : (a) vue générale ; (b) détail du séparateur.

Une onde monochromatique délivrée par une source cohérente est divisée en deux ondes  $a$  et  $b$  envoyées simultanément sur les deux extrémités d'une fibre optique, puis recombinées à leur sortie de la fibre.

Lorsque l'interféromètre est au repos, les chemins optiques des deux ondes  $a$  et  $b$  sont égaux et valent  $2\pi R$  (en supposant  $n = 1$ ).

Si l'interféromètre est animé d'une vitesse de rotation  $\Omega$ , le chemin optique de l'onde  $a$  est allongé, celui de l'onde  $b$  raccourci, il en résulte un déphasage temporel

$$\Delta\phi = \omega \Delta t = \omega \frac{2\Delta L}{c} \quad (7.56)$$

Soit encore, en introduisant la différence de temps de propagation  $\Delta t = 4\pi R^2 \Omega / c^2$

$$\Delta\phi = \frac{4\pi R^2 \omega}{c^2} \Omega \quad (7.57)$$

Dans un milieu d'indice de réfraction quelconque, ce raisonnement reste vrai. De même, si la fibre est enroulée  $N$  fois autour d'un support de rayon  $R$ , on a

$$\Delta\phi = \frac{2\omega R}{c^2} L \Omega \quad (7.58)$$

Le déphasage est donc proportionnel à la vitesse de rotation  $\Omega$  de l'interféromètre de Sagnac, et à la longueur de la fibre  $L = 2\pi RN$ . Les exigences demandées pour la navigation sont des sensibilités de  $10^{-2}$  degrés par heure, d'où la nécessité de mesurer  $\Delta\phi$  à  $10^{-7}$  rad près pour une longueur  $L = 1$  km et  $R = 10$  cm. Ces exigences draconiennes ont néanmoins pu être satisfaites. Les principaux problèmes à résoudre sont :

- limiter le bruit photonique de détection;
- s'affranchir des effets non-réciproques, tels que l'effet Faraday ou l'effet Kerr, qui sont les seuls capables de perturber l'interféromètre de Sagnac (sect. 7.5);
- se débarrasser des deux modes de propagation (sect. 7.4) dans la fibre, dus à la biréfringence intrinsèque;
- éviter les réflexions optiques sur les divers composants qui forment des interférences parasites;
- obtenir une très grande rigidité mécanique, en particulier aux extrémités de la fibre;
- diminuer l'influence du bruit propre du laser;
- minimiser l'encombrement et augmenter la fiabilité du système;
- minimiser le coût.

La majeure partie de ces problèmes ont été résolus, si ce n'est peut-être le dernier. Il est à remarquer que la sensibilité demandée semble complètement irréaliste, puisqu'elle revient à mesurer un déphasage de  $\Delta\Phi = 10^{-7}$  rad pour une phase totale  $\phi = 10^{10}$  rad. En chemin optique, ceci donne une sensibilité de 4 fois le diamètre du proton (10 fm) sur un chemin total de 1 km. On trouve un exposé complet des problèmes et des solutions apportées, ainsi qu'une bibliographie sur le sujet dans la revue des laboratoires Thomson-CSF [57], qui ont produit le premier gyromètre à fibre optique à visée commerciale.

### 7.2.18 Capteurs interférométriques. Description

Les capteurs à variation de phase spatiale sont de type interférométrique. L'onde monochromatique délivrée par la source est divisée en deux ondes qui suivent des parcours différents avant d'être recombinaées. La figure 7.13 donne une vue de principe de deux interféromètres couramment utilisés.

Le bras 1, appelé bras de référence, est généralement maintenu éloigné de toute perturbation. L'autre bras, le bras de captage, est soumis à la grandeur d'entrée  $x$  à mesurer, laquelle doit avoir pour effet de modifier la phase spatiale de l'onde traversant le bras 2. On peut mettre (7.53) sous la forme

$$\phi(x) = k_0 n(x) L(x) \quad (7.59)$$

où  $n$  et  $L$  représentent l'indice de réfraction et la longueur du bras 2. Il existe donc deux façons de modifier  $\phi(x)$ : en faisant varier l'indice  $n$  ou la longueur  $L$ . Alors, en négligeant les termes d'ordre supérieur :

$$\Delta\phi(x) = k_0 \left( L \frac{\partial n}{\partial x} + n \frac{\partial L}{\partial x} \right) \Delta x \quad (7.60)$$

La sensibilité de l'interféromètre,

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} = k_0 \left( L \frac{\partial n}{\partial x} + n \frac{\partial L}{\partial x} \right) \quad (7.61)$$

est donc directement liée à la longueur du bras de captage et à son indice de réfraction, les autres paramètres étant fixés.

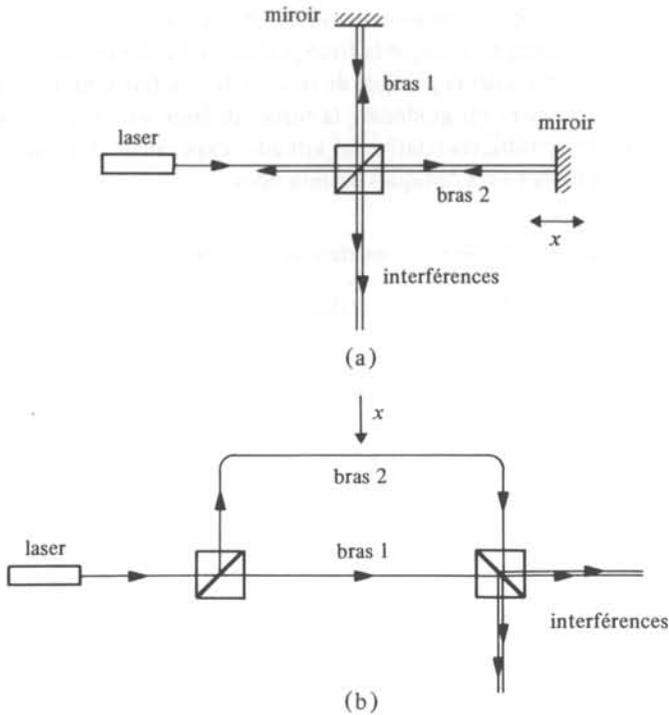


Fig. 7.13 (a) Interféromètre de Michelson; (b) interféromètre de Mach-Zehnder.

Les variations de  $L$  et de  $n$  sont très souvent dépendantes. Néanmoins, il est intéressant de séparer formellement ce qui concerne  $L$  et  $n$  en introduisant une sensibilité relative  $s'$ , obtenue en divisant (7.61) par (7.59).

$$s' = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial x} \quad (7.62)$$

Les conditions nécessaires pour un bon fonctionnement d'un capteur interférométrique sont :

- une très grande rigidité mécanique du système, pour éviter des variations du bras de référence;
- une isolation thermique et mécanique (vibrations);
- une lumière spatialement et temporellement cohérente (sect. 6.5) pour une bonne visibilité des franges d'interférence;
- une distribution des champs vectoriels égale pour les deux bras (polarisation);
- une grande longueur du bras de captage.

Une partie de ces conditions drastiques, mais en rapport avec les sensibilités extrêmes de ces capteurs, sont résolues par l'emploi :

- de dispositifs mécaniques massifs à faible dilatation thermique (invar);
- de laser ou éventuellement de LED;
- de fibres optiques monomodes comme bras, ou de dispositifs d'optique intégrée.

L'emploi de fibres optiques monomodes pour la conception de ce genre de capteur comporte d'énormes avantages, puisque la fibre permet de satisfaire à presque toutes les exigences requises. Il est d'ailleurs possible de réaliser des capteurs interférométriques « tout-fibre » dont la lumière est guidée de la sortie du laser aux détecteurs [58]. Le tableau 7.14 donne les sensibilités relatives  $s'$  atteintes expérimentalement par des capteurs interférométriques à fibres optiques monomodes.

Tableau 7.14 Sensibilités  $s'$  des interféromètres à fibre monomode [59].

Mesurande	Sensibilité $s'$	Valeur	Unité	Remarques
Allongement $\epsilon$	$\frac{1}{\phi} \frac{\Delta\phi}{\Delta\epsilon}$	0,78	1	$\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$
Pression $p$	$\frac{1}{\phi} \frac{\Delta\phi}{\Delta p}$	$10^{-12}$	Pa <sup>-1</sup>	
Température $T$	$\frac{1}{\phi} \frac{\Delta\phi}{\Delta T}$	$7 \cdot 10^{-6}$	K <sup>-1</sup>	ou °C <sup>-1</sup>
Champ magnétique $H$	$\frac{1}{\phi} \frac{\Delta\phi}{\Delta H}$	$6 \cdot 10^{-9}$	A <sup>-1</sup> m	gaine magnétostrictive
Tension $U$	$\frac{1}{\phi} \frac{\Delta\phi}{\Delta U}$	$4 \cdot 10^{-8}$	V <sup>-1</sup>	cylindre piézoélectrique
Accélération $a$	$\frac{1}{\phi} \frac{\Delta\phi}{\Delta a}$	$10^{-5}$	s <sup>2</sup> m <sup>-1</sup>	

### 7.3 POLARISATION

#### 7.3.1 Etat de polarisation d'une onde transverse électromagnétique

Soit une onde lumineuse plane monochromatique se propageant dans un milieu isotrope. Dans ce milieu les vecteurs  $\underline{D}$  et  $\underline{E}$  sont colinéaires, et les vecteurs  $\underline{k}$ ,  $\underline{E}$  et  $\underline{H}$  forment un trièdre trirectangle (fig. 7.15), propriétés que l'on vérifie facilement à partir de (7.115) et (7.116). Une telle onde est dite transverse électromagnétique (TEM).

La connaissance de  $\underline{k}$  et  $\underline{E}$  est suffisante pour définir l'onde complètement, puisque  $\underline{H}$  est donné par (7.117). On décrit l'onde par la seule équation :

$$\underline{E} = \underline{A} \exp [j(\omega t - k_z z)] \quad (7.63)$$

où  $\underline{A}$  est un vecteur complexe (vecteur phaseur) dont les projections sur les axes  $Ox$  et  $Oy$  sont notées :

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{A}_x \\ \underline{A}_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\underline{A}_x| \exp(j\delta_x) \\ |\underline{A}_y| \exp(j\delta_y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.64)$$

où  $\delta_x$  et  $\delta_y$  sont les phases de  $\underline{A}_x$  et  $\underline{A}_y$  respectivement, en  $t = 0$  et  $z = 0$ .

On simplifie l'étude de la polarisation en modifiant la forme de (7.63) par l'introduction de deux nouveaux vecteurs  $\underline{p}$  et  $\underline{q}$  et de deux angles  $\alpha$  et  $\theta$ . En mettant en

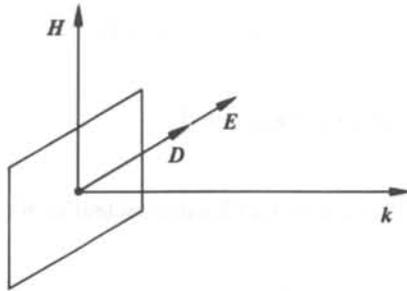


Fig. 7.15 Onde transverse électromagnétique.

évidence un facteur de phase global  $\Delta/2$ , on écrit (7.64) sous la forme :

$$\underline{A} = \exp(j\Delta/2) \begin{pmatrix} |\underline{A}_x| \exp(j\delta/2) \\ |\underline{A}_y| \exp(-j\delta/2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.65)$$

où  $\delta = \delta_x - \delta_y$  est le déphasage entre  $\underline{A}_x$  et  $\underline{A}_y$  et  $\Delta = \delta_x + \delta_y$  la phase globale. Le vecteur

$$\underline{a} = \underline{A} \exp(-j\Delta/2) \quad (7.66)$$

est un vecteur phaseur. Chacune de ses composantes étant à priori un nombre complexe, on peut écrire :

$$\underline{a} = \underline{p} + j\underline{q} \quad (7.67)$$

Les composantes des vecteurs  $\underline{p}$  et  $\underline{q}$  sont respectivement les parties réelle et imaginaire des composantes de  $\underline{a}$ . Les vecteurs  $\underline{p}$  et  $j\underline{q}$  sont orthogonaux, par définition des axes du plan complexe. L'équation (7.66) montre que les normes de  $\underline{A}$  et de  $\underline{a}$  sont identiques; on peut écrire :

$$p^2 + q^2 = |\underline{A}_x|^2 + |\underline{A}_y|^2 \quad (7.68)$$

Le calcul de  $|\underline{A} \wedge \underline{A}^*| = 2|\underline{p} \wedge \underline{q}|$  donne

$$2pq = |\underline{A}_x| |\underline{A}_y| \sin \delta \quad (7.69)$$

A l'aide des équations (7.68) et (7.69), on détermine  $p$  et  $q$  :

$$\left. \begin{aligned} 2p &= \left( |\underline{A}_x|^2 + |\underline{A}_y|^2 + |\underline{A}_x| |\underline{A}_y| \sin \delta \right)^{1/2} + \left( |\underline{A}_x|^2 + |\underline{A}_y|^2 - |\underline{A}_x| |\underline{A}_y| \sin \delta \right)^{1/2} \\ 2q &= \left( |\underline{A}_x|^2 + |\underline{A}_y|^2 + |\underline{A}_x| |\underline{A}_y| \sin \delta \right)^{1/2} - \left( |\underline{A}_x|^2 + |\underline{A}_y|^2 - |\underline{A}_x| |\underline{A}_y| \sin \delta \right)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (7.70)$$

Soit  $\theta$  l'angle entre  $\underline{p}$  et  $0x$ . En explicitant l'égalité  $Re\{(\underline{A} \cdot \underline{p})(\underline{A}^* \cdot \underline{q})\} = 0$ , on obtient :

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2|\underline{A}_x| |\underline{A}_y| \cos \delta}{|\underline{A}_x|^2 - |\underline{A}_y|^2} \quad (7.71)$$

Dans le cas particulier où  $\mathbf{p}$  est dirigé selon  $Ox$ , on a :

$$\underline{E} = \begin{pmatrix} p \\ \pm jq \\ 0 \end{pmatrix} \exp [j(\omega t - k_z z + \alpha)] \quad (7.72)$$

De (7.65), on déduit que  $\alpha = \Delta/2$ , est le facteur de phase global.

### 7.3.2 Polarisation elliptique. Définition

Seule la partie réelle de (7.72) représente le vecteur champ électrique :

$$\text{Re}(\underline{E}) = \begin{pmatrix} p \cos(\omega t - k_z z + \alpha) \\ \pm q \sin(\omega t - k_z z + \alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Vm}^{-1} \quad (7.73)$$

L'indétermination du signe de la seconde composante résulte des deux manières de fixer le sens de  $q$  sur l'axe imaginaire. Le vecteur  $\underline{E}$  décrit une ellipse de demi-axes  $p$  et  $q$  inclinée de l'angle  $\theta$ , appelé *azimut*, sur l'axe  $Ox$  (fig. 7.16). Cette ellipse est parcourue dans le sens trigonométrique direct si  $q$  est positif. On parle alors de *polarisation gauche*. En effet, par convention, le sens de la polarisation est défini pour un observateur « regardant » la lumière venir vers lui. Pour  $q$  négatif, on obtient une *polarisation droite*. En supposant  $|q| < |p|$ , on définit l'*ellipticité*  $e$  par le rapport du petit au grand axe :

$$e = \frac{q}{p} \quad (7.74)$$

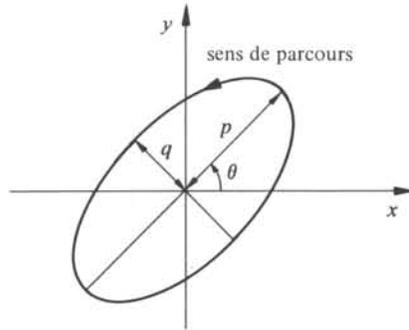


Fig. 7.16 Ellipse de polarisation gauche.

En toute généralité, une onde TEM est polarisée elliptiquement dans un plan perpendiculaire à  $\mathbf{k}$ . La polarisation de l'onde peut être entièrement déterminée par exemple par l'angle  $\alpha$ , l'azimut  $\theta$ ,  $p$  et  $q$  et le sens de parcours sur l'ellipse.

### 7.3.3 Polarisation circulaire. Définition

Si  $p = q$ , les demi-axes de l'ellipse sont égaux, elle se réduit à un cercle. On a alors  $|\underline{A}_x| = |\underline{A}_y|$  et, par conséquent,  $\delta = \pm \pi/2$ , modulo  $2\pi$  (7.69). Les vecteurs phaseurs  $\underline{E}_x$  et  $\underline{E}_y$  tournant autour de  $Oz$  sont déphasés de  $\pm \pi/2$  :

$$\frac{E_x}{E_y} = \pm j \quad (7.75)$$

Le signe devant  $j$  est déterminé par le sens de rotation de  $\underline{E}$ .

### 7.3.4 Polarisation linéaire. Définition

Dans le cas où l'un des axes  $p$  ou  $q$  est de longueur nulle, la polarisation est dite linéaire. Le vecteur  $\underline{E}$  reste constamment dans un même plan contenant  $\mathbf{k}$  au cours de la propagation. Par convention, on appelle *plan de polarisation* le plan orthogonal au plan contenant  $\underline{E}$ . Le plan de polarisation contient donc  $\underline{H}$ .

### 7.3.5 Décomposition d'ondes polarisées

Une onde polarisée elliptiquement peut toujours être considérée comme la superposition de deux ondes linéairement polarisées, l'une selon  $\mathbf{p}$  et l'autre selon  $\mathbf{q}$ , avec des amplitudes et un déphasage appropriés (§ 7.3.9). De la même façon, une onde polarisée linéairement peut être décomposée en deux ondes circulairement polarisées en sens inverse l'une de l'autre (§ 7.6.4).

### 7.3.6 Sphère de Poincaré

La *sphère de Poincaré* est un mode de représentation de l'état de polarisation d'une onde lumineuse TEM. Dans le cas le plus général de la polarisation elliptique, la connaissance des paramètres suivants est nécessaire :

- l'orientation du plan contenant l'ellipse de polarisation, défini par son vecteur unitaire normal  $\mathbf{k}/k$  ;
- l'orientation de l'ellipse dans ce plan, donnée par l'azimut  $\theta$  ;
- la forme de l'ellipse (ellipticité) ;
- sa grandeur (valeur d'un demi-axe) ;
- le sens dans lequel elle est parcourue par  $\underline{E}$  ;
- la phase globale  $\alpha$  de  $\underline{E}$ .

Le sens dans lequel l'ellipse est décrite est donné par le signe du second membre de (7.75) : +1 pour gauche et -1 pour droite. La phase initiale  $\alpha$  de l'onde (7.73), dont on a tenu compte jusqu'ici, n'a pas d'importance pour la majorité des cas rencontrés en optique. Seul le déphasage  $\delta$  (7.65) joue un rôle dans les grandeurs directement mesurables.

Les paramètres définissant la forme et la grandeur de l'ellipse sont soit les deux demi-axes  $p$  et  $q$ , soit le paramètre  $S_0 = \sqrt{p^2 + q^2}$  et l'ellipticité  $e = p/q$ .

$S_0$  est proportionnel à  $|\underline{E}|^2$  (7.68), donc à l'intensité de l'onde. Dans les milieux transparents sans pertes,  $S_0$  reste constant.

En combinant l'information sur le sens de rotation et l'ellipticité, on peut définir un angle  $\psi$  par

$$\operatorname{tg} 2\psi = \pm e = \pm (q/p) \quad (7.76)$$

avec le signe positif si la polarisation est gauche et le signe négatif dans le cas contraire. L'angle  $\psi$  varie entre  $-\pi/4$  et  $\pi/4$ .

Dans de nombreuses applications, il suffit de décrire la polarisation par  $\theta$  et  $\psi$ . On utilise alors les *paramètres de Stokes*  $S_1, S_2, S_3$ , définis par :

$$S_1 = S_0 \cos 2\psi \cos 2\theta \quad (7.77)$$

$$S_2 = S_0 \cos 2\psi \sin 2\theta \quad (7.78)$$

$$S_3 = S_0 \sin 2\psi \quad (7.79)$$

Ces nouveaux paramètres ne sont pas indépendants; en effet :  $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S_0^2$ . Si  $S_0$  est une constante (système sans perte),  $S_1, S_2$  et  $S_3$  peuvent être interprétés comme les coordonnées d'un point  $P$  sur une sphère de rayon  $S_0$ , nommée *sphère de Poincaré* (fig. 7.17). Chaque point  $P$  de la sphère représente un état de polarisation  $(\theta, \psi)$  et réciproquement.

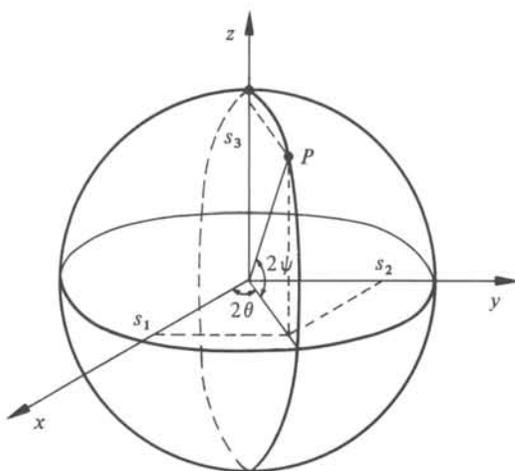


Fig. 7.17 Sphère de Poincaré.

### 7.3.7 Exemples

La polarisation linéaire est caractérisée par une longueur nulle du demi petit axe, l'ellipticité est donc nulle, et d'après (7.76)  $\psi = 0$ . Les points pour lesquels  $\psi = 0$  (équateur) représentent une polarisation linéaire dans le plan  $Oxy$ .

Pour une onde circulairement polarisée, l'ellipticité est égale à  $\pm 1$ . Ceci implique que  $2\psi = \pm \pi/2$  selon le sens de la polarisation. La polarisation circulaire gauche est représentée par le pôle nord, et la polarisation circulaire droite par le pôle sud. De plus, on voit que tous les états de polarisation gauche sont dans l'hémisphère nord, et les polarisations droite dans l'hémisphère sud (fig. 7.18).

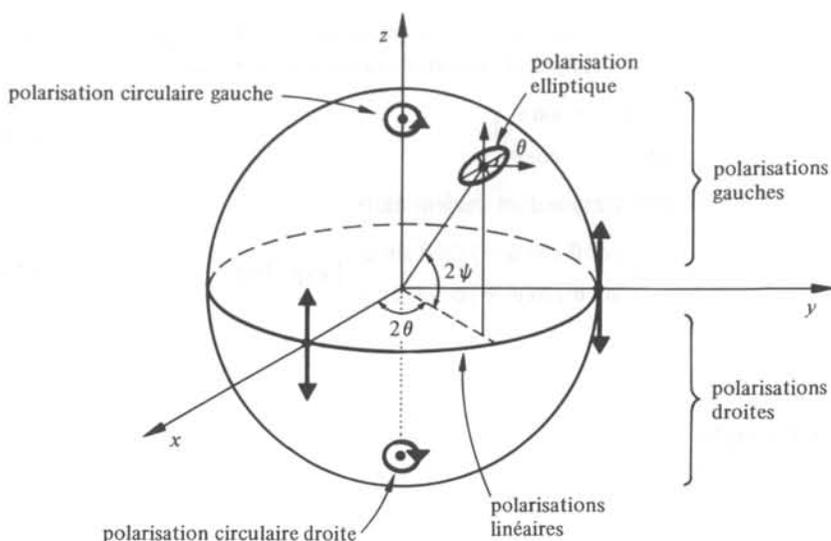


Fig. 7.18 Représentation des états de polarisation sur la sphère de Poincaré.

### 7.3.8 Vecteurs de Jones

La polarisation d'une onde TEM (7.63) et (7.64) est entièrement définie par le vecteur

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} \quad (7.80)$$

appelé *vecteur de Jones*. On a (7.64):

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.81)$$

L'équation (7.72) montre que le vecteur de Jones le plus général (polarisation elliptique) s'écrit, dans un système d'axes coïncidant avec les axes de l'ellipse :

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} p \\ \pm jq \end{pmatrix} \exp(j\alpha) \quad (7.82)$$

Les problèmes relatifs à l'état de polarisation et à l'intensité de l'onde étant généralement dissociés, on pose souvent l'intensité de l'onde égale à l'unité, soit, pour (7.68):

$$p^2 + q^2 = 1 \quad (7.83)$$

Pour une polarisation elliptique avec azimut nul, le vecteur de Jones s'écrit compte tenu de (7.76):

$$\underline{e}(\theta = 0) = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ j \sin \psi \end{pmatrix} \exp(j\alpha) \quad (7.84)$$

Une polarisation elliptique d'azimut quelconque  $\theta$  est obtenue par une rotation du vecteur  $\underline{e}(\theta = 0)$ , qui s'exprime au moyen de la matrice de rotation

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (7.85)$$

Le vecteur de Jones correspondant devient alors

$$\underline{e}(\psi, \theta, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi - j \sin \theta \sin \psi \\ \sin \theta \cos \psi + j \cos \theta \sin \psi \end{pmatrix} \exp(j\alpha) \quad (7.86)$$

### 7.3.9 Exemples

Une polarisation linéaire selon  $Ox$  est définie par  $\psi = \theta = 0$ . En annulant la phase globale, on a :

$$\underline{e}(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.87)$$

De même pour une polarisation linéaire selon  $Oy$  :

$$\underline{e}(0, \pi/2, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.88)$$

Une polarisation quelconque s'écrit comme la superposition de deux polarisations linéaires orthogonales :

$$\underline{e}(\psi, \theta, \alpha) = \exp(j\alpha) [(\cos \theta \cos \psi - j \sin \theta \sin \psi) \underline{e}(0, 0, 0) + (\sin \theta \cos \psi + j \cos \theta \sin \psi) \underline{e}(0, \pi/2, 0)] \quad (7.89)$$

Plus généralement, on a :

$$\underline{e}(\psi, \theta, \alpha) = [\underline{e}(\psi, \theta, \alpha) \cdot \underline{\xi}] \underline{\xi} + [\underline{e}(\psi, \theta, \alpha) \cdot \underline{\eta}] \underline{\eta} \quad (7.90)$$

pour autant que  $\underline{\xi}$  et  $\underline{\eta}$  soient deux vecteurs unitaires orthogonaux tels que  $\underline{\xi} \cdot \underline{\eta}^* = 0$ .

On vérifie que

$$\underline{\xi} = (1/\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix} \quad (7.91)$$

$$\underline{\eta} = (1/\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} \quad (7.92)$$

sont bien orthogonaux car :

$$\underline{\xi} \cdot \underline{\eta}^* = (1/\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix} \cdot (1/\sqrt{2}) (1 \quad -j) = 0 \quad (7.93)$$

Ils forment une base possible de décomposition des vecteurs de Jones. On peut voir que  $\underline{\xi}$  est la polarisation circulaire gauche et  $\underline{\eta}$  la polarisation circulaire droite [60].

Une polarisation elliptique peut donc être considérée comme la superposition de deux polarisations circulaires tournant en sens inverse. Cette interprétation est utile dans l'explication de plusieurs processus faisant intervenir la polarisation.

### 7.3.10 Matrice de Jones

Le formalisme de Jones permet de représenter chaque élément optique par un opérateur matriciel  $M$  qui effectue la conversion entrée-sortie du vecteur de Jones (fig. 7.19).

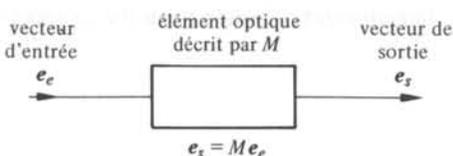


Fig. 7.19 Matrice de Jones.

Par exemple, la matrice de Jones  $L$  décrit une propagation libre selon  $Oz$  :

$$L = \begin{pmatrix} \exp[j(\omega t - k_z z)] & 0 \\ 0 & \exp[j(\omega t - k_z z)] \end{pmatrix} \quad (7.94)$$

Tableau 7.20 Matrices de Jones d'éléments optiques.

Élément	Matrice
Polariseur, transmission selon $Ox$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Polariseur, transmission selon $Oy$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Polariseur, transmission à $45^\circ$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
Polariseur, transmission à $135^\circ$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
Polariseur circulaire droit	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & j \\ -j & 1 \end{pmatrix}$
Polariseur circulaire gauche	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -j \\ j & 1 \end{pmatrix}$
Retard isotrope	$\begin{pmatrix} \exp(j\phi) & 0 \\ 0 & \exp(j\phi) \end{pmatrix}$
Changement de phase relative	$\begin{pmatrix} \exp(j\phi) & 0 \\ 0 & \exp(-j\phi) \end{pmatrix}$
Lame demi-onde, axe selon $Oy$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Lame demi-onde, axe à $45^\circ$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Lame quart-d'onde, axe selon $Oy$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$
Lame quart-d'onde, axe à $45^\circ$	$\begin{pmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{pmatrix}$

ce qu'on vérifie facilement à partir de (7.64), puisqu'on a :

$$L \underline{e}_e = \exp [j(\omega t - k_z z)] \underline{e}_e \quad (7.95)$$

Le tableau 7.20 donne les matrices de Jones de quelques éléments optiques simples.

### 7.3.11 Exemple : loi de Malus

Soit une lumière linéairement polarisée selon  $Ox$ . D'après (7.87) on a :

$$\underline{e}_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.96)$$

Le vecteur de Jones n'est pas modifié si la lumière traverse un polariseur dont l'axe est dirigé selon  $Ox$ . Par contre, si l'axe est dirigé selon  $Oy$ , la lumière est arrêtée. La matrice de Jones du polariseur dont l'axe est dirigé selon  $Ox$  s'écrit donc :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.97)$$

En faisant tourner ce polariseur d'un angle  $\theta$  autour de  $Oz$ , sa matrice de Jones devient

$$P(\theta) = R(\theta) P R^{-1}(\theta) \quad (7.98)$$

où  $R(\theta)$  est la matrice de rotation d'un angle  $\theta$  définie par (7.85). Le vecteur de Jones à la sortie vaut :

$$\underline{e}_s = P(\theta) \underline{e}_e = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta \\ -\sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} \quad (7.99)$$

Si l'on fait une mesure de l'intensité transmise, qui est proportionnelle à  $\underline{e}_s \underline{e}_s^*$ , on a :

$$\underline{e}_s \underline{e}_s^* = \cos^2 \theta \quad (7.100)$$

Ainsi l'intensité transmise par un polariseur est proportionnelle au carré du cosinus de l'angle entre l'axe du polariseur et le plan de polarisation de l'onde incidente. Ce fait est connu sous le nom de *loi de Malus*.

### 7.3.12 Mesure de l'état de polarisation

On sait que la polarisation d'une onde elliptique d'intensité unité est entièrement décrite par le vecteur de Jones (7.86). En négligeant le facteur de phase global  $\exp(j\alpha)$  qui n'est pas directement mesurable, on pose :

$$\underline{e}_g = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi - j \sin \theta \sin \psi \\ \sin \theta \cos \psi + j \cos \theta \sin \psi \end{pmatrix} \quad (7.101)$$

La détermination expérimentale de ce vecteur de Jones est facilitée si on considère qu'il correspond à un point unique de la sphère de Poincaré ( $S_1, S_2, S_3$ ). Par hypothèse  $S_0 = 1$  (intensité unité).

D'après (7.98),

$$P(\beta) = \begin{pmatrix} \cos^2 \beta & -\sin \beta \cos \beta \\ -\sin \beta \cos \beta & \sin^2 \beta \end{pmatrix} \quad (7.102)$$

est la matrice de Jones d'un polariseur dont l'axe de transmission fait un angle  $\beta$  avec  $Ox$ . Soit  $\underline{e}_p$  le vecteur de Jones après passage par le polariseur :

$$\underline{e}_p(\beta) = P(\beta) \underline{e}_g \quad (7.103)$$

Par comparaison avec (7.77) on vérifie que

$$S_1 = |\underline{e}_p(0)|^2 - \left| \underline{e}_p\left(\frac{\pi}{2}\right) \right|^2 \quad (7.104)$$

De même, à l'aide de (7.78), on note que :

$$S_2 = \left| \underline{e}_p\left(\frac{\pi}{4}\right) \right|^2 - \left| \underline{e}_p\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right|^2 \quad (7.105)$$

Pour déterminer le paramètre  $S_3$ , on ajoute une lame quart-d'onde avant le polariseur. Sa matrice de Jones s'écrit (tab. 7.23):

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \quad (7.106)$$

On appelle  $\underline{e}_q$  la valeur du vecteur de Jones après passage à travers la lame quart-d'onde et le polariseur :

$$\underline{e}_q(\beta) = P(\beta) Q \underline{e}_g \quad (7.107)$$

Le calcul direct montre que :

$$S_3 = \left| \underline{e}_q\left(\frac{\pi}{4}\right) \right|^2 - \left| \underline{e}_q\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right|^2 \quad (7.108)$$

Ainsi, en effectuant les six mesures d'intensité

$$\left. \begin{array}{l} |\underline{e}_p(0)|^2 \\ |\underline{e}_p(\pi/2)|^2 \\ |\underline{e}_p(\pi/4)|^2 \\ |\underline{e}_p(3\pi/4)|^2 \\ |\underline{e}_q(\pi/4)|^2 \\ |\underline{e}_q(3\pi/4)|^2 \end{array} \right\} \quad (7.109)$$

on peut déterminer complètement l'état de polarisation de l'onde d'intensité unitaire. Dans le cas où l'intensité n'est pas unitaire, on a évidemment

$$S_0 = |\underline{e}_p(0)|^2 + \left| \underline{e}_p\left(\frac{\pi}{2}\right) \right|^2 \quad (7.110)$$

En conclusion, les six mesures (7.109) définissent l'ellipse de polarisation d'une onde TEM, par ses paramètres de Stokes  $S_0, S_1, S_2, S_3$  sur la sphère de Poincaré.

Il est clair qu'une connaissance partielle de l'état de polarisation (par exemple circulaire, ou linéaire) permet de diminuer le nombre de mesures à effectuer, ce qui est précieux dans un capteur. On arrive ainsi à s'affranchir des éléments de mesure mobiles (polariseur dans ce cas) pour les remplacer par des systèmes optiques fixes (prismes polarisants, etc.).

### 7.3.13 Lumière partiellement polarisée

La matrice

$$J = \begin{pmatrix} \langle \underline{A}_x \underline{A}_x^* \rangle & \langle \underline{A}_x \underline{A}_y^* \rangle \\ \langle \underline{A}_y \underline{A}_x^* \rangle & \langle \underline{A}_y \underline{A}_y^* \rangle \end{pmatrix} \quad (7.111)$$

dont les éléments sont définis à l'aide de (7.64) porte le nom de *matrice de cohérence* [61]. Elle possède les propriétés remarquables suivantes :

- Sa trace est égale à l'intensité  $I$  de l'onde, qui peut n'être que quasi-monochromatique :  $\text{tr } J = I$ .
- Ses éléments sont donnés par les relations

$$\left. \begin{aligned} J_{11} &= |\underline{e}_p(0)|^2 \\ J_{22} &= |\underline{e}_p(\pi/2)|^2 \\ \underline{J}_{12} &= \frac{1}{2} \{ |\underline{e}_p(\pi/4)|^2 + |\underline{e}_p(3\pi/4)|^2 + j (|\underline{e}_q(\pi/4)|^2 - |\underline{e}_q(3\pi/4)|^2) \} \\ \underline{J}_{21} &= J_{12}^* \end{aligned} \right\} \quad (7.112)$$

où les  $\underline{e}_p, \underline{e}_q$  sont définis par (7.109).

- L'intensité  $S_0$  de la partie polarisée de l'onde (7.63) s'exprime par l'équation

$$S_0^2 = \text{tr } J - \det J \quad (7.113)$$

En définissant le *degré de polarisation*  $P$  de la lumière quasi-monochromatique par la relation

$$P = \frac{S_0}{I}; \quad 0 \leq P \leq 1 \quad (7.114)$$

on remarque que les relations établies précédemment pour la lumière monochromatique restent applicables dans le cas quasi-monochromatique, en substituant à l'intensité totale la valeur  $PI$ . Pour la sphère de Poincaré par exemple, il suffit de diminuer la longueur du rayon dans un rapport  $P$  pour effectuer la représentation, car on a  $I \geq \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$ , l'égalité n'étant vérifiée que lorsque la lumière est parfaitement monochromatique.

## 7.4 BIRÉFRINGENCE

### 7.4.1 Propagation dans les milieux anisotropes

De nombreux matériaux utilisés en optique (certains cristaux par exemple) présentent des propriétés optiques variant avec l'orientation de la lumière qui les traverse : ils

sont *anisotropes*. Dans ce cas, on montre que le champ électrique  $\underline{E}$  et le déplacement électrique  $\underline{D}$  ne sont pas colinéaires, bien que leurs modules restent proportionnels (7.8).

L'anisotropie trouve son origine soit dans la structure du matériau elle-même, soit dans l'existence d'une direction privilégiée résultant de l'application d'un champ extérieur. C'est précisément l'application d'un champ extérieur qui est à la base des mécanismes des capteurs optiques à variation de l'état de polarisation.

Plus généralement, l'anisotropie des milieux transparents est à l'origine des phénomènes optiques de *biréfringence*, auxquels cette section est consacrée.

#### 7.4.2 Axes principaux, symétries

Le tenseur de permittivité relative  $\epsilon$  défini par (7.8) est réel d'ordre 3. Il peut se ramener, dans un système d'axes privilégié, à ses composantes diagonales:  $\epsilon_{ij} = \epsilon_i \delta_{ij}$ . Ce système d'axes privilégié constitue, par définition, le *système d'axes principaux* de  $\epsilon$ .

Les composantes de  $\epsilon$  dépendent évidemment de la symétrie cristalline du matériau optique. Selon le groupe de symétrie,  $\epsilon$  peut se réduire à une, deux ou trois composantes indépendantes, nommées *composantes principales* (ou permittivités principales, dans le cas particulier). On parle de milieu *isotrope*, *uniaxe*, *biaxe*, respectivement (tab. 7.21).

Tableau 7.21 Tenseur de permittivité relative dans son système d'axes principal.

$\begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_1 \end{pmatrix}$	Cristal cubique
$\begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix}$	Cristal uniaxe (trigonal, tétragonal, hexagonal)
$\begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}$	Cristal biaxe (tricline, monocline, orthorombique)

Les permittivités relatives principales sont en général dépendantes de la fréquence  $f$  de l'onde lumineuse. Pour les cristaux monocliniques et tricliniques, l'orientation des axes principaux dépend elle aussi de  $f$  (dispersion anisotrope). Dans ce qui suit, la dépendance en fréquence est sous-entendue, elle n'est jamais écrite explicitement.

#### 7.4.3 Direction de l'onde, direction des rayons

Soit une onde plane monochromatique se propageant dans un milieu non magnétique:

$$\left. \begin{aligned} \underline{E} &= \underline{E}_0 \exp [j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] & \text{Vm}^{-1} \\ \underline{D} &= \underline{D}_0 \exp [j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] & \text{Cm}^{-2} \\ \underline{H} &= \underline{H}_0 \exp [j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] & \text{Am}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (7.115)$$

En introduisant ces expressions dans les équations de Maxwell (7.4) et (7.6), on a en supprimant les indices zéro :

$$\mathbf{k} \wedge \underline{\mathbf{E}} = \omega \mu_0 \underline{\mathbf{H}} \quad (7.116)$$

$$\mathbf{k} \wedge \underline{\mathbf{H}} = -\omega \underline{\mathbf{D}} \quad (7.117)$$

L'équation (7.116) montre que  $\underline{\mathbf{H}}$  est orthogonal à  $\mathbf{k}$  et  $\underline{\mathbf{E}}$ . (7.117) prouve que  $\underline{\mathbf{D}}$  est perpendiculaire au plan contenant  $\mathbf{k}$  et  $\underline{\mathbf{H}}$ . Il s'ensuit que  $\underline{\mathbf{D}}$  et  $\underline{\mathbf{H}}$  sont les champs transverses pour la propagation de l'onde, qui est dirigée selon  $\mathbf{k}$ .

La propagation de l'énergie est dirigée selon le vecteur unitaire  $\mathbf{s} = (\underline{\mathbf{E}} \wedge \underline{\mathbf{H}}) / |\underline{\mathbf{E}} \wedge \underline{\mathbf{H}}|$  qui est colinéaire au vecteur de Poynting (sect. III.5.1). On vérifie que  $\mathbf{s}$  est aussi la direction de propagation des rayons lumineux (§ 7.6.6).

Ainsi, dans un milieu anisotrope, la direction de propagation de l'onde ne coïncide pas avec celle des rayons (fig. 7.22).

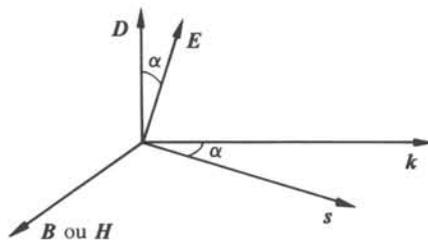


Fig. 7.22 Onde plane dans un milieu anisotrope.

#### 7.4.4 Equation de propagation

En multipliant vectoriellement (7.116) à gauche par  $\mathbf{k}$  et en éliminant  $\underline{\mathbf{H}}$  en lui substituant son expression (7.117), on a :

$$\mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \underline{\mathbf{E}}) = -\mu_0 \omega^2 \underline{\mathbf{D}} \quad (7.118)$$

L'identité vectorielle  $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$  permet de ramener (7.118) à la forme :

$$\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{E}}) - k^2 \underline{\mathbf{E}} + \mu_0 \omega^2 \underline{\mathbf{D}} = 0 \quad (7.119)$$

En tenant compte de (7.8), (7.119) peut se mettre sous la forme tensorielle suivante :

$$\left( k_i k_j - k^2 \delta_{ij} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij} \right) E_j = 0 \quad (7.120)$$

Cette égalité est un système de trois équations linéaires homogènes pour les  $E_j$  ; il possède des solutions non-nulles lorsque :

$$\det \left( k_i k_j - k^2 \delta_{ij} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij} \right) = 0 \quad (7.121)$$

En posant

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} n \mathbf{m} \quad (7.122)$$

conformément à (7.29), où  $\mathbf{m}$  est un vecteur unitaire colinéaire à  $\mathbf{k}$ , on peut ramener (7.121) à l'équation suivante, qui est vraie dans le système d'axes principaux de  $\epsilon$  :

$$\frac{m_1^2}{n^2 - \epsilon_1} + \frac{m_2^2}{n^2 - \epsilon_2} + \frac{m_3^2}{n^2 - \epsilon_3} = \frac{1}{n^2} \quad (7.123)$$

Cette équation, du second degré en  $n^2$ , est appelée équation de Fresnel. En principe, elle admet deux solutions distinctes,  $n_1$  et  $n_2$ . Pour chacun de ces indices de réfraction, il existe un vecteur propre associé :  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{E}_2$ .

*La propagation dans les milieux anisotropes peut s'interpréter comme la propagation de deux ondes linéairement polarisées dans des plans orthogonaux, et « voyant » chacune un indice de réfraction différent.*

#### 7.4.5 Quadrique représentative des rayons

Le tenseur  $\epsilon$  est réel d'ordre 3. On peut donc le « visualiser » sous la forme d'une quadrique représentative, qui s'écrit dans son système d'axes principaux :

$$\sum_{i=1}^3 \epsilon_i x_i^2 = 1 \quad (7.124)$$

En toute généralité, cette quadrique est un ellipsoïde (fig. 7.23).

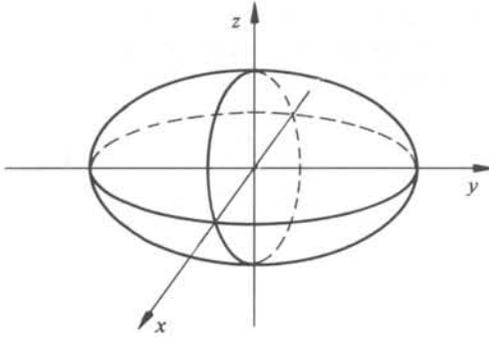


Fig. 7.23 Quadrique représentative.

À l'aide de (7.120), on remarque que la quadrique (7.124) est associée au champ électrique, donc au vecteur  $\mathbf{s}$  de la propagation des rayons lumineux (§ 7.4.3). Pour cette raison, (7.124) porte le nom de *quadrique des rayons*.

#### 7.4.6 Quadrique représentative des ondes

En écrivant (7.8) sous la forme

$$\epsilon_0 \underline{E}_j = \epsilon_{jk}^{-1} D_k \quad (7.125)$$

où  $\epsilon^{-1}$  est le tenseur inverse de  $\epsilon$ , en tenant compte de (7.120), on trouve de façon similaire pour  $\underline{D}$  :

$$\left[ \frac{\omega^2}{c^2} \delta_{ik} + (k_i k_j - k^2 \delta_{ij}) \epsilon_{jk}^{-1} \right] D_k = 0 \quad (7.126)$$

Cette équation concernant le déplacement électrique, correspond à l'équation de Fresnel pour le champ électrique. Elle régit la propagation des ondes. Dans son système d'axes principaux l'équation de la quadrique représentative des ondes s'écrit :

$$\sum_{i=1}^3 x_i^2 / \epsilon_i = 1 \quad (7.127)$$

Cette quadrique porte parfois le nom d'*indicatrice* ou *ellipsoïde des indices*. On préfère la nommer *quadrique des ondes*, par opposition à la quadrique des rayons.

#### 7.4.7 Remarque

Les quadriques représentatives des ondes et des rayons doivent posséder les mêmes symétries que les cristaux dont elles représentent les indices de réfraction.

En toute généralité, elles sont ellipsoïdales; les milieux correspondants sont appelés milieux biaxes.

Les milieux uniaxes ont des quadriques représentatives qui sont des ellipsoïdes de révolution.

Les quadriques des milieux isotropes dégènerent en des sphères.

#### 7.4.8 Propriétés des quadriques représentatives des ondes

On trouve la démonstration de ces propriétés dans [61].

L'intersection du plan orthogonal à la direction de propagation donnée par  $\mathbf{k}$  avec l'ellipsoïde de la quadrique est une ellipse (fig. 7.24).

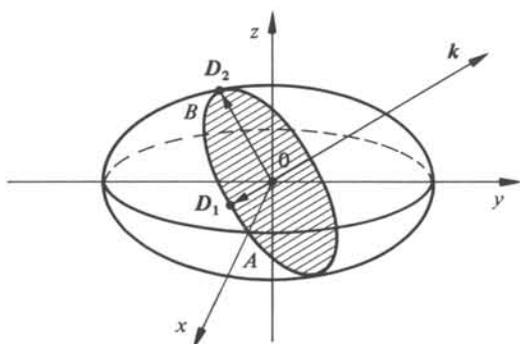


Fig. 7.24 Construction de l'ellipse associée à une direction de propagation.

Cette ellipse possède les propriétés suivantes :

- les demi-axes  $OA$  et  $OB$  sont égaux aux indices de réfraction des deux ondes;
- le vecteur  $\mathbf{D}$  de l'onde qui « voit » l'indice  $OA$  vibre dans un plan contenant  $OA$ , et respectivement pour  $OB$ .

Par suite de la première propriété, les valeurs

$$n_i = \sqrt{\epsilon_i} \quad (7.128)$$

des deux demi-axes des ellipses contenant les axes principaux des quadriques des ondes sont appelés les *indices de réfraction principaux*.

### 7.4.9 Propagation dans les cristaux cubiques

En résolvant l'équation de Fresnel (7.123) pour un milieu à symétrie cubique ou en considérant sa quadrique représentative qui est une sphère, on voit qu'il n'existe qu'une seule valeur de l'indice de réfraction,  $n = \sqrt{\epsilon_1}$ . On est dans un cas identique à (7.14) pour les milieux isotropes.

Un cristal à symétrie cubique ne se distingue pas d'un milieu isotrope, dans le cadre de l'optique linéaire.

### 7.4.10 Propagation dans les milieux uniaxes

Les milieux uniaxes sont caractérisés par des quadriques qui sont des ellipsoïdes de révolution, autour d'un axe, appelé *axe optique*. Il existe dans ce cas deux indices de réfraction principaux  $n_o$  et  $n_e$  (fig. 7.25), appelés *indice ordinaire* et *indice extraordinaire*. Pour une onde incidente sous un angle  $\alpha$  par rapport à l'axe optique, on a deux valeurs possibles de l'indice:  $n_o$  et

$$n(\alpha) = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 \sin^2 \alpha + n_e^2 \cos^2 \alpha}} \leq n_e \quad (7.129)$$

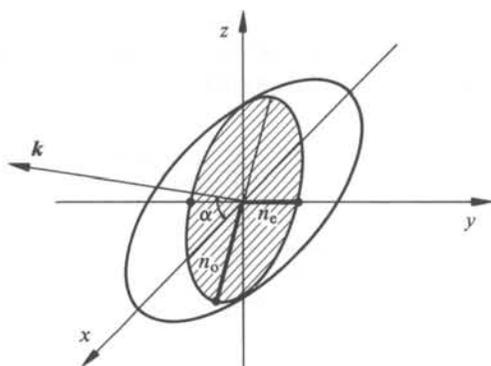


Fig. 7.25 Quadrique d'un milieu uniaxe, d'axe optique Ox.

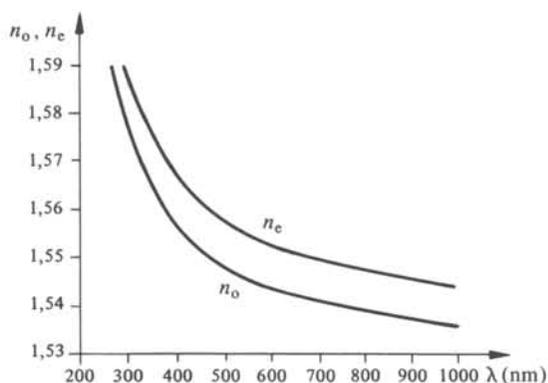


Fig. 7.26 Indices ordinaire  $n_o$  et extraordinaire  $n_e$  du quartz pour différentes longueurs d'onde.

L'onde incidente se divise en deux ondes linéairement polarisées à l'intérieur du milieu, l'une, dite *ordinaire*, se propageant avec l'indice  $n_o$ , et l'autre, l'*onde extraordinaire*, ayant un indice de réfraction *variable* avec la direction d'incidence,  $n(\alpha)$  (fig. 7.26). L'onde extraordinaire est polarisée dans le plan défini par l'axe optique et  $\mathbf{k}$ , l'onde ordinaire étant perpendiculaire à ce plan.

#### 7.4.11 Biréfringence linéaire, définition

La loi de Descartes reste vraie pour une onde incidente sur un milieu uniaxe, à condition de tenir compte des deux valeurs de l'indice de réfraction (7.129). De plus, l'onde incidente, la normale et les deux ondes réfractées, sont dans un même plan [62], ce qui n'est en général pas vérifié pour les rayons correspondants.

On nomme ce phénomène de propagation à deux indices de réfraction la *biréfringence linéaire*, ou *double réfraction*.

#### 7.4.12 Polarisation et biréfringence

Une onde incidente polarisée elliptiquement (en toute généralité) se divise en deux ondes linéairement polarisées se propageant à des vitesses différentes. Si les rayons sont proches après le passage dans le milieu linéairement biréfringent, ils se recouvrent en partie; la zone de recouvrement reste elliptiquement polarisée, tandis que les parties distinctes maintiennent leurs polarisations linéaires orthogonales (fig. 7.27).

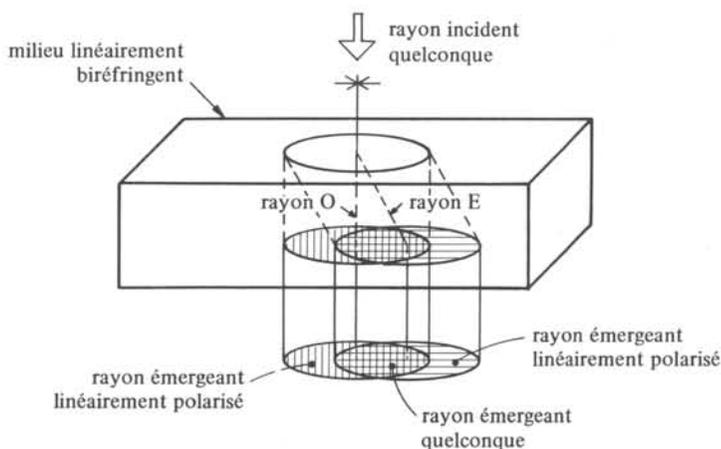


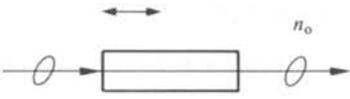
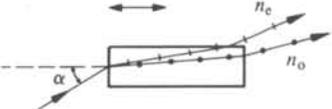
Fig. 7.27 Propagation dans un milieu linéairement biréfringent.

Le tableau 7.28 résume les différentes propagations possibles dans un milieu linéairement biréfringent.

#### 7.4.13 Exemple : lame quart-d'onde

Soit une onde plane tombant sur une lame de quartz perpendiculairement à son axe optique. On prend l'exemple d'une onde monochromatique dans la partie visible du

Tableau 7.28 Résumé de la biréfringence linéaire.

	Incidence parallèle à l'axe optique; un seul indice, $n_o$ .
	Angle d'incidence $\alpha$ . (cristal négatif, i.e. $n_e - n_o < 0$ )
	Incidence perpendiculaire à l'axe optique; deux indices $n_e$ et $n_o$ , selon les polarisations orthogonales.

spectre,  $\lambda_0 = 546$  nm. Les indices de réfraction du quartz sont :

$$\left. \begin{array}{l} n_o = 1,546 \\ n_e = 1,555 \end{array} \right\} \quad (7.130)$$

La quadrique représentative des ondes (fig. 7.29) montre que l'onde plane incidente se divise en deux ondes à polarisations linéaires orthogonales, dont une a pour axe optique le vecteur  $D$ .

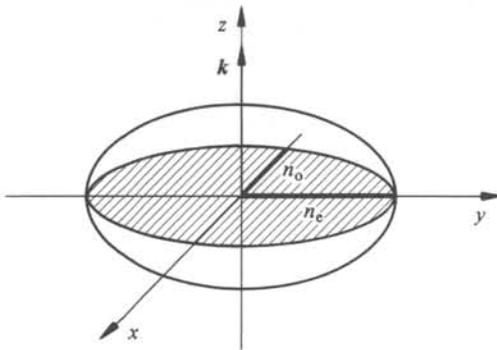


Fig. 7.29 Quadrique représentative des ondes.

Si l'axe  $Ox$  est l'axe de propagation de l'onde incidente et l'axe  $Oy$  l'axe optique, les ondes polarisées linéairement dans le cristal s'écrivent (§ 7.3.9):

$$\underline{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \underline{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.131)$$

Ces deux vecteurs de Jones évoluent librement dans le cristal. En supposant  $z = 0$  à l'entrée du cristal de longueur  $L$ , leur état à la sortie sera donné par (§ 7.3.10):

$$\underline{e}_s = L \underline{e}_e \quad (7.132)$$

avec

$$L = \begin{pmatrix} \exp[j(\omega t - k_e L)] & 0 \\ 0 & \exp[j(\omega t - k_e L)] \end{pmatrix} \quad (7.133)$$

où  $k_e = k_0 n_o$  si  $\mathbf{e}_e = \mathbf{e}_x$  et  $k_e = k_0 n_e$  si  $\mathbf{e}_e = \mathbf{e}_y$ ;  $k_0$  est le nombre d'onde dans le vide. Donc :

$$\left. \begin{aligned} \underline{\mathbf{e}}_{s_x} &= \begin{pmatrix} \exp[j(\omega t - k_0 n_o L)] \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underline{\mathbf{e}}_{s_y} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \exp[j(\omega t - k_0 n_e L)] \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (7.134)$$

À la sortie du cristal, ces deux ondes se recouvrent. En supprimant la phase globale, on a :

$$\underline{\mathbf{e}}_s = \underline{\mathbf{e}}_{s_x} + \underline{\mathbf{e}}_{s_y} = \begin{pmatrix} 1 \\ \exp[jk_0 L(n_o - n_e)] \end{pmatrix} \quad (7.135)$$

Conformément au paragraphe 7.3.9,  $\underline{\mathbf{e}}_s$  est polarisé circulairement si :

$$k_0 L(n_o - n_e) = \pi/2 + n\pi; \quad (7.136)$$

(à gauche pour  $n$  pair ou nul, sinon à droite). Pour une longueur  $L$  du cristal donnée par :

$$L = \frac{\lambda_0}{2|n_o - n_e|} \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (7.137)$$

pour une onde incidente  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y$  linéairement polarisée à  $45^\circ$  avec l'axe optique l'onde à la sortie est circulairement polarisée (fig. 7.30).

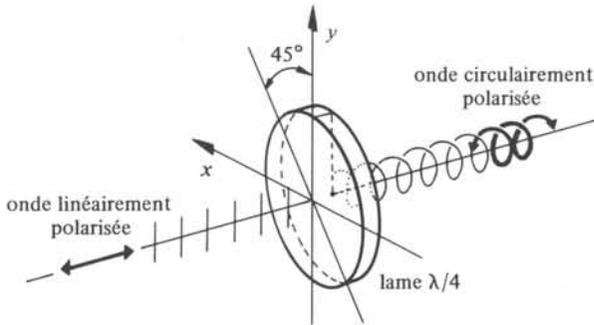


Fig. 7.30 lame quart-d'onde.

Le calcul numérique donne  $L = 30 \left( n + \frac{1}{2} \right) \mu\text{m}$ . Pour  $n = 0$  ou  $1$ , on parle de lame quart-d'onde du *premier ordre*, à cause de la différence de phase de  $\pm \pi/2$ . On construit généralement des lames quart-d'onde d'ordre supérieur, qui sont plus simples à usiner.

#### 7.4.14 Biréfringence dans les milieux biaxes

Les propriétés de biréfringence dans les milieux biaxes se rapprochent de celles des milieux uniaxes. La présence de deux rayons, appelés par analogie rayons ordinaire et

extraordinaire laisse croire à une complète analogie. Or, il n'en est rien, car ils sont tous deux variables avec l'angle d'incidence. L'indicatrice n'est plus à symétrie de révolution, mais il existe deux plans coupant l'indicatrice selon des cercles (fig. 7.31). Il existe donc deux axes privilégiés pour lesquels l'indice de réfraction est unique. Pour ces deux directions, appelées *axes optiques*, le cristal biaxe ne présente pas de biréfringence.

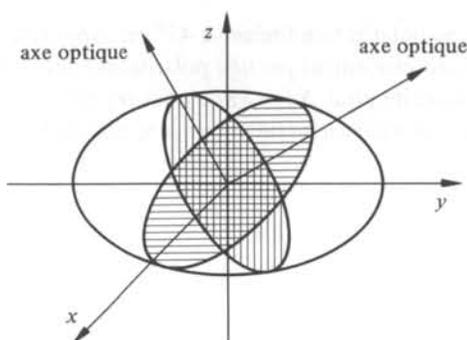


Fig. 7.31 Sections circulaires de l'indicatrice et axes optiques d'un cristal biaxe.

#### 7.4.15 Propagation des ondes polarisées dans les fibres optiques

On sait (chap. XIII.3) que la propagation dans les guides d'onde optiques de forme cylindrique est régie par une seule constante de propagation  $\beta$  doublement dégénérée, c'est-à-dire que deux ondes polarisées orthogonalement choisies arbitrairement pour décomposer l'onde traversant le guide conservent tout au long de leur propagation leur déphasage initial.

Il n'en est plus de même si le guide (par sa géométrie) ou le milieu extérieur (par l'application d'un champ) lèvent la dégénérescence. Dans ce cas, deux constantes de propagation différentes régissent le comportement de chacune des polarisations. On peut écrire, pour l'évolution des phases des deux ondes polarisées, en choisissant une propagation selon Oz :

$$\phi_x = \beta_x z \quad (7.138)$$

$$\phi_y = \beta_y z \quad (7.139)$$

Le déphasage relatif entre les polarisations orthogonales devient :

$$\Delta\phi = (\beta_x - \beta_y) z \quad (7.140)$$

#### 7.4.16 Paramètre de biréfringence modale linéaire, définition

Par définition, le *paramètre de biréfringence modale linéaire*  $B$ , dans une fibre optique possédant les constantes de propagation  $\beta_x$  et  $\beta_y$  est donné par :

$$B = (\beta_x - \beta_y)/k_0 \quad (7.141)$$

### 7.4.17 Biréfringence modale dans les fibres optiques

A l'aide de (7.141), l'évolution du déphasage (7.140) le long de la fibre devient :

$$\Delta\phi = k_0 B z \quad (7.142)$$

$B$  joue le même rôle qu'une différence effective d'indices de réfraction dans le cas des deux propagations orthogonales. C'est dans ce sens que l'on peut parler de biréfringence modale (linéaire).

En partant d'une polarisation linéaire à  $45^\circ$  par rapport à  $Ox$  ; ( $\theta = \pi/4$ ) à l'entrée de la fibre, on passe successivement par une polarisation circulaire pour  $\Delta\phi = \pi/2$ , linéaire pour  $\Delta\phi = \pi$ , circulaire pour  $\Delta\phi = 3\pi/2$  pour retomber sur une polarisation linéaire pour  $\Delta\phi = 2\pi$ , décrivant ainsi un méridien de la sphère de Poincaré (fig. 7.32).

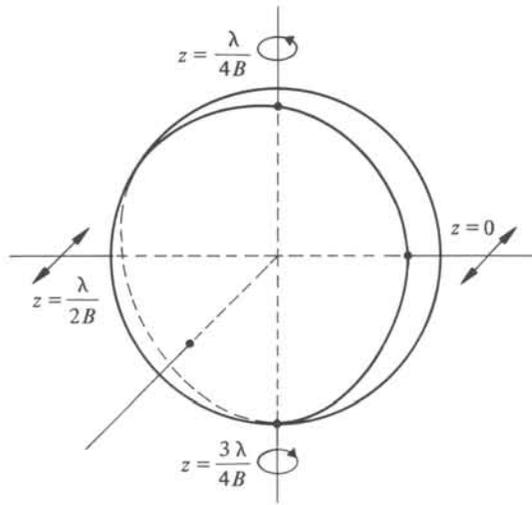


Fig. 7.32 Evolution de la polarisation le long d'une fibre linéairement biréfringente.

Pour chaque multiple de  $2\pi$  du déphasage  $\Delta\phi$ , on retrouve l'état initial de polarisation. La *longueur de battement*  $L$  est la longueur à parcourir sur la fibre pour retrouver l'état initial; elle vaut

$$L = \frac{2\pi}{kB} = \frac{\lambda}{B} \quad (7.143)$$

## 7.5 EFFETS AGISSANT SUR LA POLARISATION DE LA LUMIÈRE

### 7.5.1 Introduction

On a vu que la biréfringence est une conséquence de l'anisotropie du milieu dans lequel se propage une onde lumineuse. Une telle anisotropie peut être due à une structure cristalline anisotrope, mais aussi à des champs extérieurs modifiant l'isotropie (ou l'anisotropie) du milieu traversé. Localement, la distribution des champs électromagnétiques du milieu est changée, ce qui modifie leur interaction avec l'onde lumineuse en

propagation. On conçoit que ces variations locales sont faibles vis-à-vis des champs créés par les liaisons atomiques.

Macroscopiquement, on exprime ce fait par une dépendance du tenseur de permittivité relative  $\epsilon$ , ou de  $1/n^2$ , en puissance du champ appliqué,  $A$ :

$$1/n^2 - 1/n_0^2 = a \Delta A + b (\Delta A)^2 + \dots \quad (7.144)$$

limitée au terme du deuxième ordre.

Si le champ appliqué,  $A$ , est un champ de tensions internes dues à des forces mécaniques, on parle d'*effets élasto-optiques*, s'il s'agit de tensions internes dues à des ondes acoustiques, d'*effets acousto-optiques*. Dans le cas de champs électromagnétiques, on est dans le domaine de l'optique non-linéaire; ce domaine comprend aussi bien les champs appliqués par la propagation de la lumière elle-même que les champs extérieurs proprement dits. Les effets dus à l'action du champ électromagnétique de l'onde lumineuse sur la matière, expliquent des phénomènes comme l'autofocalisation ou la génération d'harmoniques lumineux. On ne les aborde pas ici.

Si le champ extérieur est un champ électrique, on parle d'*effets électro-optiques*; s'il s'agit d'un champ magnétique, d'*effets magnéto-optiques*. On distingue généralement les effets du premier ordre en  $A$ , qui dépendent du signe de  $\Delta A$ , des effets du second ordre, qui ne dépendent que du carré du module de  $A$ .

En optique, tous ces effets peuvent être à la base de la fabrication de *modulateurs* optiques, destinés à la mise en forme du signal lumineux.

### 7.5.2 Effet élasto-optique

En introduisant le tenseur des déformations mécaniques

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (7.145)$$

souvent lié au tenseur des contraintes  $\sigma$  par des relations linéaires dépendant du milieu (loi de Hooke), on décrit la modification des propriétés optiques en se servant de la quadrique des ondes (§ 7.4.6), qui s'écrit dans son système d'axes principaux :

$$\frac{x^2}{n_1^2} + \frac{y^2}{n_2^2} + \frac{z^2}{n_3^2} = 1 \quad (7.146)$$

où  $n_i^2 = \epsilon_i$  est l'indice de réfraction principal associé à la permittivité relative principale correspondante (7.128). Conformément à (7.144), on introduit une petite perturbation  $\Delta(1/n^2)$  à l'indice de réfraction. Le tenseur  $\epsilon$  se trouve modifié, et par conséquent ses axes principaux changent aussi. On a alors:

$$\sum_{i=1}^3 \left[ \frac{1}{n_i^2} + \Delta \left( \frac{1}{n^2} \right)_{ii} \right] x_i^2 + \Delta \left( \frac{1}{n^2} \right)_{12} x_1 x_2 + \Delta \left( \frac{1}{n^2} \right)_{13} x_1 x_3 + \Delta \left( \frac{1}{n^2} \right)_{23} x_2 x_3 = 1 \quad (7.147)$$

L'équation (7.147) montre que le tenseur  $\Delta(1/n^2)$  comporte six composantes indépendantes. On groupe les indices  $ij$  en un seul indice  $k$ , selon la règle :

$$\left. \begin{aligned} (11) &= 1 ; (22) = 2 ; (33) = 3 ; \\ (12) &= 4 ; (13) = 5 ; (23) = 6 . \end{aligned} \right\} \quad (7.148)$$

En utilisant cette règle, on écrit au premier ordre :

$$(1/n^2)_k = p_{kij} u_{ij} \quad (7.149)$$

Le tenseur  $p$  est en fait un tenseur du quatrième ordre que l'on a ramené à un tenseur du troisième ordre. Il porte le nom de *tenseur photo-élastique*.

En remarquant que, pour  $\Delta n$  petit :

$$\Delta \left( \frac{1}{n^2} \right) \cong - \frac{2 \Delta n}{n^3} \quad (7.150)$$

on peut écrire, pour la variation d'indice de réfraction

$$(\Delta n)_k = - \frac{n_k^3}{2} p_{kij} u_{ij} \quad (7.151)$$

On vérifie ainsi que la variation d'indice est proportionnelle aux déformations  $u_{ij}$ . Comme les déformations sont souvent proportionnelles aux contraintes, (7.151) peut aussi s'écrire :

$$(\Delta n)_k = - \frac{n_k^3}{2} q_{kl} \sigma_l \quad (7.152)$$

en groupant les indices  $ij$  en indice  $l$ , conformément à (7.148), ce qui revient à considérer le tenseur  $\sigma$  dans le système d'axes de (7.147). Le tenseur  $q$  est appelé *tenseur élasto-optique*.

### 7.5.3 Matériaux élasto-optiques

Un bon nombre de matériaux optiquement transparents présentent un effet élasto-optique plus ou moins prononcé.

Les composantes du tenseur élasto-optique des cristaux dépendent de leurs symétries internes, comme tout tenseur décrivant des propriétés cristallines. Le tableau 7.33 donne les composantes du tenseur  $q$  pour un certain nombre de cristaux et de verres amorphes anisotropes.

Dans le cas de solides isotropes, on peut diagonaliser le tenseur  $(\Delta(1/n^2))_{ij}$ , puisque son système d'axes principaux équivaut à celui de  $\sigma$ . Alors :

$$n_k - n_l = b(\sigma_k - \sigma_l) \quad (7.153)$$

où  $n_k - n_l$  est la différence d'indice entre deux axes principaux. La constante de proportionnalité  $b$ , porte le nom de *coefficient élasto-optique*. Elle varie de plusieurs puissances de dix en fonction des matériaux, comme le montre le tableau 7.34.

Dans le cas des liquides, une seule contrainte doit intervenir (principe de Pascal).

Tableau 7.33 Coefficients du tenseur élasto-optique [49].

Matériel	$q_{11}$	$q_{12}$	$q_{13}$	$q_{14}$	$q_{31}$	$q_{33}$	$q_{41}$	$q_{44}$	$q_{66}$	$\lambda$ ( $\mu\text{m}$ )
Verre silice	0,121	0,270	$q_{12}$	0	$q_{12}$	$q_{11}$	0	$(q_{11} - q_{12})/2$	$(q_{11} - q_{12})/2$	0,633
KCl	0,215	0,159	$q_{12}$	0	$q_{12}$	$q_{11}$	0	-0,024	$q_{44}$	0,589
NaCl	0,137	0,178	$q_{12}$	0	$q_{12}$	$q_{11}$	0	-0,011	$q_{44}$	0,589
LiF	0,02	0,130	$q_{12}$	0	$q_{12}$	$q_{11}$	0	-0,045	$q_{44}$	0,589
MgO	-0,32	-0,08	$q_{12}$	0	$q_{12}$	$q_{11}$	0	-0,096	$q_{44}$	0,56
CaF <sub>2</sub>	0,056	0,228	$q_{12}$	0	$q_{12}$	$q_{11}$	0	0,024	$q_{44}$	0,589
SrTiO <sub>3</sub>	0,15	0,095	$q_{12}$	0	$q_{12}$	$q_{11}$	0	0,072	$q_{44}$	0,633
Diamant	-0,31	0,09	$q_{12}$	0	$q_{12}$	$q_{11}$	0	-0,12	$q_{44}$	0,589
GaAs	-0,165	-0,14	$q_{12}$	0	$q_{12}$	$q_{11}$	0	-0,072	$q_{44}$	1,15
GaP	-0,151	-0,082	$q_{12}$	0	$q_{12}$	$q_{11}$	0	-0,074	$q_{44}$	0,633
Calcite	0,095	0,189	0,215	0,006	0,309	0,178	0,010	-0,09	$(q_{11} - q_{12})/2$	
$\alpha$ -Quartz	0,138	0,25	0,259	0,029	0,258	0,098	-0,042	-0,0685	$(q_{11} - q_{12})/2$	
LiNbO <sub>3</sub>	0,036	0,072	0,092	0,070	0,178	0,088	0,155		$(q_{11} - q_{12})/2$	
LiTaO <sub>3</sub>	0,0804	0,0804	0,094	0,031	0,086	0,150	0,024	0,022	$(q_{11} - q_{12})/2$	

**Tableau 7.34** Coefficient élasto-optique de divers matériaux [49].

Matériel	$b$ (brewster) = $= (10^{-12} \text{m}^2/\text{N})$
Bakélite	53
Nitrate de cellulose	2 ~ 20
Résine-époxy	~ 56
Gélatine	$(1,7 \sim 20) 10^3$
Benzyle	45
Polycyclohexyle	5,9
Polyméthyle	- 2,7 ~ 4,7
Polyphényle	39,8
Polycarbonate	78
Polyéthylène	~ 2000
Polyméthylène	~ 1700
Polystyrène	8 ~ 10
Polystyrène (p-C1)	23
Gutta-percha	3080
Gomme naturelle	2000
Polyuréthane	3500

On a alors [49]:

$$\Delta n = \frac{p(n^2 - 1)(n^2 + 2)}{6nK} \quad (7.154)$$

où  $p$  est la pression hydrostatique et  $K$  le module de compressibilité du liquide.

#### 7.5.4 Effet acousto-optique

L'effet élasto-optique est un effet dû aux déformations statiques, (ou à très basse fréquence (Hz)). On peut induire des déformations variant à des fréquences plus élevées (kHz) par effet piézoélectrique. Le champ électrique appliqué permet alors de varier  $u$ , donc d'induire un effet élasto-optique, ou un effet Pockels selon (7.149). On peut ainsi induire des ondes d'indice de réfraction à des fréquences acoustiques dans les solides. Cet effet *acousto-optique* est très utilisé dans les modulateurs optiques.

#### 7.5.5 Effet Pockels

Un champ électrique statique induit une biréfringence linéaire dans certains milieux. En fait, l'application du champ  $E$  induit une polarisation  $P$  (§ II.4.2.3) dans le milieu, qui rend celui-ci anisotrope. Lorsqu'on s'arrête au premier ordre du développement en puissance de  $E$ , on parle d'effet Pockels. On décrit l'effet Pockels par une équation équivalente à (7.149), en groupant les indices.

$$\Delta(1/n^2)_k = r_{kj} E_j \quad (7.155)$$

où  $r_{kj}$  est le *tenseur des coefficients électro-optiques* du premier ordre, les effets du

Tableau 7.35 Coefficients électro-optiques principaux de divers matériaux [49].

Matériel	[T] = tension [S] = déformation	$r_{13}$ (pm/V)	$r_{22}$ (pm/V)	$r_{33}$ (pm/V)	$r_{41}$ (pm/V)	$r_{42}$ (pm/V)	$r_{63}$ (pm/V)	$r_c^b$ (pm/V)	$n_o$	$n_e$
KH <sub>2</sub> PO <sub>4</sub> (KDP)	[T]				8,6		-10,5		1,51	1,47
	[S]						9,7			
KD <sub>2</sub> PO <sub>4</sub> (DKDP)	[T]				8,8		26,4		1,51	1,47
	[S]									
NH <sub>4</sub> H <sub>2</sub> PO <sub>4</sub> (ADP)	[T]				24,5		-8,5		1,53	1,48
	[S]				5,5					
KH <sub>2</sub> AsO <sub>4</sub> (KDA)	[T]				12,5		10,9		1,57	1,52
	[S]									
?bH <sub>2</sub> AsO <sub>4</sub> (RDA)	[T]						13		1,56	1,52
	[S]									
BaTiO <sub>3</sub>	[T]					1640		108	2,44	2,37
	[S]	8		28		820		23		
LiNbO <sub>3</sub>	[T]		7					19	2,286	2,2
	[S]	8,6	3,4	30,8		28		21		
LiTaO <sub>3</sub>	[T]							22	2,176	2,18
	[S]	7,9		35,8		20		28		
ZnO	[S]	1,4		2,6					2,0	2,015
ZnS	[T]				2,1				2,315	
	[S]									
	[S]	0,92		1,85					2,705	2,709
ZnSe	[T]					2			2,66	
Cds	[T]				1,6	3,7			2,743	2,726
	[S]	1,1		2,4						

second ordre étant considérés au paragraphe 7.5.6. De même que (7.149), (7.155) se ramène à :

$$(\Delta n)_k = -(n_k^3/2) r_{kj} E_j \quad (7.156)$$

L'effet Pockels n'est significatif que dans certains cristaux (tab. 7.35).

### 7.5.6 Effet Kerr

L'effet Kerr est un effet électro-optique du second ordre en puissance du champ  $E$ . Conformément à la notation employée, on écrit

$$\Delta(1/n^2)_{ij} = g_{ijkl} E_k E_l \quad (7.157)$$

où  $g$  est le tenseur des coefficients électro-optiques du second ordre. L'effet Kerr peut apparaître conjointement à l'effet Pockels.

### 7.5.7 Matériaux électro-optiques

Les cristaux qui présentent un centre de symétrie ne peuvent pas être sujets à l'effet Pockels. Ils ne présentent alors que l'effet Kerr.

Les matériaux isotropes présentent une variation d'indice de réfraction directement proportionnelle au carré du champ électrique appliqué  $E$ , pour l'effet Kerr :

$$\Delta n = (K/k_0) E^2 \quad (7.158)$$

où  $\Delta n$  est la différence d'indice entre la direction parallèle au champ  $E$  et la direction orthogonale, et  $K$  la constante de Kerr. Le nombre d'onde  $k_0$  dans le vide est introduit dans l'expression par commodité, de sorte que le déphasage entre les deux polarisations linéaires orthogonales à la sortie du milieu soit donné par

$$\Delta\phi = K E^2 L \quad (7.159)$$

si  $L$  est la longueur du trajet dans le milieu. Le nitrobenzène est la substance par excellence présentant l'effet Kerr (tab. 7.36).

Tableau 7.36 Constantes de Kerr comparées.

Substance	$K$ ( $\text{pmV}^{-2}$ )
Eau	0,33
Nitrobenzène	15,4
Chloroforme	-2,51

### 7.5.8 Activité optique, biréfringence circulaire

Certains milieux présentent la propriété de faire tourner le plan de polarisation d'une onde plane incidente, l'angle de rotation  $\theta$  étant proportionnel à la longueur du milieu traversé (fig. 7.37).

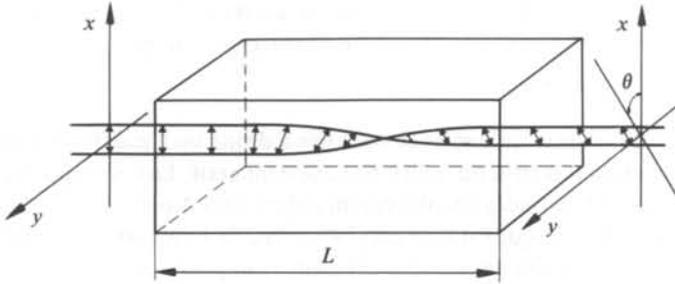


Fig. 7.37 Activité optique.

On écrit simplement

$$\theta = \alpha \cdot L \quad (7.160)$$

où  $L$  est la longueur du milieu présentant l'activité optique;  $\alpha$  est la constante d'activité optique, (la rotation par unité de longueur).

Si l'onde (d'intensité unitaire) linéairement polarisée selon  $Ox$  à l'entrée du milieu, son vecteur de Jones s'écrit :

$$\mathbf{e}_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.161)$$

Celui-ci peut être interprété comme la somme de deux polarisations circulaires, droite et gauche

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_e &= 1/2 \mathbf{e}_d + 1/2 \mathbf{e}_g \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} + 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (7.162)$$

On admet que la propagation à l'intérieur du cristal s'effectue avec des indices différents pour la polarisation droite et gauche, ( $n_d$  et  $n_g$ ). La polarisation à la sortie, conformément à (7.95), (en supposant  $z = 0$  à l'entrée du milieu) s'écrit :

$$\mathbf{e}_s = \frac{1}{2} \exp[j(\omega t - n_d k_0 L)] \mathbf{e}_d + \frac{1}{2} \exp[j(\omega t - n_g k_0 L)] \mathbf{e}_g \quad (7.163)$$

où  $k_0$  est le nombre d'onde dans le vide. En regroupant et supprimant le facteur de phase global, on a

$$\mathbf{e}_s = \frac{1}{2} \exp[j k_0 L (n_d - n_g)/2] \mathbf{e}_d + \frac{1}{2} \exp[-j k_0 L (n_d - n_g)/2] \mathbf{e}_g \quad (7.164)$$

En remplaçant  $\mathbf{e}_d$  et  $\mathbf{e}_g$  par leurs expressions, on obtient

$$\mathbf{e}_s = \frac{1}{2} [\exp(j\theta) + \exp(-j\theta)] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2j} [\exp(j\theta) - \exp(-j\theta)] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.165)$$

On a posé  $\theta = k_0 L (n_d - n_g)/2$ . Finalement, il reste

$$\mathbf{e}_s = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (7.166)$$

qui n'est autre qu'une polarisation linéaire faisant un angle  $\theta$  par rapport à  $0x$ . Rapprochant l'expression de  $\theta$  de celle de l'équation (7.160), on voit que

$$\alpha = k_0(n_d - n_g)/2 \quad (7.167)$$

L'expérience montre qu'une onde polarisée à droite ou à gauche conserve sa polarisation en passant au travers d'un milieu optiquement actif. La décomposition de l'onde polarisée linéairement en ondes circulairement polarisées à droite et à gauche se justifie pleinement. L'activité optique est bien un phénomène de biréfringence circulaire, où l'onde incidente se sépare en deux ondes circulairement polarisées qui «voient» les indices  $n_d$  et  $n_g$  dans le milieu. A la sortie du milieu, ces ondes se recombinent pour redonner une onde linéairement polarisée, dont l'azimut  $\theta$  dépend de la variation de phase relative subie par les deux propagations circulairement polarisées. De plus, on peut montrer que les directions de rayons sont les mêmes que celles des ondes (§ 7.6.7).

Selon que  $n_d - n_g$  est positif ou négatif, la rotation aura lieu dans le sens trigonométrique ou dans le sens des aiguilles d'une montre.

L'activité optique se rattache à la composition des cristaux ou des molécules du milieu. Dans les liquides, et plus spécialement les composés organiques, les molécules ont une structure hélicoïdale. Selon l'orientation de l'hélice, on aura  $n_d - n_g \gtrless 0$ , ce qui permet de distinguer les isomères. Pour le quartz, on a  $\alpha = 22^\circ/\text{mm}$  pour  $\lambda = 633 \text{ nm}$ .

### 7.5.9 Effet Faraday

Lorsqu'une onde polarisée linéairement traverse un milieu où règne une induction magnétique  $B$ , le plan de polarisation de l'onde tourne d'un angle  $\theta$  proportionnel à l'intensité de l'induction selon la direction de propagation  $Oz$ , et proportionnellement à la longueur  $L$  du milieu traversé :

$$\theta = V \cdot B_z \cdot L \quad (7.168)$$

La constante  $V$  est la *constante de Verdet* (tab. 7.38), qui décrit la rotation par unité d'induction et de longueur. En rapprochant cette formule de (7.160), on voit que l'on peut interpréter l'effet Faraday comme une biréfringence circulaire. En l'occurrence, la formule (7.167) s'écrit

$$VB = k_0(n_d - n_g)/2 \quad (7.169)$$

Elle permet de montrer la dépendance en  $1/\lambda_0$  de la constante de Verdet.

Tableau 7.38 Constantes de Verdet [49], en  $\text{m}^{-1} \text{T}^{-1}$ .

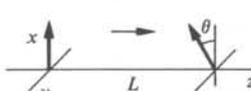
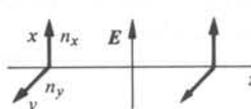
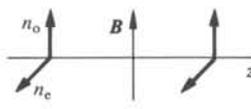
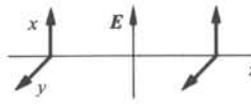
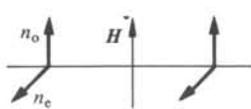
Matériel	Longueur d'onde ( $\mu\text{m}$ )			
	0,436	0,546	0,578	0,589
SiO <sub>2</sub>	7,6	4,8	4,3	
ZnS	191	95	82	
NaCl				9,6
Verre				23

La différence essentielle entre l'activité optique et l'effet Faraday vient du fait que  $B$  est un vecteur axial. Ce qui veut dire que deux passages en sens inverse dans le même milieu présentant l'effet Faraday, conduisent à une rotation de  $2\theta$ . Ce n'est évidemment pas le cas pour l'activité optique, où la rotation finale serait nulle. Dans le cas de l'effet Faraday, on parle d'*effet non-réciproque*.

### 7.5.10 Autres effets

La section 7.5 n'est pas exhaustive en ce qui concerne la description des effets biréfringents dans les milieux optiques. Il existe par exemple, un effet magnéto-optique pendant de l'effet Kerr électro-optique (*effet Cotton-Mouton*). De plus, le développement (7.144) peut se poursuivre au-delà du second ordre. Le tableau 7.39 donne un résumé des principaux effets utilisés dans les capteurs.

**Tableau 7.39** Effets utilisables dans les capteurs à variation de biréfringence.

Ordre	Nom de l'effet	Schéma	Champ extérieur	Formule	Biréfringence
Ordre 1	Effet Faraday		$B$	$\theta = VB_z L$	Circulaire
	Effet Pockels		$E$	$\Delta\left(\frac{1}{n}\right)_k = r_{kj} E_j$	Linéaire
	Effet Voigt		$B$	$\Delta n = VB$	Linéaire
	Effet élasto et acousto-optique		$u_{ij}$	$\Delta\left(\frac{1}{n}\right)_{kl} = p_{klj} u_{ij}$	Linéaire Circulaire
Ordre 2	Effet Kerr		$E$	$\Delta\left(\frac{1}{n}\right)_{ij} = g_{ijkl} E_k E_l$	Linéaire
	Effet Cotton-Mouton		$H$	$\Delta n = Cste \cdot H^2$	Linéaire

### 7.5.11 Capteurs à variation de polarisation

Les capteurs à variation de polarisation sont généralement composés des éléments suivants (fig. 7.40) :

- une source  $S$ ;
- un système optique  $P$  permettant d'obtenir une polarisation bien définie;
- un milieu  $A$  dont la biréfringence dépend de la grandeur à mesurer;
- un système  $P'$  permettant l'analyse de la polarisation de l'onde sortante du milieu  $A$ ;
- un détecteur  $D$ .



Fig. 7.40 Schéma typique d'un capteur à variation de polarisation.

Les sources utilisées sont de différents types: monochromatiques, elles permettent une bonne définition de l'état de polarisation. Le système optique définissant la polarisation du rayon incident est composé essentiellement d'un polariseur et de lames permettant un déphasage fixé, ou continûment variable, entre les deux polarisations orthogonales à considérer à l'entrée du milieu biréfringent.

Les effets élasto-optiques, électro-optiques ou magnéto-optiques constituent le mécanisme de conversion du capteur à proprement parler. Comme pour les autres capteurs à propagation, on utilise en général les avantages de la fibre optique intégrée pour pallier aux inconvénients de la propagation dans l'air. On peut alors, dans les cas où ils sont suffisamment marqués, utiliser les effets optiques pour la silice  $\text{SiO}_2$ , qui est le milieu de base des fibres optiques. On profite des deux polarisations orthogonales se propageant dans les fibres pour réaliser un capteur à biréfringence « tout-fibre ». Le tableau 7.41 donne un aperçu des propriétés de biréfringence linéaire et circulaire des fibres.

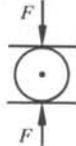
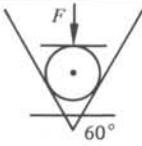
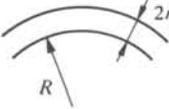
Le système d'analyse de la polarisation peut être relativement compliqué, si l'on veut mesurer l'ensemble de ses paramètres (§ 7.3.12). Mais dans la plupart des cas pratiques, on se contente de mesurer un ou deux paramètres à l'aide d'éléments fixes. C'est en général possible si l'on connaît parfaitement l'évolution de la biréfringence résultant d'une variation de la grandeur à capter. Les mesures ellipsométriques constituent d'ailleurs un problème en elles-mêmes; on trouve une étude approfondie de ces techniques dans [46].

### 7.5.12 Exemple: capteur de courant à effet Faraday

La méthode conventionnelle de mesure des forts courants (jusqu'à 2 kA sous 500 kV) se fait habituellement à l'aide de transformateurs de courant. Ce procédé est coûteux et présente certains inconvénients (encombrement, etc.).

L'effet Faraday (§ 7.5.9) peut être avantageusement utilisé pour ce type de mesure [65]. Un conducteur parcouru par un courant crée un champ magnétique dans sa périphérie, conformément à la loi d'Ampère. Le courant peut donc se mesurer à l'aide d'un capteur à effet Faraday, puisque, conformément à (7.168), l'angle de rotation

Tableau 7.41 Paramètres de biréfringence des fibres optiques monomodes [63, 64].

Type de biréfringence	$B$ ou $\alpha$	Remarques
Modale (ellipticité)	$0,55 e^2 \Delta^2$	$e^2 = 1 - (dy/dx)^2$ $dy$ : demi petit axe; $dx$ : demi grand axe $\Delta^2 = \Delta n/n$
Elasto-optique générale	$cn^3  p_{44}  (1+N) \frac{\sigma}{E}$	$ p_{44} $ : composante du tenseur élasto-optique $N$ : module de Poisson $E$ : module d'Young $\sigma$ : différence de tension dans le cœur
Elasto-optique force latérale	$aF$	$a \cong 4 \cdot 10^{-10} \frac{\text{rad}}{N}$ @ 633 nm 
Elasto-optique force en V	$bF$	$b \cong 10^{-10} \frac{\text{rad}}{N}$ @ 633 nm 
Elasto-optique courbure	$\frac{E  p_{44} }{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2$	$\frac{E  p_{44} }{2} \cong 0,14 \text{ rad}$ 
Elasto-optique pression	$c \left(\frac{f}{r}\right)$	$c \cong 4,4 \cdot 10^{-10} \frac{m}{N}$ $f$ : force linéique en $N/m$
Elasto-optique torsion	$S^2  p_{44}  \tau$	$S^2 \cong 0,07$ $\tau$ : contrainte latérale $ p_{44} $ : composante élasto-optique
Magnéto-optique effet Faraday	$V \cdot H$	$V \cong 4,5 \cdot 10^{-6} A^{-1}$ (constante de Verdet)

du plan de polarisation de l'onde vaut

$$\theta = V \int_{\text{parcours}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 V I N \quad \text{rad} \quad (7.170)$$

où  $I$  est le courant du conducteur et  $N$  le nombre de tours que parcourt la fibre autour du conducteur (fig. 7.42).

Un tel capteur a été construit dans les laboratoires Siemens. Il se compose essentiellement d'une source laser He-Ne linéairement polarisée, couplée dans une fibre monomode conventionnelle, elle-même enroulée sur un tube de verre isolé électriquement du châssis. La lumière sortant de la fibre est analysée par un prisme de Wollaston (capable

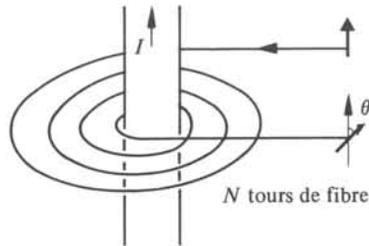


Fig. 7.42 Principe du capteur de courant à effet Faraday.

de séparer spatialement les polarisations orthogonales) puis détectée par des photodiodes et traitée électroniquement.

Le courant à la sortie du capteur a été choisi proportionnel au courant à mesurer, avec un facteur de proportionnalité de  $10^{-3}$  environ. Les performances de ce capteur sont groupées dans le tableau 7.43.

Tableau 7.43 Performances du capteur.

Sortie	En tension	En courant
Fréquences possibles	0 ... 3 kHz (20 kHz)	20 Hz ... 150 Hz
Niveau de bruit	~ 1,3 mV	~ 55 $\mu$ A
Courant de seuil	~ 250 mA	~ 55 mA
Signal } pour 1 kA	5,16 V	1 A
SNR }	72 dB	85 dB

Le capteur employé dans un environnement normal (température du laboratoire), est largement à l'intérieur des variations permises pour un appareil de classe 0,2, comme le prouve la figure 7.44.

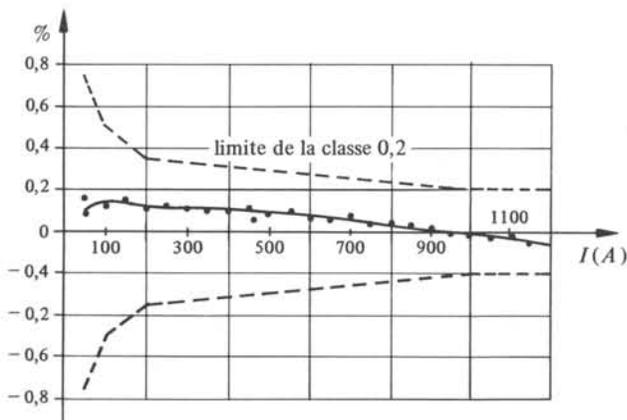


Fig. 7.44 Marges d'erreur du capteur.

Ce n'est plus le cas dans la gamme de températures allant de  $-25^{\circ}\text{C}$  à  $+45^{\circ}\text{C}$ .

## 7.6 EXERCICES

7.6.1 Etablir l'équation d'onde du champ magnétique (7.21).

7.6.2 Vérifier que l'onde plane (7.36) et l'onde sphérique (7.37) sont des solutions de l'équation de Helmholtz (7.34). Interpréter les conditions que doivent réaliser les vecteurs d'onde.

7.6.3 Etablir l'équation des rayons dans des milieux d'indice de réfraction parabolique. Esquisser les trajectoires des rayons.

7.6.4 Montrer qu'une onde linéairement polarisée peut toujours s'interpréter comme la somme de deux ondes circulairement polarisées en sens inverse.

7.6.5 Etablir les matrices de Jones des éléments du tableau 7.20 lorsqu'ils sont tournés d'un angle  $\alpha$  par rapport à  $Ox$ .

7.6.6 Vérifier que la direction du vecteur de Poynting  $\mathbf{s}/s$  est équipollente à celle des rayons lumineux.

7.6.7 Montrer que dans un milieu optiquement actif la direction des rayons coïncide avec celle des ondes.

7.6.8 Estimer la longueur de fibre optique nécessaire à la fabrication d'un capteur de courant basé sur la rotation du plan de polarisation par effet Faraday. Courant à pleine échelle : 1 kA. Estimer la résolution d'un tel capteur.



## CAPTEURS OPTIQUES ACTIFS

## 8.1 CARACTÉRISTIQUES MÉTROLOGIQUES DES DÉTECTEURS OPTIQUES

## 8.1.1 Détecteur optique, définition

On appelle *détecteur optique* un capteur optique (au sens strict) permettant de convertir un flux énergétique  $\phi$  (§ 6.1.3) en puissance électrique  $P_e$ .

Le flux  $\phi$  est reçu sous forme d'un éclairage énergétique (§ 6.1.6) par unité de surface du détecteur. Le plus souvent, il donne lieu à un courant de sortie  $i$  aux bornes du détecteur.

## 8.1.2 Remarques sur les unités

Comme dans la section 6.1, les *unités radiométriques* sont les seules utilisées dans l'ensemble de ce chapitre. Il existe cependant un autre groupe d'unités, les *unités photométriques*, qui sont couramment utilisées. Elles sont définies à partir de la sensibilité propre de l'œil humain, et ne sont donc pas proportionnelles aux unités radiométriques. Le tableau 8.1 donne les noms des unités radiométriques correspondant à ceux des unités photométriques.

Tableau 8.1 Conversions radiométriques-photométriques.

Grandeurs radiométriques	Unités	Grandeurs photométriques	Unités
Energie rayonnante	joule (J)	Energie lumineuse	lm · s
Puissance rayonnante	watt (W)	Flux lumineux	lumen (lm)
Exitance (énergétique)	W · m <sup>-2</sup>	Emittance lumineuse	lm · m <sup>-2</sup>
Eclairage énergétique	W · m <sup>-2</sup>	Eclairage lumineux	lux (lx)
Intensité énergétique	W · sr <sup>-1</sup>	Intensité lumineuse	candela (cd)
Radiance (énergétique)	W · sr <sup>-1</sup> · m <sup>-2</sup>	Luminance	cd · m <sup>-2</sup>

De plus, à cause de l'aspect corpusculaire du rayonnement, il s'avère intéressant de calculer les diverses composantes caractéristiques des détecteurs en multiples de l'énergie du photon, donnée par :

$$W_q = hf = \frac{hc}{\lambda} \quad \text{J} \quad (8.1)$$

Plus généralement, l'ensemble des grandeurs radiométriques définies dans la section 6.1 peut se ramener à l'unité du photon. On a par exemple (§ 6.1.5)

$$\phi_q = \frac{1}{W_q} \frac{d\phi}{df} \Delta f = \frac{\phi_f}{W_q} \Delta f \quad (8.2)$$

où  $\phi_f$  est le flux énergétique spectral ( $\text{WHz}^{-1}$ ), et  $\phi_q$  le flux en photons par seconde.

### 8.1.3 Sensibilité

Conformément à (1.5), la sensibilité  $k$  d'un détecteur est définie par le rapport de l'accroissement du courant de sortie  $\Delta i$  à celui du flux incident :

$$k = \frac{\Delta i}{\Delta \left( \int_L \phi_f df \right)} \quad \text{AW}^{-1} \quad (8.3)$$

où  $L$  est la *largeur spectrale* de la lumière reçue, c'est-à-dire la bande de fréquence du rayonnement détecté.

Pour le cas où le détecteur est éclairé par une lumière monochromatique de fréquence  $f$ , la *sensibilité spectrale*  $k_f$  est définie par

$$k_f = \frac{\Delta i}{\Delta \phi_f} \quad \text{AW}^{-1} \text{Hz} \quad (8.4)$$

On peut introduire de même la *sensibilité photonique* par la relation

$$k_q = \frac{\Delta i}{\Delta \phi_q} \quad (8.5)$$

### 8.1.4 Dépendance en longueur d'onde de la sensibilité spectrique

Par définition, on pose

$$k_\lambda = \frac{\Delta i}{\Delta \phi_\lambda} \quad \text{AW}^{-1} \text{nm} \quad (8.6)$$

En admettant un rapport de conversion photon-électron constant,  $k_\lambda$  est une fonction linéaire de  $\lambda$ . En effet, le nombre  $N$  d'électrons créés dans le détecteur par seconde est donné comme :

$$N \propto \phi_\lambda / W_q \quad (8.7)$$

Donc

$$k_\lambda \propto \frac{1}{W_q} = \frac{\lambda}{hc} \quad (8.8)$$

D'autre part, un détecteur ne fonctionne que dans une bande de largeur spectrique  $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$  en dehors de laquelle sa sensibilité spectrique est nulle. La figure 8.2 montre la réponse spectrique théorique découlant de ces considérations, comparée à celle d'un détecteur réel.

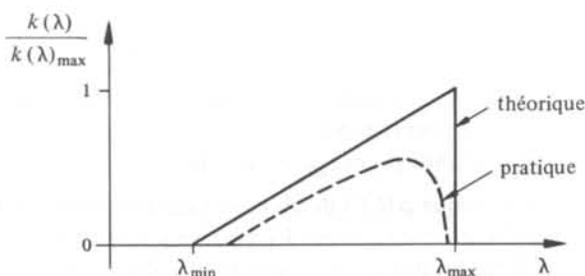


Fig. 8.2

### 8.1.5 Courant noir

On appelle *courant d'obscurité* ou *courant noir*  $i_d$  le courant délivré par le détecteur lorsque le flux énergétique incident  $\phi$  est nul.

Le courant noir trouve son origine dans la création d'électrons thermiques, produits par l'agitation électronique propre du détecteur, elle-même due à sa température propre ou à celle de son environnement.

### 8.1.6 Photocourant

Lorsque le détecteur reçoit un flux  $\phi$ , un courant  $i_p$  appelé photocourant s'ajoute au courant d'obscurité:  $i = i_d + i_p$ .

C'est à partir du courant  $i_p$  que l'on détermine la réponse du détecteur à un flux  $\phi$ , puisque  $i_d$  est constant. Cette réponse dépend du capteur proprement dit, et de la nature du rayonnement qu'il reçoit.

## 8.2 LES DÉTECTEURS QUANTIQUES

### 8.2.1 Effet photoélectrique

Le fonctionnement d'un détecteur quantique est basé sur l'interaction photon-électron. Ce phénomène est dans sa globalité l'inverse de celui rencontré dans les sources lumineuses électroluminescentes (sect. 6.3). L'électron subit un changement de niveau d'énergie par capture d'un photon incident; on parle d'*effet photoélectrique* [66].

On distingue deux catégories d'effets photoélectriques:

L'*effet photoélectrique de surface*, qui consiste à arracher les électrons d'un métal en leur fournissant une énergie supérieure à leur travail de sortie (§ II.2.5.2), s'appelle aussi *effet photoémisif*. Il est utilisé dans les tubes à vide (§ 8.2.5).

L'*effet photoélectrique de volume* présente deux variantes:

- l'*effet photoconducteur*, qui consiste en une variation de la résistance électrique du détecteur lorsqu'il est soumis à un rayonnement (§ 8.2.9);
- l'*effet photovoltaïque*, qui consiste en une création de paires électron-trou dans la zone de déplétion d'une barrière de potentiel (jonction p - n) soumise à un rayonnement (sect. 8.3).

### 8.2.2 Absorption

Dans le modèle à deux niveaux d'énergie  $W_1$  et  $W_2 > W_1$ , (§ 6.3.2), l'absorption est un phénomène stimulé qui consiste en la création d'une paire électron-trou par absorption du photon inducteur (fig. 8.3).

Le taux volumique d'absorption  $t_{\text{abs}}$  est fonction :

- du nombre volumique  $\rho(hf)$  de photons inducteurs tels que  $hf = W_2 - W_1$ ;
- de la probabilité  $p_1$  que le niveau  $W_1$  possède un électron;
- de la probabilité  $(1 - p_2)$  que le niveau  $W_2$  possède un trou;
- de la constante d'absorption  $B_{12}$ .

On peut donc écrire :

$$t_{\text{abs}} = B_{12} p_1 (1 - p_2) \rho(hf) \quad \text{m}^{-3} \text{s}^{-1} \quad (8.9)$$

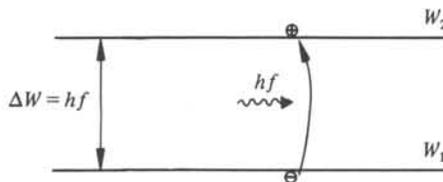


Fig. 8.3 Absorption.

### 8.2.3 Coefficient d'absorption

Le flux lumineux spectral  $\phi_f$  subit une atténuation en fonction de la distance parcourue  $x$  dans un milieu donné (fig. 8.4), régie par la loi :

$$\phi_f(x) = \phi_f(0) \exp \{-\alpha_f x\} \quad \text{WHz}^{-1} \quad (8.10)$$

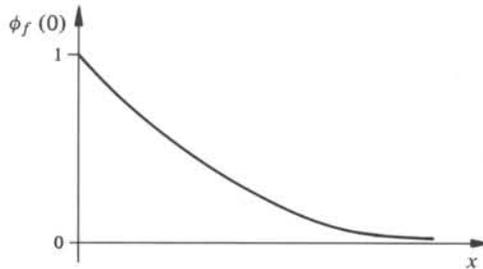


Fig. 8.4 Absorption.

On appelle  $\alpha_f$  le coefficient d'absorption du milieu, pour la fréquence  $f$ . D'après (8.10), on a

$$\alpha_f = - \frac{d}{dx} \text{Ln} \left[ \frac{\phi_f(x)}{\phi_f(0)} \right] \quad (8.11)$$

Le taux volumique d'absorption et le coefficient d'absorption sont liés par la relation (§ 8.5.1):

$$t_{\text{abs}} = \alpha_f \phi_q \quad (8.12)$$

où  $S$  est la surface éclairée. En exprimant  $\phi_q$  à partir de  $\rho(hf)$ , on obtient

$$B_{12} p_1 (1 - p_2) \cong -\alpha \frac{c}{n} \quad \text{s}^{-1} \quad (8.13)$$

où  $c/n$  est la vitesse de la lumière dans le milieu.

#### 8.2.4 Rendement quantique interne

Le rendement quantique interne  $\eta$  est défini comme le nombre moyen d'électrons créés par photon incident et par seconde :

$$\eta = \frac{\bar{N}_e}{N_p} \quad (8.14)$$

Le rendement quantique est lié à la sensibilité photonique (§ 8.1.3). En effet

$$i = \bar{N}_e e \quad (8.15)$$

où  $e$  est la charge électronique. De plus

$$\phi_q = N_p \cdot W_q \quad (8.16)$$

La sensibilité photonique s'écrit alors :

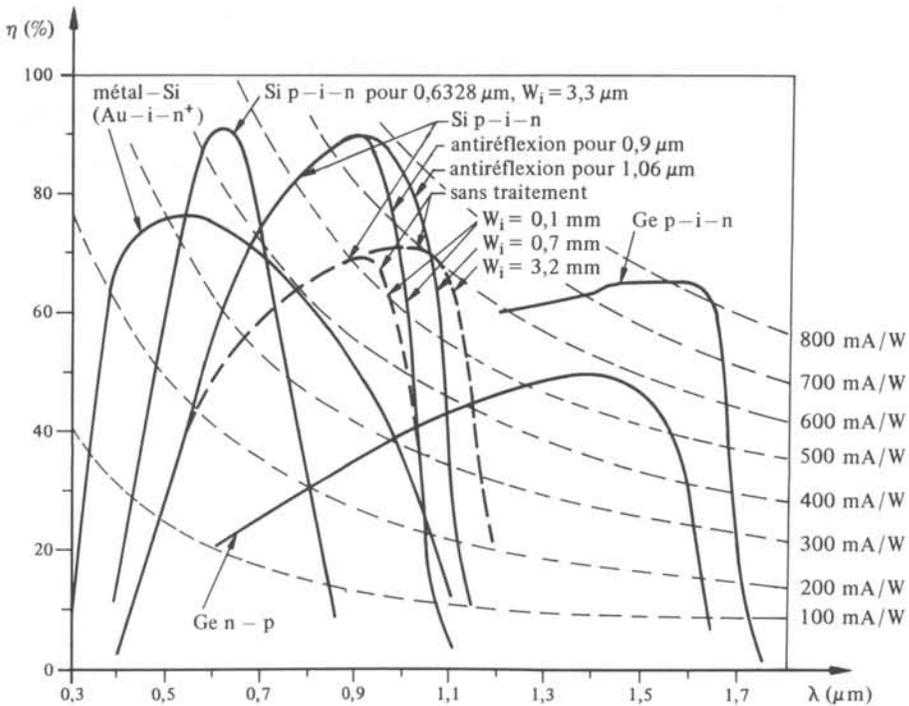


Fig. 8.5 Rendements quantiques des photodiodes [66].

$$k_q = \eta \frac{e}{W_q} \quad (8.17)$$

En pratique, le rendement quantique est toujours plus faible que l'unité (fig. 8.5).

### 8.2.5 Détecteur à effet photoélectrique de surface

Dans ce genre de détecteur, l'énergie des photons est utilisée pour faire franchir aux électrons la barrière de potentiel, derrière laquelle ils sont confinés en l'absence de rayonnement. Le détecteur est composé d'une photocathode et d'une anode qui réceptionne le photocourant  $i_p$  (fig. 8.6).

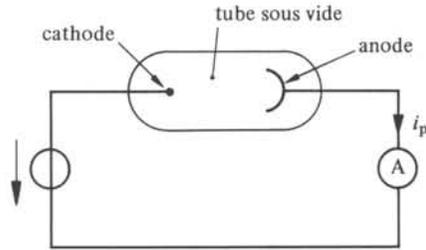


Fig. 8.6 Photocathode.

L'expression du photocourant est, à fréquence donnée

$$i_p = (1 - \rho) \eta e \phi_q \quad A \quad (8.18)$$

en tenant compte de (8.16), cette expression se ramène à

$$i_p = (1 - \rho) k_f \phi_f \quad A \quad (8.19)$$

Le facteur  $(1 - \rho)$ , où  $\rho$  est la réflectivité du capteur, représente la fraction du flux  $\phi$  absorbée par le détecteur.

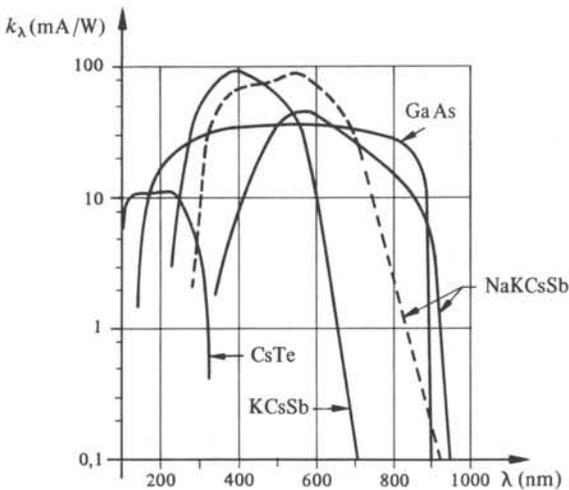


Fig. 8.7 Sensibilités spectrales de quelques photocathodes [67].



Lorsqu'un électron est émis en ( $t = 0$ ) de la cathode, il subit une accélération  $\ddot{x}$  donnée par

$$\ddot{x} = \frac{e(U - U_R)}{md} \quad (8.20)$$

où  $m$  est la masse de l'électron.

Si l'on néglige sa vitesse initiale (en général faible par rapport à la vitesse acquise sous l'effet de  $U/U_R$ ), sa position s'obtient en intégrant (8.20):

$$x = \frac{e(U - U_R)}{2md} t^2 \quad (8.21)$$

L'électron atteint l'anode après un temps  $t_c$  donné par:

$$t_c = d \sqrt{\frac{2m}{e(U - U_R)}} \quad (8.22)$$

En dérivant (8.21) et à l'aide de (8.22), on obtient la valeur de la tension  $U_R(t)$ , sous la forme

$$U_R(t) = \frac{2eR}{t_c^2} t \quad (8.23)$$

### 8.2.7 Tubes photomultiplicateurs (P.M.)

Un *photomultiplicateur* est un tube photocathodique combiné avec un amplificateur de courant électronique (fig. 8.10).

L'amplification est obtenue par le processus d'émission secondaire: lorsqu'un électron d'énergie suffisante tombe sur une surface appropriée (dynode), il arrache en moyenne à cette surface un certain nombre  $\delta$  d'électrons secondaires. Il suffit d'accélérer ces électrons pour obtenir un effet d'avalanche, augmentant substantiellement le nombre total d'électrons arrivant sur l'anode. Les surfaces intermédiaires où se produisent les chocs portent le nom de *dynodes*. Dans un photomultiplicateur à  $N$  dynodes semblables, le gain  $G$  vaut:

$$G = \delta^N \quad (8.24)$$

On appelle  $\delta$  le *coefficient d'émission secondaire* (fig. 8.11). En multipliant le nombre de dynodes (typiquement  $N = 10$ ), on arrive à des valeurs de  $G$  de 50 dB.

### 8.2.8 Détecteurs à effet photoélectrique interne

L'énergie des photons incidents sur de tels détecteurs est utilisée pour transférer des électrons de la bande de valence dans la bande de conduction. C'est l'absorption, au sens du paragraphe 8.2.2, définie pour un semiconducteur.

La largeur de la bande interdite est normalement bien plus faible que l'énergie d'ionisation de l'effet photoélectrique de surface (§ 8.2.5).

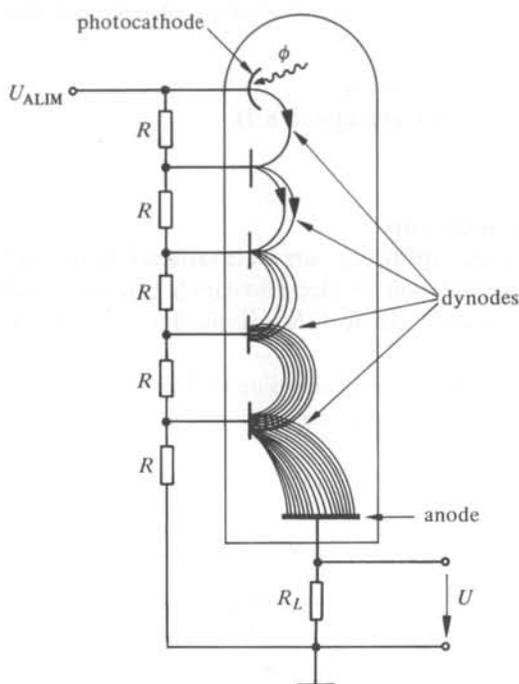


Fig. 8.10 Tube photomultiplicateur.

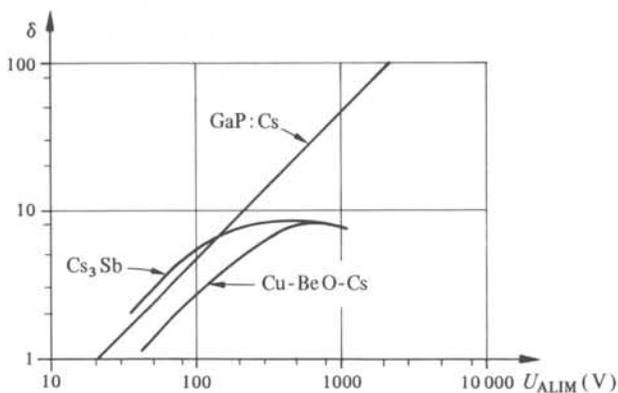


Fig. 8.11 Emission secondaire de différents matériaux utilisés comme dynodes [67].

Par rapport aux photodiodes, les détecteurs à effet photoélectrique interne possèdent donc un domaine d'utilisation plus étendu dans les grandes longueurs d'onde. Ils fonctionnent jusque dans l'infrarouge proche et même moyen ( $\lambda = 2\mu\text{m}$ ). Dans ces domaines, la température propre du détecteur peut devenir une source de bruit inacceptable. Il est alors nécessaire de le refroidir par des éléments Peltier, ou de l'azote liquide par exemple.

Deux types de détecteurs à effet photoélectrique interne sont particulièrement utilisés :

- les détecteurs photoconducteurs;
- les détecteurs photovoltaïques (sect. 8.3).

### 8.2.9 Détecteurs photoconducteurs

L'effet utilisé dans ce genre de capteurs est la variation de résistivité du semiconducteur résultant de l'augmentation des électrons dans la bande de conduction. On constate en pratique que la conductivité de la majorité des semiconducteurs s'accroît lorsqu'ils sont éclairés [68].

Ce phénomène peut être étudié à l'aide d'un modèle simple, soit une plaque de semiconducteur transparent polarisée par une tension  $U$  et soumis à un flux lumineux  $\phi_q$  (fig. 8.12).

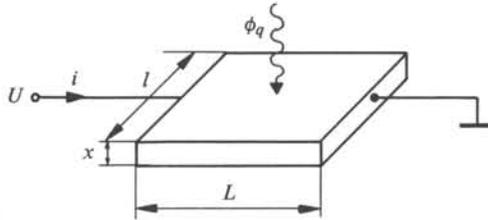


Fig. 8.12 Capteur semiconducteur, schéma.

On définit  $S$  comme la densité d'électrons présents dans la bande de conduction par unité de volume efficace du semiconducteur. L'accroissement de  $S$  par unité de temps est due à la création, par effet photoélectrique interne, de nouveaux électrons :

$$\frac{dS}{dt} = \eta \phi_q \frac{1}{Llx} - \frac{S}{\tau} \quad \text{m}^{-3} \text{s}^{-1} \quad (8.25)$$

où le terme  $-S/\tau$  tient compte du temps  $\tau$  de recombinaison. L'équation (8.25) possède la solution stationnaire

$$S = k_f \phi_f \frac{\tau}{x l L} \quad \text{m}^{-3} \quad (8.26)$$

où  $k_f$  est la sensibilité spectrale (8.13). Le photocourant  $i_p$  créé par le processus peut alors s'écrire

$$i_p = -S e l v \quad \text{A} \quad (8.27)$$

où  $v$  est la vitesse moyenne d'un électron. Mais, d'après le paragraphe II.2.2.8, la vitesse de l'électron est liée à sa mobilité  $\mu$  par la relation

$$v = -\mu E \quad \text{ms}^{-1} \quad (8.28)$$

où  $E = U/L$  est le champ électrique créé dans le semiconducteur par la tension  $U$ . Finalement, par analogie avec le photomultiplicateur, on écrit

$$i_p = k_f \phi_f G \quad \text{A} \quad (8.29)$$

où  $G$  est appelé le *gain de photoconduction*. A l'aide de (8.26) et (8.27), on voit que  $G$  peut s'exprimer par les relations

$$G = - \frac{\tau e v}{L} = [\tau e \mu U] / L^2 \quad (8.30)$$

La conductivité  $\sigma$  due à l'effet photoconductor s'écrit alors

$$\sigma = \frac{k_f \phi_f}{l x U} \cdot G \quad \text{Sm}^{-1} \quad (8.31)$$

Des valeurs de  $G$  de l'ordre de 30 dB ont été mesurées. On remarque que  $G$  dépend linéairement du temps de recombinaison  $\tau$ . Il n'est donc pas possible d'obtenir des photoconducteurs efficaces et rapides. On opte généralement pour l'efficacité, en limitant ainsi la bande passante du détecteur ( $\ll 1$  MHz).

## 8.3 DÉTECTEURS PHOTOVOLTAÏQUES

### 8.3.1 Principe de fonctionnement

Les détecteurs photovoltaïques exploitent les propriétés de la jonction p-n (chap. VII.2). Les paires électron-trou créées par l'absorption de photons dans la zone de déplétion sont séparées par le champ électrique qui existe dans la jonction (fig. 8.13). Elles donnent alors lieu, aux extrémités du semiconducteur, à une différence de potentiel proportionnelle au flux de photons absorbés. Si le circuit est fermé, c'est un courant  $i_p$  qui est créé.

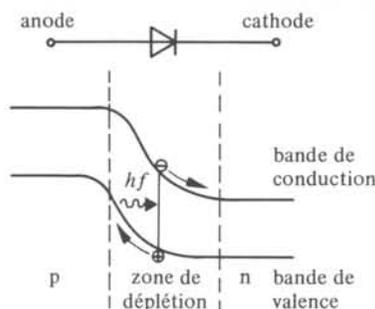


Fig. 8.13 Absorption d'un photon dans la zone de déplétion d'une jonction p-n.

### 8.3.2 Photodiode

Dans les photodiodes, le rayonnement tombe sur la couche diffusée p, traverse cette couche (en subissant une atténuation) pour être absorbé dans la zone de déplétion, à la limite de la couche n (fig. 8.14). Pour garantir un bon rendement quantique  $\eta$ , il faut :

- minimiser les pertes par réflexion sur la surface ;
- minimiser les pertes par absorption dans la couche dopée p ;

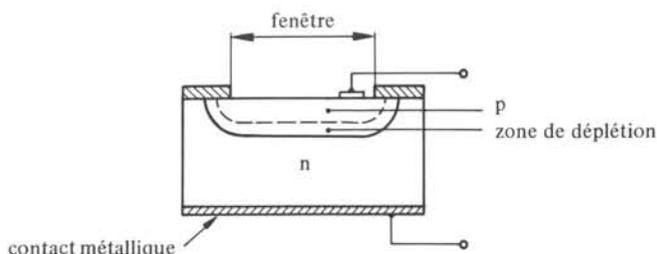


Fig. 8.14 Schéma d'une photodiode.

- maximiser l'absorption dans la zone de déplétion;
- minimiser les recombinaisons électron-trou.

Pour satisfaire ces exigences,

- on dépose une couche anti-reflets sur la couche dopée p, en général de la silice  $\text{SiO}_2$  dont l'indice de réfraction est intermédiaire entre celui de l'air et celui de la couche dopée p;
- on réalise une couche dopée p aussi fine que possible afin que son atténuation  $\alpha$  n'intervienne que sur une faible distance;
- on augmente le volume de la zone de déplétion en insérant un semiconducteur intrinsèque entre la couche p et la couche n (§ 8.3.11);
- on polarise la diode en sens inverse (§ 8.3.10).

### 8.3.3 Rendement quantique effectif

Soit  $\alpha$  le coefficient d'absorption du matériau dopé n. La probabilité qu'un photon soit absorbé avant d'atteindre la région métallique vaut (fig. 8.15)

$$p = 1 - \exp(-\alpha L) \quad (8.32)$$

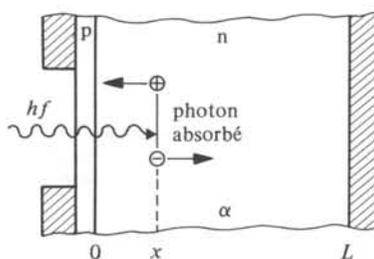


Fig. 8.15 Mécanisme d'absorption dans une photodiode.

Or, seuls les photons absorbés avant d'atteindre cette couche produisent des photo-électrons. Le rendement quantique se trouve diminué dans la même proportion. On définit de ce fait un *rendement quantique effectif*  $\eta'$ , par la relation

$$\eta' = \eta [1 - \exp(-\alpha L)] \quad (8.33)$$

Ce rendement tient compte de la forte dépendance de  $\alpha$  avec la longueur d'onde (fig. 8.16). La valeur typique de  $\eta'$  n'excède pas 50%.

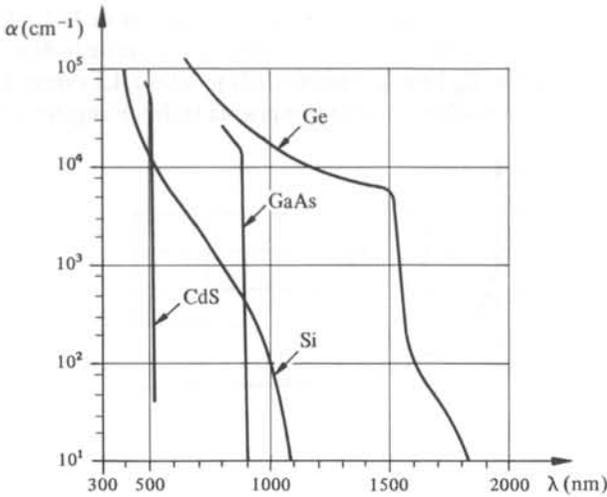


Fig. 8.16 Coefficient d'absorption en fonction de la longueur d'onde pour les matériaux utilisés comme photodiodes [69].

### 8.3.4 Réponse en courant d'une photodiode

Le courant  $i_p$  d'origine photoélectrique prend la forme simple :

$$i_p = -e\eta'\phi_p \quad (8.34)$$

où  $\eta'$  est le rendement quantiquement effectif.

Le courant total à travers la diode est la somme algébrique du courant d'origine photoélectrique et du courant propre à la diode (§ VII.3.2.5):

$$i = I_0 [\exp(eU/k_B T) - 1] - i_p \quad (8.35)$$

où  $U$  est la tension appliquée, et  $T$  la température de la diode,  $k_B$  est la constante de Boltzmann et  $I_0$  le courant inverse de saturation.

### 8.3.5 Circuit équivalent

Le schéma équivalent d'une photodiode est représenté à la figure 8.17.

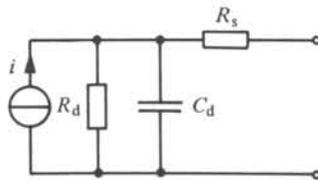


Fig. 8.17 Schéma équivalent [70].

Ce schéma comprend :

- une source de courant  $i$  qui représente le courant total débité par la diode (courant de polarisation plus courant résultant de l'effet photoélectrique);

- une résistance parallèle  $R_d$ , la résistance dynamique de la diode;
- une résistance série  $R_s$  qui est la résistance ohmique de la diode;
- un condensateur  $C_d$  lié à la capacité de la jonction. La valeur de  $C_d$  diminue lorsque la tension de polarisation inverse de la diode augmente (fig. 8.18).

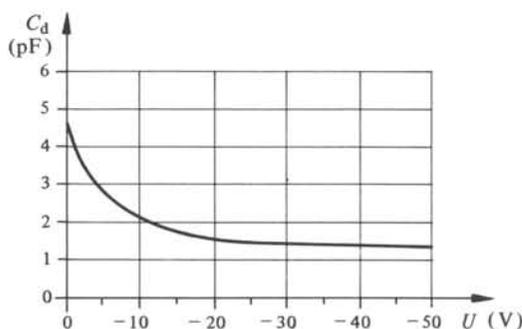


Fig. 8.18  $C_d$  en fonction de la tension inverse d'une photodiode.

### 8.3.6 Caractéristique courant-tension

L'allure typique de cette caractéristique, telle qu'elle résulte de (3.84) est représentée à la figure 8.19.

Par définition (§ 8.1.5),  $i_d = -I_0 [\exp(eU/k_B T) - 1]$  est le courant noir de la diode.

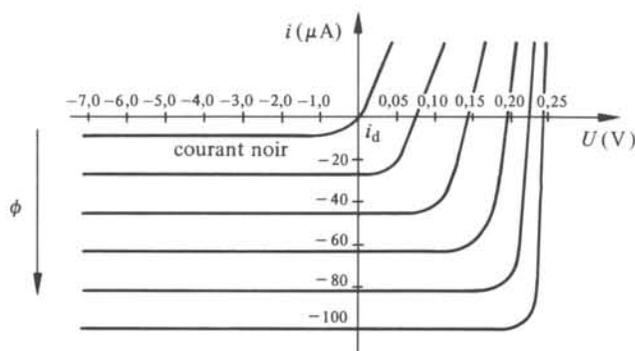


Fig. 8.19 Caractéristique courant-tension d'une photodiode [69].

### 8.3.7 Fonctionnement en mode non-polarisé

La diode n'est pas polarisée par une tension externe. Elle est alors équivalente à un générateur, c'est pourquoi on parle également de mode photovoltaïque, en référence avec les cellules solaires. On mesure soit la tension à vide de la diode, soit son courant de court-circuit (fig. 8.20).

L'avantage d'une utilisation en mode photovoltaïque consiste en l'absence de courant noir, ce qui permet une bonne détermination des faibles puissances rayonnantes. Par contre, du fait que la capacité  $C_d$  est relativement élevée, la bande passante est limitée (50 kHz).

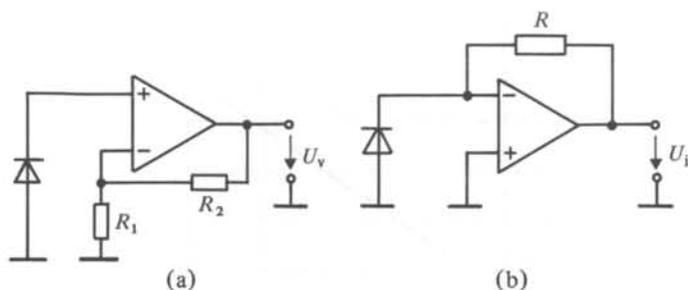


Fig. 8.20 Raccordements d'une photodiode en mode photovoltaïque: (a) tension à vide; (b) courant de court-circuit.

### 8.3.8 Réponse en tension

En circuit ouvert, la caractéristique de la diode se limite à la partie positive de l'axe  $U$  (fig. 8.19). La tension  $\Delta V$  aux bornes de la diode est donnée par la condition d'annulation du courant

$$-i_p = I_0 \{1 - \exp(e \Delta V / k_B T)\} \quad (8.36)$$

Il s'ensuit que :

$$\Delta V = (k_B T / e) \text{Ln}(1 + i_p / I_0) \quad (8.37)$$

Pour de *faibles éclaircissements*, (8.37) se réduit à

$$\Delta V = (k_B T / e) \frac{i_p}{I_0} \quad (8.38)$$

Dans ce cas, la tension à la sortie de l'amplificateur vaut

$$U_v = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{k_B T}{e I_0} k_f \phi_f \quad (8.39)$$

Dans le cas d'éclaircissements importants, on a

$$U_v = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{k_B T}{e} \text{Ln}\left(\frac{k_f \phi_f}{I_0}\right) \quad (8.40)$$

On s'aperçoit que pour de petits éclaircissements, la tension à la sortie est proportionnelle à la puissance optique reçue, tandis que pour des flux optiques donnant lieu à d'importants courants devant celui des porteurs majoritaires, la tension de sortie varie de façon logarithmique par rapport à la puissance optique (fig. 8.21).

### 8.3.9 Réponse en courant

Le fonctionnement en court-circuit correspond à la partie négative de l'axe  $i$  (fig. 8.19). En première approximation, l'amplificateur (fig. 8.20(b)) délivre une tension (fig. 8.22)

$$U_i = -R i_p = R k_f \phi_f \quad (8.41)$$

car seul  $i_p$  intervient dans ce montage.

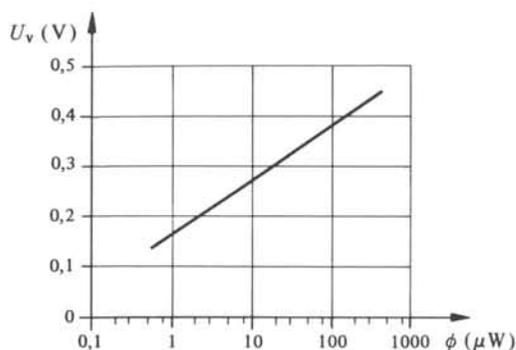


Fig. 8.21 Réponse en tension, éclairements importants.

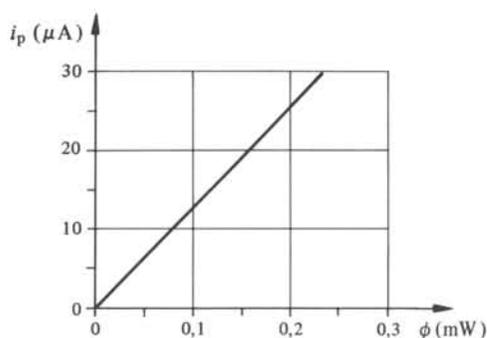


Fig. 8.22 Réponse en courant.

### 8.3.10 Fonctionnement en mode polarisé

Dans ce mode, aussi nommé mode photoconducteur, la diode est polarisée en sens inverse par une tension  $U^+$ . On mesure alors le signal aux bornes d'une résistance de charge  $R_c$ , à l'aide d'un amplificateur de tension (fig. 8.23).

Le courant inverse  $i_r$  a pour expression

$$i_r = i_p + I_0 [1 - \exp(-eU^+/k_B T)] \quad (8.42)$$

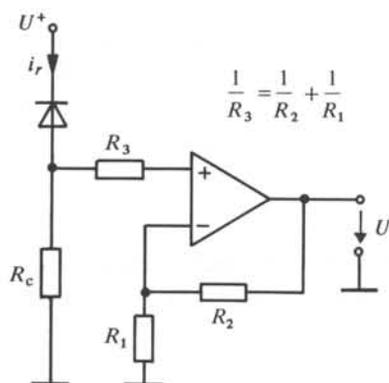


Fig. 8.23 Mesure en mode photoconducteur.

Pour une tension inverse  $U^+$  suffisamment élevée, on peut négliger le terme exponentiel dans (8.42). Il reste :

$$i_r = i_p + I_0 \quad (8.43)$$

Si la puissance rayonnante est élevée,  $I_0$  est négligeable devant  $i_p$ . La tension de sortie  $U$  est alors proportionnelle à la puissance rayonnante reçue par la diode :

$$U = R_c \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) k_f \phi_f \quad (8.44)$$

Dans le cas de puissances rayonnantes moyennes, le terme entre crochets de (8.42) n'est pas négligeable. Il représente le courant d'obscurité de la diode, qui à le désavantage d'être fortement dépendant de la température. Le mode photoconducteur ne convient donc bien que pour la mesure de puissances rayonnantes élevées. Il possède l'avantage d'avoir une bande passante nettement plus grande que celle du mode photovoltaïque (MHz).

### 8.3.11 Photodiode p-i-n

Comme leur nom l'indique, les *diodes* p-i-n comportent une région de semi-conducteur intrinsèque prise en sandwich entre la région p et la région n (fig. 8.24). La plupart des photons incidents sont alors absorbés dans cette région intermédiaire, ce qui augmente le rendement quantique effectif  $\eta'$ .

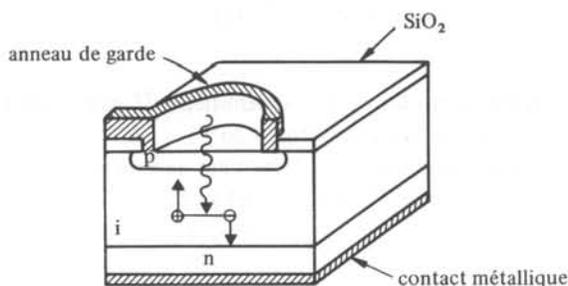


Fig. 8.24 Photodiode p-i-n.

De plus, à cause de la grande séparation des charges d'espace des régions p et n (augmentation de la zone de déplétion), la capacité  $C_d$  interne d'une diode p-i-n est plus faible que celle d'une diode p-n.

### 8.3.12 Photodiode avalanche (APD)

La *photodiode avalanche* est elle aussi basée sur le principe de l'effet photo-électrique interne (fig. 8.25).

Sa fabrication se distingue par l'existence d'une région (jonction n-p) où règne un champ électrique intense, (proche de la limite de claquage), entretenu par une tension de polarisation inverse élevée. Les paires électron-trou générées par absorption de la puissance rayonnante dans la couche p sont fortement accélérées et produisent de nouvelles paires électron-trou, par collisions ionisantes. Ainsi, chaque paire électron-trou

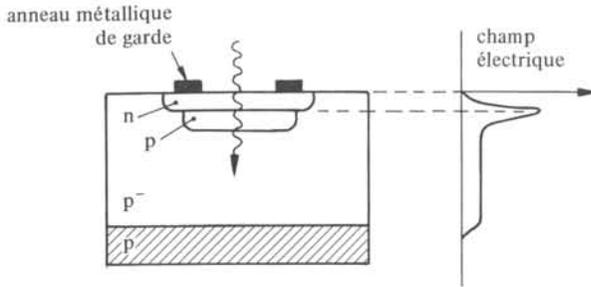


Fig. 8.25 Photodiode avalanche.

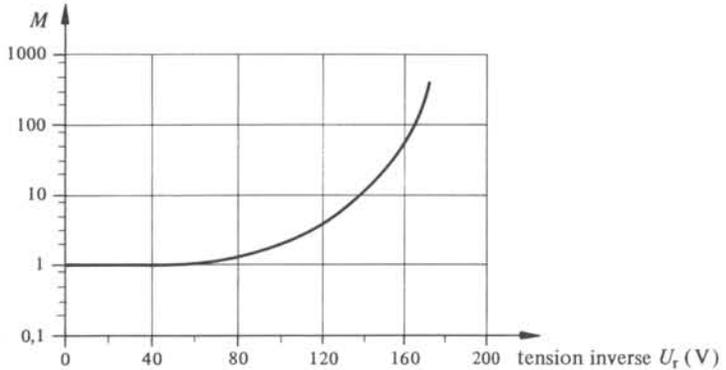


Fig. 8.26 Gain d'une photodiode avalanche au silicium.

produite par le rayonnement donne finalement lieu à  $M$  paires, en moyenne. On appelle  $M$  le gain de la photodiode avalanche (fig. 8.26).

Le gain a le désavantage de varier fortement en fonction de la température et de la tension de polarisation inverse. Un gain trop élevé est souvent instable, et produit un bruit supplémentaire (§ 8.4.1). Un compromis entre le gain et la stabilité de la diode avalanche est atteint en modérant la valeur de  $M$ . Pour les diodes avalanches au silicium, on choisit  $50 < M < 150$ . Pour les APD au germanium,  $M$  est plus petit, de l'ordre de 30.

Le courant noir  $i_d$  de la diode avalanche est lui aussi multiplié par un facteur de l'ordre de  $M$ , comparé à celui de la diode p-i-n. Une valeur typique de  $i_d$  pour une APD au silicium est 10 nA, pour  $M = 100$ . Cette valeur (à 20°C) double tous les 8°C. L'utilisation des photodiodes avalanches est donc délicate lorsqu'une grande stabilité est requise.

Les relations établies pour les photodiodes se généralisent aux diodes avalanches, en introduisant le gain  $M$ . Par exemple, le courant créé par effet photoélectrique dans une diode avalanche s'écrit :

$$i_p = \eta' M k_f \phi_f \quad (8.45)$$

### 8.3.13 Phototransistor

Le phototransistor est un transistor n-p-n dont la base reçoit la puissance rayonnante. Il se comporte comme une photodiode en mode polarisé avec un courant de

collecteur donné par

$$i_c = (1 + \beta) i_r \quad \text{A} \quad (8.46)$$

où  $\beta$  est le gain en courant du transistor (montage émetteur commun) et  $i_r$  est donné par (8.42). Il est donc possible de considérer le phototransistor comme la combinaison d'une photodiode et d'un amplificateur. Ceci n'est vrai que pour de petites variations autour d'une puissance rayonnante moyenne relativement élevée. La sensibilité et la linéarité des phototransistors sont en effet fonction de la puissance rayonnante incidente. Les phototransistors ne sont donc pas linéaires, et de ce fait sont peu employés dans des mesures directes de la puissance rayonnante.

Par contre, ils conviennent bien pour un emploi en commutation (présence ou absence d'un rayonnement). Dans ce cas, il s'avère souvent nécessaire de faire suivre le phototransistor d'un montage à faible impédance d'entrée (fig. 8.27) afin d'augmenter la vitesse de commutation.

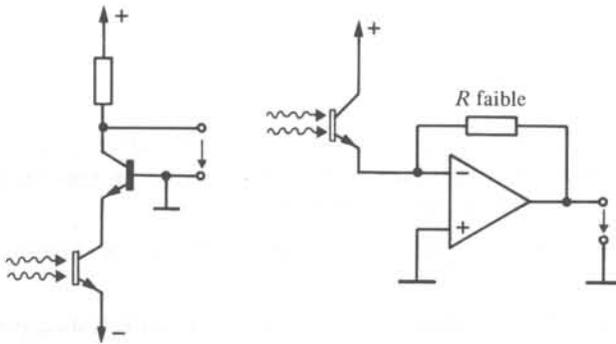


Fig. 8.27 Montages à grandes vitesses de commutation.

## 8.4 BRUIT DANS LES DÉTECTEURS OPTIQUES

### 8.4.1 Introduction

Les bruits rencontrés dans les systèmes optiques de détection sont de diverse nature (fig. 8.28).

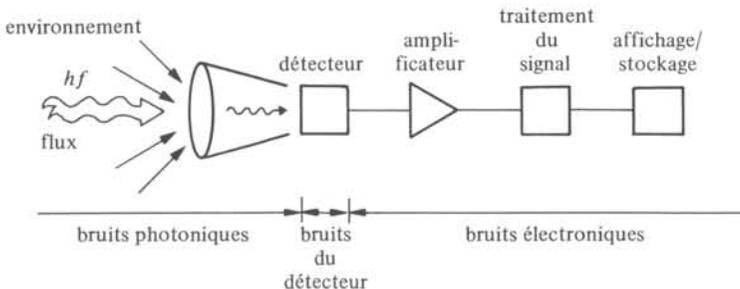


Fig. 8.28 Bruits des systèmes optiques de détection.

D'origine optique proprement dite, on distingue deux *bruits photoniques* :

- le *bruit* dû à la nature *quantique* du rayonnement optique que l'on veut détecter. On montre que ce bruit est régi par une statistique de Poisson [67], et il peut se décrire comme un bruit de grenaille (§ 3.2.6). Comme la variance de la distribution de Poisson est égale à sa moyenne, on a :

$$\sigma_q = \sqrt{\phi_q} \quad (8.47)$$

où  $\phi_q$  est le flux de photons incidents (8.2).

- Le *bruit optique d'environnement*, qui est produit par rayonnement du milieu extérieur (corps noir, § 6.2.1). Ce bruit n'est pas strictement poissonnien, car seule une lumière parfaitement monochromatique est ergodique. On montre que ce bruit est caractérisé par sa variance

$$\sigma^2 = \sigma_q^2 \frac{\exp[hf/k_B T]}{\exp[hf/k_B T] - 1} \quad (8.48)$$

où  $\sigma_q^2$  est la variance de la distribution de Poisson,  $f$  la fréquence du signal optique et  $T$  la température de l'environnement. Ce bruit *n'est pas un bruit blanc*, puisque sa densité est fonction de la fréquence. Cependant, dans la majorité des cas (fréquences optiques)  $T$  n'excède pas 500 K. Alors (8.48) se ramène à (8.47) : le bruit de l'environnement ne se distingue pas spectralement du bruit quantique du signal auquel il s'additionne.

Les bruits propres au détecteur optique sont étudiés dans le chapitre 3. On peut citer :

- Le bruit thermique produit par la résistance équivalente  $R$  du capteur lui-même.
- Le bruit de grenaille propre à la jonction p-n, dû à la génération des paires électron-trou, ou encore à la ionisation électronique.
- Le *bruit de gain interne* est dû aux fluctuations internes de la génération des porteurs de charge, quelles qu'elles soient. Il s'exprime par [67] :

$$i_{G\text{eff}}^2 = 2e(F(G) - 1) i_B \quad A^2 \quad (8.49)$$

où  $F$  est une fonction du seul gain  $G$ . Ce bruit est toujours présent, même lors de très faible gain.

- Le *bruit noir*, qui est celui produit par le courant noir  $i_d$  (§ 8.1.5). C'est le bruit de grenaille produit par exemple par la barrière de potentiel imposée dans une photodiode en mode polarisé inverse, et en l'absence d'énergie rayonnante. Ce bruit ne se distingue pas du bruit de grenaille produit par le photocourant  $i_p$ . Son spectre d'amplitude s'écrit donc :

$$i_{d\text{eff}}^2 = 2e i_d B \quad A^2 \quad (8.50)$$

- Le bruit en  $1/f$ , présent dans tous les dispositifs.

Les composants suivants du système de mesure (amplificateur, filtres, convertisseurs, etc.) sont tous des sources de bruit. De plus, ce sont les bruits de ces dispositifs électroniques qui limitent le plus souvent les performances du capteur optique entier. Ils se ramènent à l'un des types de bruit décrit précédemment. Ils ne sont pas discutés ici.

### 8.4.2 Puissance spectrale équivalente au bruit

Par définition, la *puissance spectrale équivalente au bruit*,  $NEP_{f,B}$ , est le flux énergétique spectral nécessaire pour donner lieu à un signal  $i$  égal à celui du bruit  $i_{\text{eff}}$ , par unité de bande passante électrique de bruit  $B$ :

$$NEP_{f,B} = i_{\text{eff}}/k_f \quad \text{W Hz}^{-1/2} \text{ s}^{-1/2} \quad (8.51)$$

### 8.4.3 Défectivité spectrale

La *défectivité spectrale*  $D_{f,B}$  est définie comme l'inverse de la puissance équivalente au bruit :

$$D_{f,B} = \frac{1}{NEP_{f,B}} \quad \text{W}^{-1} \text{ Hz}^{1/2} \text{ s}^{-1/2} \quad (8.52)$$

On appelle défectivité spectrale réduite  $D_{f,B}^*$  la grandeur

$$D_{f,B}^* = D_{f,B} \sqrt{A} \quad \text{W}^{-1} \text{ Hz}^{1/2} \text{ s}^{-1/2} \text{ m}^{1/2} \quad (8.53)$$

où  $A$  est la surface sensible du détecteur.

### 8.4.4 Remarque

L'inverse du carré de  $D_{f,B}^*$  représente donc le carré de la puissance rayonnante à la fréquence  $f$  égale à la puissance du bruit, par unité de surface du capteur et de bande passante de bruit électrique. C'est une caractéristique qui permet de comparer les performances de différents capteurs. C'est la raison pour laquelle  $D_{f,B}^*$  porte parfois le nom de facteur de vérité, ou facteur de qualité du détecteur.

### 8.4.5 Limitation par le bruit quantique

Les divers bruits présentés au paragraphe 8.4.1 ne sont pas tous présents dans les détecteurs. Il existe cependant un bruit qui est une limite absolue : le bruit quantique. Ce bruit, inhérent à l'existence du rayonnement lui-même est une limite vers le bas. Pour un détecteur idéal ne présentant *aucune* source de bruit interne, le *rapport signal sur bruit maximal* possible est donné par

$$\left. \frac{S}{B} \right|_{\text{max}} = \frac{\phi_q}{\sigma_q} \quad (8.54)$$

où  $\sigma_q$  est donné par (8.47). En explicitant (8.54), on a

$$\left. \frac{S}{B} \right|_{\text{max}} = \sqrt{\phi_q} \quad (8.55)$$

Un détecteur dont le rapport  $S/B$  se rapproche sensiblement de celui de la relation (8.55) est dit *limité par le bruit quantique*. Il représente le meilleur détecteur possible vis-à-vis du rapport  $S/B$ .

On remarque en particulier que la puissance photonique équivalente au bruit  $NEP_q$  d'un détecteur limité par le bruit quantique vaut un photon par seconde (ou plus précé-

sément l'énergie  $W_q$  par seconde). Ainsi, la limite absolue d'un détecteur est d'un photon par seconde. En pratique, cette limite n'est jamais atteinte, comme le montre la figure 8.29.

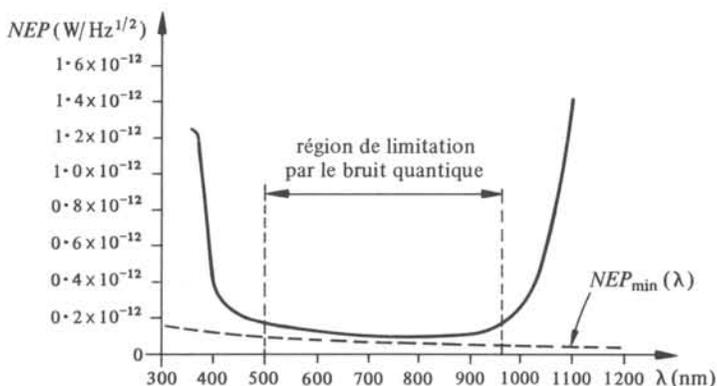


Fig. 8.29 Dépendance de NEP en fonction de  $\lambda$  d'une photodiode réelle, comparée à la limite théorique absolue, en pointillé (Si-pin) [67].

#### 8.4.6 Bruit dans les photodétecteurs de surface

Les détecteurs à effet photoémissif présentent différentes sources de bruit.

- Le bruit thermique provenant de la résistance équivalente du détecteur,  $i_{th\,eff}$ ;
- le bruit de grenaille provenant du processus même de la photoémission,  $i_{gr\,eff}$ ;
- le bruit de gain interne, dans le cas des photomultiplicateurs,  $i_{g\,eff}$ ;
- le bruit noir enfin, qui s'explique par l'émission thermo-ionique électronique.

Ce bruit est dominant dans ce type de détecteur; il s'exprime par la relation

$$i_{d\,eff} = B'AT^2 \exp[-W_0/k_B T] \quad (8.56)$$

où  $W_0$  : énergie d'ionisation des électrons;

$A$  : surface de la photocathode;

$B'$  : constante dépendant du détecteur.

Le bruit blanc total s'exprime par l'équation

$$i_{TOT\,eff} = \sqrt{\frac{4k_B T}{R} + 2eiG^2 + 2e(F(G)-1)i} \sqrt{B} \quad (8.57)$$

dans laquelle  $i$  est la somme  $i_p + i_d$ , avant amplification par le gain du photomultiplicateur,  $G$ .

#### 8.4.7 Bruit dans les détecteurs à effet photoconducteur

Les détecteurs à effet photoconducteur présentent l'ensemble des bruits que l'on rencontre dans ce type de capteur, à l'exception du bruit noir. On a donc, pour le bruit blanc:

$$i_{TOT\,eff} = \sqrt{\frac{4k_B T}{R} + 2e[G^2 + (F(G)-1)]i_p} \sqrt{B} \quad (8.58)$$

avec

$i_p = k_\lambda \phi_\lambda$  le photocourant avant amplification par le gain de photoconduction  $G$ ;

$I_p$  composante continue de  $i_p$ .

#### 8.4.8 Bruit dans les détecteurs à effet photovoltaïque

Ce type de détecteur présente toutes les sources de bruit possible, y compris le bruit de gain interne pour le cas des APD.

De plus, les détecteurs au germanium, lorsqu'ils ne sont pas thermalisés (c'est-à-dire maintenus à basse température), sont soumis à un bruit d'environnement important (qui n'est pas toujours un bruit blanc (§ 8.4.1)). Ce terme vient s'ajouter au bruit de grenaille du photocourant.

Le bruit blanc total s'écrit alors :

$$i_{\text{TOT}eff} = \sqrt{\frac{4k_B T}{R} + 2eM^2 i + 2e(F(M) - 1) i} \sqrt{B} \quad (8.59)$$

avec

$$i = i_p + i_d$$

$i_p$  : photocourant sans le gain;

$i_d$  : courant noir sans le gain;

$M$  : gain de l'APD;  $M = 1$  pour une photodiode;

$I_s$  : composante continue de  $i_s$ ;

$R$  : résistance équivalente du capteur.

#### 8.4.9 Bruit en $1/f$

En plus des bruits blancs apparaissant dans les formules (8.57) à (8.59), l'ensemble de détecteurs optiques présente un bruit dépendant de la fréquence, le bruit en  $1/f$ , dont la valeur efficace est donnée par la relation :

$$i_{\text{TOT}eff; 1/f} = \sqrt{KI^2 \text{Ln} \left( \frac{f_H}{f_B} \right)} \quad (8.60)$$

avec:

$I$  : courant total efficace;

$f_H$  : limite vers les hautes fréquences ( $\approx 100$  kHz);

$f_B$  : limite vers les basses fréquences ( $\approx 0,01$  Hz);

$K$  : constante dépendante du capteur.

Ce bruit est toujours présent et est prépondérant dans les très basses fréquences ( $\approx 100$  kHz). On le supprime aisément par l'emploi d'un filtre passe-haut.

### 8.5 EXERCICES

#### 8.5.1 Vérifier la validité de (8.12).

8.5.2 Vérifier et donner les limites de validité de la relation (8.13).

8.5.3 Calculer le rendement quantique effectif, en % du rendement quantique interne  $\eta$  d'une photodiode au silicium fonctionnant pour détecter un rayonnement monochromatique ( $\lambda = 1\mu\text{m}$ ). Profondeur de la couche n :  $10\mu\text{m}$ .

8.5.4 Estimer pour quelle plage de températures et de longueurs d'onde le bruit optique d'environnement (§ 8.4.1) n'est pas un bruit blanc.

8.5.5 Exprimer le bruit total et la détectivité réduite spectrale, en fonction du flux incident  $\phi_f$ :

- d'un photomultiplicateur;
- d'une diode p-i-n;
- d'une APD.

## CAPTEURS À EFFETS THERMIQUES

## 9.1 ÉCHELLES DE TEMPÉRATURES

## 9.1.1 Introduction

De toutes les grandeurs physiques directement accessibles à la mesure, la température est certainement la plus fréquemment concernée. C'est aussi dans bien des cas la plus mal connue et mal interprétée. Il est d'ailleurs significatif qu'il ait fallu attendre le XXe siècle pour arriver à une définition cohérente des échelles de températures.

Ce chapitre se divise en deux parties. La première donne une définition de la température et traite des problèmes liés à sa mesure. La seconde présente un certain nombre de capteurs thermiques d'usage courant, en insistant sur leurs principes de fonctionnement.

## 9.1.2 Températures absolues

Tous les ouvrages de thermodynamique mentionnent qu'une machine échangeant les énergies thermiques  $Q_1$  et  $Q_2$  avec les sources froides et chaudes de températures  $\theta_1$  et  $\theta_2$  (définies sur une échelle quelconque), obéit à la relation :

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{f(\theta_1)}{f(\theta_2)} \quad (9.1)$$

Autrement dit, le rapport des quantités de chaleur échangées est indépendant du travail fourni, de la pression ou du volume; il ne dépend que des températures des deux sources. La forme de la fonction  $f$  est liée au choix de l'échelle de température.

Par définition (Thomson, 1848) les *échelles de températures absolues* correspondent au cas  $f(\theta) = \theta$  :

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (9.2)$$

## 9.1.3 Echelles de températures

La relation (9.2) montre qu'il suffit de fixer la température d'une des sources, par exemple  $Q_2$ , pour définir complètement une température absolue. Pour des raisons d'ordre historique et pratique, on utilise comme référence la température du point

triple de l'eau  $T_t$ . Alors

$$T = T_t \frac{Q}{Q_t} \quad (9.3)$$

représente par définition la température absolue de la source fournissant l'énergie thermique  $Q$ .

En fixant arbitrairement la valeur numérique de  $T_t$ , on définit l'*unité de température absolue*. Dans le *SI*, cette unité est le *kelvin* (K), correspondant à  $T_t = 273,16$  K :

$$T = 273,16 \frac{Q}{Q_t} \quad \text{K} \quad (9.4)$$

A partir des échelles de températures absolues, on peut définir des *échelles dérivées*, qui conservent la même unité, et représentent seulement une translation de l'échelle absolue. L'échelle dérivée du kelvin est l'échelle *celsius*. Son unité, le degré Celsius, est identique au kelvin :

$$\theta = T(\text{K}) - 273,15 \quad ^\circ\text{C} \quad (9.5)$$

Il existe deux unités parallèles (absolue et dérivée), en usage dans les pays anglo-saxons (rankin, fahrenheit). Le tableau 9.1 résume les relations entre ces diverses échelles de températures.

Tableau 9.1 Comparaison des échelles de températures.

Définition	(K)	(°C)	(°R)	(°F)	Remarques
Zéro absolu	0	- 273,15	0	- 459,67	°R = rankin
Point triple H <sub>2</sub> O	273,16	0,01	491,69	32,018	°F = fahrenheit
Eau + glace	273,15	0	491,67	32	$p = 101325$ Pa
Eau + vapeur	373,15	100	671,67	212	$p = 101326$ Pa
Conversions	$T$	$T - 273,15$	$\frac{9}{5} T$	$\frac{9}{5} T - 459,67$	Donné: $T$ (K)
	$\theta + 273,15$	$\theta$	$\frac{9}{5} \theta + 491,67$	$\frac{9}{5} \theta + 32$	Donné: $\theta$ (°C)
	$\frac{5}{9} \Gamma$	$\frac{5}{9} (\Gamma - 491,67)$	$\Gamma$	$\Gamma - 459,67$	Donné: $\Gamma$ (°R)
	$\frac{5}{9} (\theta - 32) + 273,15$	$(\Theta - 32) \frac{5}{9}$	$\Theta + 459,67$	$\Theta$	Donné: $\Theta$ (°F)

#### 9.1.4 Echelle internationale pratique de température

Les machines thermiques décrivant un cycle de Carnot réversible sont des engins théoriques idéaux. Ils ne se prêtent pas à la mesure concrète des températures. Par contre, les propriétés intrinsèques des matériaux (résistivité, dimensions, etc.) permettent de mesurer des températures, moyennant correction par comparaison avec une échelle absolue.

On comprend sans peine que ces thermomètres ne peuvent s'utiliser que sur une plage limitée de températures (tab. 9.2). Il est donc nécessaire de définir un certain nombre de points de référence permettant un étalonnage cohérent sur toute la gamme des températures utilisées. Ces points ont été définis dans l'*échelle pratique de température* (ITPS 68) dont on trouve un résumé dans le tableau 9.3.

Tableau 9.2 Types de thermomètres [71].

Type de thermomètre	Principe physique	Gamme de température	Précision typique
Thermomètre à gaz	Dilatation d'un gaz		
Thermomètre à mercure	Dilatation d'un liquide	- 38 à 300°C	± 0,2°C
Thermomètre à bimétal	Dilatation d'un solide	- 100 à 500	± 1
Résistance en platine (§ 9.9.4)	Variation de résistance	- 260 à 1400	± 0,1
Thermistance (§ 9.4.7)	Variation de résistance	- 270 à 300	± 0,5
Thermocouples (sect. 9.3)	Effets thermoélectriques	- 270 à 2700	± 1
Semiconducteurs	Variation de tension de jonction	- 55 à 150	± 0,5
Quartz (sect. 9.5)	Variation de fréquence	- 55 à 150	± 0,04
Pyromètre	Rayonnement du corps noir (§ 6.2.1)	1000 à 3000	± 1%

Tableau 9.3 ITPS [72].

Définition	$\theta$ (°C)	$T$ (K)
Equilibre entre les phases solide, liquide et vapeur de l'hydrogène en équilibre (point triple de l'hydrogène en équilibre)	- 259,34	13,81
Equilibre entre les phases liquide et vapeur de l'hydrogène en équilibre à une pression de 33 360,6 N/m <sup>2</sup> (25/76 atmosphère normale)	- 256,108	17,042
Equilibre entre les phases liquide et vapeur de l'hydrogène en équilibre (point d'ébullition de l'hydrogène en équilibre)	- 252,87	20,28
Equilibre entre les phases liquide et vapeur du néon (point d'ébullition du néon)	- 246,048	27,102
Equilibre entre les phases solide, liquide et vapeur de l'oxygène (point triple de l'oxygène)	- 218,789	54,361
Equilibre entre les phases liquide et vapeur de l'oxygène (point d'ébullition de l'oxygène)	- 182,962	90,188
Equilibre entre les phases solide, liquide et vapeur de l'eau (point triple de l'eau)	0,01	273,16
Equilibre entre les phases liquide et vapeur de l'eau (point d'ébullition de l'eau)	100	373,15
Equilibre entre les phases solide et liquide du zinc (point de congélation du zinc)	419,58	692,73
Equilibre entre les phases solide et liquide de l'argent (point de congélation de l'argent)	961,93	1235,08
Equilibre entre les phases solide et liquide de l'or (point de congélation de l'or)	1064,43	1337,58

Tableau 9.4 Thermomètres étalons [73].

Points fixes	Thermomètre à résistance de platine
- 259,34°C 0°C	$R(\theta) = R_0 \{1 + A\theta + B\theta^2 + C(\theta - 100)^3\}$ $R(\theta) = R_0(1 + A\theta + B\theta^2)$
630,74°C	Thermocouple Pt Rh 10%/Pt $u_s(\theta) = a + b\theta + c\theta^2$
1064,43°C	Rayonnement du corps noir $\frac{L(\theta)}{L(1064,43^\circ\text{C})} = \frac{\exp(A/\lambda \cdot 1337,58) - 1}{\exp\{A/\lambda(\theta + 273,15)\} - 1}$ $A = 14,388 \cdot 10^{-3} \text{K}$

Lors de mesures de haute précision, des corrections de non-linéarité sont nécessaires entre deux points de référence, pour un thermomètre donné [72]. Le tableau 9.4 indique, pour chaque plaque de température, le capteur utilisé, et son erreur de non-linéarité.

## 9.2 TRANSMISSION D'ÉNERGIE THERMIQUE

### 9.2.1 Définitions

On appelle *puissance thermique*  $P$  (W) (on dit aussi flux de chaleur), la quantité d'énergie thermique traversant une surface donnée par unité de temps,  $dQ/dt$ .

On appelle *densité de flux thermique*  $q$  (W/m<sup>2</sup>) (densité de puissance thermique), la puissance thermique par unité de surface, en un point donné. Cette grandeur peut s'exprimer vectoriellement.

### 9.2.2 Equilibre thermique

La mesure de température d'un objet implique l'existence d'un équilibre thermique entre cet objet et le capteur. On considère que cet équilibre est atteint lorsque, pour une température constante de l'objet, les variations de la température du capteur sont inférieures à la résolution du système de mesure.

L'établissement de l'équilibre thermique est un processus complexe dans lequel interviennent non seulement les échanges d'énergie thermique  $Q_{12}$  entre le capteur et l'objet, mais aussi les échanges  $Q_2$  entre le capteur et son environnement (fig. 9.5).

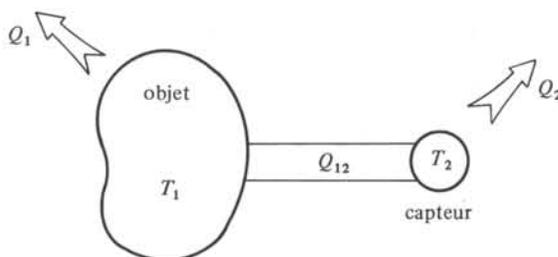


Fig. 9.5 Echanges thermiques objet-capteur.

Le contact thermique objet-capteur joue un rôle essentiel. De lui dépend, dans une très large mesure, la réponse statique et dynamique du capteur. Le principe zéro de la thermodynamique postule l'existence de corps en équilibre thermique, mais, deux objets initialement à des températures différentes mettent théoriquement un temps infini pour atteindre l'équilibre thermique, après qu'on les ait mis en contact.

*Dans tous les cas, la température mesurée est d'abord celle du capteur.*

Le contact thermique objet-capteur peut s'établir grâce aux trois processus d'échange thermique que sont :

- la conduction;
- la convection;
- le rayonnement.

### 9.2.3 Conduction

La *conduction* est un transfert d'énergie thermique à l'intérieur de la matière, sans déplacement macroscopique de matière. Ce processus est caractéristique des solides. La plupart des capteurs thermiques étant précisément des solides, la conduction est étudiée plus en détail aux paragraphes 9.2.6 et suivants.

### 9.2.4 Convection

La *convection* est un transport d'énergie thermique lié à un déplacement macroscopique de matière. On l'observe lors d'échanges thermiques en présence de fluides.

Dans le cas de mesure de la température des fluides à l'aide de capteurs solides, on peut écrire :

$$P = Ah(T_c - T_f) \quad (9.6)$$

où

$P$  (W) : puissance thermique fournie par le fluide au capteur ;

$A$  ( $m^2$ ) : surface d'échange fluide-capteur ;

$h$  ( $Wm^{-2}K^{-1}$ ) : coefficient de convection ;

$T_c$  (K) : température à la surface du capteur ;

$T_f$  (K) : température du fluide.

La convection est soit naturelle, soit forcée. En convection naturelle, le transport du fluide ne résulte que des différences de densité produites par les variations de température d'un point à l'autre du système. La convection forcée fait intervenir un entraînement extérieur du fluide, à l'aide de pompes, par exemple. La loi (9.6) s'applique aux deux types de convection. Le coefficient de convection  $h$  dépend de la température, des dimensions et de la forme du capteur; il dépend de la vitesse d'entraînement du fluide, dans le cas de la convection forcée.

### 9.2.5 Rayonnement

Le *rayonnement* est un transfert d'énergie thermique par ondes électromagnétiques. Intrinsèquement lié à la nature atomique de la matière, il est toujours présent,

la puissance rayonnée étant proportionnelle à  $T^4$ . Le rayonnement est étudié plus en détail à la section 6.2.

### 9.2.6 Loi de Fourier pour la conduction

L'expérience montre qu'en régime stationnaire, la densité de flux thermique  $\mathbf{q}$  en un point est donnée par la loi de Fourier :

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T \quad \text{Wm}^{-2} \quad (9.7)$$

où  $\lambda$  ( $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ) est la *conductibilité thermique* en ce point. Selon le deuxième principe de la thermodynamique, la puissance thermique s'écoule de la source chaude vers la source froide, ce qui justifie le signe « moins » de (9.7). Cette équation permet de décrire le comportement thermique de structures multicouches au moyen d'un formalisme utilisé pour les circuits électriques (§ 9.2.8).

### 9.2.7 Equation de la chaleur

L'équation de la chaleur représente le bilan d'énergie thermique dans un volume  $V$  limité par une surface fermée  $S$ . Ce bilan comprend trois termes (fig. 9.6) :

- $\Delta Q_1$  est l'énergie thermique nette entrant dans  $V$  pendant le temps  $\Delta t$  ;
- $\Delta Q_2$  est l'accroissement pendant  $\Delta t$  de l'énergie thermique stockée dans  $V$  ;
- $\Delta Q_3$  est l'énergie produite, par exemple par effet Joule, ou absorbée dans  $V$  pendant  $\Delta t$ .

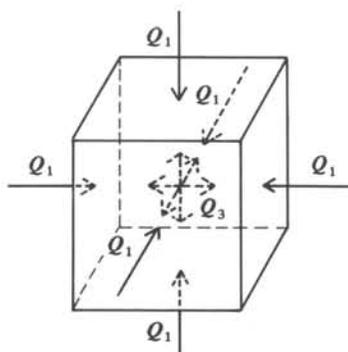


Fig. 9.6 Bilan d'énergie thermique.

La conservation de l'énergie totale impose :

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_3 = \Delta Q_2 \quad (9.8)$$

L'énergie nette entrant dans  $V$  vaut :

$$\Delta Q_1 = -\int_S \mathbf{q} \cdot d\mathbf{s} \Delta t \quad (9.9)$$

Le théorème de la divergence et l'équation (9.7) permettent de transformer (9.9) en :

$$\Delta Q_1 = \int_V \lambda \nabla^2 T dV \Delta t \quad (9.10)$$

La variation d'énergie thermique emmagasinée dans  $V$  s'écrit :

$$\Delta Q_2 = \int_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV \Delta t \quad (9.11)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du matériau constituant  $V$ , et  $c$  sa *chaleur massique*. Le terme de source vaut simplement :

$$\Delta Q_3 = \int_V p dV \Delta t \quad (9.12)$$

où  $p$  ( $\text{W}/\text{m}^3$ ) est la puissance thermique volumique produite. Finalement, le bilan (9.8) s'écrit, sous forme locale,

$$\lambda \nabla^2 T + p = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{Wm}^{-3} \quad (9.13)$$

c'est l'équation de la chaleur.

### 9.2.8 Résistance thermique

En régime stationnaire sans source, l'équation de la chaleur se réduit à une équation de Laplace :

$$\nabla^2 T = 0 \quad \text{Km}^{-2} \quad (9.14)$$

Dans une configuration de plaques homogènes les isothermes sont des plans parallèles à la surface (fig. 9.7).

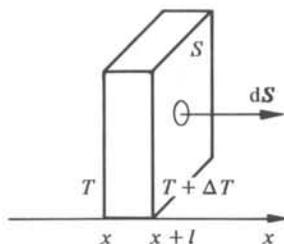


Fig. 9.7 Loi d'Ohm thermique.

La puissance thermique traversant la plaque s'écrit :

$$P = \mathbf{q} \cdot \mathbf{S} \quad (9.15)$$

ou encore, par (9.7) :

$$P = -\lambda \frac{dT}{dx} S \quad (9.16)$$

En intégrant (9.16) et en tenant compte de (9.14) il vient :

$$\Delta T = P \frac{l}{\lambda S} \quad (9.17)$$

On définit la *résistance thermique*  $R$  de la plaque par

$$R = \frac{l}{\lambda S} \quad \text{KW}^{-1} \quad (9.18)$$

ce qui permet d'écrire (9.17) sous la forme d'une « loi d'Ohm thermique » :

$$\Delta T = RP \quad \text{K} \quad (9.19)$$

L'intérêt de cette analogie est clair : les nombreux programmes utilisés pour les modélisations de circuits électriques sont directement utilisables pour des simulations de flux thermique dans des matériaux multicouches. La figure 9.8 est un exemple simple d'un « système équivalent » électrique employé pour modéliser un problème de conduction de chaleur.

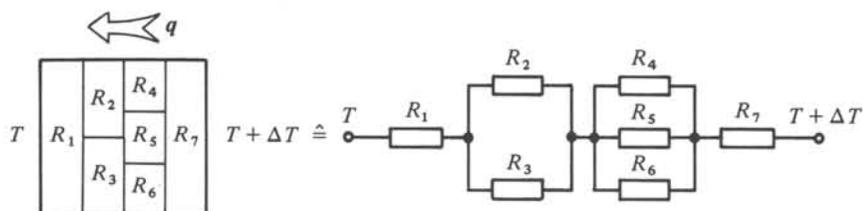


Fig. 9.8 Equivalence thermique-électrique.

### 9.2.9 Capteur métallique

La plupart des capteurs sont composés d'un tube métallique  $g$  à l'intérieur duquel se trouve l'élément sensible  $c$  (fig. 9.9).

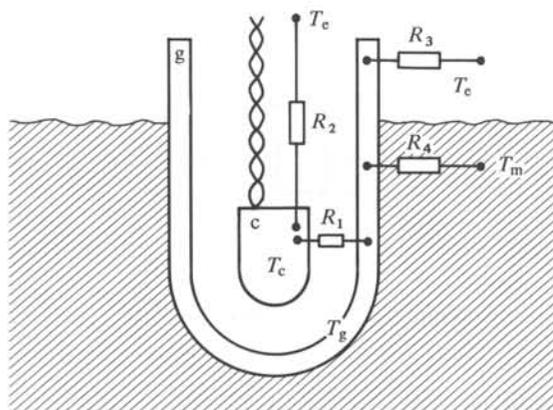


Fig. 9.9 Capteur en régime stationnaire.

Après un régime transitoire dont la durée dépend de la constante de temps du capteur, on peut appliquer l'équation de la chaleur (régime permanent sans source). Avec le formalisme du paragraphe 9.2.8, on a :

$$T_g - T_c = R_1 P_{gc} \quad \text{K} \quad (9.20)$$

De même,

$$T_e - T_c = R_2 P_{ec} \quad \text{K} \quad (9.21)$$

où  $T_e$  est la température de l'environnement.

La puissance nette reçue par l'élément sensible,  $P_{gc} + P_{ec}$  étant nulle à l'équilibre thermique, on a :

$$T_c = \frac{R_2 T_g + R_1 T_e}{R_1 + R_2} \quad \text{K} \quad (9.22)$$

et

$$T_g = \frac{R_3 T_m + R_4 T_e}{R_3 + R_4} \quad \text{K} \quad (9.23)$$

où  $T_m$  est la température à mesurer.

Afin de limiter les erreurs systématiques, il est nécessaire que  $T_c - T_g$  et  $T_g - T_m$  soient aussi petits que possible, ce qui implique :

$$R_2 \gg R_1 \quad \text{KW}^{-1} \quad (9.24)$$

et

$$R_3 \gg R_4 \quad \text{KW}^{-1} \quad (9.25)$$

Pour satisfaire (9.24) il faut choisir du fil de liaison électrique de très faible section, et des longueurs suffisantes. La condition (9.25) est réalisée si la profondeur de pénétration du capteur dans le milieu à mesurer est importante.

### 9.2.10 Capteur en régime transitoire

Les conditions d'équilibre thermique décrites au paragraphe précédent ne sont atteintes qu'asymptotiquement. Il convient donc d'analyser également le comportement du capteur en régime transitoire, que celui-ci résulte de la mise en température du capteur ou de la variation de la température du milieu soumis à la mesure.

Soit, à titre d'exemple, un capteur théorique en forme de plaque infinie d'épaisseur  $E$ . La distribution de température à l'intérieur du capteur au temps  $t = 0$  est donnée par la fonction  $T(x, t = 0)$ . Le capteur est plongé dès  $t = 0$  dans un milieu de température  $T_f$  supposée constante. La variation de température à l'intérieur de la plaque est donnée par (9.13) qui prend ici la forme homogène suivante :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (9.26)$$

La solution générale de (9.26) s'obtient par double transformée de Fourier (chap. IV.8) sur  $T$ , il vient :

$$T(x, t) - T_f = \sum_n A_n \sin \left( \frac{n\pi x}{E} \right) \exp \left\{ \frac{-n^2 t}{\tau} \right\} \quad (9.27)$$

avec  $A_n$  :  $n$ -ième coefficient de la transformée de Fourier de  $T(x, t = 0)$

$$\tau = \frac{E\rho c}{\pi^2 \lambda} : \text{constante de temps du système.}$$

Dans le cas particulier où la température du capteur en  $t = 0$ , est uniforme ;

$$T(x, t = 0) = T_c \quad (9.28)$$

les coefficients de Fourier sont :

$$\left. \begin{aligned} A_n &= 2T_c/\pi n && \text{si } n \text{ impair} \\ A_n &= 0 && \text{si } n \text{ pair} \end{aligned} \right\} \quad (9.29)$$

La solution (9.27) s'écrit alors :

$$T(x, t) - T_f = \frac{2}{\pi} T_c \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{E}\right) \exp\left\{\frac{-n^2 t}{\tau}\right\} \quad (9.30)$$

On remarque que la constante de temps du  $n$ -ième harmonique vaut  $\tau/n^2$ . Elle est donc beaucoup plus petite que celle du fondamental, qui reste déterminante. En première approximation, on peut écrire :

$$T(x, t) - T_f = \frac{2}{\pi} T_c \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\} \sin\left(\frac{\pi x}{E}\right) \quad K \quad (9.31)$$

La distribution de température à l'intérieur du capteur, pour des temps relativement courts et lorsque la température  $T_f \ll T_c$ , s'approche d'une sinusoïde. On en conclut que, pour des mesures rapprochées, l'erreur systématique peut être non négligeable, en particulier si le volume du capteur est relativement important.

### 9.3 THERMO-ÉLECTRICITÉ

#### 9.3.1 Définition

On appelle *thermo-électricité* l'étude des courants et tensions électriques d'origine thermique.

#### 9.3.2 Effet Seebeck

Soit un conducteur homogène, par exemple un métal (fig. 9.10).

Le point A étant maintenu à la température  $T_A$ , et le point B à la température  $T_B > T_A$ , les électrons en B sont en moyenne plus énergétiques que les électrons en A.

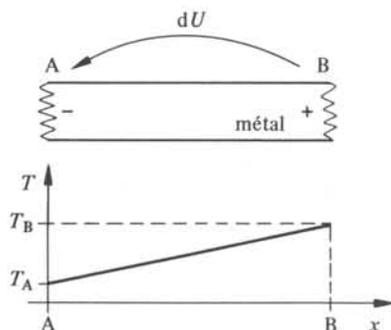


Fig. 9.10 Effet Seebeck.

Plus précisément, le nombre d'états énergétiques occupés au-dessus du niveau de Fermi est plus important en B qu'en A. Les électrons en B diffusent donc vers le point A. Ce mouvement global de charges amène un excédent de charges négatives en A, et laisse une charge positive en B. La tension correspondante  $dU$ , mesurée dans le sens de B vers A (chaud-froid), pour un écart de température  $dT = T_B - T_A$ , est proportionnelle à cet écart de température, et s'écrit :

$$dU = S(T_M) dT \quad V \quad (9.32)$$

Le coefficient de proportionnalité  $S(T_M)$  (V/K), qui dépend de la température moyenne du conducteur  $T_M = (T_B + T_A)/2$  d'une part, et de la nature du conducteur d'autre part, est appelé *coefficient de Seebeck absolu*. Les dénominations plus anciennes telles que la force thermo-électromotrice ou puissance thermo-électrique absolue, sont à éviter, car ce coefficient n'a pas la dimension d'une force ou d'une puissance.

On note de plus que le coefficient de Seebeck absolu n'est pas, dans des conditions normales, directement accessible à la mesure. Pour pouvoir le mesurer, il est nécessaire de brancher un voltmètre entre les points A et B. Deux cas peuvent se présenter : soit les fils du circuit de mesure sont de la même nature  $\alpha$  que le conducteur considéré pour l'effet Seebeck; soit ils sont d'une nature différente  $\beta$ . Dans le premier cas, à cause de l'égalité des températures aux bornes du voltmètre, la tension de Seebeck s'annule. Dans le second, on ne mesure qu'une différence des effets Seebeck dans le conducteur et dans les circuits de mesure. La grandeur mesurée  $S_{\alpha\beta} = S_\alpha - S_\beta$  porte le nom de *coefficient de Seebeck relatif*. Elle revêt une grande importance dans l'utilisation pratique des effets thermo-électriques (thermocouples).

Tout ce qui précède s'applique également aux semiconducteurs.

### 9.3.3 Effet Thomson

Lorsqu'un conducteur est soumis à un gradient de température en même temps qu'il est parcouru par un courant de densité  $J$  (fig. 9.11), une énergie thermique indépendante de l'effet Joule est produite ou absorbée dans le conducteur.

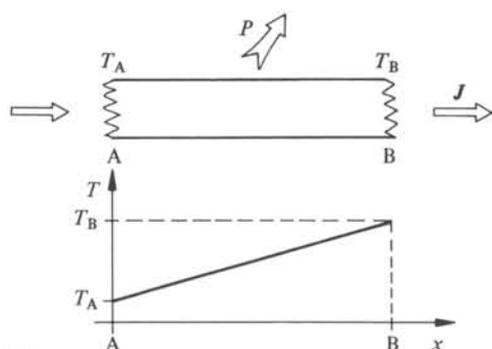


Fig. 9.11 Effet Thomson.

Ce phénomène constitue l'*effet Thomson*; soient A et B les points froid et chaud, respectivement. Si le courant circule de B vers A, les électrons, qui se déplacent de A vers B, acquièrent de l'énergie, puisqu'ils se « réchauffent » lors de leur parcours. Au niveau du conducteur, cela correspond à une absorption d'énergie thermique vis-à-vis du

milieu extérieur. Il est clair qu'en inversant le sens du courant, il se produit un dégagement d'énergie thermique, à la place d'une absorption. L'effet Thomson est donc un effet réversible au sens de la thermodynamique. La puissance thermique totale dégagée par unité de volume du conducteur, en tenant compte de l'effet Joule, s'écrit :

$$p = \rho J^2 - \mu_T \mathbf{J} \cdot \nabla T \quad \text{Wm}^{-3} \quad (9.33)$$

où  $\mu_T$  (V/K) est le *coefficient de Thomson*. Ce coefficient dépend de la nature du conducteur et de sa température moyenne. Le terme décrivant l'effet Thomson est affecté d'un signe moins, de sorte que la puissance correspondante est comptée positivement lorsqu'elle est dégagée par le conducteur, comme pour l'effet Joule. La puissance totale dégagée dans le fil s'obtient par intégration de (9.33)

$$P = RI^2 \pm \mu_T l I |\nabla T| \quad \text{W} \quad (9.34)$$

Le signe « plus » s'applique lorsque le courant circule de la partie froide vers la partie chaude, le signe « moins » dans le cas contraire. Par opposition à l'effet Thomson, le caractère irréversible de l'effet Joule apparaît dans (9.33) et (9.34) par le fait que la puissance correspondante est toujours positive.

### 9.3.4 Effet Peltier

A la *jonction* de deux conducteurs de natures différentes  $\alpha$  et  $\beta$  se produit un autre effet thermo-électrique. L'énergie moyenne d'un électron dépend de plusieurs paramètres, tels que : la température, les champs électromagnétiques présents, la nature du conducteur. (Les coefficients de Thomson et de Seebeck sont d'ailleurs dépendants de la température et de la nature du matériau). En moyenne, l'énergie d'un électron est modifiée lorsqu'il passe d'un conducteur  $\alpha$  dans un conducteur  $\beta$ . L'excédent ou le déficit d'énergie correspondant doit être produit, respectivement absorbé, à la jonction, sous forme de chaleur. Expérimentalement, on constate dans la jonction la présence d'une source surfacique de chaleur d'intensité

$$q = \Pi_{\alpha\beta} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \quad \text{Wm}^{-2} \quad (9.35)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unité normal à la jonction, dirigé du milieu  $\alpha$  vers le milieu  $\beta$ . Le coefficient de proportionnalité  $\Pi_{\alpha\beta}$  (V) qui dépend de la nature des conducteurs présents à la jonction est appelé *coefficient de Peltier relatif*. Comme pour le coefficient de Seebeck, il est possible de définir un *coefficient de Peltier absolu* par la relation

$$\Pi_\alpha = \Pi_{\alpha\beta} + \Pi_\beta \quad \text{V} \quad (9.36)$$

D'après la définition et le second principe de la thermodynamique

$$\Pi_{\alpha\beta} = -\Pi_{\beta\alpha} \quad \text{V} \quad (9.37)$$

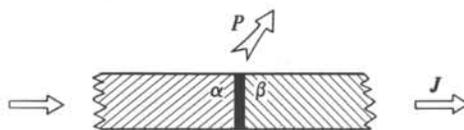


Fig. 9.12 Effet Peltier.

ce qui traduit le fait qu'en inversant le sens du courant, un dégagement de chaleur à la jonction est remplacé par une absorption et vice-versa. L'effet Peltier peut s'utiliser dans des éléments de contrôle de la température (éléments Peltier) ou dans des sources thermiques d'énergie électrique (batteries Peltier).

### 9.3.5 Relations entre les effets thermoélectriques

Les effets thermoélectriques ne sont pas indépendants les uns des autres. On peut montrer en utilisant la thermodynamique des processus irréversibles [74] que

$$\mu_T(T) = T \frac{dS_\alpha}{dT}(T) \quad (9.38)$$

et que :

$$\Pi_\alpha(T) = TS_\alpha(T) \quad (9.39)$$

Les trois coefficients thermoélectriques sont donc déductibles d'un seul, pour autant qu'on connaisse sa dépendance en température. Le tableau 9.13 donne l'ordre de grandeur du coefficient de Seebeck pour quelques matériaux courants.

Tableau 9.13 Coefficients de Seebeck absolus.

Métal/Semic.	$S$ (mVK <sup>-1</sup> )	Température (°C)
Al	- 0,2	100
Cu	9,98	100
Ag	3,68	100
W	5,00	100
ZnSb	220	200
InSb	- 130	500
Ge	- 210	700

L'effet Seebeck est nettement plus marqué dans les semiconducteurs. Ils sont cependant peu utilisés pour la construction de thermocouples, en raison de difficultés pratiques de réalisation. Par contre, on les trouve dans la plupart des batteries Peltier.

### 9.3.6 Thermocouple

On appelle *thermocouple*, ou couple thermoélectrique, un circuit électrique composé de deux conducteurs de natures différentes.

La figure 9.14 montre un thermocouple composé de deux métaux  $\alpha$  et  $\beta$ , dont les jonctions A et B sont maintenues aux températures  $T_A$  et  $T_B > T_A$ , respectivement.

Ce thermocouple est soumis à une tension de Seebeck  $U_S = U_{BA\alpha} - U_{BA\beta}$ .

D'autre part, il est le siège des effets Thomson et Peltier. Les puissances thermiques volumiques  $p_\alpha$  et  $p_\beta$  dégagées par effet Thomson s'écrivent :

$$p_\alpha = -\mu_\alpha(T) \mathbf{J} \cdot \nabla T \quad \text{Wm}^{-3} \quad (9.40)$$

$$p_\beta = -\mu_\beta(T) \mathbf{J} \cdot \nabla T \quad \text{Wm}^{-3} \quad (9.41)$$

Elles sont de signes opposés et différentes en valeur absolue puisque  $\mu_\alpha(T) \neq \mu_\beta(T)$ .

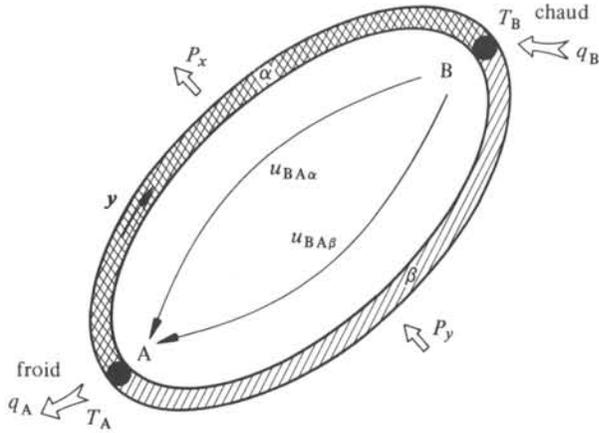


Fig. 9.14 Thermocouple.

Les puissances surfaciques  $q_A$  et  $q_B$ , dégagées par l'effet Peltier dans les jonctions A et B, valent :

$$q_A = J \Pi_{\beta\alpha}(T_A) \quad \text{Wm}^{-2} \quad (9.42)$$

$$q_B = J \Pi_{\alpha\beta}(T_B) \quad \text{Wm}^{-2} \quad (9.43)$$

Ces deux puissances sont elles aussi différentes et de signes opposés puisque  $\Pi_{\beta\alpha}(T_A) \neq -\Pi_{\alpha\beta}(T_B)$ .

Le bilan des puissances Thomson pour le thermocouple s'écrit, en désignant les éléments de surface et de volume par  $d\sigma$  et  $d\omega$ ,

$$P_{\text{Th}} = \int_{\text{vol. } \alpha} p_{\alpha} d\omega + \int_{\text{vol. } \beta} p_{\beta} d\omega \quad \text{W} \quad (9.44)$$

En faisant usage de (9.40) et de (9.41), on obtient

$$P_{\text{Th}} = - \int_{\text{section } \alpha} J d\sigma \int_{\text{long. } \alpha} \mu_{\alpha}(T) \frac{dT}{dl} dl + \int_{\text{section } \beta} J d\sigma \int_{\text{long. } \beta} \mu_{\beta}(T) \frac{dT}{dl} dl \quad \text{W} \quad (9.45)$$

En remplaçant  $\mu_{\alpha}$  et  $\mu_{\beta}$  par leurs valeurs données par (9.38), et en intégrant par parties, il vient :

$$P_{\text{Th}} = I \left\{ -TS_{\alpha}(T) \Big|_{T_B}^{T_A} + \int_{T_B}^{T_A} S_{\alpha}(T) dT + TS_{\beta}(T) \Big|_{T_B}^{T_A} - \int_{T_B}^{T_A} S_{\beta}(T) dT \right\} \quad \text{W} \quad (9.46)$$

où  $I$  désigne le courant total traversant le thermocouple. Finalement

$$P_{\text{Th}} = I \left\{ \int_{T_B}^{T_A} S_{\alpha\beta} dT - T_A S_{\alpha\beta}(T_A) + T_B S_{\alpha\beta}(T_B) \right\} \quad (9.47)$$

Le bilan thermique pour les échanges de Peltier s'obtient par intégration de (9.42) et (9.43) sur la surface des jonctions

$$P_{\text{Pel}} = \int_{\text{jonction A}} \Pi_{\alpha\beta}(T_A) \mathbf{J} \cdot d\boldsymbol{\sigma} + \int_{\text{jonction B}} \Pi_{\beta\alpha}(T_B) \mathbf{J} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (9.48)$$

La relation (9.39) permet de mettre cette équation sous la forme,

$$P_{\text{Pel}} = I \{ T_A S_{\alpha\beta}(T_A) - T_B S_{\alpha\beta}(T_B) \} \quad (9.49)$$

En additionnant les puissances Peltier et Thomson, on trouve

$$P = I \left\{ \int_{T_B}^{T_A} S_{\alpha\beta} dT \right\} = I U_S \quad \text{W} \quad (9.50)$$

C'est la puissance dissipée par effet Joule dans un conducteur soumis à une tension Seebeck  $U_S$  et parcouru par un courant  $I$ . Ce résultat montre que, *dans un thermocouple, la somme totale des puissances thermiques est nulle, si l'on tient compte de tous les effets thermoélectriques*. Ceci revient à dire que du point de vue des échanges thermiques, il est équivalent de décrire un thermocouple par le seul effet Seebeck, ou par les effets Thomson et Peltier réunis. On choisit généralement l'effet Seebeck.

### 9.3.7 Lois des thermocouples

La tension de Seebeck résultante  $U_S$  sur le circuit fermé de la figure 9.14 vaut :

$$U_S = U_{\text{BA}\alpha} + U_{\text{AB}\beta} \quad (9.51)$$

On remarque que le lemme de Kirchhoff relatif à la somme des tensions sur une maille n'est pas satisfait, car  $U_S \neq 0$  si  $T_A \neq T_B$ . Dans un circuit comportant des thermocouples, il convient donc de remplacer ce lemme par d'autres lois; on les appelle :

- loi des métaux en parallèle;
- loi des métaux en série;
- loi des températures successives.

Elles font l'objet des trois paragraphes suivants.

### 9.3.8 Loi des métaux en parallèle

On considère le thermocouple de la figure 9.15, formé de trois conducteurs de natures différentes  $\alpha, \beta, \gamma$ , et dont les points de soudure A et B sont maintenus aux températures  $T_A$  et  $T_B > T_A$ . On peut écrire :

$$U_{\text{BA}\alpha} = \int_{T_B}^{T_A} S_{\alpha}(T) dT \quad (9.52)$$

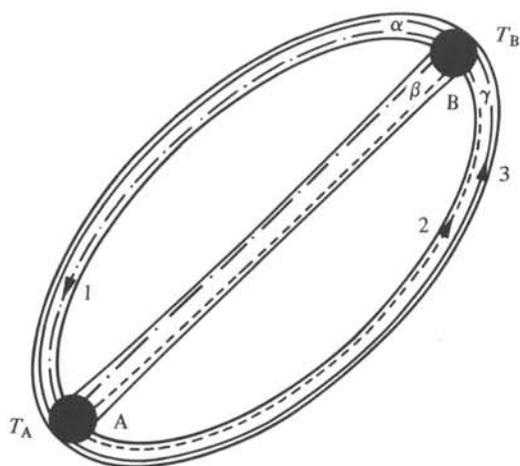


Fig. 9.15 Loi des métaux en parallèle.

$$U_{BA\beta} = \int_{T_B}^{T_A} S_{\beta}(T) dT \quad (9.53)$$

$$U_{BA\gamma} = \int_{T_B}^{T_A} S_{\gamma}(T) dT \quad (9.54)$$

Les tensions de Seebeck induites le long des trois chemins 1, 2, 3, s'en déduisent immédiatement :

$$U_1 = U_{BA\alpha} - U_{BA\beta} \quad (9.55)$$

$$U_2 = U_{BA\beta} - U_{BA\gamma} \quad (9.56)$$

$$U_3 = U_{BA\alpha} - U_{BA\gamma} \quad (9.57)$$

On remarque que

$$U_3 = U_1 + U_2 \quad (9.58)$$

Ainsi, la tension induite dans le thermocouple  $\alpha - \gamma$  est la somme des tensions induites dans les thermocouples  $\alpha - \beta$  et  $\beta - \gamma$ . En particulier, si  $\beta$  est un métal choisi comme référence (le platine ou le plomb par exemple), on peut trouver le coefficient de Seebeck relatif pour deux métaux quelconques ( $\alpha$  et  $\gamma$ ) si l'on connaît leurs coefficients relatifs à  $\beta$ .

### 9.3.9 Loi des métaux en série

Si, dans le thermocouple de la figure 9.14, on introduit un métal intermédiaire  $\gamma$  (fig. 9.16), la tension de Seebeck additionnelle  $U_{QP}$  entre les jonctions Q et P est

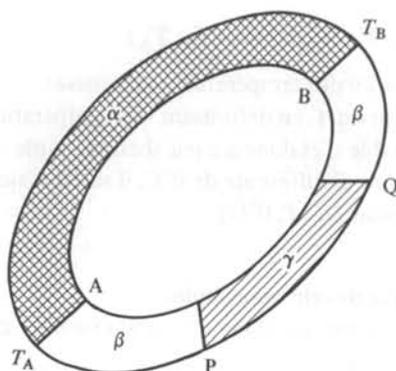


Fig. 9.16 Loi des métaux en série.

donnée par :

$$U_{QP} = \int_{T_Q}^{T_P} S_{\gamma}(T) dT \quad (9.59)$$

Si les deux extrémités du métal  $\gamma$  sont à la même température,  $U_{QP}$  s'annule. Le raisonnement se généralise au cas de plusieurs conducteurs en série : on peut intercaler un ou plusieurs conducteurs en série dans un thermocouple, sans modifier la tension  $U_S$  de Seebeck, pour autant que les températures aux deux extrémités de chaque conducteur additionnel soient les mêmes. Cette *loi des métaux en série* justifie l'emploi d'un voltmètre dont les conducteurs ne sont pas nécessairement de nature connue, mais dont les bornes sont à la même température.

### 9.3.10 Loi des températures successives

On suppose que la température de la jonction A évolue de  $T_A$  à  $T'_A$ . Sans limiter la généralité, on suppose que  $T_A < T'_A < T_B$ . La tension de Seebeck développée par le thermocouple vaut alors :

$$U_S(T_B, T'_A) = U_{BA\alpha}(T_B, T'_A) + U_{AB\beta}(T_B, T'_A) \quad (9.60)$$

On peut développer le terme relatif au métal  $\alpha$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} U_{BA\alpha}(T_B, T'_A) &= \int_{T_B}^{T'_A} S_{\alpha}(T) dT = \\ &= \int_{T_B}^{T_A} S_{\alpha} dt + \int_{T_A}^{T'_A} S_{\alpha} dT \\ &= U_{BA\alpha}(T_B, T_A) + U_{BA\alpha}(T_A, T'_A) \end{aligned} \quad (9.61)$$

En procédant de même pour le conducteur  $\beta$ , la tension de Seebeck peut s'écrire :

$$U_S(T_B, T'_A) = U_S(T_A, T'_A) + U_S(T_B, T_A) \quad (9.62)$$

On appelle (9.62) la loi des températures successives.

Cette troisième loi permet, en définissant une température de référence (souvent  $0^\circ\text{C}$ ), de n'avoir qu'une table d'étalonnage par thermocouple : si la jonction de référence se trouve à une température  $T$  différente de  $0^\circ\text{C}$ , il suffit d'ajouter à la valeur  $U_S$  donnée par cette table la tension  $U_S(T, 0^\circ\text{C})$ .

### 9.3.11 Utilisation pratique des thermocouples

L'usage de thermocouples nécessite un certain nombre de précautions. Parmi les plus importantes, on peut citer :

- le respect des domaines de température utilisables pour chaque type de thermocouple ;

Tableau 9.17 Limites d'utilisation des thermocouples [72].

Thermocouple	Plage de température	$U_S$ (mV)	Précision
Cuivre/Constantan Type T (diamètre 1,63 mm)	- 270°C à 370°C	- 6,258 à 19,027	$\pm 2\%$ de $-100^\circ\text{C}$ à $-40^\circ\text{C}$ $\pm 0,8\%$ de $-40^\circ\text{C}$ à $100^\circ\text{C}$ $\pm 0,75\%$ de $100^\circ\text{C}$ à $350^\circ\text{C}$
Fer/Constantan Type J (diamètre 3,25 mm)	- 210°C à 800°C	- 8,096 à 45,498	$\pm 3^\circ\text{C}$ de $0^\circ\text{C}$ à $400^\circ\text{C}$ $\pm 0,75\%$ de $400$ à $800^\circ\text{C}$
Chromel/Alumel Type K (diamètre 3,25 mm)	- 270°C à 1250°C	- 5,354 à 50,633	$\pm 3^\circ\text{C}$ de $0^\circ\text{C}$ à $400^\circ\text{C}$ $\pm 0,75\%$ de $400^\circ\text{C}$ à $1250^\circ\text{C}$
Chromel/Constantan Type E (diamètre 3,25 mm)	- 270°C à 870°C	- 9,835 à 66,473	$\pm 3^\circ\text{C}$ de $0^\circ\text{C}$ à $400^\circ\text{C}$ $\pm 0,75\%$ de $400^\circ\text{C}$ à $1250^\circ\text{C}$
Platine-Rhodium (10%)/ Platine Type S (diamètre 0,51 mm)	- 50°C à 1500°C	- 0,236 à 15,576	$\pm 2,5^\circ\text{C}$ de $0^\circ\text{C}$ à $600^\circ\text{C}$ $\pm 0,4\%$ de $600^\circ\text{C}$ à $1600^\circ\text{C}$
Platine-Rhodium (13%)/ Platine Type R (diamètre 0,51 mm)	- 50°C à 1500°C	- 0,226 à 17,445	$\pm 1,4^\circ\text{C}$ de $0^\circ\text{C}$ à $538^\circ\text{C}$ $\pm 0,25\%$ de $538^\circ\text{C}$ à $1500^\circ\text{C}$
Platine-Rhodium (30%)/ Platine-Rhodium (6%) Type B (diamètre 0,51 mm)	$0^\circ\text{C}$ à 1700°C	0 à 12,426	$\pm 0,5\%$ de $870^\circ\text{C}$ à $1700^\circ\text{C}$

- la bienfacture des soudures;
- la prise en considération des propriétés physico-chimiques du milieu dont on mesure la température;
- le choix de type de mesure (absolue ou différentielle);
- le maintien de la température de référence.

Les températures limites des différents thermocouples sont résumées dans le tableau 9.17. Elles découlent, aux basses températures, de la diminution du coefficient de Seebeck, et de l'augmentation des déviations dues aux défauts cristallins. Aux hautes températures, les limitations résultent de problèmes de diffusion entre les matériaux formant le couple.

Les soudures doivent être d'un volume faible pour réduire l'inertie du thermocouple et pour éviter des différences de température dans la soudure elle-même. On utilise habituellement le brasage pour une fabrication artisanale, sur place. Ce type de soudure ne convient qu'aux faibles températures (jusqu'à 250°C). Les techniques industrielles utilisent la soudure autogène (chalumeau) ou la soudure à l'arc. Dans la mesure du possible, on évite de torsader les fils au voisinage de la soudure : il en résulterait une perte de précision et une plus grande inertie du thermocouple.

Si le milieu à mesurer est corrosif pour le thermocouple à la température de mesure, il est nécessaire d'entourer la jonction d'une gaine protectrice étanche. La gaine est généralement faite de céramique ou d'acier inoxydable (fig. 9.18). Il est évident que l'emploi d'une gaine protectrice augmente la constante de temps du thermocouple.

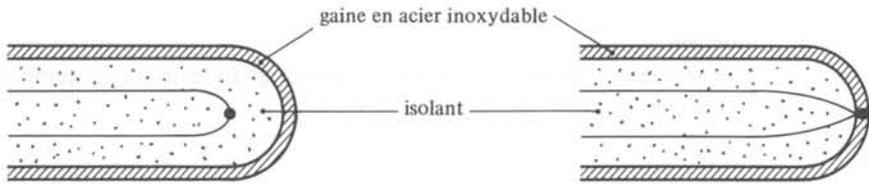


Fig. 9.18 Gainage des thermocouples.

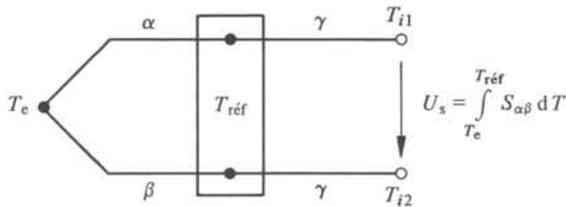


Fig. 9.19 Mesure absolue, schéma de principe.

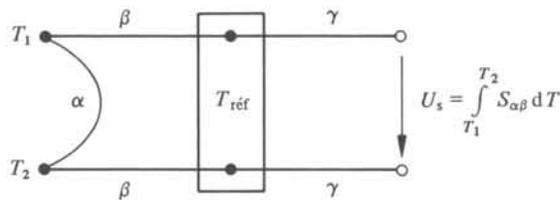


Fig. 9.20 Mesure différentielle, schéma de principe.

Selon le type de mesure choisi, absolue ou différentielle, on utilise l'un ou l'autre des montages (fig. 9.19 et 9.20).

Pour une mesure absolue, la tension de Seebeck ne dépend que des métaux  $\alpha$  et  $\beta$ , de la température  $T_e$  et de la température de référence  $T_{ref}$ , pour autant que les températures  $T_{1,2}$  aux extrémités des conducteurs  $\gamma$  soient égales.

Le montage de la figure 9.20 est utilisé lorsqu'il s'agit de mesurer une différence de température entre deux points, de températures  $T_1$  et  $T_2$ .

Si les différences de température sont faibles, on peut considérer  $S_{\alpha\beta} = S_\alpha - S_\beta$ , le coefficient de Seebeck relatif comme constant et dans ce cas :

$$U_S = S_{\alpha\beta}(T_2 - T_1) \quad V \quad (9.63)$$

où  $\Delta T = T_2 - T_1$  est la différence de température entre les deux soudures. Dans ce montage aussi, il est impératif que les extrémités des conducteurs  $\gamma$  soient maintenues à des températures égales.

La température de la jonction de référence doit être maintenue constante (§ 9.3.9). On choisit souvent 0°C comme température de référence; les tables donnant la tension de Seebeck pour chaque thermocouple sont d'ailleurs calibrées avec cette référence.

## 9.4 VARIATION DE RÉSISTANCE ÉLECTRIQUE

### 9.4.1 Introduction

De façon générale, la résistance électrique d'un matériau varie avec sa température, selon une loi du type :

$$R(T) = R_0 F(T - T_0) \quad \Omega \quad (9.64)$$

où  $R_0$  est la résistance à la température  $T_0$  et par conséquent  $F(0) = 1$ .

La forme de la fonction  $F$  dépend du matériau considéré, et plus particulièrement du type auquel il appartient : conducteur, semiconducteur, ou isolant. Pour de faibles variations de température  $\Delta T$  autour d'une valeur  $T_0$  on peut exprimer (9.64) par un développement en série limité au terme du premier ordre :

$$R(T_0 + \Delta T) = R_0(1 + \alpha \Delta T) \quad (9.65)$$

Le coefficient  $\alpha = (1/R_0) dR/dT|_{T_0}$  est appelé *coefficient de température* de la résistance  $R_0$ . Il dépend de  $T_0$  et du matériau considéré.

### 9.4.2 Résistivité des conducteurs métalliques

Il n'existe pas de modèle simple permettant une description complète de la résistivité d'un métal pour toutes les températures (chap. II.2). En effet, le modèle de Drude ne tient pas compte de la température, si ce n'est d'une manière empirique; le modèle de l'électron libre considère que l'électron se déplace dans le milieu sans interaction avec le réseau cristallin : il n'y a donc aucun obstacle à son mouvement, et la résistance électrique est théoriquement nulle.

Une description raisonnable de la résistivité métallique passe par l'introduction d'une *température critique*  $\theta_c$  permettant de diviser toute la gamme des températures en domaines correspondant à des mécanismes différents de formation de la résistance.

Aux températures supérieures à  $\theta_c$ , l'électron « voit » les atomes du réseau comme des centres diffuseurs dont la probabilité de rencontre est proportionnelle au carré de l'amplitude moyenne de vibration de ces atomes. En première approximation, ces vibrations sont harmoniques, et le carré de leur amplitude est proportionnel à  $T$ . La résistivité est alors proportionnelle à la température.

A très basse température, la concentration en impuretés et en défauts cristallins joue un rôle prépondérant. D'autre part, il est indispensable de tenir compte de la quantification des niveaux d'énergie des phonons et de la probabilité d'interaction électron-phonon. La résistivité à ces températures suit une loi en  $T^5$  [74].

Aux températures intermédiaires, la résistivité est proportionnelle à  $T^2$  [75].

### 9.4.3 Résistances métalliques

Sauf cas exceptionnel, les résistances métalliques ne sont pas utilisées pour la mesure des températures inférieures à quelques dizaines de K. Dans la pratique, un polynôme du troisième degré en  $T$  suffit à donner la précision nécessaire à la fonction  $F$  définie par (9.64). On écrit alors :

$$R(\theta) = R_0(1 + A\theta + B\theta^2 + C\theta^3) \quad \Omega \quad (9.66)$$

où les valeurs  $A, B, C$  sont pratiquement indépendantes de  $\theta$  pour des variations raisonnables autour de  $0^\circ\text{C}$ ., valeur pour laquelle  $R(0^\circ\text{C}) = R_0$ . Pour une résistance de nickel entre  $-60^\circ\text{C}$  et  $70^\circ\text{C}$ ,

$$\left. \begin{aligned} A &= 5,4916(7) \cdot 10^{-3} \quad (^\circ\text{C})^{-1} \\ B &= 6,6666(7) \cdot 10^{-6} \quad (^\circ\text{C})^{-2} \\ C &= 0,0000(0) \quad (^\circ\text{C})^{-3} \end{aligned} \right\} \quad (9.67)$$

Les matériaux utilisés pour la mesure des résistances en fonction de la température sont souvent ceux de la colonne VIII du tableau de Mendéléev : le fer, le nickel, le rhodium, l'irridium et leurs alliages ont été utilisés. Mais à cause de ses bonnes caractéristiques mécaniques et chimiques, c'est le platine qui est le plus employé.

### 9.4.4 Résistance à fil de platine

Le platine présente les avantages suivants :

- grand degré de pureté chimique (99,999%), garantissant une bonne reproductibilité des caractéristiques;
- résistance à la corrosion;
- grande ductilité;
- possibilité d'être utilisé sur une large gamme de températures ( $-182,97^\circ\text{C}$  à  $630,5^\circ\text{C}$ ).

Pour des raisons historiques, la relation résistance-température du platine est sensiblement différente de (9.66). Elle prend la forme dite de l'équation de Callendar-Van Duzen :

$$R(\theta) = R_0 \left[ 1 + \alpha\theta - \delta \left( \frac{\theta}{1000} - 1 \right) \left( \frac{\theta}{100} \right)^2 - \beta \left( \frac{\theta}{1000} - 1 \right) \left( \frac{\theta}{1000} \right)^3 \right] \quad (9.68)$$

avec  $R_0 = R(0^\circ\text{C})$ ;  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  sont des constantes qui dépendent de la calibration de chaque résistance. Par définition,  $\beta = 0$  si  $\theta > 0^\circ\text{C}$ . Des valeurs de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  typiques sont données par [76]: (fig. 9.22)

$$\begin{aligned} \alpha &= 3,90802 \cdot 10^{-3} & (\text{°C})^{-1} \\ \beta &= 0,1 & (\text{°C})^{-4} \\ \delta &= 1,49 & (\text{°C})^{-3} \end{aligned} \quad (9.69)$$

Comme les valeurs de ces constantes sont extrêmement dépendantes des impuretés résiduelles, il est nécessaire de calibrer chaque résistance en employant le tableau 9.2. Quatre points sont nécessaires à cette calibration. On utilise le plus souvent  $0^\circ\text{C}$ ,  $100^\circ\text{C}$ ,  $444,6^\circ\text{C}$ ,  $-182,97^\circ\text{C}$  (fig. 9.21). Différents types de capteurs sont représentés à la figure 9.23.

Tableau 9.21 Rapports des valeurs de la résistance au platine, pour  $R(0^\circ\text{C}) = 100 \Omega$ .

Temp. °C	$R_\theta/R_0$						
-200	0,1714	10	1,0397	220	1,8158	430	2,6002
-190	0,2146	20	1,0793	230	1,8829	440	2,6348
-180	0,2580	30	1,1188	240	1,9199	450	2,6694
-170	0,3012	40	1,1581	250	1,9567	460	2,7038
-160	0,3442	50	1,1973	260	1,9935	470	2,7380
-150	0,3868	60	1,2364	270	2,0301	480	2,7722
-140	0,4291	70	1,2754	280	2,0666	490	2,8063
-130	0,4711	80	1,3142	290	2,1030	500	2,8402
-120	0,5129	90	1,3530	300	2,1393	510	2,8740
-110	0,5544	100	1,3916	310	2,1754	520	2,9077
-100	0,5957	110	1,4301	320	2,2115	530	2,9412
-90	0,6368	120	1,4685	330	2,2474	540	2,9747
-80	0,6777	130	1,5067	340	2,2832	550	3,0080
-70	0,7185	140	1,5449	350	2,3189	560	3,0412
-60	0,7591	150	1,5829	360	2,3545	570	3,0743
-50	0,7996	160	1,6208	370	2,3899	580	3,1072
-40	0,8399	170	1,6586	380	2,4253	590	3,1401
-30	0,8801	180	1,6963	390	2,4605	600	3,1728
-20	0,9202	190	1,7338	400	2,4956	(610)	3,2054
-10	0,9602	200	1,7713	410	2,5306	(620)	3,2378
0	1,0000	210	1,8086	420	2,5655	(630)	3,2702

#### 9.4.5 Résistivité des semiconducteurs

La résistivité des semiconducteurs varie en fonction de la température, en sens inverse, et beaucoup plus fortement, que celle des métaux. Ceci provient des différences fondamentales existant entre les mécanismes de conduction dans un cas et dans l'autre.

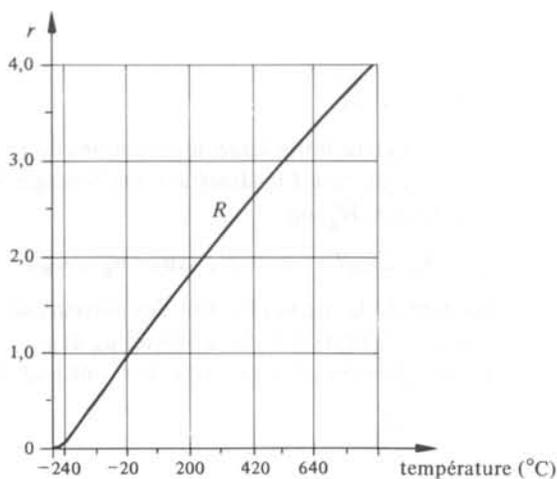


Fig. 9.22  $r = R(\theta)/R(0^\circ\text{C})$  pour le platine.

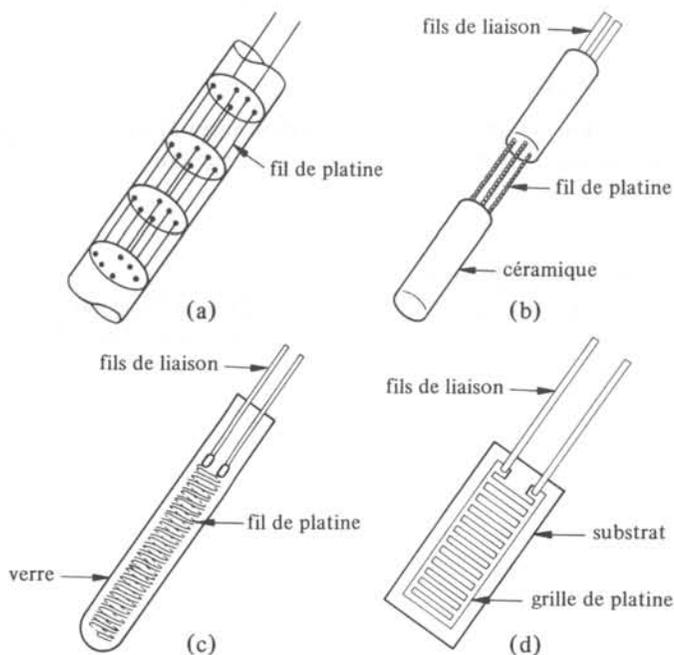


Fig. 9.23 Capteurs à résistance de platine : (a) standard; (b) ouvert; (c) résistant aux chocs thermiques; (d) à grille.

S'agissant des semiconducteurs, la résistivité est donnée par (chap. II.2),

$$\rho = \frac{1}{e} (n\mu_n + p\mu_p)^{-1} \quad \Omega\text{m} \quad (9.70)$$

avec

$e$  = charge électronique

$n$  = nombre volumique d'électrons

$p$  = nombre volumique de trous  
 $\mu_n$  = mobilité électronique  
 $\mu_p$  = mobilité des trous

Dans un semiconducteur intrinsèque, les variations de  $n$  et  $p$  en fonction de la température sont prépondérantes. En admettant que l'énergie de Fermi est au centre la bande interdite de largeur  $W_g$ , on a :

$$n = N_c \exp(-W_g/2k_B T); p = N_v \exp(-W_g/2k_B T) \quad (9.71)$$

où  $N_c$  et  $N_v$  dépendent de la masse effective des porteurs de charge considérés et de  $T^{3/2}$ . Les variations en fonction de  $T$  des mobilités  $\mu_n$  et  $\mu_p$ , de même que celles de  $N_c$  et  $N_v$  peuvent être négligées devant la variation du terme exponentiel. Par conséquent,

$$\rho \cong \exp \{W_g/2k_B T\} \quad \Omega \text{ m} \quad (9.72)$$

Dans le cas des semiconducteurs extrinsèques, on peut montrer [56] que la dépendance en température de la résistivité reste exponentielle. L'équation (9.72) n'est cependant plus valable; il convient de distinguer la région des températures moyennes de celle des basses températures, en introduisant deux constantes différentes,  $\beta_1$  et  $\beta_2$ , (9.66) se transforme alors en

$$\rho \cong \exp \{\beta/k_B T\} \quad \Omega \text{ m} \quad (9.73)$$

où  $\beta = \beta_1$  ou  $\beta_2$  selon la température. La transition entre  $\beta_1$  et  $\beta_2$  est en général très marquée. Elle a lieu aux environs de 10 K pour le germanium.

#### 9.4.6 Résistances semiconductrices

La fonction exponentielle présente dans (9.72) et (9.73) conduit à écrire la dépendance en température des résistances semiconductrices sous la forme :

$$R(T) = R_0 \exp \left\{ C \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right\} \quad \Omega \quad (9.74)$$

où

$R_0$  est la résistance à  $T_0$  ;

$T_0$  est une température de référence (0°C p. ex.);

$C$  est une constante pour de petites variations de température (< 100°C). Elle est généralement de l'ordre de 3000 à 5000 K.

On vérifie que la dépendance en température est environ 100 fois plus importante que dans les métaux, ce qui rend les semiconducteurs très utiles pour mesurer de très faibles variations de température. La résolution obtenue est de l'ordre de

$$r = 10^{-4} \quad \text{K} \quad (9.75)$$

#### 9.4.7 Thermistances

Les thermistances sont des résistances semiconductrices préparées à l'aide d'oxydes métalliques polycristallins. Les métaux les plus employés sont ceux du groupe de transi-

tion du fer : chrome, manganèse, nickel, cobalt. Les oxydes sont agglomérés et mis en forme par frittage. Plusieurs exécutions sont disponibles : anneaux, cylindres, perles (fig. 9.24). La forme en perle garantit la meilleure stabilité. Les principaux avantages des thermistances sont :

- un encombrement réduit ( $\cong 1 \text{ mm}^3$ );
- une faible capacité calorifique (temps de réponse faible);
- un fonctionnement sur une grande gamme de température (20 K-600 K).

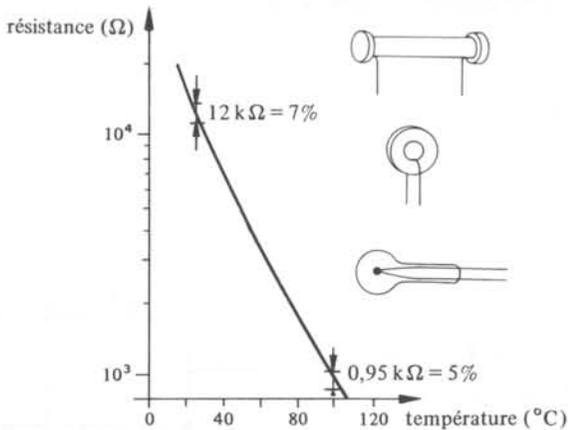


Fig. 9.24 Types de thermistances et caractéristiques.

En contrepartie, leur comportement non-linéaire, et leurs tolérances de fabrication peu sévères (typiquement  $15\%$ ) imposent leur emploi dans une plage limitée de température. On peut parer à cet inconvénient en faisant une sélection par tri, et en calibrant les thermistances de cas en cas. La calibration est simple, puisqu'elle ne demande que deux mesures, pour déterminer les constantes  $R_0$  et  $C$ .

#### 9.4.8 Résistances au germanium et au silicium

En plus des thermistances, on trouve sur le marché des résistances semiconductrices au germanium ou au silicium, généralement dopées  $n$ . Elles se distinguent par les points suivants :

- une variation en fonction de la température du type (9.65) avec  $\alpha$  positif, conséquence d'une forte concentration de dopants;
- des valeurs de  $\alpha$  comparables à celles des métaux, de l'ordre de  $5 \text{ à } 11 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$  des tolérances de fabrication assez serrées (typiquement  $1 \text{ à } 5\%$ ) en raison du haut niveau technologique atteint dans la production de ce type de semiconducteurs;
- le domaine de fonctionnement est plus réduit, environ de  $-50^{\circ}\text{C}$  à  $+120^{\circ}\text{C}$ .

## 9.5 THERMOMÉTRIE PAR MESURE DE FRÉQUENCE

## 9.5.1 Principe

Une des applications les plus connues du quartz est la réalisation d'oscillateurs de très grande stabilité, utilisés particulièrement en horlogerie. Cette stabilité est obtenue grâce à une coupe cristallographique particulière, qui minimise les variations de fréquence dues aux changements de température.

A l'inverse, on peut choisir une coupe cristallographique susceptible de rendre la fréquence de l'oscillateur très dépendante de la température, dans le but de réaliser un capteur (cisaillement d'épaisseur, coupe AT).

## 9.5.2 Schéma équivalent

Autour de la fréquence de résonance mécanique  $f$ , (déterminée par son mode de vibration), une lame de quartz munie d'électrodes déposées (fig. 9.25) se comporte selon le schéma équivalent électrique de la figure 9.26.

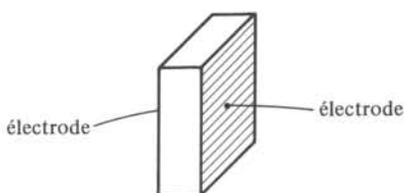


Fig. 9.25 lame de quartz.

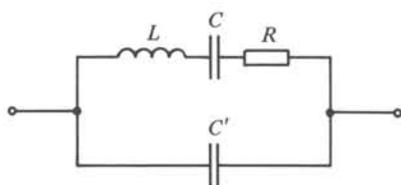


Fig. 9.26 Schéma équivalent électrique.

La branche supérieure dépend des caractéristiques mécaniques de la lame. Des valeurs typiques des éléments sont :

$$\begin{aligned} L &: 1 \text{ H} - 10^4 \text{ H} \\ C &: 0,01 - 100 \text{ pF} \\ R &: 1 \text{ k}\Omega - 100 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

La branche inférieure représente la capacité du condensateur formé des deux électrodes et de la lame (fig. 9.25). Elle varie entre 1 et 100 pF. Le circuit équivalent possède deux fréquences de résonance. La première, pour la branche supérieure, est donnée par

$$f_s = (2\pi \sqrt{LC})^{-1} \quad \text{Hz} \quad (9.76)$$

La seconde, correspondant à la mise en parallèle des deux branches vaut

$$f_p = \left( 2\pi \sqrt{\frac{LC}{1 + \frac{C}{C'}}} \right)^{-1} \quad \text{Hz} \quad (9.77)$$

Les fréquences  $f_s$  et  $f_p$  sont voisines. Elles fixent les limites de l'intervalle dans lequel le quartz doit travailler pour que le capteur fonctionne convenablement.

### 9.5.3 Sensibilité thermique du quartz

Les fréquences  $f$  de travail du quartz et  $f_s$  varient avec la température. En exprimant la température  $\theta$  en degrés Celsius, on peut écrire :

$$f(T) = f_0(1 + A\theta + B\theta^2 + C\theta^3) \quad \text{Hz} \quad (9.78)$$

Ce développement limité au 3ème ordre est largement suffisant pour les applications pratiques. On peut admettre que les coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sont des constantes pour des plages de température raisonnables ( $-100$  à  $250^\circ\text{C}$ ); ils ne dépendent alors que de la coupe du quartz. Il existe en particulier une coupe (LC) pour laquelle  $B$  et  $C$  sont presque nuls; dans ce cas, la fréquence  $f$  est une fonction quasi linéaire de  $T$ . La variation de la sensibilité du résonateur en fonction de la température est donnée à la figure 9.27.

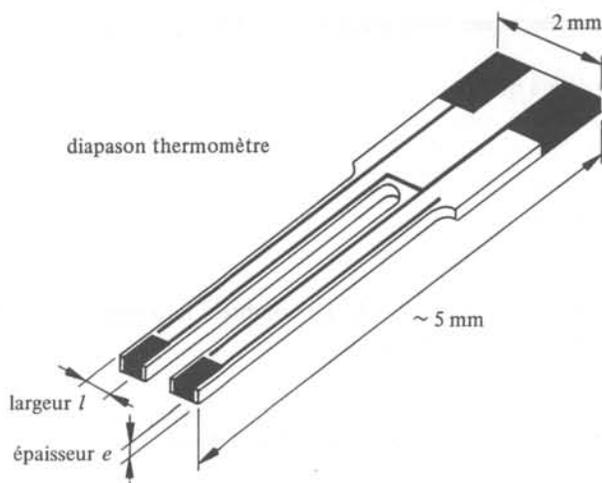


Fig. 9.27 Capteur de température à quartz.

### 9.5.4 Réalisation pratique, exemple

Un capteur de température à quartz a été développé par une maison spécialiste des circuits horlogers [71, 77]. La technique étant proche de celle des diapasons, le quartz a la forme présentée à la figure 9.27. Il oscille en torsion, à des fréquences proches de 260 kHz.

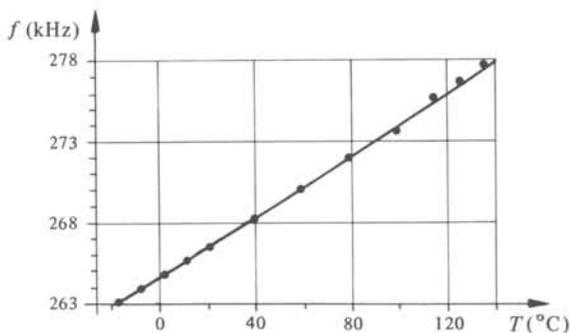


Fig. 9.28 Caractéristique fréquence-température.

La figure 9.28 montre la dépendance en température de la fréquence de travail du quartz. On peut noter une très bonne sensibilité ( $> 30$  ppm/K) et une linéarité satisfaisante dans le domaine considéré (fig. 9.29).

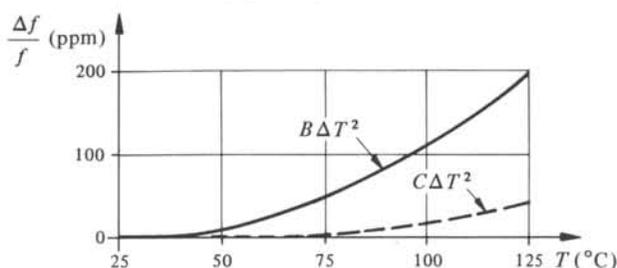


Fig. 9.29 Contributions des termes non-linéaires (pour  $B$  et  $C$ , voir (9.78)).

Un thermomètre à quartz se compose de deux oscillateurs. Le premier, grâce à une isolation thermique et une coupe adéquates, garde sa fréquence  $f_{\text{réf}}$  constante.

La mesure de la fréquence se fait par comparaison avec un quartz de référence (fig. 9.30). La différence  $\Delta t$  entre le temps  $t_m$  de référence et celui du capteur s'écrit, en première approximation

$$\Delta t = A \Delta T t_m \quad (9.79)$$

où  $A$  est défini par (9.78) et  $\Delta T = T - T_r$ . Le nombre d'impulsions  $N$  comptées pendant ce temps par le quartz de référence vaut

$$N = f_{\text{réf}} \Delta t \quad (9.80)$$

La résolution limite du système s'obtient pour  $N=1$ , donc

$$\Delta T_{\text{min}} = (A f_{\text{réf}} t_m)^{-1} \quad \text{K} \quad (9.81)$$

Cette équation montre que la résolution peut être augmentée en faisant croître le temps de mesure  $t_m$  ou la fréquence de référence  $f_{\text{réf}}$ . Pour le cas pratique,  $t_m = 1$  s et  $f_{\text{réf}} = 1$  MHz donne une résolution de 0,03 K.

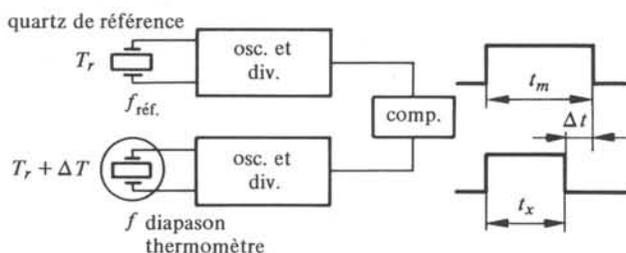


Fig. 9.30 Principe de mesure.

## 9.6 EXERCICES

9.6.1 A l'aide du tableau 9.1, « traduire » le tableau 9.2 en °F et °R.

**9.6.2** Prouver la validité de l'équation (9.27), sous les hypothèses  $T(x, t = 0) = T_0(x)$  et  $T(0, t) = T(E, t) = T_f$ .

**9.6.3** Vérifier l'équation (9.63) à l'aide des lois des thermocouples et de la figure 9.20.



## CAPTEURS À EFFETS ÉLECTRIQUES

## 10.1 PIÉZOÉLECTRICITÉ

## 10.1.1 Tenseur piézoélectrique

La *piézoélectricité* (§ II.4.9.5) est la propriété de certains diélectriques cristallins de se polariser sous l'action d'une contrainte mécanique. Réciproquement, ces matériaux changent de dimensions lorsqu'ils sont polarisés par un champ électrique extérieur (fig. 10.1).

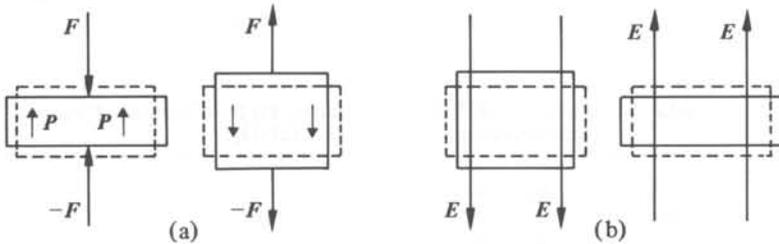


Fig. 10.1 Effet piézoélectrique sur une lame de quartz coupée perpendiculairement à  $0x$ : (a) effet direct; (b) effet inverse.

La piézoélectricité peut être considérée comme un phénomène linéaire, ce qui justifie l'emploi de la théorie de l'élasticité pour analyser l'aspect mécanique du problème. D'autre part, la nature cristalline du matériau piézoélectrique implique l'usage d'une équation tensorielle pour décrire (effet direct) la relation liant la polarisation  $\mathbf{P}$  à la contrainte  $\sigma_{ij}$  ( $\text{N/m}^2$ ), qui remplace  $\mathbf{F}$  pour une équation locale. En toute généralité :

$$P_i = d_{ijk} \sigma_{jk} \quad \text{Cm}^{-2} \quad (10.1)$$

Les indices  $i, j, k$  prennent les valeurs 1, 2, 3 ou  $x, y, z$ . On appelle le tenseur  $d$  d'ordre 3 le tenseur piézoélectrique direct. Ses 27 composantes ne sont pas toutes indépendantes les unes des autres. En particulier, l'équilibre mécanique au point considéré dans le cristal implique

$$d_{ijk} = d_{ikj} \quad \text{CN}^{-1} \quad (10.2)$$

Les symétries cristallines abaissent encore le nombre de composantes réellement indépendantes.

## 10.1.2 Matrice des modules piézoélectriques

Le tenseur des contraintes, grâce à sa propriété de symétrie, se réduit à six composantes indépendantes, que l'on note  $\sigma_i$ , où  $i$  prend les valeurs 1 à 6.

De la même manière, on contracte les deux derniers indices du tenseur piézoélectrique direct, selon la règle :

$$\left. \begin{array}{ccc} 11 \rightarrow 1 & 22 \rightarrow 2 & 33 \rightarrow 3 \\ 23 \left\{ \rightarrow 4 & 31 \left\{ \rightarrow 5 & 12 \left\{ \rightarrow 6 \\ 32 \left\{ \rightarrow 4 & 13 \left\{ \rightarrow 5 & 21 \left\{ \rightarrow 6 \end{array} \right. \right. \right. \right. \right. \right. \quad (10.3)$$

La relation (10.1) peut alors s'écrire plus simplement

$$P_i = d_{ij} \sigma_j \quad \text{Cm}^{-2} \quad (10.4)$$

où  $d_{ii} = d_{ijk}$  lorsque  $(jk)$  a subi la contraction en  $l$  selon (10.3). La relation tensorielle (10.1) se transforme en une relation matricielle. La matrice  $3 \times 6$  déduite du tenseur piézoélectrique direct porte le nom de *matrice des modules piézoélectriques*. Il est important de noter que le *nom de «matrice» est abusif* : en effet, lors d'une rotation du système d'axes de référence,  $(d_{ij})$  ne se transforme pas selon les lois habituelles des matrices; il est nécessaire d'appliquer la transformation au tenseur  $(d_{ijk})$ , puis de redéfinir la matrice transformée à partir du tenseur. Le tableau 10.2 donne les matrices des modules piézoélectriques pour les matériaux les plus employés.

**Tableau 10.2** Matrices des modules piézoélectriques: (a) pour le quartz; (b) pour la tourmaline, le  $\text{LiNbO}_3$  et le  $\text{LiTaO}_3$ .

	$\begin{pmatrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{14} & -2d_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (a)$					
	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & -2d_{22} \\ -d_{21} & d_{22} & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (b)$					
$10^{-12} \text{CN}^{-1}$	$d_{11}$	$d_{14}$	$d_{15}$	$d_{22}$	$d_{31}$	$d_{33}$
Quartz	2,3	0,67	0	0	0	0
Tourmaline			3,63	-0,33	0,34	1,83
$\text{LiNbO}_3$	0	0	68	21	-1	6
$\text{LiTaO}_3$	0	0	26	8,5	-3	9,2

### 10.1.3 Matériaux piézoélectriques

À côté du quartz, qui est intéressant à cause de sa très grande stabilité et rigidité, les matériaux les plus employés pour leurs effets piézoélectriques sont les céramiques, dont le coût est plus faible.

Les céramiques piézoélectriques sont fabriquées par frittage de microcristaux piézoélectriques, sous champ électrique, afin d'orienter les domaines de polarisation des divers cristaux.

Une famille très utilisée pratiquement est celle obtenue par frittage de composés de plomb, de titane et de zirconium, que l'on désigne par PZT. Ces céramiques présen-

tent les avantages suivants :

- modules piézoélectriques élevés;
- grandes possibilités d'usinage (frittage);
- robustesse.

Leurs principaux désavantages sont :

- une forte dépendance en température des modules piézoélectriques;
- une grande hystérèse en température des modules piézoélectriques.

Le tableau 10.3 donne des caractéristiques importantes des matériaux piézoélectriques couramment utilisés.

Tableau 10.3 Propriétés physiques des matériaux piézoélectriques [73].

Matériau	Modules piézo-électriques ( $10^{-12}$ CN $^{-1}$ )	Permittivité (à contrainte appliquée nulle)	Résistivité ( $\Omega$ m)	Module d'Young $E_Y$ ( $10^9$ Nm $^{-2}$ )	Contrainte max. ( $10^7$ Nm $^{-2}$ )	Température max. d'utilisation ( $^{\circ}$ C)
<i>Cristaux</i>						
Quartz (rhomboédrique)	$d_{11} = 2,3$ $d_{14} = -0,7$	$\epsilon_{11} = 4,5$	$10^{12}$	$E_{Y11} = 80$	10	550
Sel de Seignette ou de Rochelle (orthorhombique)	$d_{14} = 550$ $d_{25} = 54$ $d_{36} = 12$	$\epsilon_{11} = 350$	$> 10^{10}$	$E_{Y11} = 19,3$ $E_{Y22} = 30$ $E_{Y33} = 30$	1,4	45
L.H. (monoclinique)	$d_{21} = 15$ $d_{22} = 1,8$ $d_{23} = -38$	$\epsilon_{11} = 5,6$ $\epsilon_{22} = 10,3$ $\epsilon_{33} = 6,5$	$> 10^{10}$	46	1,5	75
<i>Céramiques</i>						
G200C	$d_{33} = 80$	$\epsilon_{33} = 250$	$10^9$	$E_{Y33} = 47$	entre 7 et 8	400
PXE5	$d_{33} = 390$	$\epsilon_{33} = 1800$	$10^{12}$	$E_{Y33} = 53$		285
PX4	$d_{33} = 265$	$\epsilon_{33} = 1500$	$10^{11}$	$E_{Y33} = 79$		265
PZT5A	$d_{33} = 375$	$\epsilon_{33} = 1700$	$10^{11}$	$E_{Y33} = 53$		365
<i>Polymères</i>						
Polyfluorure de vinylidène PVF $_2$	$d_{15} = 10$ $d_{24} = 2$ $d_{31} = 20$ $d_{32} = 2$ $d_{33} = -30$	10 à 12	$10^{13}$	2 à 3		90 à 100

## 10.2 CAPTEURS PIÉZOÉLECTRIQUES

### 10.2.1 Modes de déformation des éléments piézoélectriques

Selon la façon d'appliquer la contrainte sur les faces d'un matériau piézoélectrique, on distingue divers modes de déformation, regroupés dans la figure 10.4.

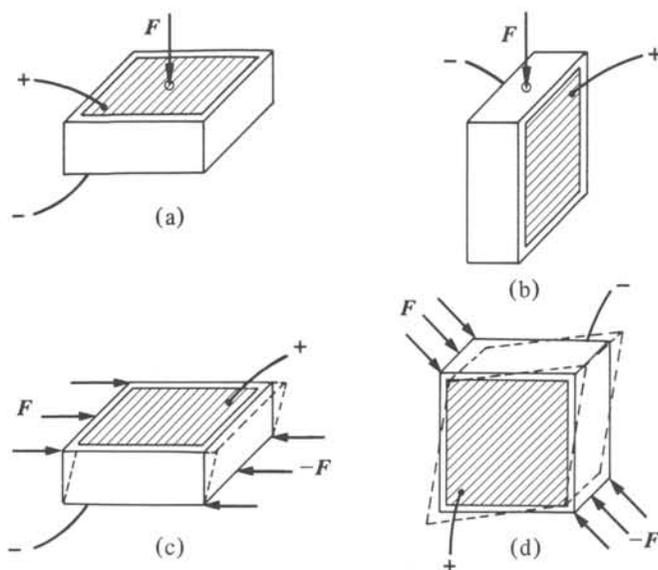


Fig. 10.4 Modes de déformation fondamentaux : (a) compression transversale; (b) compression latérale; (c) cisaillement d'épaisseur; (d) cisaillement de face.

### 10.2.2 Mode de compression transversal

Lorsqu'on applique une force  $F_1$  suivant l'axe  $Ox$ , (fig. 10.5), il apparaît une charge surfacique  $q$  sur l'aire hâchurée (cas du quartz),

$$q = d_{11} \sigma_1 \quad \text{Cm}^{-2} \quad (10.5)$$

Mais

$$\sigma_1 = F_1 / (Ll) \quad \text{Nm}^{-2} \quad (10.6)$$

La charge totale produite vaut :

$$Q = qLl \quad \text{C} \quad (10.7)$$

A l'aide de (10.5) et (10.6), on remarque que la charge  $Q$  est proportionnelle à la force appliquée  $F_1$  :

$$Q = d_{11} F_1 \quad \text{C} \quad (10.8)$$

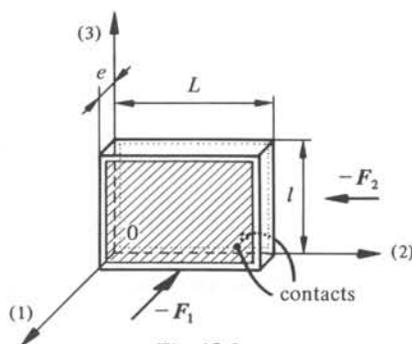


Fig. 10.5

### 10.2.3 Mode de compression latéral

Si la force appliquée est latérale (fig. 10.5), de valeur  $F_2$ , la charge surfacique  $q$ , qui apparaît encore sur l'aire hâchurée (quartz) vaut :

$$q = d_{12} \sigma_2 \quad \text{Cm}^{-2} \quad (10.9)$$

d'où la charge totale :

$$Q = d_{12} \frac{L}{e} F_2 \quad \text{C} \quad (10.10)$$

Pour augmenter la sensibilité, il convient donc de travailler avec des longueurs importantes et de faibles épaisseurs. On est cependant limité par les risques de flambage de la lame.

### 10.2.4 Empilage des éléments

Lorsqu'il est nécessaire, pour des raisons de montage ou de sensibilité, d'empiler plusieurs éléments piézoélectriques, ils peuvent être couplés soit en série, soit en parallèle (fig. 10.6).

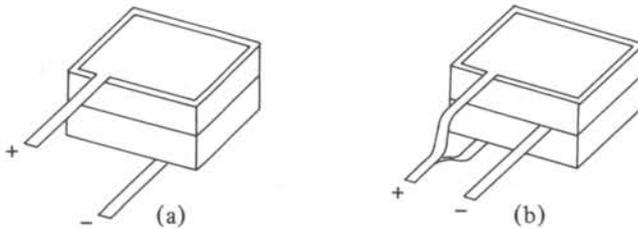


Fig. 10.6 Empilage des éléments piézoélectriques : (a) en série; (b) en parallèle.

L'empilage série présente l'avantage de multiplier par le nombre de couches la tension en circuit ouvert et la résistance, tandis que la capacité est divisée dans le même rapport.

Au contraire, l'empilage en parallèle augmente dans une même proportion la capacité et la charge induite. Il présente l'avantage de fournir par lui-même un haut degré d'isolation de l'électrode (-) prise en sandwich. Cette qualité simplifie souvent la conception pratique d'un capteur piézoélectrique.

Les câbles de liaison du capteur et les capacités parasites peuvent être considérés comme autant de capacités supplémentaires en parallèle. Elles diminuent la tension en circuit ouvert. Il faut donc limiter au maximum les longueurs de câble entre le capteur et un amplificateur de tension. Pour cette raison, on préfère utiliser un amplificateur de charge (§ 10.2.6).

### 10.2.5 Schéma équivalent électrique

L'apparition d'une charge  $Q$  engendrée par effet piézoélectrique correspond au passage d'un courant  $i = dQ/dt$ . Un élément piézoélectrique peut donc être représenté par le schéma équivalent de la figure 10.7.

La résistance et la capacité entre les électrodes sont représentées par  $R_i$  et  $C_g$  respectivement.

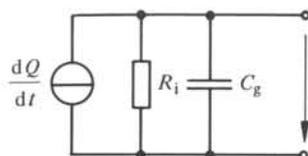


Fig. 10.7 Schéma équivalent des capteurs piézoélectriques.

### 10.2.6 Amplificateur de charge

L'emploi d'un amplificateur de charge est particulièrement indiqué pour traiter les signaux d'un capteur piézoélectrique, en raison de la structure et de la valeur des éléments de son circuit équivalent.

Le schéma de principe d'un tel amplificateur est celui d'un intégrateur (fig. 10.8). En considérant l'amplificateur opérationnel comme idéal, le potentiel de l'entrée (-) est toujours à la terre, de sorte que la capacité du câble de raccordement ne joue pas de rôle.

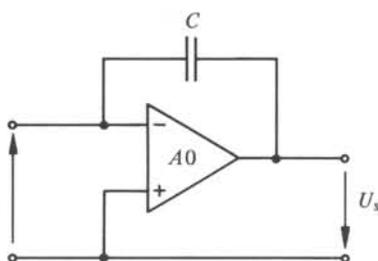


Fig. 10.8 Amplificateur de charge.

D'autre part,

$$U_s = \frac{Q}{C} = -\frac{1}{C} \int i dt \quad \text{V} \quad (10.11)$$

La tension de sortie  $U_s$  est directement proportionnelle à la charge  $Q$  produite par l'élément piézoélectrique.

### 10.2.7 Caractéristiques des capteurs piézoélectriques

Les capteurs piézoélectriques sont utilisés dans un grand nombre de dispositifs de mesure, de la mesure de force, à celle d'accélération, ou de déformation. Leurs principaux avantages sont :

- leur grande étendue de mesure (jusqu'à 40 kN) ;
- une très bonne résolution de l'ordre du mN, due en partie aux caractéristiques des amplificateurs de charge ;
- une sensibilité élevée, qui dépend non seulement du matériau et de sa coupe, mais aussi de la conception même du capteur. Elle peut atteindre l'ordre du pC/N.

Les limitations de l'utilisation de tels capteurs se rencontrent dans les environnements difficiles, (taux d'hygrométrie élevé, apparition de phénomènes pyroélectriques).

Leur bande passante typique varie de quelques centaines de mHz à quelques dizaines de kHz. Ces limites sont dues, vers les basses fréquences, aux courants de fuite, et vers les hautes fréquences aux résonances mécaniques.

## 10.3 CAPTEURS PIÉZORÉSISTIFS

### 10.3.1 Piézorésistance, définition

La *piézorésistance* (ou piézorésistivité) est le phénomène liant la variation de volume relatif d'un métal ou d'un semiconducteur à sa variation relative de résistivité; dans la limite où le phénomène est linéaire, on écrit :

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = C \frac{\Delta V}{V} \quad (10.12)$$

où  $\Delta\rho/\rho$  est la variation relative de résistivité, et  $\Delta V/V$  la variation relative du volume considéré. La constante de proportionnalité  $C$  porte le nom de *constante de Bridgman*.

La valeur de la constante de Bridgman est très différente pour les métaux, où  $C \cong 1$ , et pour les semiconducteurs, où  $C \cong 100$ . En outre, elle est positive pour les métaux et les semiconducteurs dopés p, et négative pour les semiconducteurs de type n.

### 10.3.2 Piézorésistance dans les métaux

L'origine de la piézorésistance métallique doit se chercher dans la variation de la section efficace de collision des atomes du réseau.

En effet, une diminution de volume du métal entraîne une diminution relative de la maille du réseau cristallin. Les forces de liaison interatomiques, essentiellement coulombiennes, augmentent; il en résulte une diminution de l'amplitude des vibrations des atomes du réseau autour de leur position d'équilibre. La section efficace de collision entre atomes du réseau et électrons libres diminue donc, ce qui entraîne une chute de la résistivité du métal.

### 10.3.3 Piézorésistance dans les semiconducteurs

Dans les semiconducteurs, on admet qu'une variation de volume, ou plus généralement une contrainte mécanique, change la forme de la surface de Fermi [73]. Globalement, ce phénomène se traduit par une variation de résistivité.

### 10.3.4 Principe des capteurs

Les capteurs piézorésistifs sont intrinsèquement des capteurs de déformation couramment appelés *jauges (de contrainte)*. Ils traduisent en variation de résistance leurs propres déformations, qui sont en général celles du support sur lequel ils sont fixés. La constitution et le mode d'utilisation de jauges unidirectionnelles sont illustrés à la figure 10.9. Il existe des capteurs à plusieurs jauges permettant de mesurer l'amplitude et l'orientation d'une déformation dans un plan.

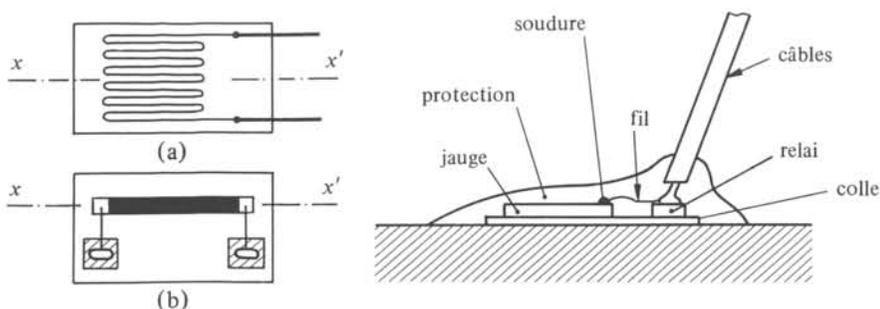


Fig. 10.9 Jauges résistives métallique (a) et semiconductrice (b).

Soit  $\Delta l/l$  la déformation relative selon l'axe. La variation de résistance relative de la jauge vaut :

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta s}{s} \quad (10.13)$$

La variation de section relative  $\Delta s/s$  peut s'exprimer à partir de la variation de longueur relative  $\Delta l/l$  par la relation de Poisson :

$$\frac{\Delta s}{s} = -2\nu \frac{\Delta l}{l} \quad (10.14)$$

où  $\nu$  est le coefficient de Poisson. La piézorésistance détermine complètement la variation de résistivité relative, car, à l'aide de (10.12), on a :

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = C \frac{\Delta V}{V} = C(1 - 2\nu) \frac{\Delta l}{l} \quad (10.15)$$

### 10.3.5 Facteur de jauge

En regroupant les termes (10.13), (10.14) et (10.15), on obtient finalement :

$$\frac{\Delta R}{R} = K \frac{\Delta l}{l} \quad (10.16)$$

où la constante de proportionnalité  $K$ , appelée *facteur de jauge*, vaut :

$$K = (1 + 2\nu) + C(1 - 2\nu) \quad (10.17)$$

Dans les jauges métalliques,  $\nu$  est voisin de 0,3 et l'on obtient un facteur de jauge légèrement supérieur à 2. Il est beaucoup plus élevé, entre 100 et 200, dans les jauges semiconductrices, en raison de la grande valeur de la constante de Bridgman.

### 10.3.6 Jauges métalliques

Les jauges de contraintes métalliques présentent des structures à fil ou tramée, selon les usages (fig. 10.10).



Fig. 10.10 Jauges métalliques: (a) à fil, (b) tramée.

Les jauges à fil sont les plus courantes des jauges métalliques. Les jauges à film sont fabriquées par des procédés analogues à ceux des circuits imprimés. Elles permettent des réductions de dimensions, et possèdent une plus grande insensibilité aux déformations transversales.

Les alliages utilisés pour les jauges métalliques sont principalement des composés de nickel (tab. 10.11).

Tableau 10.11 Alliages utilisés pour les jauges métalliques.

Alliage	Composition	Facteur de jauge
Constantan	45% Ni, 55% Cu	2,1
Isoélastique	52% Fe, 36% Ni, 8% Cr, 4% (Mn, Mo)	3,5
Karma	74% Ni, 20% Cr, 3% Cu, 3% Fe	2,1
Nichrome V	80% Ni, 20% Cr	2,5
Platine-Tungstène	92% Pt, 8% W	4,1

Les jauges métalliques subissent des effets thermiques, essentiellement dus :

- à la dépendance en température de la résistivité;
- à la dilatation thermique du fil ou du film;
- à la dilatation thermique du support sur lequel est collée la jauge.

On regroupe ces effets dans un *coefficient de température de la jauge*,  $\beta$ , tel que

$$\frac{\Delta R}{R} = \beta \Delta T \quad (10.18)$$

Connaissant l'écart de température  $\Delta T$ , (10.18) permet de dissocier la variation de résistance due à la contrainte, de celle due à la température.

### 10.3.7 Jauges semiconductrices

Il existe deux types de jauges semiconductrices (fig. 10.12) :

- les jauges découpées;
- les jauges diffusées.

Les jauges découpées sont des monocristaux de silicium dopé, découpés par attaque chimique ou mécaniquement. Le cristal présente des dimensions de l'ordre de  $1 \text{ mm} \times 10 \mu\text{m}$ ; il est généralement collé sur un support en plastique, ainsi que les plages de raccordement.

Les jauges diffusées sont réalisées par diffusion d'un dopant dans un substrat de silicium pur. L'ensemble est protégé par une couche de silice, traversée par les conduc-

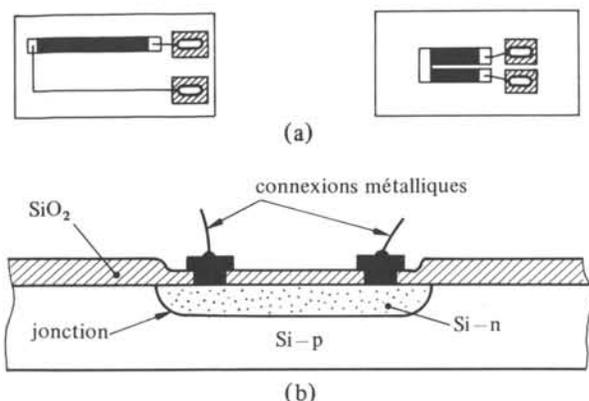


Fig. 10.12 Jauges piézorésistives semiconductrices: (a) jauges découpées; (b) jauge diffusée.

teurs de raccordement. L'avantage de cette technique est la possibilité d'obtenir un ensemble de quatre jauges sur le même substrat, qui forment ainsi un pont complet (§ 10.4.7).

### 10.3.8 Réponse en fréquence des jauges

Les fréquences maxima de fonctionnement des jauges piézorésistives ne dépendent pas des matériaux des jauges eux-mêmes, mais des supports de fixation (colles, plastiques) et des dimensions des jauges.

Il est nécessaire que la longueur active  $l$  de la jauge soit nettement inférieure à la longueur d'onde  $\lambda$  de la vibration mécanique que l'on désire détecter. La limite est généralement atteinte lorsque la longueur  $l$  atteint le dixième de  $\lambda$ . Compte tenu de cette règle empirique, la fréquence maximale d'utilisation d'une jauge vaut :

$$f_{\max} = \frac{v}{10} l \quad (10.19)$$

où  $v$  est la vitesse du son dans le matériau considéré. Donc [73]

$$f_{\max} \cong \frac{1}{10l} \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (10.20)$$

où

- $\rho$  : masse volumique;
- $\nu$  : coefficient de Poisson,
- $E$  : module d'Young.

### 10.3.9 Circuits de mesure pour jauges de contrainte

On place le plus souvent les jauges de contrainte dans un circuit en pont. Une, deux, voire les quatre branches du pont (§ 10.7.7) peuvent contenir une jauge. Une configuration à deux jauges placées sur les faces d'une pièce en flexion est représentée à la figure 10.13.

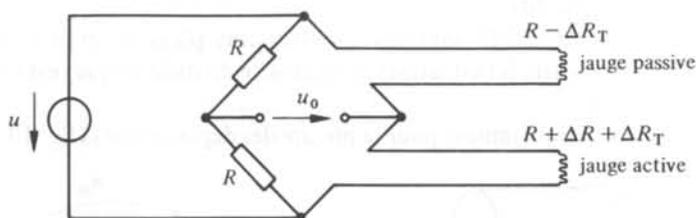


Fig. 10.13 Compensation en température.

Les jauges étant proches l'une de l'autre, ce montage ne présente pas d'erreur systématique due à une inégalité de longueur des fils de raccordement ou à un écart de température des jauges.

Dans une configuration à une seule jauge, l'effet de la résistance des fils doit être compensé. Deux solutions élégantes, dites *montages à 3 fils* sont illustrées à la figure 10.14.

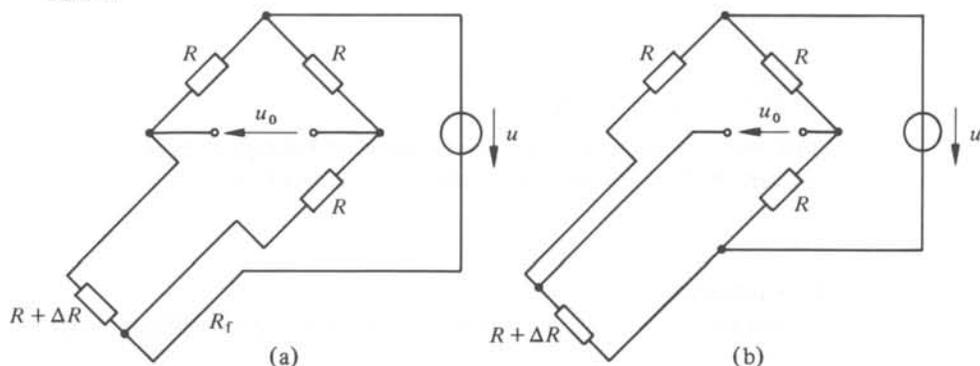


Fig. 10.14 Montage à trois fils: (a) fil relié à la source; (b) fil relié au détecteur.

On trouve sur le marché des jauges à coefficient de température très faible, de sorte qu'une compensation de température est rarement indispensable. Si tel n'est pas le cas, le plus simple est de la réaliser au moyen d'une jauge passive, c'est-à-dire non sollicitée mécaniquement, mais maintenue à la température de la jauge active (fig. 10.13).

## 10.4 AUTRES CAPTEURS À EFFETS ÉLECTRIQUES ET MAGNÉTIQUES

### 10.4.1 Introduction

Cette section se limite à une description brève de quelques capteurs de déplacement d'usage courant. En plus des déplacements pris pour eux-mêmes, ces capteurs (ou leurs principes) peuvent être utilisés pour la mesure des nombreuses grandeurs convertibles en déplacement: forces, couples, accélérations, pressions, débits, niveaux, etc. Ils offrent une précision moyenne à bonne (erreur relative entre 1% et 1‰) pour un prix modique.

### 10.4.2 Capteurs capacitifs

Les *capteurs capacitifs* sont des condensateurs plans ou cylindriques, dont un paramètre (distance entre les armatures, permittivité du diélectrique) est modifié par la grandeur à mesurer.

Ils s'utilisent fréquemment pour la mesure des déplacements (fig. 10.15).

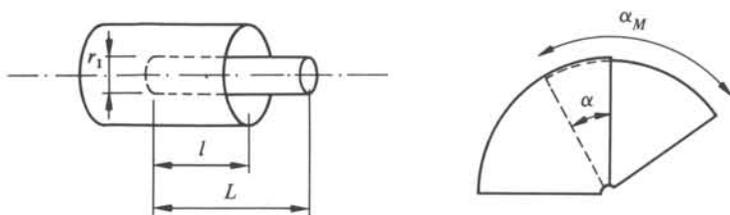


Fig. 10.15 Condensateurs pour la mesure de déplacements.

Les capteurs capacitifs possèdent les propriétés suivantes:

- simplicité de construction;
- robustesse et fiabilité;
- faible coût;
- sensibilité moyenne ( $0,5 \text{ mV}/\mu\text{m}$ ).

Par contre, leurs étendues de mesure sont limitées ( $\cong 1 \text{ mm}$  pour les condensateurs plans) et leurs écarts de linéarité sont relativement importants (1%).

### 10.4.3 Capteurs inductifs

Le déplacement à mesurer par ces capteurs est communiqué à un élément magnétique, dont le mouvement produit:

- une modification de l'inductance  $L$  d'une bobine (*capteur à noyau plongeur*);
- une variation du coefficient d'induction mutuelle  $M$  entre deux bobines (*transformateur différentiel*).

Les capteurs inductifs travaillent avec des tensions relativement faibles et des fréquences de l'ordre de  $10 \text{ kHz}$ , ce qui entraîne une limitation de leur bande passante. Leurs signaux sont traités par des circuits en pont ou des démodulateurs synchrones.

### 10.4.4 Capteur à noyau plongeur

Le schéma d'un tel capteur est présenté à la figure 10.16. L'inductance de la bobine à  $N$  spires peut, en première approximation, être décomposée en 3 termes: l'inductance  $L_0$  d'une bobine à air de longueur  $l_0$ , l'inductance  $L_f$  d'une bobine à noyau magnétique de longueur  $l_f$  et l'inductance mutuelle  $M$  entre les deux premières:

$$L = L_0 + L_f + 2M \quad (10.21)$$

où

$$M = k \sqrt{L_0 L_f} \quad (10.22)$$

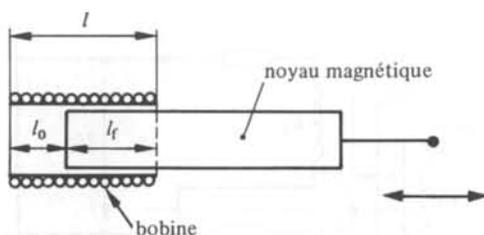


Fig. 10.16 Capteur à noyau plongeur.

$k$  étant le coefficient de couplage. On a :

$$L_0 = \mu_0 N^2 S_0 l_0 / l^2 \quad (10.23)$$

et

$$L_f = \mu_0 N^2 [S_0 + (\mu_f - 1) S_f] l_f / l^2 \quad (10.24)$$

En substituant dans (10.22), on obtient l'expression de l'inductance  $L$  en fonction de la distance  $l_f$  :

$$L = \mu_0 N^2 (S_0 l + (\mu_f - 1) S_f l_f + 2k \sqrt{S_0 [S_0 + (\mu_f - 1) S_f (l - l_f)] l_f}) / l^2 \quad (10.25)$$

Une variation  $\Delta l_f$  de la position du noyau entraîne une modification  $\Delta L$  de l'inductance. On remarque que la relation (10.25) n'est pas linéaire en  $l_f$ .

#### 10.4.5 Transformateur différentiel

Le transformateur différentiel est constitué d'un enroulement primaire placé entre deux enroulements secondaires (fig. 10.17).

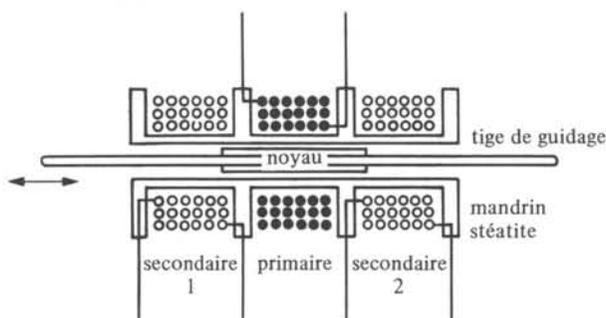


Fig. 10.17 Schéma de principe d'un transformateur différentiel.

Le déplacement d'un noyau de ferrite modifie le couplage inductif entre primaire et secondaire. Les tensions induites dans les secondaires sont connectées en opposition (fig. 10.18). Soit,  $R_1, R_2', R_2''$  les résistances des enroulements primaire et secondaires, dont les inductances sont  $L_1, L_2', L_2''$ .

La tension dans le primaire vaut :

$$\underline{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1) i_1 + j\omega (M' - M'') i_2 \quad (10.26)$$

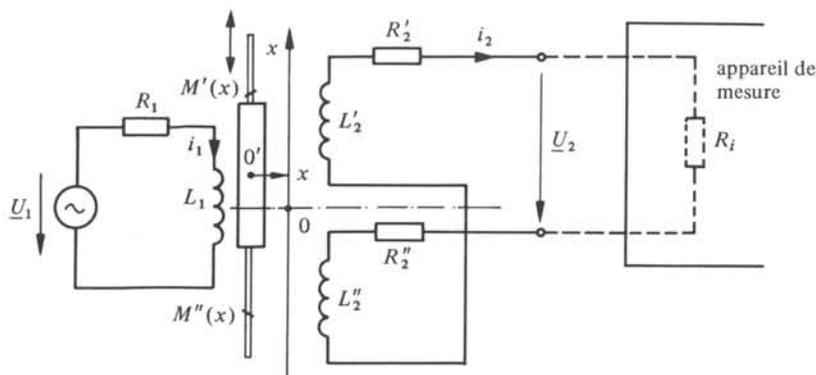


Fig. 10.18 Schéma électrique d'un transformateur différentiel.

où  $M'$  et  $M''$  sont des inductances mutuelles des secondaires avec le primaire. Dans le circuit des secondaires, on a :

$$[R'_2 + R''_2 + R_i + j\omega(L'_2 + L''_2)] i_2 = -j\omega(M' - M'') i_1 \quad (10.27)$$

La tension  $\underline{U}_2$  aux bornes de l'appareil de mesure, se déduit de (10.26) et (10.27) par la relation :

$$\underline{U}_2 = R_i i_2 \quad (10.28)$$

A condition que  $R_i$  soit assez élevée, cette équation se réduit à

$$\underline{U}_2 = \frac{j\omega(M'' - M')}{R_1 + j\omega L_1} \underline{U}_1 \quad (10.29)$$

En toute rigueur  $M'' - M' = \Delta M$  est une fonction polynômiale de la position  $x$ . Dans les faits, un développement au premier ordre est suffisant; alors la tension  $\underline{U}_2$  est directement proportionnelle au déplacement  $x$ .

Les avantages d'utilisation d'un transformateur différentiel (par rapport à un noyau plongeur par exemple) sont les suivants :

- bonne linéarité (1%);
- haute sensibilité (100 mV/V mm);
- haute résolution (0,5% de la pleine échelle);
- excellente résistance aux environnements hostiles;
- plage de mesure importante (0-20 cm).

## 10.5 EXERCICES

**10.5.1** Ecrire explicitement chaque composante du tenseur piézoélectrique direct, en tenant compte de sa symétrie (10.2).

**10.5.2** Ecrire explicitement chaque composante de la matrice des modules piézoélectriques, en tenant compte de la symétrie (10.2) du tenseur piézoélectrique direct.

10.5.3 Trouver la relation liant la force appliquée  $F$  à la charge  $Q$  dans le cas (fig. 10.4);

- d'un cisaillement d'épaisseur;
- d'un cisaillement de face.

Discuter les résultats.

10.5.4 On considère la lame encadrée de la figure 10.19. Si cette lame est soumise à une force oblique  $F$ , montrer que l'on peut avoir un capteur de forces en disposant deux jauges  $J_1$  et  $J_2$  de part et d'autre de la lame. Montrer de plus que par un choix convenable des branches du pont de mesure, on peut mesurer la force de flexion  $F_2$  ou la force de traction  $F_1$  seulement.

Indication: déformation d'une lame sous flexion:

$$\epsilon = \frac{6 F b}{E_y l e^2}; \quad \epsilon' = -\nu \epsilon \quad (10.30)$$

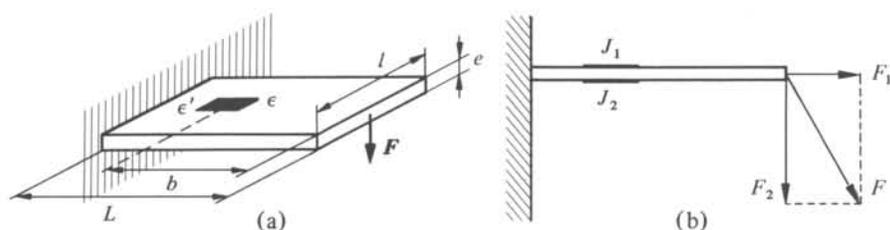


Fig. 10.19 (a) Lame; (b) schéma des forces.

10.5.5 Montrer que le montage de la figure 10.20 permet la réalisation d'un capteur de couple, à l'aide d'un pont à 4 jauges.

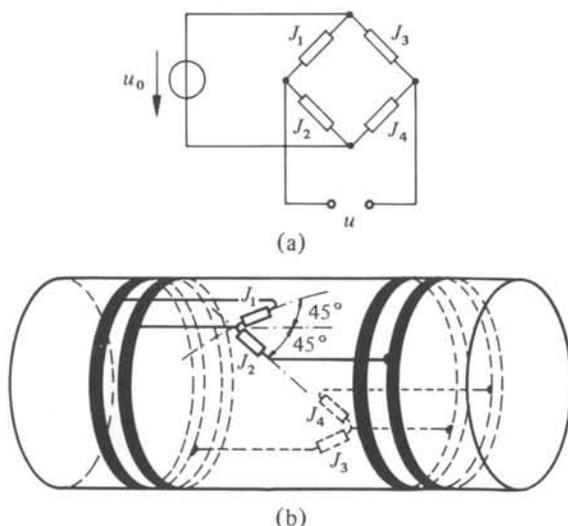


Fig. 10.20 (a) Branchement des jauges; (b) positionnement des jauges.

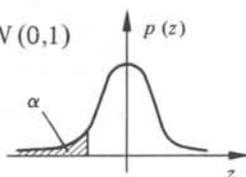


ANNEXES

11.1 TABLES STATISTIQUES

11.1.1 Table de la distribution normale standard  $N(0,1)$

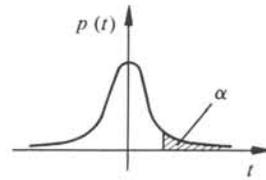
$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2)$$



z	α	z	α	z	α	z	α
-3,25	,0006	-1,00	,1587	1,05	,8531	-4,265	,00001
-3,20	,0007	-,95	,1711	1,10	,8643	-3,719	,0001
-3,15	,0008	-,90	,1841	1,15	,8749	-3,090	,001
-3,10	,0010	-,85	,1977	1,20	,8849	-2,576	,005
-3,05	,0011	-,80	,2119	1,25	,8944	-2,326	,01
-3,00	,0013	-,75	,2266	1,30	,9032	-2,054	,02
-2,95	,0016	-,70	,2420	1,35	,9115	-1,960	,025
-2,90	,0019	-,65	,2578	1,40	,9192	-1,881	,03
-2,85	,0022	-,60	,2743	1,45	,9265	-1,751	,04
-2,80	,0026	-,55	,2912	1,50	,9332	-1,645	,05
-2,75	,0030	-,50	,3085	1,55	,9394	-1,555	,06
-2,70	,0035	-,45	,3264	1,60	,9452	-1,476	,07
-2,65	,0040	-,40	,3446	1,65	,9505	-1,405	,08
-2,60	,0047	-,35	,3632	1,70	,9554	-1,341	,09
-2,55	,0054	-,30	,3821	1,75	,9599	-1,282	,10
-2,50	,0062	-,25	,4013	1,80	,9641	-1,036	,15
-2,45	,0071	-,20	,4207	1,85	,9678	-,842	,20
-2,40	,0082	-,15	,4404	1,90	,9713	-,674	,25
-2,35	,0094	-,10	,4602	1,95	,9744	-,524	,30
-2,30	,0107	-,05	,4801	2,00	,9772	-,385	,35
-2,25	,0122			2,05	,9798	-,253	,40
-2,20	,0139			2,10	,9821	-,126	,45
-2,15	,0158	,00	,5000	2,15	,9842	0	,50
-2,10	,0179			2,20	,9861	,126	,55
-2,05	,0202			2,25	,9878	,253	,60
-2,00	,0228	,05	,5199	2,30	,9893	,385	,65
-1,95	,0256	,10	,5398	2,35	,9906	,524	,70
-1,90	,0287	,15	,5596	2,40	,9918	,674	,75
-1,85	,0322	,20	,5793	2,45	,9929	,842	,80
-1,80	,0359	,25	,5987	2,50	,9938	1,036	,85
-1,75	,0401	,30	,6179	2,55	,9946	1,282	,90
-1,70	,0446	,35	,6368	2,60	,9953	1,341	,91
-1,65	,0495	,40	,6554	2,65	,9960	1,405	,92
-1,60	,0548	,45	,6736	2,70	,9965	1,476	,93
-1,55	,0606	,50	,6915	2,75	,9970	1,555	,94
-1,50	,0668	,55	,7088	2,80	,9974	1,645	,95
-1,45	,0735	,60	,7257	2,85	,9978	1,751	,96
-1,40	,0808	,65	,7422	2,90	,9981	1,881	,97
-1,35	,0885	,70	,7580	2,95	,9984	1,960	,975
-1,30	,0968	,75	,7734	3,00	,9987	2,054	,98
-1,25	,1056	,80	,7881	3,05	,9989	2,326	,99
-1,20	,1151	,85	,8023	3,10	,9990	2,576	,995
-1,15	,1251	,90	,8159	3,15	,9992	3,090	,999
-1,10	,1357	,95	,8289	3,20	,9993	3,719	,9999
-1,05	,1469	1,00	,8413	3,25	,9994	4,265	,99999

11.1.2 Table de la distribution  $T$  de Student

$$p(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{\nu\pi} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}$$



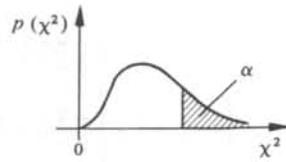
$\nu$	$\alpha$									
	0,4	0,25	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005
1	0,325	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	127,32	318,31	636,62
2	,289	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,089	22,327	31,598
3	,277	,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	10,214	12,924
4	,271	,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	7,173	8,610
5	0,267	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	5,893	6,869
6	,265	,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959
7	,263	,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	4,785	5,408
8	,262	,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833	4,501	5,041
9	,261	,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690	4,297	4,781
10	0,260	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,144	4,587
11	,260	,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	3,497	4,025	4,437
12	,259	,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,428	3,930	4,318
13	,259	,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,372	3,852	4,221
14	,258	,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,326	3,787	4,140
15	0,258	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,286	3,733	4,073
16	,258	,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,252	3,686	4,015
17	,257	,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,222	3,646	3,965
18	,257	,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,197	3,610	3,922
19	,257	,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,174	3,579	3,883
20	0,257	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,153	3,552	3,850
21	,257	,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819
22	,256	,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119	3,505	3,792
23	,256	,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,104	3,485	3,767
24	,256	,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,091	3,467	3,745
25	0,256	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,078	3,450	3,725
26	,256	,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,067	3,435	3,707
27	,256	,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,057	3,421	3,690
28	,256	,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,047	3,408	3,674
29	,256	,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,038	3,396	3,659
30	0,256	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,030	3,385	3,646
40	,255	,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	2,971	3,307	3,551
60	,254	,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	2,915	3,232	3,460
120	,254	,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	2,860	3,160	3,373
$\infty$	,253	,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291

d'après Pearson et Hartley, *Biometrika Tables for Statisticians*, University Press, Cambridge, avec l'aimable autorisation des auteurs et des éditeurs.

11.1.3 Table de la distribution de  $\chi^2$ 

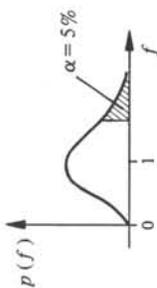
$$p(\chi^2) = \left[ 2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \right]^{-1} (\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \chi^2\right)$$

pour  $\chi^2 > 0$



$\nu$	$\alpha$								
	0,90	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,0158	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	0,211	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	0,584	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	1,064	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,688	13,277	18,467
5	1,610	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,515
6	2,204	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	2,833	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	3,490	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	4,168	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	4,865	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	5,578	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	6,304	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	7,042	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	7,790	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141	36,123
15	8,547	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	9,312	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	10,085	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	10,865	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	11,651	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	12,443	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	13,240	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	14,041	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	14,848	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	15,659	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	16,473	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	52,620
26	17,292	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	18,114	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	18,939	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	19,768	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	20,599	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

d'après Fisher et Yates, *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, publié par Longman Group Ltd., Londres (auparavant publié par Olivier & Boyd Ltd., Edinburgh), avec l'aimable autorisation des auteurs et des éditeurs.

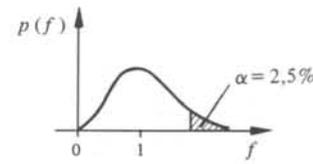


11.1.4 Tables de la distribution  $F_{\nu_1, \nu_2}^{p, \alpha}$  de Fisher-Snedecor

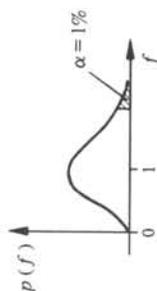
$$p(f) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right) \nu_1^{\nu_1/2} \nu_2^{\nu_2/2} f^{(\nu_1/2) - 1}}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right) (\nu_2 + \nu_1 f)^{(\nu_1 + \nu_2)/2}}$$

$\nu_2$	$\nu_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	24	30	40	60	120	$\infty$
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
$\infty$	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

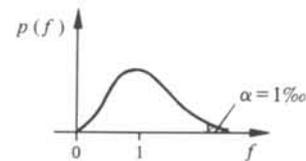
d'après Pearson et Hartley. *Biometrika Tables for Statisticians* University Press Cambridge



$\nu_2$	$\nu_1$																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	$\infty$
1	647,8	799,5	864,2	899,6	921,8	937,1	948,2	956,7	963,3	968,6	976,7	984,9	993,1	997,2	1001	1006	1010	1014	1018
2	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39	39,40	39,41	39,43	39,45	39,46	39,46	39,47	39,48	39,49	39,50
3	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,42	14,34	14,25	14,17	14,12	14,08	14,04	13,99	13,95	13,90
4	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,75	8,66	8,56	8,51	8,46	8,41	8,36	8,31	8,26
5	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,52	6,43	6,33	6,28	6,23	6,18	6,12	6,07	6,02
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,37	5,27	5,17	5,12	5,07	5,01	4,96	4,90	4,85
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,67	4,57	4,47	4,42	4,36	4,31	4,25	4,20	4,14
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,20	4,10	4,00	3,95	3,89	3,84	3,78	3,73	3,67
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,87	3,77	3,67	3,61	3,56	3,51	3,45	3,39	3,33
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,62	3,52	3,42	3,37	3,31	3,26	3,20	3,14	3,08
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,43	3,33	3,23	3,17	3,12	3,06	3,00	2,94	2,88
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,28	3,18	3,07	3,02	2,96	2,91	2,85	2,79	2,72
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	3,15	3,05	2,95	2,89	2,84	2,78	2,72	2,66	2,60
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15	3,05	2,95	2,84	2,79	2,73	2,67	2,61	2,55	2,49
15	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	2,96	2,86	2,76	2,70	2,64	2,59	2,52	2,46	2,40
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,89	2,79	2,68	2,63	2,57	2,51	2,45	2,38	2,32
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98	2,92	2,82	2,72	2,62	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,25
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87	2,77	2,67	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,26	2,19
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88	2,82	2,72	2,62	2,51	2,45	2,39	2,33	2,27	2,20	2,13
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,68	2,57	2,46	2,41	2,35	2,29	2,22	2,16	2,09
21	5,83	4,42	3,82	3,48	3,25	3,09	2,97	2,87	2,80	2,73	2,64	2,53	2,42	2,37	2,31	2,25	2,18	2,11	2,04
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84	2,76	2,70	2,60	2,50	2,39	2,33	2,27	2,21	2,14	2,08	2,00
23	5,75	4,35	3,75	3,41	3,18	3,02	2,90	2,81	2,73	2,67	2,57	2,47	2,36	2,30	2,24	2,18	2,11	2,04	1,97
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78	2,70	2,64	2,54	2,44	2,33	2,27	2,21	2,15	2,08	2,01	1,94
25	5,69	4,29	3,69	3,35	3,13	2,97	2,85	2,75	2,68	2,61	2,51	2,41	2,30	2,24	2,18	2,12	2,05	1,98	1,91
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,82	2,73	2,65	2,59	2,49	2,39	2,28	2,22	2,16	2,09	2,03	1,95	1,88
27	5,63	4,24	3,65	3,31	3,08	2,92	2,80	2,71	2,63	2,57	2,47	2,36	2,25	2,19	2,13	2,07	2,00	1,93	1,85
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,78	2,69	2,61	2,55	2,45	2,34	2,23	2,17	2,11	2,05	1,98	1,91	1,83
29	5,59	4,20	3,61	3,27	3,04	2,88	2,76	2,67	2,59	2,53	2,43	2,32	2,21	2,15	2,09	2,03	1,96	1,89	1,81
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51	2,41	2,31	2,20	2,14	2,07	2,01	1,94	1,87	1,79
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45	2,39	2,29	2,18	2,07	2,01	1,94	1,88	1,80	1,72	1,64
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33	2,27	2,17	2,06	1,94	1,88	1,82	1,74	1,67	1,58	1,48
120	5,15	3,80	3,23	2,89	2,67	2,52	2,39	2,30	2,22	2,16	2,05	1,94	1,82	1,76	1,69	1,61	1,53	1,43	1,31
$\infty$	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,29	2,19	2,11	2,05	1,94	1,83	1,71	1,64	1,57	1,48	1,39	1,27	1,00

 $p_5$  $p_1$ 

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	$\infty$
1	4052	4999.5	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6036	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
$\infty$	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.19	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00



$\nu_2$	$\nu_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	$\infty$
1	4053**	5000**	5404**	5625**	5764**	5859**	5929**	5981**	6023**	6056**	6107**	6158**	6209**	6235**	6261**	6287**	6313**	6340**	6366**	
2	998,5	999,0	999,2	999,2	999,3	999,3	999,4	999,4	999,4	999,4	999,4	999,4	999,4	999,4	999,4	999,5	999,5	999,5	999,5	999,5
3	167,0	148,5	141,1	137,1	134,6	132,8	131,6	130,6	129,9	129,2	128,3	127,4	126,4	125,9	125,4	125,0	124,5	124,0	123,5	123,5
4	74,14	61,25	56,18	53,44	51,71	50,53	49,66	49,00	48,47	48,05	47,41	46,76	46,10	45,77	45,43	45,09	44,75	44,40	44,05	44,05
5	47,18	37,12	33,20	31,09	29,75	28,84	28,16	27,64	27,24	26,92	26,42	25,91	25,39	25,14	24,87	24,60	24,33	24,06	23,79	23,79
6	35,51	27,00	23,70	21,92	20,81	20,03	19,46	19,03	18,69	18,41	17,99	17,56	17,12	16,89	16,67	16,44	16,21	15,99	15,75	15,75
7	29,25	21,69	18,77	17,19	16,21	15,52	15,02	14,63	14,33	14,08	13,71	13,32	12,93	12,73	12,53	12,33	12,12	11,91	11,70	11,70
8	25,42	18,49	15,83	14,39	13,49	12,86	12,40	12,04	11,77	11,54	11,19	10,84	10,48	10,30	10,11	9,92	9,73	9,53	9,33	9,33
9	22,86	16,39	13,90	12,56	11,71	11,13	10,70	10,37	10,11	9,89	9,57	9,24	8,90	8,72	8,55	8,37	8,19	8,00	7,81	7,81
10	21,04	14,91	12,55	11,28	10,48	9,92	9,52	9,20	8,96	8,75	8,45	8,13	7,80	7,64	7,47	7,30	7,12	6,94	6,76	6,76
11	19,69	13,81	11,56	10,35	9,58	9,05	8,66	8,35	8,12	7,92	7,63	7,32	7,01	6,85	6,68	6,52	6,35	6,17	6,00	6,00
12	18,64	12,97	10,80	9,63	8,89	8,38	8,00	7,71	7,48	7,29	7,00	6,71	6,40	6,25	6,09	5,93	5,76	5,59	5,42	5,42
13	17,81	12,31	10,21	9,07	8,35	7,86	7,49	7,21	6,98	6,80	6,52	6,23	5,93	5,78	5,63	5,47	5,30	5,14	4,97	4,97
14	17,14	11,78	9,73	8,62	7,92	7,43	7,08	6,80	6,58	6,40	6,13	5,85	5,56	5,41	5,25	5,10	4,94	4,77	4,60	4,60
15	16,59	11,34	9,34	8,25	7,57	7,09	6,74	6,47	6,26	6,08	5,81	5,54	5,25	5,10	4,95	4,80	4,64	4,47	4,31	4,31
16	16,12	10,97	9,00	7,94	7,27	6,81	6,46	6,19	5,98	5,81	5,55	5,27	4,99	4,85	4,70	4,54	4,39	4,23	4,06	4,06
17	15,72	10,66	8,73	7,68	7,02	6,56	6,22	5,96	5,75	5,58	5,32	5,05	4,78	4,63	4,48	4,33	4,18	4,02	3,85	3,85
18	15,38	10,39	8,49	7,46	6,81	6,35	6,02	5,76	5,55	5,39	5,13	4,87	4,59	4,45	4,30	4,15	4,00	3,84	3,67	3,67
19	15,08	10,16	8,28	7,26	6,62	6,18	5,85	5,59	5,39	5,22	4,97	4,70	4,43	4,29	4,14	3,99	3,84	3,68	3,51	3,51
20	14,82	9,95	8,10	7,10	6,46	6,02	5,69	5,44	5,24	5,08	4,82	4,56	4,29	4,15	4,00	3,86	3,70	3,54	3,38	3,38
21	14,59	9,77	7,94	6,95	6,32	5,88	5,56	5,31	5,11	4,95	4,70	4,44	4,17	4,03	3,88	3,74	3,58	3,42	3,26	3,26
22	14,38	9,61	7,80	6,81	6,19	5,76	5,44	5,19	4,99	4,83	4,58	4,33	4,06	3,92	3,78	3,63	3,48	3,32	3,15	3,15
23	14,19	9,47	7,67	6,69	6,08	5,65	5,33	5,09	4,89	4,73	4,48	4,23	3,96	3,82	3,68	3,53	3,38	3,22	3,05	3,05
24	14,03	9,34	7,55	6,59	5,98	5,55	5,23	4,99	4,80	4,64	4,39	4,14	3,87	3,74	3,59	3,45	3,29	3,14	2,97	2,97
25	13,88	9,22	7,45	6,49	5,88	5,46	5,15	4,91	4,71	4,56	4,31	4,06	3,79	3,66	3,52	3,37	3,22	3,06	2,89	2,89
26	13,74	9,12	7,36	6,41	5,80	5,38	5,07	4,83	4,64	4,48	4,24	3,99	3,72	3,59	3,44	3,30	3,15	2,99	2,82	2,82
27	13,61	9,02	7,27	6,33	5,73	5,31	5,00	4,76	4,57	4,41	4,17	3,92	3,66	3,52	3,38	3,23	3,08	2,92	2,75	2,75
28	13,50	8,93	7,19	6,25	5,66	5,24	4,93	4,69	4,50	4,35	4,11	3,86	3,60	3,46	3,32	3,18	3,02	2,86	2,69	2,69
29	13,39	8,85	7,12	6,19	5,59	5,18	4,87	4,64	4,45	4,29	4,05	3,80	3,54	3,41	3,27	3,12	2,97	2,81	2,64	2,64
30	13,29	8,77	7,05	6,12	5,53	5,12	4,82	4,58	4,39	4,24	4,00	3,75	3,49	3,36	3,22	3,07	2,92	2,76	2,59	2,59
40	12,61	8,25	6,60	5,70	5,13	4,73	4,44	4,21	4,02	3,87	3,64	3,40	3,15	3,01	2,87	2,73	2,57	2,41	2,23	2,23
60	11,97	7,76	6,17	5,31	4,76	4,37	4,09	3,87	3,69	3,54	3,31	3,08	2,83	2,69	2,55	2,41	2,25	2,08	1,89	1,89
120	11,38	7,32	5,79	4,95	4,42	4,04	3,77	3,55	3,38	3,24	3,02	2,78	2,53	2,40	2,26	2,11	1,95	1,76	1,54	1,54
$\infty$	10,83	6,91	5,42	4,62	4,10	3,74	3,47	3,27	3,10	2,96	2,74	2,51	2,27	2,13	1,99	1,84	1,66	1,45	1,00	1,00

## 11.2 ALGORITHMES DE CALCUL DE DIVERSES DISTRIBUTIONS

## 11.2.1 Algorithmes en basic

Algorithmes en basic pour le calcul des distributions  $N$ ,  $\chi^2$ ,  $T$ ,  $F$ , de Poisson et Binômiale, ainsi que la fonction  $\Gamma$ , d'après Bousbaine, Kent, Nuesch, *Are Statistical Tables Obsolete?*, EPFL, 1984, avec l'aimable autorisation des auteurs.

```

30 PRINT " ENTER 0 TO STOP , OR "
40 PRINT " 1-GAMMA 2-NORMAL 3-CHI2 4-T 5-F 6-POISSON 7-BINOMIAL"
50 INPUT J
60 ON J+1 GOTO 900,100,290,330,410,490,640,700
70 REM      1  2  3  4  5  6  7
100 PRINT "ENTER X FOR GAMMA(X)  ( X! = GAMMA(X+1) = X*GAMMA(X) )"
110 INPUT X
120 Q=4*ATN(1)
130 REM  Q = PI  ( WHEN ANGLE UNITS ARE IN RADIANS )
140 S=SQN(X)
150 X=ABS(X)+4
160 F=1/(X*X)
170 F=(X-0.5)*LOG(X)-X+(LOG(2*Q))/2+(((6*F/4+2)*F/7-1)*F/30+1)/(12*X)
180 F=F-LOG(X-4)-LOG(X-3)-LOG(X-2)-LOG(X-1)
190 X=X-4
200 REM  F IS NOW = LOG ( GAMMA ( ABS(X) ) ) . USE THIS WHEN X IS LARGE
210 REM  AS EXP(F)  MAY OVERFLOW MACHINE CAPACITY FOR LARGE X.
220 IF S = -1 THEN 250
230 PRINT "GAMMA = ";EXP(F)
240 GOTO 30
250 PRINT "GAMMA = ":-Q/X/SIN(Q*X)/EXP(F)
260 GOTO 30
290 PRINT "ENTER Z FOR P-NORMAL(Z)"
300 INPUT X
310 GOTO 590
330 PRINT "ENTER CHI2, DEGREES OF FREEDOM"
340 INPUT X,K
350 L=1E9
360 A=2/9/K
370 B=0
380 C=(X/K)^(1/3)
390 GOTO 550
410 PRINT "ENTER T, DEGREES OF FREEDOM"
420 INPUT X,L
430 K=1
440 A=2/9
450 B=2/9/L
460 C=X^(2/3)
470 GOTO 550
490 PRINT "ENTER F, DEGREES FREEDOM NUMERATOR, DEGREES DENOMINATOR"
500 INPUT X,K,L
510 A=2/9/K
520 B=2/9/L
530 C=X^(1/3)
550 X=(C+A-C*B-1)/SQR(B*C+C+A)
560 IF L > 3 THEN 590
570 X=X+0.08*(X*5)/(L*L)
590 P=1/(1+EXP(-(1.5976+0.070566*X*X)*X))
600 PRINT "PROBABILITY = ":P
610 GOTO 30
640 PRINT "ENTER K, LAMBDA FOR POISSON"
650 INPUT K,D
660 R=EXP(-D)
670 P=0
680 GOTO 750
700 PRINT " K, N, EVENT PROBABILITY FOR BINOMIAL"
710 INPUT K,N,P
720 R=(1-P)^N
730 D=N*P
750 J=0
760 IF K < 1 THEN 860
770 T=R
780 U=1/(1-P)
790 FOR J = 1 TO K
800 T=(D/J-P)*T*U
810 R=R+T
820 IF R-T = R THEN 860
830 REM  R-T IS EQUAL TO R IF NEGLIGEABLE SUBTRACTION OCCURS
840 NEXT J
850 J=K
860 PRINT "K ATTAINED = ":J:"  PROBABILITY = ":R
870 GOTO 30
900 END

```

Fig. 11.1

## 11.3 INTRODUCTION AUX TENSEURS

### 11.3.1 Avertissement

Cette annexe sur les tenseurs a pour but de donner au lecteur non familiarisé avec ce concept mathématique une perception « physique » de la chose qu'on appelle tenseur. Aussi la rigueur mathématique est-elle absente de cette annexe, au profit d'une connaissance intuitive, mais en défaveur d'un traitement rigoureux. Il n'est donc pas possible de démontrer les formules utilisées ici. Le lecteur peut s'en rapporter aux ouvrages plus formels sur la question. Pour avoir un point de vue plus complet sur les interprétations physiques du calcul tensoriel, on peut lire [78-80].

### 11.3.2 Scalaires, définition

Les grandeurs physiques qui ne dépendent pas de l'orientation portent le nom de *scalaires*. Leur connaissance complète ne nécessite que la donnée d'un seul nombre réel. La température, la densité, la chaleur spécifique, sont des exemples de scalaires.

### 11.3.3 Vecteurs, définition

Les grandeurs physiques nécessitant la donnée de leur direction, en plus de leur intensité, portent le nom de *vecteurs*. Pour les définir complètement, la donnée de trois nombres réels est nécessaire, par exemple leurs trois composantes dans un système d'axes orthonormés  $Oxyz$ . L'exemple le plus couramment rencontré de vecteur est la force; on peut citer aussi le champ électrique, les différents gradients, etc.

### 11.3.4 Tenseurs (de rang 2), définition

Il existe certaines grandeurs physiques qui dépendent de l'intensité et de la direction de deux vecteurs. Ainsi « la » permittivité électrique  $\epsilon$  est définie comme

$$D_i = \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} E_j \quad (11.1)$$

Elle nécessite la connaissance du vecteur  $D$  de déplacement électrique, lié à la matière et celle du champ électrique  $E$  dans le vide.  $\epsilon$  est un exemple de *tenseur*.

Plus généralement, un *tenseur de rang 2* est une application linéaire entre deux vecteurs (pas nécessairement équipollents).

### 11.3.5 Rang d'un tenseur

Le *rang* d'un tenseur est le nombre d'indices nécessaires à son écriture. Ainsi, les scalaires sont des tenseurs de rang zéro, les vecteurs des tenseurs de rang un. On peut définir des tenseurs de rang supérieur à deux. Ils apparaissent de temps en temps en physique, par exemple pour décrire des relations linéaires entre tenseurs (§ 10.1.9). Un tenseur de rang 2 a  $3^2 = 9$  composantes indépendantes a priori.

### 11.3.6 Convention d'Einstein

L'écriture des relations tensorielles est assez lourde. Dans un souci de simplification, on laisse souvent tomber le signe  $\Sigma$ , en sous-entendant qu'il y a sommation sur l'indice répété deux fois. En utilisant cette *convention d'Einstein*, (11.1) s'écrit plus simplement :

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j \quad (11.2)$$

Dans ce cas, s'il s'avère nécessaire de ne *pas* sommer sur un indice répété, on convient de souligner cet indice.

### 11.3.7 Définition mathématique

Un tenseur de rang  $q$  est une forme multilinéaire d'ordre  $q$  sur un espace vectoriel  $V$  :

$$v_1, \dots, v_q \in V \mapsto t(v_1, \dots, v_q) \in R \quad (11.3)$$

telle que :

$$t(v_1, \dots, \alpha v + \beta w, \dots, v_q) = \alpha t(v_1, \dots, v, \dots, v_q) + \beta t(v_1, \dots, w, \dots, v_q) \quad (11.4)$$

(linéarité). En particulier, si  $\{e_i\}_{i=1}^q$  est une base de  $V$ ,  $t_{i_1, \dots, i_q} = t(e_{i_1}, \dots, e_{i_q})$  sont les composantes de  $t$  dans la base considérée.

### 11.3.8 Changement de base d'un tenseur

Soit  $R$  la *matrice de changement de base* entre la base  $\{e_j\}_{j=1}^q$  et  $\{e'_i\}_{i=1}^q$  :

$$e'_i = R_{ij} e_j \quad (11.5)$$

On peut montrer que le tenseur d'ordre  $q$  subit la transformation de base selon la formule

$$t'_{i_1, \dots, i_q} = R_{i_1 j_1} \dots R_{i_q j_q} t_{j_1, \dots, j_q} \quad (11.6)$$

Certains auteurs utilisent la relation (11.6) pour définir les tenseurs.

### 11.3.9 Le produit scalaire

Le produit scalaire entre deux vecteurs,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ , est une forme bilinéaire sur l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ . Dans ce sens, c'est un tenseur de rang 2, qu'on appelle *tenseur métrique*  $g$  :

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = g_{ij} u_i v_j \quad (11.7)$$

Comme le produit scalaire est invariant, les composantes de  $g$  ont même valeurs dans toutes les bases :

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11.8)$$

### 11.3.10 Remarque

La relation (11.8) pourrait laisser croire que les tenseurs d'ordre deux sont des matrices. Il n'en est rien, puisqu'ils sont attachés à une base, et que l'on doit introduire des formules de changement de base. Les matrices, elles, ne sont pas attachées à une base, mais sont bien les relations décrivant le passage d'une base dans l'autre. Elles n'ont donc pas de signification physique, contrairement aux tenseurs.

### 11.3.11 Le tenseur des tensions

L'ensemble des forces exercées sur un corps par son milieu extérieur s'applique sur la surface  $S$  de ce corps. Sur une surface  $dS$  située en  $\mathbf{r}$ , il existe donc une force par unité de surface  $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ . La résultante  $\mathbf{R}$  de ces forces s'écrit :

$$\mathbf{R} = \int_S \mathbf{f} \cdot dS = \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS \quad (11.9)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure à la surface. Mais le produit scalaire  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$  définit un tenseur d'ordre 2 (§ 11.3.9), que l'on appelle le *tenseur des tensions* :

$$g_{ij} f_i n_j = \sigma_{ij} dS_j \quad (11.10)$$

A l'aide de ce tenseur, (11.9) devient :

$$R_i = \int_S \sigma_{ij} dS_j \quad (11.11)$$

En utilisant la loi de l'égalité de l'action et de la réaction, on montre que :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (11.12)$$

Le tenseur des tensions est donc symétrique. Il ne possède alors que six composantes indépendantes. On peut montrer que pour de petites déformations  $u_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i x_j + \partial_j x_i)$  du solide, le tenseur des tensions et celui des déformations sont liés par une loi linéaire, qui prend la forme :

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijkl} u_{kl} \quad (11.13)$$

où  $\lambda_{ijkl}$  est un tenseur d'ordre 4, dit *tenseur des coefficients de Lamé*.

## 11.4 TABLE DES CAPTEURS À 2 ENTRÉES

### 11.4.1 Table de conversion mécanisme du capteur-grandeur mesurée (tab. 11.2) [81]

## 11.5 EXERCICES

**11.5.1** Soient deux vecteurs,  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q} \in R^3$ . Ecrire le vecteur  $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$  sous forme indexée, et montrer qu'en fait deux indices sont nécessaires (tenseur de rang 2).

**11.5.2** Trouver comment le tenseur  $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$  se transforme lors d'une rotation du système de coordonnées, donnée par une matrice  $a$  de transformation. Généraliser à plus d'indices.



## SOLUTIONS DES EXERCICES

### CHAPITRE 6

6.7.1  $d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\phi$ .

6.7.2 Ind : utiliser (6.5).

6.7.3 Ind : utiliser la relation  $\lambda f = v$ .

6.7.4 Formule pour les fibres monomodes:

$$r = k\lambda^2/a_1^2 \theta_1^2$$

Température du filament (K)	Fibre multimode à saut d'indice $NA = 0,3; k = 1$	Fibre multimode à gradient d'indice $NA = 0,2; k = 1$	Fibre monomode $\lambda = 900 \text{ nm}$
1200	0,1 mW	3,5 $\mu$ W	10 nW
2800	8 mW	0,2 mW	0,7 $\mu$ W
3600	20 mW	0,4 mW	2 $\mu$ W

### CHAPITRE 7

7.6.1 Procéder comme dans le cas du champ électrique.

7.6.2 Conditions sur les vecteurs d'onde :  $|\mathbf{k}|$  fixé. Onde plane : propagations possibles dans toutes les directions. Onde sphérique : propagation selon le rayon de la sphère.

7.6.3

$$2 \left[ n(x) \frac{dz}{dx} \right]^2 \frac{d^2x}{dz^2} = \frac{dn^2}{dx}(x).$$

Les rayons sont sinusoïdaux.

7.6.4

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a - jb) \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix} + (a + jb) \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}$$

7.6.5 Pour un élément  $E$ , on a :

$$E(\alpha) = R(\alpha) E R(-\alpha),$$

où  $R(\alpha)$  est défini par (7.85).

7.6.6 Rapprocher (7.38) et (7.115).

7.6.7 Utiliser le résultat du paragraphe 7.6.6.

7.6.8 Longueur: 1 km; résolution: 1 mrad, soit  $\sim 10^{-8}$  A.

## CHAPITRE 8

8.5.1 Raisonner dans un volume fini.

8.5.2 Vrai si la vitesse de groupe est sensiblement égale à la vitesse de l'onde  $c/n$ .

8.5.3  $\sim 0,995\%$ .

8.5.4  $hf/k_B T \lesssim 2,5$ .

## CHAPITRE 9

9.6.2 Procéder par substitution.

9.6.3 Utiliser la loi des métaux en série.

## CHAPITRE 10

10.5.3 Cisaillement d'épaisseur:  $Q = d_{14} L/l F$  (§ 10.2.3).

Cisaillement de face:  $Q = (d_{14} + d_{15}) L/l F$ .

10.5.4 Si  $J_1$  et  $J_2$  appartiennent au même demi-pont, on mesure  $F_1$ ; si  $J_1$  et  $J_2$  sont dans des demi-ponts opposés, on mesure  $F_2$ .

10.5.5 Même principe que celui du paragraphe 10.5.4.

## CHAPITRE 11

11.5.1  $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})_i = p_j q_k - p_k q_j \equiv t_{jk}$  (permutations cycliques  $i, j, k$ ). Tenseur antisymétrique d'ordre 2.

11.5.2 Changement de base:  $t'_{kl} = a_{ki} a_{lj} t_{ij}$ . Généralisation, cf. formule (11.6).

11.5.3 Symétrie centrale:  $a_{ij} = -\delta_{ij}$ . Transformation du tenseur des modules piézo-électriques:  $d'_{ijk} = -d_{ijk}$

11.5.4 Un cristal possédant un centre de symétrie n'est pas modifié par une transformation à symétrie centrale. Il en est de même du tenseur des modules piézoélectriques:  $d'_{ijk} = d_{ijk}$ . A l'aide du paragraphe 11.5.3, on en conclut que  $d_{ijk} = 0$ , pour tout  $i, j, k$ .



## BIBLIOGRAPHIE

- [1] E.O. DOEBELIN, *Measurement Systems*, McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, 1984.
- [2] K. ARBENZ, A. WOHLHAUSER, *Compléments d'analyse*, Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1981.
- [3] J. DI STEFANO, A.R. STUBBERUD, I.J. WILLIAMS, *Theory and Problems of Feedback and Control Systems*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1976.
- [4] B.C. KUO, *Discrete-Data Control Systems*, Prentice-Hall, New York, 1970.
- [5] A. RUEGG, *Probabilités et statistique*, Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1985.
- [6] M. KENDALL, A. STUART, *The Advanced Theory of Statistics*, vol. I, C. Griffin, London, 1958.
- [7] M.R. SPIEGEL, *Theory and Problems of Statistics*, Schaum's Publ. Co., New York, 1961.
- [8] H.H. KU, *Journ. Res. NBS*, vol. 70C, 1966, p. 263.
- [9] H. ALDER, E. ROESSLER, *Introduction to Probability and Statistics*, W.H. Freeman and Co., San Francisco, 1977.
- [10] H. LARSON, B. SHUBERT, *Probabilistics Models in Engineering Sciences*, vol. I, Wiley, New York, 1979.
- [11] H. LARSON, B. SHUBERT, *Probabilistics Models in Engineering Sciences*, vol. II, Wiley, New York, 1979.
- [12] S.M. SZE, *Physics of Semiconductor Devices*, Wiley-Interscience, New York, 1981.
- [13] W.J. MOORE, *Physical Chemistry*, Longman/Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1972.
- [14] J.B. JOHNSON, Thermal Agitation of Electricity in Conductors, *Physical Review*, vol. 32, July 1928, p. 97.
- [15] F. WANG, *Introduction to Solid State Electronics*, North Holland, Amsterdam, 1980.
- [16] A. VAN DER ZIEL, *Noise: Sources, Characterisation, Measurement*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1970.
- [17] O. ZINKE, M. SEITHER, *Widerstände, Kondensatoren, Spulen und ihre Werkstoffe*, Springer Verlag, Berlin, New York, 1970.
- [18] E.F. VANCE, *Coupling to Shielded Cables*, Wiley-Interscience, New York, 1978.
- [19] R. GOLDSCHMIDT, *Courants faibles*, vol. 4, EPFL, Lausanne, 1972.
- [20] D. WHITE, *Handbook on Electromagnetic Shielding Materials and Performance*, DWCI, Gainesville, USA, 1980.
- [21] D. WHITE, *Electromagnetic Interference and Compatibility*, vol. 3: EMI Control Methods and Techniques, SWCI, Gainesville, USA, 1973.

- [22] H.W. OTT, *Noise Reduction Techniques in Electronic Systems*, Wiley, New York, 1976.
- [23] M.L. MEADE, *Lock-in Amplifiers: Principles and Applications*, Peter Peregrinus, London, 1983.
- [24] R. BEST, Die Erzeugung nicht linearer Funktionen mit analogen Funktionsgeneratoren, *Der Elektroniker*, No 5 & 70, pp. 247-254.
- [25] U. TIETZE, Ch. SCHENK, *Advanced Electronic Circuits*, Springer Verlag, Berlin, 1978.
- [26] J. UNGER, *Contribution à l'étude d'une porte d'échantillonnage*, thèse EPFL, No 510, Lausanne, 1984.
- [27] *Instrumentation Interface Standard*, IEEE Standards Sales, Piscataway, N.J., USA, 1984.
- [28] G. BASTIDE et J.R. VELLAS, *Mise en œuvre du bus IEEE 488*, Editests, Paris, 1984.
- [29] H. SCHMID, *Electronic Analog/Digital Conversions*, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1970.
- [30] D.H. SHEINGOLD, *Analog-Digital Conversion Handbook*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1986.
- [31] P.H. SYDENHAM, *Handbook of Measurement Science*, Volume 1, Theoretical fundamentals, Wiley, Chichester, 1982.
- [32] L. LANDAU, E. LIFSCHITZ, *Physique statistique*, Mir, Moscou, 1967.
- [33] G.R. ELION, H.A. ELION, *Elektro-optics Handbook*, Marcel Dekker, Basel, 1979.
- [34] H.C. CASEY Jr., M.B. PANISH, *Heterostructure Lasers*, Academic Press, New York, 1978.
- [35] S.M. SZE, *Physics of Semiconductor Devices*, Wiley, New York, 1985.
- [36] J.C. BOULEY, Les sources à semiconducteurs, in *Optique intégrée*, 27<sup>e</sup> cours de perfectionnement de l'AVCP, Lausanne, 1985.
- [37] F.K. REINHART, Dispositifs opto-électroniques pour des applications, in *Compatibilité électromagnétique*, Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1983.
- [38] R.N. HALL *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* 9, 1962, 366.
- [39] M.I. NATHAN *et al.*, *Appl. Phys. Lett.* 1, 1962, 62.
- [40] H. KROEMER, *Proc. IEEE* 51, 1963, 1782.
- [41] M. BERNARD, C. DURAFFOURG, *Phys. Stat. Solidi* 1, 1961, 699.
- [42] F. STERN, *Phys. Rev. B* 3, 1971, 2636.
- [43] C. FABRY, A. PEROT, *Ann. Chim. Phys.* 16, 1899, 115.
- [44] Ph. DELPECH, *mémoire CNAM*, 1980.
- [45] *Introduction à l'Electronique quantique*, 10<sup>e</sup> cours de perfectionnement de l'AVCP, Lausanne, 1968.
- [46] D. MARCUSE, *Light Transmission Optics*, Van Nostrand, New York, 1972.
- [47] T.G. GIALLORENZI, J.E. BUCARO, A. DANDRIDGE, G.H. SIEGEL Jr., J.H. COLE, S.C. RASHLEIGH, R.G. PRIEST, Optical Fiber Sensor Technology, *IEEE Quant. Electron. QE* 18, 4, 1982, pp. 626-665.
- [48] A.L. HARMER, Optical Fibre Refractometer using Attenuation of Cladding Modes, *Proceedings of OFS'83*, IEE Publication, No 221, 1983, pp. 104-108.
- [49] G.F. LIPSCOMB, S.K. YAO, C.K. ASAWA, Stabilization of Single and Multimode Fiber Optical Microbend Sensors, *Proceedings of OFS'83*, IEE Publication, No 221, 1983, pp. 117-121.
- [50] HEWLETT PACKARD, *Optoelectronics Designer's catalog*, 1986.

- [51] Ch.M. DAVIS, T.A. LITOVITZ, P.B. MACEDO, Dark-Field Microbend-Modulated Fiber-optic Sensor System (DFMMFSS), *Proceedings of OFS'83*, IEE Publication, No 221, 1983, pp. 127-131.
- [52] K.A. WICKERSHAM, R.B. ALVES, *Industr. Res. Developm.*, 1979, p. 82.
- [53] M. JOHNSON, R. ULRICH, Fiber-Optical Strain Gauge, *Electron. Lett.* 14, 1979, pp. 432-433.
- [54] H. GUTTINGER, G. PFISTER, Fiber-optic Sensors and Technology in Security Systems, *Proceedings of OFS'83*, IEE Publication, No 221, 1983, pp. 62-66.
- [55] J. BRAAT, Enregistrement et lecture de l'information sur disques optiques, in *Lasers et applications industrielles*, cours AVCP, Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1982.
- [56] A. R. IMES, Fiber-optic Accelerometer with Hydrophone Applications, *Applied Optics* 20, 19, 1981, pp. 3453-3459.
- [57] H.J. ARDITTY, Ph. GRAINDORGE, H.C. LEFEVRE, Gyromètre à fibre optique: principes et technologies, *Revue Technique Thomson CSF* 15, 3, 1983, pp. 777-807.
- [58] A. DANDRIDGE, A.B. TVETEN, R.O. MILES, T.G. GIALLORENZI, Fiber Optic Interferometric Sensor Development of NRL, *Proceedings of OFS'83*, IEE Publication, No 221, 1983, pp. 48-52.
- [59] R. ULRICH, Fiber-optic Sensors, *Proceedings of the Journées d'électronique*, Presses polytechniques romandes, 1982.
- [60] R.M.A. AZZAM, N.M. BASHARA, *Ellipsometry and Polarized Light*. North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [61] M. BORN, E. WOLF, *Principles of Optics*, Pergamon, London, 1982.
- [62] L. LEVI, *Applied Optics*, Wiley, New York, 1980.
- [63] I.P. KAMINOV, Polarization in Optical Fibers, *IEEE, Journ. of Quant. Electron.* QE 17, 1, 1981, pp. 15-22.
- [64] D.N. PAYNE, A.J. BARLOW, J.J. RAMSKOV HANSEN, Development of low- and high- Birefringence Optical Fibers, *IEEE, Journ. of Quant. Electron.* QE 18, 4, 1982, pp. 477-488.
- [65] H. HARM, A. PAPP, Magneto-optical Current Transformer, *Applied Optics* 19, 22, 1980, pp. 3729-3745.
- [66] S.M. SZE, *Physics of Semiconductor Devices*, Wiley, New York, 1981.
- [67] R.W. BOYD, *Radiometry & Detection of Optical Radiation*, Wiley, New York, 1983.
- [68] E.L. DERENIAK et D.G. CROWE, *Optical Radiation Detectors*, Wiley, New York, 1984.
- [69] W. BUDDE, *Optical Radiation Measurement*, vol. 4: Physical Detectors of Optical Radiation, Academic Press, London, 1983.
- [70] D.A. ROSS, *Optoelectronic Devices and Optical Imaging Techniques*, Macmillan Press, London, 1979.
- [71] W. ZINGG, C.E. LEUENBERGER, Senseur de température à quartz résonant, in *Applications des senseurs en microtechnique*, Institut de microtechnique de l'Université de Neuchâtel, 1984.
- [72] *Normes ITPS 68*, Bureau des Poids et Mesures, Paris.
- [73] G. ASCH et al., *Les capteurs en instrumentation industrielle*, Dunod, Paris, 1984.
- [74] H.B. CALLEN, *Thermodynamics*, Wiley, New York, 1960.

- [75] J.M. ZIMAN, *Principles of the Theory of Solids*, Cambridge University Press, 1972.
- [76] *Norme DIN*, 43 760.
- [77] R.J. DINGER, C.E. LEUENBERGER, J.F. CHAPUIS, A cost-effective quartz temperature sensor and its application to temperature measurement devices, *Sensor 83*, Basel 17-19 mai, 1983.
- [78] L. BRILLOUIN, *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*, Masson, Paris, 1949.
- [79] W.A. WOOSTER, *Tensors et Group Theory for the Physical Properties of Crystals*, Clarendon Press, Oxford, 1973.
- [80] J.F. NYE, *Propriétés physiques des cristaux*, Dunod, Paris, 1961.
- [81] M. BASSIÈRE, E. GAIGNEBET, *Métrologie générale*, Dunod, Paris, 1966.

## INDEX ANALYTIQUE

- Absorption
  - (définition), 266
- Accéléromètre, 222
  - uniaxial, 23
- Activité
  - optique, 254
  - optique du quartz, 256
- Algorithme
  - en basic, 340
- Amortissement
  - critique, 16
  - (facteur d'...), 16
  - sous- ..., 16
  - sur- ..., 16
- Amplificateur
  - accordé, 111
  - à entrée asymétrique, 105
  - de charge, 321, 322
  - différentiel, 107
  - d'instrumentation, 128
  - d'isolation, 109
  - lock-in, 111, 116, 122
  - logarithmique, 136
  - pour pont de Wheatstone, 129
  - synchrone, 111
- Amplitude
  - (quantification de l'...), 143
  - (spectre d'...), 92
- Angle
  - d'ouverture des LD, 198, 200
  - solide, 171, 206
- Anisotropes
  - (propagation dans les milieux ...), 238, 239
- Astigmatisme, 199
- Autocorrélation
  - temporelle, 90
- Axe
  - optique, 243, 247
  - principal, 239
- Azimut, 230
- Bande
  - de gain, 189
  - d'énergie, 181, 183, 193
  - interdite, 183
  - passante des capteurs piézoélectriques, 323
  - passante des LED, 186
  - passante du bruit, 85
- Base
  - (changement de ...), 342
- Bernard
  - (condition de ... -Duraffourg), 188
- Bilatéral(e)
  - (densité ...), 85
  - (test ...), 63
- Biréfringence
  - circulaire, 254
  - dans les milieux biaxes, 246
  - des fibres optiques, 259
  - linéaire, 238, 244
  - modale, 247
- Bit(s)
  - de poids le plus léger, 156
  - de poids le plus lourd, 156
  - les plus significatifs, 134
- Blindage, 98, 122
  - aux fréquences radio-T.V., 103
  - électrostatique, 99
  - (fréquence de coupure du ...), 101
  - magnétique, 100
- Boltzmann
  - (distribution de ...), 90
  - (loi de Stefan- ...), 176
- Boucle
  - fermée, 27

- Brogie, de  
 – (loi de Planck- ...), 178
- Bruit  
 – (bande passante du ...), 85  
 – blanc, 85, 282  
 – (caractérisation du ...), 83  
 – (couplage de ...), 98  
 – dans les détecteurs à effet photoconducteur, 284  
 – dans les photodétecteurs de surface, 284  
 – dans les détecteurs à effet photovoltaïque, 285  
 – de grenaille, 89, 93, 94, 282  
 – (densité spectrale de ...), 94  
 – des détecteurs optiques, 281  
 – du secteur, 103  
 – en  $1/f$ , 89, 96, 282  
 – ergodique, 83  
 – extrinsèque, 83, 97, 98  
 – intrinsèque, 83, 88  
 – (limitation par le ... quantique), 283  
 – noir, 282  
 – optique d'environnement, 282  
 – (puissance spectrale équivalente au ...), 283  
 – quantique, 282  
 – (résistance à faible ...), 97  
 – (schémas équivalents pour le ...), 93  
 – (source de ...), 88  
 – stationnaire, 83  
 – thermique, 89, 282
- Burrus  
 – (diode ...), 185
- Bus  
 – de données, 143  
 – de transfert, 143  
 – IEEE 488, 141
- Butterworth  
 – (filtre de ... d'ordre N), 149
- Cage  
 – de Faraday, 103
- Calibration  
 – (auto- ...), 169  
 – des convertisseurs A/D, 168
- Callendar  
 – (équation de ...-Van Duzen), 308
- Capteur(s)  
 – à effets électriques, 318, 327  
 – à effets magnétiques, 328  
 – à effets thermiques, 287  
 – à noyau plongeur, 328  
 – à variation de phase, 210, 224  
 – à variation de polarisation, 210, 258  
 – à variation d'intensité, 210, 219  
 – capacitif, 328  
 – de courant, 258  
 – en régime transitoire, 295  
 – inductif, 328  
 – interférométrique, 226  
 – métallique, 294  
 – optique, 209  
 – optique actif, 263  
 – optique passif, 209  
 – piézoélectrique, 319, 321, 322  
 – piézorésistifs, 323
- Caractéristique(s)  
 – courant-tension des photodiodes, 276  
 – des capteurs piézoélectriques, 322  
 – des diodes laser, 200  
 – des LED, 186  
 – des photocathodes, 269  
 – de transfert, 1  
 – de transfert (combinaison des ...), 25  
 – de transfert (identification des ...), 29  
 – de transfert des systèmes d'ordre quelconque, 33  
 – de transfert des systèmes du 1er ordre, 29  
 – de transfert des systèmes du 2ème ordre, 30  
 – de transfert dynamique, 7  
 – de transfert partielle, 2  
 – de transfert statique, 4  
 – d'un échantillonneur-bloqueur, 151  
 – (limitations de la ... de transfert), 10  
 – spectrales des LD, 202
- Cavité  
 – résonante, 190
- Céramique  
 – piézoélectrique, 318, 319
- Chaleur  
 – (équation de la ...), 292, 294  
 – massique, 293
- Champ  
 – électrique extérieur, 317  
 – scalaire, 216
- Chébychev  
 – (inégalité de ...), 59

- Circuit
- actif, 128
  - de garde, 121
  - de linéarisation, 134
  - de mesure des jauges, 326
  - équivalent des photodiodes, 275
  - passif, 117
  - RC passe-bas, 86
  - résonant, 87, 127
- Classes
- d'un histogramme, 45
  - équiprobables, 67
- Clavier, 143
- Coaxiale
- (paire ...), 104
- Code
- barre, 222
- Coefficient
- d'absorption, 191, 266, 275
  - d'aplatissement, 54
  - d'asymétrie, 53
  - de convection, 291
  - de Fourier, 295
  - de gain, 190
  - de Lamé, 343
  - d'émission secondaire, 270
  - de Peltier, 298
  - de réflexion, 191
  - de Seebeck, 297, 299
  - de température des jauges, 325
  - de température des résistances, 306
  - de Thomson, 298
  - élasto-optique, 250
  - électro-optique, 252
- Cohérence
- longitudinale, 197
  - spatiale, 195, 196
  - spatiale des laser, 197
  - temporelle, 195, 197
  - temporelle des laser, 202
  - transverse, 196
- Commutation
- (parasites de ...), 157
- Comparaison
- de deux distributions, 69
  - de deux moyennes, 70, 71, 72
  - de deux variances, 73, 74
- Condensateurs
- au polystyrène, 151
  - (mesure des ...), 122
- Condition
- de Bernard-Duraffour, 188
  - imposée sur la phase, 192
  - imposée sur le gain, 191
- Conductibilité
- thermique, 292
- Constante
- d'absorption, 266
  - de Bridgmann, 323
  - de Kerr, 254
  - d'émission spontanée, 188
  - d'émission stimulée, 188
  - de Planck, 179
  - de propagation, 247
  - de réflexion, 190
  - de Stefan-Boltzmann, 176
  - de temps, 10
  - de transmission, 190
  - de transition radiative spontanée, 180
  - de Verdet, 256
- Contacts
- (doubles ... de Kelvin), 117
- Contrainte, 317
- Convection
- (définition), 291
  - forcée, 291
  - naturelle, 291
- Convention
- d'Einstein, 342
- Conversion
- A/D, 139
  - D/A, 139
  - des échelles de température, 288
  - parallèle, 155
- Convertisseur(s) A/D
- à approximations successives, 160
  - à double rampe, 165
  - à oscillateur commandé, 167
  - à transfert de charge, 162
  - (calibration et performances des ...), 168
  - en cascade, 164
  - parallèle, 162
- Convertisseur(s) D/A
- à courants pondérés, 155
  - parallèles indirects, 157
  - série à transfert de charge, 158
- Corps
- gris, 176
  - noir, 174
- Corrélation, 79

- Cotton
  - (effet ...-Mouton), 257
- Couplage
  - capacitif, 122
  - de bruit, 98
  - inductif, 122
  - LED-fibre optique, 185
  - parasite, 121
- Courant(s)
  - (capteur de ...), 158
  - de fuite, 121
  - de seuil, 201
  - (mesure de ... libre de potentiel), 130
  - noir, 265
  - (photo- ...), 265
  - pondérés, 156
- Cristal
  - biaxe, 239
  - piézoélectrique, 319
  - uniaxe, 239
  
- Décalage
  - au blocage, 152
  - de charge, 152
  - du zéro, 5
- Degré(s)
  - Celsius, 288
  - (conversion des ...), 288
  - de signification, 63
  - Fahrenheit, 288
  - Rankin, 288
- Démodulateur, 143
- Démodulation
  - synchrone, 111
- Démultiplexeur (DEMUX), 141
- Densité
  - bilatérale, 85
  - de courant de seuil, 192
  - de courant de seuil d'amplification, 190
  - de flux thermique, 290
  - de probabilité, 52
  - spectrale de bruit, 94
  - spectrale de puissance, 84
  - unilatérale, 85
- Déphasage, 229
- Dérive
  - (définition), 7
- Descartes
  - (loi de ...), 219
- Détecteur
  - à effet photoélectrique interne, 270
  - à effet photoélectrique de surface, 268
  - optique, 263
  - photoconducteur, 272
  - photovoltaïque, 273
- Délectivité
  - spectrale, 283
  - spectrale réduite, 283
- Diagramme
  - de dispersion, 46
  - de rayonnement des LED, 184
  - des fréquences cumulées, 46
  - des temps, 152
  - de variation des percentiles, 47
  - polaire, 173
- Diffraction, 196
- Diode
  - à géométrie ruban, 193
  - à guidage par le gain, 193
  - à guidage par l'indice, 194
  - Burrus, 185
  - électroluminescente, 182
  - émettant par la tranche, 185
  - laser, 192
  - laser à ruban enterré, 194
  - Schottky, 137
- Direction
  - de l'onde, 239
  - des rayons, 239
- Dispersion
  - (diagramme de ...), 46
- Distribution(s)
  - (algorithmes de calcul des ...), 340
  - (comparaison de ...), 65, 69
  - de Boltzmann, 90
  - de Fermi-Dirac, 90
  - de Fisher-Snedecor, 336
  - de Poisson, 94
  - de Student, 77, 80, 334
  - du  $\chi^2$ , 335
  - normale, 77, 333
- Domaine
  - fréquentiel, 83, 215
- Doppler
  - (vélocimétrie ...), 224
- Droite
  - de régression, 78
- Duraffourg
  - (condition de Bernard- ...), 188

- Durée  
 – de vie non-radiative, 180  
 – de vie radiative, 180  
 Duzen, Van  
 – (équation de Callendar- ...), 308  
 Dynamique  
 – (définition), 54  
 Ecart  
 – maximum, 6  
 – type, 51  
 – type d'une variable aléatoire, 53  
 Echantillon  
 – (définition), 54  
 Echantillonnage, 144  
 – aléatoire, 55  
 – (conditions pratiques d'...), 55  
 – définition, 54  
 – (fluctuations d'...), 56, 70, 73  
 – périodique, 146, 147  
 – (porte d'...), 137  
 Echantillonneur  
 – bloqueur, 148, 150, 151  
 Echelle(s)  
 – de température, 287  
 – de température comparée, 288  
 – internationale pratique de température, 288  
 Echelon, 11  
 – (réponse à un ...), 17  
 Eclairément  
 – énergétique, 172, 263  
 – lumineux, 263  
 Ecran, 143  
 Effet(s)  
 – acousto-optique, 249, 252  
 – agissant sur la polarisation, 248  
 – Cotton-Mouton, 257  
 – de charge, 33, 37  
 – élasto-optique, 249  
 – électrique, 317  
 – électro-optique, 249  
 – Faraday, 226, 256, 258  
 – Joule, 298  
 – Kerr, 226, 254  
 – magnéto-optique, 249  
 – non-réciproque, 257  
 – Peltier, 298, 299  
 – photoconducteur, 265  
 – photoélectrique, 265  
 – photovoltaïque, 265  
 – piézoélectrique, 317, 321  
 – Pockels, 252  
 – Sagnac, 226  
 – Seebeck, 296, 301  
 – thermique, 287  
 – thermo-électrique, 297  
 – Thomson, 298, 299  
 – Voigt, 257  
 Eikonale  
 – (équation d'...), 218  
 Einstein  
 – (convention d'...), 342  
 – (relations d'...), 188  
 Electrostatique  
 – (blindage ...), 99  
 Élément(s)  
 – à composante réactive négative, 122  
 – (empilage des ...), 321  
 – (mesure des ... réactifs), 127  
 – piézoélectriques, 320  
 Ellipse, 230  
 Ellipsoïde  
 – de la quadrique, 242  
 – de révolution, 242  
 Ellipticité, 230  
 Emission  
 – de lumière, 179  
 – spontanée, 180  
 – stimulée, 187  
 Emissivité  
 – (définition), 176  
 – des métaux, 177  
 – du tungstène, 177  
 – spectrale directionnelle, 176  
 Emittance  
 – lumineuse, 263  
 – énergétique, 172  
 Energie  
 – lumineuse, 172, 263  
 – rayonnante, 172  
 – rayonnante volumique, 174  
 – thermique, 290, 292  
 Equation  
 – de Callendar-Van Duzen, 308  
 – d'eikonale, 218  
 – de Fresnel, 241  
 – de Helmholtz, 216  
 – de la chaleur, 292, 294  
 – de Laplace, 293  
 – de Maxwell, 209, 213, 240  
 – de propagation, 240

- des rayons, 218
- Equilibre
  - thermique, 290
- Erreur(s)
  - absolue, 42
  - de quantification, 168
  - due à l'effet de charge, 38
  - fortuite, 43, 74
  - (loi de propagation des ...), 43
  - maximale, 43
  - (notion d'...), 41
  - par rapport au système idéal, 12
  - relative, 42
  - sur une estimation, 57
  - systématique, 42
- Espérance
  - mathématique, 53
- Estimateur
  - (bon ...), 57
  - consistant, 57
  - (définition), 56
  - (estimation d'un ...), 56
  - non-biaisé, 56
  - (variance d'un ...), 56
- Estimation
  - (définition), 56
  - de la moyenne, 57
  - de la variance, 58
  - (erreur sur une ...), 57
- Etalonnage
  - statique, 4
- Etendue
  - (définition), 51
- Exitance
  - énergétique, 172, 176
- Extrapolateur
  - d'ordre zéro, 144
  
- Fabry
  - (résonateur ...-Pérot), 190
- Facteur
  - d'amortissement, 16
  - de jauge, 324
  - de phase global, 229
  - de protection, 104
  - de qualité, 88, 283
  - de vérité, 283
- Faisceau
  - gaussien, 198, 199
  - laser, 199, 200
  
- Faraday
  - (cage de ...), 103
  - (effet ...), 226, 256, 258
- Fermi
  - (distribution de ...), 90
  - (niveau de ...), 297
  - (quasi-niveau de ...), 188
- Fibre(s) optique(s)
  - (biréfringence des ...), 259
  - (gyromètre à ...), 225
  - monomode, 227, 228
  - (propagation dans les ...), 247
- Filtre
  - anti-repliement, 149
  - de Butterworth d'ordre N, 149
  - passe-bas, 104
- Fisher-Snedecor
  - (table de la distribution de ...), 336
- Flux
  - d'induction, 122
  - énergétique, 172, 263
  - énergétique spectral, 264
  - lumineux, 263
- Fonction(s)
  - (combinaison des ... de transfert), 27
  - de répartition, 52
  - de transfert, 25
  - gamma, 66
- Fourier
  - (loi de ...), 292
  - (transformée de ...), 84, 295
- Fréquence
  - cumulée, 46
  - de coupure du blindage, 101
  - de l'onde, 216
  - industrielle, 123
  - (thermométrie par mesure de ...), 312
- Fresnel
  - (équation de ...), 241
  
- Gabarit, 6
- Gain
  - de photoconduction, 273
  - des APD, 280
  - (diodes à guidage par le ...), 194
  - modal, 192
  - optique, 189
- Galvanique
  - (séparation ...), 108

- Garde  
 – (circuit de ...), 121  
 – (conducteur de ...), 110  
 Gauss  
 – (distribution de ...), 77, 333  
 – (processus de ...-Markov), 90  
 Gigue  
 – d'ouverture, 151  
 Grandeur  
 – associée à  $x$ , 34  
 – d'entrée, 1  
 – interférente, 2  
 – modifiante, 2  
 Grenaille  
 – (bruit de ...), 89, 93, 94  
 – (densité spectrale de bruit de ...), 94  
 Gyromètre  
 – à fibre optique, 225  
  
 Helmholtz  
 – (équation de ...), 216  
 Hétérojonction  
 – (définition), 182  
 – (double ...), 192  
 Histogramme  
 – (définition), 45  
 – des codes, 169  
 Homojonction  
 – (définition), 180  
 Hypothèse  
 – nulle, 60  
 – (test d'...), 60, 64  
 Hystérésis  
 – (définition), 6  
  
 Imprimante, 143  
 Impulsion  
 – (réponse à une ...), 12, 20  
 Incandescence  
 – (définition), 179  
 – (lampes à ...), 177  
 Incertitude  
 – d'ouverture, 151  
 – (principe d'...), 196  
 Indicatrice, 242  
 Indice  
 – de réfraction, 214, 215  
 – de réfraction principal, 242  
 – (diodes à guidage par l'...), 194  
 – extraordinaire, 243  
 – ordinaire, 243  
  
 Inductance  
 – (mesure d'une ...), 123  
 – mutuelle, 102  
 – propre, 102  
 Inégalité  
 – de Chebyshev, 59  
 Influence, 97  
 Injection  
 – d'électrons et de trous, 180  
 Intégrateur, 322  
 Intensité  
 – énergétique, 173  
 – (capteur à variation d'...), 210, 219  
 Interface, 89  
 – IEEE 488, 143  
 Interféromètre  
 – (capteur interférométrique), 226  
 – de Mach-Zehnder, 227  
 – de Michelson, 227  
 – de Sagnac, 225  
 Isotrope  
 – (milieu ...), 239  
  
 Jauge(s)  
 – (circuit de mesure des ...), 326  
 – de contrainte, 2, 323  
 – (facteur de ...), 324  
 – métallique, 324  
 – (réponse en fréquence des ...), 326  
 – semiconductrice, 325  
 Jonction, 298  
 Jones  
 – (matrice de ...), 234  
 – (vecteur de ...), 233, 234  
 Joule  
 – (effet ...), 298  
  
 Kelvin  
 – (doubles contacts de ...), 117  
 – (pont de ...), 118  
 – (unité), 288  
 Kerr  
 – (effet ...), 226, 254  
 Khi  
 – carré, 65, 66  
 – (table de la distribution de ...), 335  
  
 Lambert  
 – (loi de ...), 173  
 Lame  
 – quart-d'onde, 237, 244

- quart-d'onde du 1er ordre, 246
- Lampe
  - à filament de tungstène, 177
- Laplace
  - (équation de ...), 293
- Largeur
  - spectrale, 264
- Laser(s)
  - à colorants, 206
  - à corps solides, 205
  - à gaz, 204
  - enterré, 195
  - Hélium-Néon, 204
  - (propriétés optiques des ...), 195
  - ridge, 195
  - (types de ...), 204
  - YAG-Nd, 205
- Limitation
  - par le bruit quantique, 283
- Linarisation
  - (circuit de ...), 134
- Linéarité
  - (définition), 5
  - (non- ...), 170
- Lock-in
  - (amplificateur ...), 111, 116, 124
- Loi(s)
  - binômiale, 61
  - de Descartes, 219
  - de Fourier, 292
  - de Lambert, 173
  - de l'optique géométrique, 220
  - de Malus, 236
  - de Planck, 174
  - de Planck-de Broglie, 178
  - de propagation des erreurs, 75
  - des métaux en parallèle, 301
  - des métaux en série, 302
  - de Stefan-Boltzmann, 176
  - des températures successives, 303
  - des thermocouples, 301
  - de Student, 77, 80
  - d'Ohm thermique, 294
  - du déplacement de Wien, 174
- Longueur
  - de battement, 248
  - d'onde centrale d'émission, 204
- Lumière
  - (propagation de la ...), 211
  - (vitesse de la ...), 215
- Luminescence(s)
  - (définition), 179
  - types de ...), 179
- Mach-Zehnder
  - (interféromètre de ...), 227
- Magnétique
  - (blindage ...), 100
- Malus
  - (loi de ...), 236
- Masse
  - (mémoire de ...), 143
- Matériau(x)
  - élasto-optique, 250
  - électro-optique, 254
  - piézoélectrique, 318, 319
- Matrice(s)
  - de Jones, 234
  - de rotation, 234
  - des modules piézoélectriques, 317, 330
- Maxwell
  - (équation de ...), 209, 213, 240
  - (pont de ...), 123, 126
- Médiane
  - (définition), 50
- Mémoire
  - de masse, 143
- Mesurande, 1
- Mesure(s)
  - (définition), 33
  - de l'état de polarisation, 236
  - des composantes en phase, 116
  - directe, 33
  - d'un composant in situ, 137
  - par comparaison, 34
  - par compensation, 34
  - (système de ...), 141
- Michelson
  - (interféromètre de ...), 227
- Microprocesseur, 139
- Milieu(x)
  - biaxe, 246
  - de propagation, 213
  - isotrope, 239
  - (propagation dans les ... anisotropes), 238
  - transparent, 212
  - uniaxe, 243
- Mode
  - de compression latéral, 321
  - de compression transversal, 320

- de déformation des éléments piézo-électriques, 319
- longitudinal, 197
- non-polarisé des photodiodes, 276
- polarisé des photodiodes, 278
- (propagation du ... fondamental), 198
- spatial, 196
- TEM, 197
- temporel, 197
- transverse, 196
- Modèle
  - formel général, 1
- Modulateur, 143
  - optique, 249
- Modulation
  - des LED, 186
- Module
  - piézoélectrique, 318, 330
- Moindres carrés, 78
- Moment
  - d'ordre  $r$ , 53
- Monomode
  - (fibre optique ...), 227, 228
- Montage
  - à trois fils, 327
- Mouton
  - (effet Cotton- ...), 257
- Moyenne
  - arithmétique, 49
  - glissante, 147
  - observée, 71
  - (tendance ...), 49
  - théorique, 71
- Multiplexeur (MUX), 141
- Multiplicateur, 114
  
- Nombre
  - d'onde, 216
  
- Ohm
  - (loi d' ... thermique), 294
- Onde(s)
  - (décomposition d'une ... polarisée), 231
  - (direction de l' ...), 239
  - (équation d'...), 214
  - extraordinaire, 244
  - (fréquence de l'...), 216
  - (fronts d'...), 218
  - (lame quart-d'...), 237, 244
  - (longueur d'...), 216
  - monochromatique, 215, 216
  - (nombre d'...), 216
  - ordinaire, 244
  - (période de l'...), 216
  - plane, 217
  - (quadrique représentative des ...), 241
  - sphérique, 217
  - transverse électromagnétique (TEM), 228
  - (vecteur d'...), 217
- Optique
  - (fibre ... monomode), 227, 228
  - géométrique, 217
  - (gyromètre à fibre ...), 225
  - (loi de l'... géométrique), 220
  - non-linéaire, 213, 249
  - ondulatoire, 211
- Optocoupleur, 109
- Opto-électronique
  - (transducteur ...), 209
- Ordinateur
  - (micro-...), 139
  - (rôle de l'...), 139
  
- Paire
  - coaxiale, 104
  - symétrique blindée, 104
  - symétrique non blindée, 104
- Paramètres
  - de Stokes, 232
- Parasites
  - de commutation, 157
- Pas
  - de quantification, 168
- Passe-bas
  - (filtre ...), 104
- Peltier
  - (batteries ...), 299
  - (coefficient de ...), 298
  - (effet ...), 298
- Pente
  - de décharge, 152
- Percentile
  - (définition), 47
- Performances
  - des convertisseurs A/D, 168
- Période
  - de l'onde, 216
- Pérot
  - (résonateur Fabry-...), 190

- Permanent  
 – (terme ...), 11
- Permittivité  
 – principale, 239
- Perturbation, 97
- Phase(s)  
 – (amplificateur lock-in à deux ...), 116, 122  
 – (capteur à variation de ...), 210, 224  
 – d'acquisition, 150  
 – de mémorisation, 150, 151  
 – (facteur de ... global), 229  
 – (mesure des composantes en ...), 116  
 – spatiale, 224, 226  
 – temporelle, 224
- Photocathode, 269
- Photodiode(s)  
 – avalanche (APD), 279  
 – à vide, 269  
 – p-i-n, 279  
 – (principe des ...), 273  
 – (schéma équivalent des ...), 275
- Photomultiplicateur, 270
- Photon  
 – (définition), 178  
 – (énergie du ...), 263  
 – spatialement cohérent, 196  
 – temporellement cohérent, 197
- Phototransistor, 280
- Piézoélectricité, 317
- Piezorésistance  
 – (définition), 323  
 – des métaux, 323  
 – des semiconducteurs, 323
- Planck  
 – (constante de ...), 179  
 – (loi de ...), 174  
 – (relations de ... -de Broglie), 178
- Pockels  
 – (effet ...), 252
- Poincaré  
 – (sphère de ...), 231, 232
- Poisson  
 – (distribution de ...), 94
- Polarisation, 228, 244, 318  
 – (capteur à variation de ...), 210, 258  
 – circulaire, 230  
 – dans les fibres optiques, 247  
 – droite, 230  
 – gauche, 230  
 – linéaire, 231  
 – (mesure de l'état de ...), 236  
 – (plan de ...), 231
- Polychromatique, 215
- Pont  
 – auxiliaire, 122  
 – de Kelvin, 118  
 – de Maxwell, 123, 126  
 – de Schering, 123  
 – de Wheatstone, 119, 129  
 – de Wien, 122  
 ± en régime alternatif, 121  
 – hors équilibre, 124  
 – pour jauges, 327  
 – teraohm-mètre, 119
- Population  
 – (définition), 54  
 – (inversion de ...), 188  
 – mère, 54
- Potentiomètre, 97
- Probabilité  
 – (définition), 51
- Processus  
 – de Gauss-Markov, 90
- Propagation  
 – dans les cristaux cubiques, 243  
 – dans les fibres optiques, 247  
 – dans les milieux anisotropes, 238  
 – dans les milieux uniaxes, 243  
 – de la lumière, 211  
 – (équation de ...), 240  
 – libre, 236  
 – (milieu de ...), 213
- Propriétés  
 – des quadriques, 242  
 – optiques des laser, 195
- Protection  
 – (facteur de ...), 104
- Puissance  
 – (densité spectrale de ...), 94  
 – moyenne, 84  
 – optique des LD, 200  
 – rayonnante, 172  
 – thermique, 290, 292, 293
- Pulsation  
 – propre, 16
- Quadrique  
 – (ellipsoïde de la ...), 242  
 – représentative des ondes, 241  
 – représentative des rayons, 241

- Qualité  
 – (facteur de ...), 88
- Quantification  
 – de l'amplitude, 143  
 – du temps, 143  
 – (erreur de ...), 168  
 – (pas de ...), 168  
 – uniforme, 168
- Quart-d'onde, 237, 244  
 – (lame ... du 1er ordre), 246
- Quartz  
 – (activité optique du ...), 256  
 – (matrice des modules piézoélectriques du ...), 318  
 – (sensibilité thermique du ...), 313  
 – (thermomètre à ...), 314
- Radiance  
 – (grande ...), 195  
 – solaire, 172  
 – spectrale, 171  
 – spectrique, 171
- Radio  
 – (blindage aux fréquences ...-T.V.), 103
- Radiométrie, 171
- Rampe, 11, 19  
 – tronquée, 17
- Rapport  
 – signal sur bruit, 283
- Rayon(s)  
 – de courbure d'un faisceau gaussien, 198  
 – (direction des ...), 239  
 – (équation des ...), 218  
 – (quadrique représentative des ...), 241
- Rayonnement  
 – (définition), 291
- Réalisation  
 – d'une variable aléatoire, 51
- Recombinaison  
 – radiative, 180  
 – électron-trou, 180
- Recouvrement  
 – (fonctionnement avec ...), 156  
 – spectral, 149
- Redresseur  
 – idéal, 132
- Régime  
 – alternatif, 121  
 – sinusoïdal, 13, 21, 126  
 – transitoire, 295
- Régression  
 – linéaire, 78
- Relaxation  
 – (définition), 7
- Rendement  
 – quantique différentiel externe, 201  
 – quantique effectif, 274  
 – quantique interne, 267, 285
- Répétabilité  
 – (définition), 6
- Réponse  
 – en courant des photodiodes, 275, 277  
 – en fréquence des jauges, 326  
 – en tension des photodiodes, 277  
 – harmonique, 28  
 – linéaire, 129  
 – temporelle, 28
- Représentation graphique, 45
- Résistance(s)  
 – à faible bruit, 97  
 – à fil de platine, 307  
 – à film métallique, 97  
 – agglomérée, 97  
 – au germanium et au silicium, 311  
 – bobinée, 97  
 – caractéristique du réseau, 155  
 – (mesure des grandes ...), 119  
 – métallique, 307  
 – (réseaux de ...), 155  
 – semiconductrices, 310  
 – thermique, 293, 294  
 – (variation de ...), 306
- Résistivité  
 – des conducteurs métalliques, 306  
 – des matériaux piézoélectriques, 319  
 – des semiconducteurs, 308  
 – (mesure de la ...), 121
- Résolution  
 – (définition), 6  
 – des capteurs piézoélectriques, 322
- Résonant  
 – (circuit ...), 87
- Résonateur  
 – optique, 190
- Résultat(s)  
 – (ensemble de ...), 45  
 – (libellé d'un ...), 41  
 – (représentation graphique d'un ...), 45
- Retard  
 – d'ouverture, 151

- Révolution  
 – (ellipsoïde de ...), 242
- Risque, 60  
 – de première espèce, 62  
 – de seconde espèce, 62
- Sagnac  
 – (effet ...), 226  
 – (interféromètre de ...), 225
- Scalaire  
 – (champ), 216  
 – (définition), 341  
 – (produit ...), 342
- Schéma  
 – équivalent, 93  
 – équivalent des éléments piézo-  
 électriques, 321  
 – équivalent des LED, 185  
 – équivalent des photodiodes, 275
- Schering  
 – (pont de ...), 123
- Schottky  
 – (diode ...), 137
- Secteur  
 – (bruit du ...), 103
- Seebeck  
 – (coefficient de ...), 297  
 – (effet ...), 296
- Semiconducteurs  
 – (émission de lumière des ...), 179  
 – (longueur d'onde d'émission des ...),  
 203  
 – (résistivité des ...), 308
- Sensibilité, 227, 228  
 – (définition), 4  
 – de l'erreur relative, 44  
 – des capteurs piézoélectriques, 322  
 – optique, 264  
 – photonique, 264  
 – relative, 227, 228  
 – spectrale, 264  
 – spectrique, 264  
 – spectrique des photocathodes, 268  
 – thermique du quartz, 313
- Séparation  
 – galvanique, 108
- Seuil  
 – (définition), 7
- Shannon  
 – (théorème de ...), 148
- Signal  
 – de déséquilibre  
 – (rapport ... sur bruit), 283  
 – (traitement du ...), 114
- Sinusoïde  
 – (réponse à une ...), 13, 21
- Source  
 – à incandescence, 174  
 – de bruit, 88  
 – laser, 187  
 – luminescente, 178
- Soustracteur  
 – symétrique avec gain, 129
- Spatiale  
 – (phase ...), 224, 226
- Spectre  
 – d'amplitude, 92  
 – d'émission des LED, 183, 184
- Sphère  
 – de Poincaré, 231, 232
- Stabilité, 28
- Statistique  
 – (définition), 56
- Stefan  
 – (loi de ... -Boltzmann), 176
- Stokes  
 – (paramètres de ...), 232
- Student  
 – (distribution de ...), 77, 80, 334
- Système  
 – de mesure informatisé, 141  
 – d'ordre zéro, 9  
 – du deuxième ordre, 16  
 – du premier ordre, 10  
 – idéal, 9  
 – linéaire, 37
- Table  
 – des capteurs, 344  
 – de la distribution de Fisher-Snedecor,  
 336  
 – de la distribution de  $\chi^2$ , 335  
 – de la distribution normale, 333  
 – de la distribution de Student, 334
- Tableau  
 – de contingence, 69
- Taille  
 – d'un faisceau gaussien, 198  
 – d'un échantillon, 54
- Taux  
 – de distorsion harmonique, 170

- de rejection, 152
- Température
  - absolue, 287
  - (coefficient de ...), 306, 325
  - critique, 307
  - d'un fluide, 15
  - (échelle de ...), 287
  - mesurée, 291
- Temps
  - d'acquisition, 151
  - d'établissement, 7
  - d'établissement au blocage, 152
  - (quantification du ...), 143
- Tenseur(s)
  - (changement de base d'un ...), 342
  - (définition), 342
  - des coefficients électro-optiques, 252
  - des tensions, 343
  - (introduction aux ...), 341
  - photoélastique, 250
  - piézoélectrique, 318, 330
  - (rang d'un ...), 341
- Tension
  - de Seebeck, 299, 301, 302, 303
  - (pont pour haute ...), 123
- Terre
  - (mise à ...), 98, 105, 107
- Test
  - bilatéral, 63
  - d'hypothèse, 60, 64
  - du  $\chi^2$ , 65
  - unilatéral, 63
- Théorème
  - central limite, 92
  - de Shannon, 148
- Thermistance, 136, 310
- Thermocouple(s)
  - (définition), 299
  - (lois des ...), 301
  - (utilisation pratique des ...), 304
- Thermoélectricité, 296
- Thermomètre(s)
  - à quartz, 314
  - à variation de fréquence, 312
  - étalon, 290
  - (types de ...), 289
- Thomson
  - (coefficient de ...), 298
  - (effet ...), 297
- Traitement
  - du signal, 114
- Transducteur
  - opto-électronique, 209
- Transfert
  - (caractéristique de ...), cf. caractéristique
  - (fonction de ...), 25
- Transformateur
  - différentiel, 329
- Transformation
  - de Fourier, 83, 295
  - de Laplace, 25
  - tension-tension, 136
- Transistor, 137
  - à effet de champ (FET), 151
- Transition
  - radiative, 179
  - spontanée, 187
  - stimulée, 187
- Transitoire
  - de courant, 201
  - (terme ...), 111
- Translateur, 108
- Transmission
  - d'énergie thermique, 290
- T.V.
  - (blindage aux fréquences radio-...), 103
- Unilatéral(e)
  - (densité), 85
  - (test ...), 63
- Unité
  - de température, 288
  - photométrique, 263
  - radiométrique, 263
- Univers, 54
- Valeur
  - de crête d'une tension, 132
- Variables (s)
  - aléatoire, 51
  - aléatoire mère, 54
  - d'écoulement, 34
  - d'effort, 34
- Variance
  - (définition), 50
  - d'un estimateur, 56
  - d'une variable aléatoire, 53

- observée, 73, 74
- théorique, 73
- Vecteur(s)
  - (définition), 341
  - de Jones, 233, 234
  - d'onde, 217
- Verdet
  - (constante de ...), 256
- Vitesse
  - de la lumière, 215
- Voigt
  - (effet ...), 257
- Voltmètre
  - vectoriel, 126
- Wheatstone
  - (pont de ...), 119, 129
- Wien
  - (loi du déplacement de ...), 174
  - (pont de ...), 122
- Wollaston
  - (prisme de ...), 259
- Zone(s)
  - active, 181
  - critique, 63
  - de confiance, 63
  - de déplétion, 181
  - de recombinaison, 181

Le Traité d'Electricité est l'œuvre collective  
des membres du Département d'Electricité de l'EPFL,  
assistés par quelques collaborateurs externes.  
A ce volume ont collaboré plus particulièrement :

*Marianne Aiassa* : secrétariat des Presses Polytechniques Romandes

*Kamiar Aminian* : critique du manuscrit, chapitre 10

*Michel Christen* : critique du manuscrit, chapitres 9 et 10

*Frédéric de Coulon* : critique du manuscrit, chapitres 3 et 4

*Claire-Lise Delacrausaz* : direction des Presses Polytechniques Romandes

*Roger Dessoulavy* : critique du manuscrit, chapitres 4 et 5

*Chantal Doré* : critique du manuscrit, chapitres 6 à 8

*Jean Gramiger* : préparation des dessins

*Erna Hamburger* : critique du manuscrit, chapitre 1

*Kurt Hofer* : dessins, réductions photographiques

*Allen Kilner* : mise en page et montage

*Jacques Neiryneck* : direction du Traité d'Electricité

*Pierre-Alain Nicati* : critique du manuscrit, chapitres 6 à 8

*Marianne Noè* : mise au net et

frappe du manuscrit, correction des épreuves, index

*Pierre-André Paratte* : rédaction des chapitres 6 à 11

*Renée Pittet* : composition du texte et des formules

*Franz-Karl Reinhart* : critique du manuscrit, chapitres 6 à 8

*Claudine Robert* : correction des épreuves, chapitres 1 à 5

*Philippe Robert* : rédaction des chapitres 1 à 5

*Alan Ruegg* : critique du manuscrit, chapitre 2

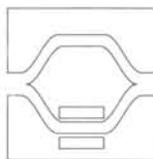
*Jacques Unger* : contribution à la rédaction du chapitre 5

*Ida Wegmüller* : montage du lettrage

*Jean Weiler* : critique du manuscrit

*Friedrich K. von Willisen* : critique du manuscrit, chapitres 9 et 10

*Nazih Ziade* : correction des épreuves





## Remerciements

Les auteurs remercient l'exécuteur littéraire de feu Sir Ronald Fisher, F.R.S. et le Dr. Frank Yates, F.R.S., ainsi que le groupe Longman Ltd., Londres, pour la permission de reproduire la table 11.1.3 d'après leur livre *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research* (6th édition, 1974).







traite de la mesure et des capteurs de température, le chapitre 10 des capteurs piézo-électriques, piézorésistifs et magnétiques. Différentes annexes, en particulier des tables statistiques, sont regroupées au chapitre 11.



Pierre-André Paratte est né à La Chaux-de-Fonds, en 1958. Il reçoit le diplôme d'ingénieur physicien de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne en 1982. Un an plus tard, il rejoint le Laboratoire de Métrologie de cette même école pour effectuer un travail de recherche dans le domaine des capteurs à fibres optiques. De 1985 à 1989, il a été chargé de cours à l'EPFL. Son enseignement a porté sur les capteurs, leurs mécanismes de conversion et leur mise en œuvre.



Philippe Robert est né en 1938 à La Chaux-de-Fonds. Ingénieur-physicien diplômé de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne en 1961, il reçoit le titre de Docteur es sciences techniques de cette même institution pour une thèse en physique des réacteurs nucléaires, soutenue en 1968. Attiré par l'industrie, il entre la même année à la S.A. des Câbleries et Tréfileries de Cossonay (Suisse). Conseiller scientifique à la Direction technique de cette entreprise, il assume la responsabilité du développement de matériaux, de technologies de fabrication et de procédés de mesure nouveaux. Il contribue également à la réalisation des premières liaisons à fibres optiques de Suisse. Nommé professeur en 1979, il dirige dès cette date le Laboratoire de Métrologie de l'EPFL, dont l'activité de recherche est centrée sur les capteurs optiques et à fibre optique, le traitement optique de l'information et les télécommunications optiques.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

# Traité d'Électricité

I INTRODUCTION À L'ÉLECTROTECHNIQUE

II MATÉRIAUX DE L'ÉLECTROTECHNIQUE

III ÉLECTROMAGNÉTISME

IV THÉORIE DES RÉSEAUX DE KIRCHHOFF

V ANALYSE ET SYNTHÈSE DES SYSTÈMES LOGIQUES

VI THÉORIE ET TRAITEMENT DES SIGNAUX

VII DISPOSITIFS À SEMICONDUCTEUR

VIII ÉLECTRONIQUE

IX ÉLECTROMÉCANIQUE

X MACHINES ÉLECTRIQUES

XI MACHINES SÉQUENTIELLES

XII ÉNERGIE ÉLECTRIQUE

XIII HYPERFRÉQUENCES

XIV CALCULATRICES

XV ÉLECTRONIQUE DE PUISSANCE

XVI ÉLECTRONIQUE DE RÉGLAGE ET DE COMMANDE

XVII SYSTÈMES DE MESURE

XVIII SYSTÈMES DE TÉLÉCOMMUNICATIONS

XIX FILTRES ÉLECTRIQUES

XX TRAITEMENT NUMÉRIQUE DES SIGNAUX

XXI ÉLECTROACOUSTIQUE

XXII HAUTE TENSION



ISBN 2-88074-321-4



9 782880 743215

PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

ISBN (série): 2-60400002-4 ISBN (ce volume): 2-88074-321-4