

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

# Traité d'Électricité

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION DE JACQUES NEIRYNCK

VOLUME IV

## THÉORIE DES RÉSEAUX DE KIRCHHOFF

René Boite  
et Jacques Neiryck



PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

## TRAITÉ D'ÉLECTRICITÉ

Jusqu'à ce jour, les théories et les applications de l'électricité n'ont jamais fait l'objet d'un exposé systématique et unifié.

Les 19 volumes du Traité d'Électricité comblent cette lacune. Cet ouvrage rassemble de façon cohérente des connaissances jusqu'ici disparates et fragmentaires en fonction de la hiérarchie de modèles de plus en plus généraux, tels que les ingénieurs les ont conçus pour maîtriser des techniques de plus en plus complexes.

### PRÉSENTATION DU VOLUME IV

## THÉORIE DES RÉSEAUX DE KIRCHHOFF

- Postulats de base □ Notion de systèmes
- Circuits élémentaires, régime et analyse transitoire □ Mise en équation des réseaux
- théorie des graphes □ Dualité □ Réciprocité
- Méthodes de substitution □ Quadripôles
- Distributions □ Transformées de Fourier et de Laplace

Comme le modèle de Kirchhoff repose sur quelques définitions (celles de sept éléments) et sur les deux postulats définissant les règles de connexion, on commence par énoncer ceux-ci au début du chapitre 1. Le reste du chapitre montre comment le modèle abstrait, défini de façon axiomatique, s'applique à des situations physiques, diverses, tels les circuits électriques, certains systèmes mécaniques, les dispositifs acoustiques.

Le chapitre 2 constitue une introduction générale à la théorie des systèmes linéaires. Il est organisé autour du couple temps-fréquence qui permet d'envisager deux procédés complémentaires d'analyse des réseaux. Le chapitre 3 applique ces concepts au cas de quelques circuits simples, dont la mise en équation est immédiate.

Le chapitre 4 aborde précisément le problème de la mise en équation d'un réseau quelconque. Les deux méthodes classiques des courants et des potentiels indépendants sont suivies de la méthode plus récente de mise en équation dans l'espace des états.

Le chapitre 5 développe quelques propriétés générales des réseaux tels la dualité et la réciprocité et des méthodes propres à réduire la mise en équation tels les procédés de substitution et le concept de multipôle.

Le chapitre 6 est une étude approfondie du concept de quadripôle qui permet d'appliquer les méthodes exposées à un cas concret.



DIRECTION  
TRAITÉ D'ÉLECTRICITÉ

**IV**  
**THÉORIE DES RÉSEAUX**  
**DE KIRCHHOFF**

PPUR  
Cité Universitaire EPFL  
Centre Midi  
CH - 1015 Lausanne

Sfr HT: 79,-

TTC: 80,60

29.1.96



# TRAITÉ D'ÉLECTRICITÉ

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE  
PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION DE JACQUES NEIRYNCK

VOLUME IV

## THÉORIE DES RÉSEAUX DE KIRCHHOFF

par René Boite  
et Jacques Neiryck



PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

Cet ouvrage fait partie d'une série de vingt-deux volumes  
dont les titres sont les suivants :

- I INTRODUCTION À L'ÉLECTROTECHNIQUE
- II MATÉRIAUX DE L'ÉLECTROTECHNIQUE
- III ÉLECTROMAGNÉTISME
- IV THÉORIE DES RÉSEAUX DE KIRCHHOFF
- V ANALYSE ET SYNTHÈSE DES SYSTÈMES LOGIQUES
- VI THÉORIE ET TRAITEMENT DES SIGNAUX
- VII DISPOSITIFS À SEMICONDUCTEUR
- VIII ÉLECTRONIQUE
- IX ÉLECTROMÉCANIQUE
- X MACHINES ÉLECTRIQUES
- XI MACHINES SÉQUENTIELLES
- XII ÉNERGIE ÉLECTRIQUE
- XIII HYPERFRÉQUENCES
- XIV CALCULATRICES
- XV ÉLECTRONIQUE DE PUISSANCE
- XVI ÉLECTRONIQUE DE RÉGLAGE ET DE COMMANDE
- XVII SYSTÈMES DE MESURE
- XVIII SYSTÈMES DE TÉLÉCOMMUNICATIONS
- XIX FILTRES ÉLECTRIQUES
- XX TRAITEMENT NUMÉRIQUE DES SIGNAUX
- XXI ÉLECTROACOUSTIQUE
- XXII HAUTE TENSION



Le Traité d'Electricité est une publication des  
**Presses polytechniques et universitaires romandes**,  
fondation scientifique dont le but est principalement la diffusion des  
travaux de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne.  
Le catalogue de ces publications peut être obtenu aux  
**Presses polytechniques et universitaires romandes, CH-1015 Lausanne.**

---

Cinquième édition  
ISBN 2-88074-322-2  
© 1996 Presses polytechniques et universitaires romandes  
CH-1015 Lausanne  
Imprimé en Suisse  
Imprimerie Corbaz S.A., Montreux

## INTRODUCTION

### Place du volume IV dans le *Traité d'Électricité*

Le volume IV s'insère dans la séquence des modèles qui sont présentés par le groupe des volumes II à VI. Le *modèle de Kirchhoff* postule l'existence d'éléments localisés. Ceux-ci sont connectés au moyen de bornes : pour chacune de celles-ci, on définit une valeur du potentiel et du courant. Les règles de connexion sont les célèbres lemmes de Kirchhoff qui en toute rigueur sont plutôt des postulats.

Par rapport au modèle de Maxwell, qui fait l'objet du volume III, la différence la plus frappante est l'absence de tout espace géométrique. Le modèle de Kirchhoff ne dit rien de la dimension des éléments ni de la distance qui les sépare. A fortiori cet espace sans géométrie n'a aucune caractéristique physique; le concept de champ disparaît. Tout ce qui subsiste du monde physique est un ensemble de bornes où courant et potentiel sont définis et une liste des connexions établies entre ces bornes.

Ce modèle très dépouillé, presque squelettique, ne peut évidemment rendre compte de tous les phénomènes électriques. S'il permet par exemple de calculer la puissance dissipée dans une résistance, il ne dit rien de l'élévation de température qui en résulte. De même, si la loi de conservation de l'énergie est un corollaire des lemmes de Kirchhoff, elle n'est strictement valide que pour un circuit dont la configuration ne change pas.

Comme il n'y a pas d'espace à proprement parler, on ne peut traiter ni du rayonnement, ni de la propagation des ondes. Dans ce modèle sans dimensions, les phénomènes se propagent instantanément. La vitesse de propagation des ondes électromagnétiques est tellement élevée que cette schématisation presque outrancière reste valide pour de nombreux cas. Elle ne peut cependant rendre compte des phénomènes à haute fréquence, ou encore des dispositifs de grandes dimensions pour lesquels le recours au modèle de Maxwell est indispensable.

Si le dépouillement du modèle de Kirchhoff en limite quelque peu les usages, il lui donne par contre une remarquable souplesse. Un réseau a en fin de compte pour modèle mathématique un système d'équations différentielles ordinaires. Si l'on se restreint au cas des équations linéaires, on possède des méthodes de résolution exactes et simples à manier. On peut en déduire des propriétés générales du modèle. C'est la puissance et la simplicité du modèle de Kirchhoff qui en ont fait le succès. Aussi longtemps que les approximations mentionnées plus haut restent acceptables, l'ingénieur doit travailler avec le modèle de Kirchhoff.

Le passage à des modèles plus abstraits, tels ceux exposés aux volumes V et VI, intervient au moment où les dimensions du système d'équations interdisent une manipulation aisée.

### Organisation générale du volume IV

Comme le modèle de Kirchoff repose sur quelques définitions (celles de sept éléments) et sur les deux postulats définissant les règles de connexion, on commence par énoncer ceux-ci au début du chapitre 1. Le reste du chapitre montre comment le modèle abstrait, défini de façon axiomatique, s'applique à des situations physiques diverses, tels les circuits électriques, certains systèmes mécaniques, les dispositifs acoustiques.

Le chapitre 2 constitue une introduction générale à la théorie des systèmes linéaires. Il est organisé autour du couple temps - fréquence qui permet d'envisager deux procédés complémentaires d'analyse des réseaux. Le chapitre 3 applique ces concepts au cas de quelques circuits simples, dont la mise en équation est immédiate.

Le chapitre 4 aborde précisément le problème de la mise en équation d'un réseau quelconque. Les deux méthodes classiques des courants et des potentiels indépendants sont suivies de la méthode plus récente de mise en équation dans l'espace des états.

Le chapitre 5 développe quelques propriétés générales des réseaux telles la dualité et la réciprocité et des méthodes propres à réduire la mise en équation tels les procédés de substitution et le concept de multipôle.

Le chapitre 6 est une étude approfondie du concept de quadripôle qui permet d'appliquer les méthodes exposées à un cas concret.

Les chapitres 7 et 8 sont des annexes mathématiques où sont exposés brièvement les résultats les plus importants de la théorie des distributions ainsi que des transformées de Fourier et de Laplace. Le lecteur au courant de ces méthodes peut se dispenser de leur lecture : sinon ces annexes doivent être assimilées avant d'aborder le chapitre 2.

Les chapitres 1 à 6 constituent une séquence qu'il faut lire normalement dans l'ordre.

### Conventions

Le Traité d'Electricité est composé de volumes (vol.) repérés par un chiffre romain (vol. V). Chaque volume est partagé en chapitres (chap.) repérés par un nombre arabe (chap. 2). Chaque chapitre est divisé en sections (sect.) repérées par deux nombres arabes séparés par un point (sect. 2.3). Chaque section est divisée en paragraphes (§) repérés par trois nombres arabes séparés par deux points (§ 2.3.11). Les références internes stipulent le volume, le chapitre, la section ou le paragraphe du Traité auquel on renvoie. Dans le cas de la référence à une partie du même volume, on omet le numéro de celui-ci.

Les références bibliographiques sont numérotées continûment par volume et repérées par un seul nombre arabe entre crochets; les pages concernées sont éventuellement précisées entre parenthèses : [33] (pp. 12-15).

Un terme apparaît en *italique maigre* la première fois qu'il est défini dans le texte.

Les équations hors texte sont numérotées continûment par chapitre et repérées par deux nombres arabes placés entre parenthèses et séparés par un point (3.14). Les figures et tableaux sont numérotés continûment par chapitre et repérés par deux nombres arabes précédés de Fig. (Fig. 4.12) ou Tableau (Tableau 4.13).

# TABLE DES MATIÈRES

	INTRODUCTION . . . . .	v
CHAPITRE 1	DÉFINITION DES RÉSEAUX DE KIRCHHOFF	
	1.1. Définition des éléments . . . . .	1
	1.2. Règles de connexion . . . . .	10
	1.3. Énergétique . . . . .	16
	1.4. Circuits électriques . . . . .	23
	1.5. Systèmes mécaniques . . . . .	32
	1.6. Systèmes acoustiques . . . . .	38
	1.7. Exercices . . . . .	42
CHAPITRE 2	PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES SYSTÈMES	
	2.1. Analyse fréquentielle . . . . .	45
	2.2. Analyse temporelle . . . . .	50
	2.3. Réponse globale . . . . .	54
	2.4. Exercices . . . . .	63
CHAPITRE 3	ANALYSE DES RÉSEAUX ÉLÉMENTAIRES	
	3.1. Analyse en régime sinusoïdal . . . . .	65
	3.2. Analyse des réseaux du premier ordre . . . . .	70
	3.3. Analyse des réseaux du second ordre . . . . .	82
	3.4. Problèmes associés aux sources discontinues . . . . .	92
	3.5. Circuits résonants en régime sinusoïdal . . . . .	95
	3.6. Exercices . . . . .	106
CHAPITRE 4	MISE EN ÉQUATION DES RÉSEAUX	
	4.1. Concepts fondamentaux de la théorie des graphes. . . . .	109
	4.2. Matrices associées à un graphe . . . . .	111
	4.3. Équation des réseaux . . . . .	118
	4.4. Méthode des courants indépendants . . . . .	124
	4.5. Analyse par la méthode des potentiels indépendants . . . . .	134
	4.6. Réseaux contenant des sources indépendantes et des sources dépendantes . . . . .	141
	4.7. Analyse dans l'espace des états . . . . .	146
	4.8. Exercices . . . . .	160

CHAPITRE 5	PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES RÉSEAUX LINÉAIRES	
	5.1. Dualité . . . . .	163
	5.2. Réciprocité . . . . .	169
	5.3. Réseau adjoint . . . . .	174
	5.4. Méthode de substitution . . . . .	178
	5.5. Multipôles . . . . .	183
	5.6. Exercices . . . . .	196
CHAPITRE 6	ETUDE DU QUADRIPOLE	
	6.1. Opérations élémentaires sur les quadripôles . . . . .	199
	6.2. Propriétés des quadripôles . . . . .	215
	6.3. Matrice de répartition . . . . .	225
	6.4. Exercices . . . . .	231
CHAPITRE 7	DISTRIBUTIONS ET TRANSFORMÉE DE FOURIER	
	7.1. Distributions . . . . .	233
	7.2. Produit de convolution . . . . .	243
	7.3. Transformée de Fourier . . . . .	247
	7.4. Série de Fourier . . . . .	262
	7.5. Exercices . . . . .	269
CHAPITRE 8	TRANSFORMÉE DE LAPLACE	
	8.1. Transformation de Laplace . . . . .	273
	8.2. Calcul opérationnel . . . . .	283
	8.3. Résolution de l'équation différentielle ordinaire . . . . .	289
	8.4. Systèmes d'équations . . . . .	291
	8.5. Exercices . . . . .	297
	BIBLIOGRAPHIE . . . . .	299
	SOLUTIONS DES EXERCICES . . . . .	301
	INDEX ANALYTIQUE . . . . .	315



## DÉFINITION DES RÉSEAUX DE KIRCHHOFF

### 1.1. DÉFINITION DES ÉLÉMENTS

#### 1.1.1. Introduction

Le but de cette section est d'énumérer les éléments qui constituent les réseaux. Nombre d'entre eux coïncident avec ceux qui ont été présentés au chapitre 5 du volume I de façon intuitive. On y a décrit l'opération d'idéalisation qui permet de passer du composant physique à l'élément mathématique, du dispositif matériel à son modèle. Nous adopterons ici la démarche inverse: partant d'une définition abstraite des éléments, nous montrerons leur signification physique dans les dernières sections (1.4, 1.5 et 1.6) de ce chapitre. Il ne faut donc pas se laisser leurrer par l'usage d'un vocabulaire hérité de l'électricité physique tels que courant, tension, résistance...: ces mots reçoivent ici une définition axiomatique du même genre que celle qui précise l'existence d'êtres mathématiques comme entier, application ou matrice. Par après nous vérifierons que ces concepts abstraits s'appliquent bien à une certaine classe de dispositifs électriques, mais aussi dans les domaines de la mécanique et de l'acoustique. Il est de la plus haute importance que le lecteur garde toujours à l'esprit cette distinction entre le modèle mathématique avec ses propriétés et le monde physique que l'on essaie de décrire avec le modèle. Si l'adéquation entre les deux n'est plus bonne, c'est le modèle qui doit être critiqué.

#### 1.1.2. Définitions

Les *réseaux de Kirchhoff (circuits)* sont constitués par la *connexion* d'un nombre fini d'*éléments*.

La définition du terme connexion ne sera donnée qu'à la section 1.2. On se bornera pour l'instant à définir les éléments de façon précise.

Un *élément* possède un certain nombre de *bornes*, qui sont les organes destinés à établir la connexion.

Chaque borne est caractérisée par deux grandeurs: le *potentiel* et le *courant*. Le courant est défini soit comme *pénétrant* dans une borne, soit comme *sortant* de cette borne. Courant et potentiel sont des fonctions à valeurs réelles d'une variable réelle qui est appelée le *temps*. La différence des potentiels de deux bornes est appelée *tension* entre ces deux bornes. Le potentiel sera désigné par la lettre  $v$ , la tension par  $u$  et le courant par  $i$ .

On appelle *terre* une borne dont le potentiel est identiquement nul.

Un élément à  $n$  bornes est appelé *multipôle* en général. Si  $n = 2, 3$  ou  $4$  on parle respectivement de *bipôle (dipôle)*, *tripôle* ou *quadripôle*.

### 1.1.3. Axiome

La somme des courants relatifs à toutes les bornes d'un multipôle est identiquement nulle.

Dans le cas d'un bipôle, cela signifie que les deux courants sont identiques à une inversion de signe près ou encore que le courant pénétrant par une borne est identique à celui sortant de l'autre borne.

### 1.1.4. Définitions

Deux bornes peuvent être associées et constituent un *accès* (*porte*, *paire de bornes*) si les deux courants sont identiques à une inversion de signe près.

Si les bornes d'un multipôle sont groupées de la sorte deux à deux, de façon à constituer  $N$  accès, le multipôle fonctionne en *multiporte* ( $2N$ -*pôle*).

Il résulte du § 1.1.3 que le bipôle est toujours un élément avec un accès. Il n'en est pas de même du quadripôle qui en général est caractérisé par quatre courants différents dont la somme s'annule. Si les bornes sont groupées pour former deux accès, le quadripôle fonctionne comme un *biporte*.

Il importe de bien distinguer les termes multipôle, quadripôle qui caractérisent un élément isolé des termes multiporte, biporte qui caractérisent un certain fonctionnement de cet élément. Ce fonctionnement particulier peut résulter de deux causes : provenir des connexions auxquelles est soumis l'élément, ce qui sera clarifié à la section 1.2; être une propriété du multipôle lui-même. Ainsi nous définirons plus loin deux éléments quadripôles qui fonctionnent toujours en biportes.

### 1.1.5 Représentation graphique

Un accès est caractérisé par deux grandeurs: une tension et un courant. Les symboles graphiques représentant respectivement le bipôle et le quadripôle fonctionnant en biporte sont ceux des figures 1.1 et 1.2. Ils représentent aussi bien les bipôles et quadripôles élémentaires que ceux, plus complexes, qui seront obtenus par connexion des premiers.

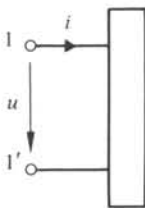


Fig. 1.1

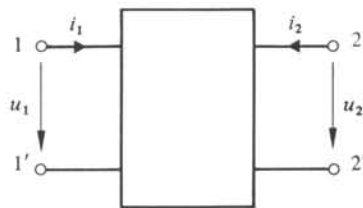


Fig. 1.2

Les grandeurs tension  $u$  et courant  $i$  ont un sens, d'ailleurs arbitrairement choisi, qu'il faut spécifier graphiquement. Tout en soulignant que les conventions varient d'un auteur à l'autre, on s'en tiendra dans la suite aux symboles des figures 1.1 et 1.2. La flèche soulignant la lettre  $i$  signifie que le courant  $i$  est positif, si le courant pénétrant par la borne 1 est positif. De même la tension  $u$  est positive si le potentiel de la borne 1 est supérieur à celui de la borne 1'.

En résumé, une grandeur tension ou courant n'est entièrement définie que lorsque l'on a fait choix d'un sens conventionnel; ce choix revient à un choix de signe. Un élément n'est défini que si l'on précise les conventions relatives au courant et à la tension.

### 1.1.6. Définition de la résistance

Un bipôle élémentaire dont la tension et le courant sont reliés par une relation du type

$$u(t) = Ri(t) \tag{1.1}$$

ou, de façon équivalente,

$$i(t) = Gu(t) \tag{1.2}$$

est une *résistance* de valeur  $R$  ou une *conductance* de valeur  $G$  avec les relations évidentes  $R = G^{-1}$  et  $G = R^{-1}$ . Le symbole graphique de ce bipôle est représenté à la figure 1.3. On emploie parfois le symbole de la figure 1.4 qui est plus ancien.

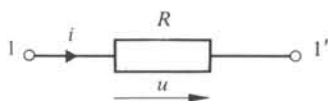


Fig. 1.3

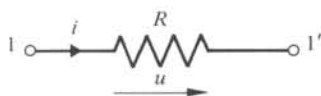


Fig. 1.4

En général,  $R$  ou  $G$  sont des fonctions à valeurs réelles du temps et (ou) de la valeur instantanée d'une des grandeurs tension et courant. Dans le cas particulier où  $R$  et  $G$  sont des constantes, on dit que la résistance est *linéaire* et *autonome* (*permanente*). Lorsque  $R$  et  $G$  dépendent de  $u$  ou  $i$ , la résistance est *non linéaire*. Lorsque  $R$  et  $G$  dépendent de  $t$ , la résistance est *non autonome*.

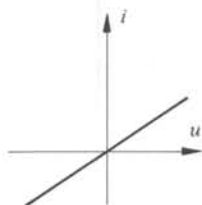


Fig. 1.5

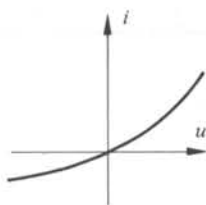


Fig. 1.6

Une résistance autonome est caractérisée par une courbe dans le plan  $i, u$ . Si l'on applique à une résistance une tension  $u(t)$  donnée, par (1.2) on en déduit  $i(t)$  pour autant que la courbe soit univoque et réciproquement. La figure 1.5 représente le cas de la résistance linéaire caractérisée par une droite issue de l'origine. La figure 1.6 représente un exemple de résistance non linéaire.

Dans la suite, l'exposé sera limité aux circuits ne comportant que des résistances linéaires et autonomes. Avec les conventions de signe de la figure 1.3, on supposera en général que  $R$  est une quantité positive. Lorsque tel n'est pas le cas, on dira explicitement qu'il s'agit d'une *résistance négative*.

Il importe de remarquer que le signe placé devant le coefficient dépend à la fois des conventions relatives au courant et à la tension. Si, à la figure 1.3, la flèche donnant le sens de  $u$  était orientée en sens inverse, il faudrait écrire  $u = -Ri$  où  $R$  est une grandeur positive. Si les deux flèches étaient orientées en sens inverse de celui de la figure 1.3, l'équation (1.1) est de nouveau valable.

### 1.1.7. Définition des sources indépendantes

Dans le paragraphe précédent, on a fait allusion à l'application d'une tension. Cela n'est possible que si l'on dispose d'un bipôle qui crée entre ses bornes une tension bien déterminée.

On appelle *source de tension* un bipôle défini par la tension entre ses bornes  $u(t)$  (souvent notée  $e(t)$ ) indépendamment du courant  $i(t)$ . De même une *source de courant* est un bipôle qui impose le courant  $i(t)$  pénétrant et sortant par ses bornes quelle que soit la tension qui lui est appliquée. Les symboles graphiques de ces bipôles sont représentés respectivement aux figures 1.7 et 1.8.



Fig. 1.7



Fig. 1.8

Dans le plan  $(i, u)$ , la caractéristique d'une source est représentée pour une valeur déterminée de  $t$  par une parallèle à l'un des axes. La figure 1.10 représente la caractéristique d'une source de tension et la figure 1.9 celle d'une source de courant.

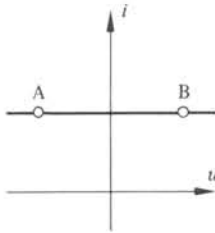


Fig. 1.9

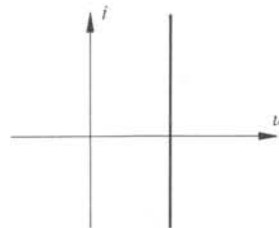


Fig. 1.10

Parmi les sources indépendantes, il est deux cas particuliers importants. Le *court-circuit* (fig. 1.11) est une source de tension imposant  $u(t) \equiv 0$  et le *circuit ouvert* (fig. 1.12) est une source de courant imposant  $i(t) \equiv 0$ .

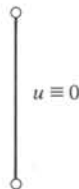


Fig. 1.11

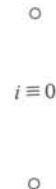


Fig. 1.12

Par comparaison avec (1.1) et (1.2), on constate qu'une résistance de valeur nulle est indiscernable d'un court-circuit et qu'une conductance de valeur nulle ne diffère en rien d'un circuit ouvert.

### 1.1.8. Définition des sources dépendantes

On appelle *source dépendante* une source de tension ou de courant définissant une grandeur et qui est dépendante d'une grandeur, courant ou tension, caractérisant un autre élément du réseau. A titre d'exemple, on peut définir une source de tension dépendante  $u(t) = \alpha i(t)$  où  $i(t)$  est le courant circulant dans un autre bipôle du réseau: si  $\alpha$  est constant, la source est linéaire.

Aux figures 1.13 et 1.14 on a représenté respectivement les sources dépendantes de tension



Fig. 1.13



Fig. 1.14

et de courant. Chacune de celles-ci peut être commandée par une tension ou un courant. On rencontrera donc quatre types différents de sources dépendantes.

### 1.1.9. Définitions

L'intégrale de  $-\infty$  au temps  $t$  de la grandeur  $i(t)$  est appelée la *charge*  $q(t)$ . On a donc les relations équivalentes

$$q(t) = \int_{-\infty}^t i(x) dx = q(0) + \int_0^t i(x) dx \quad (1.3)$$

et

$$i(t) = dq/dt \quad (1.4)$$

De même l'intégrale de la grandeur  $u(t)$  est appelée le *flux*  $\Phi(t)$ . On a donc

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t u(x) dx = \Phi(0) + \int_0^t u(x) dx \quad (1.5)$$

et

$$u(t) = d\Phi/dt \quad (1.6)$$

### 1.1.10. Définition de l'inductance

Un bipôle élémentaire défini par la relation

$$\Phi(t) = Li(t) \quad (1.7)$$

ou

$$i(t) = L^{-1} \Phi(t) \quad (1.8)$$

est une *inductance* de valeur  $L$ . Le symbole graphique de ce bipôle est représenté à la figure 1.15.

En général,  $L$  est une fonction à valeurs réelles dépendant du temps et des grandeurs caractéristiques  $\Phi$  ou  $i$  du bipôle. De même qu'au paragraphe 1.1.6, une inductance, telle que  $L$  soit une constante, est dite linéaire et autonome (*permanente*).



Fig. 1.15

En combinant (1.6) et (1.7), on obtient dans le cas général

$$u(t) = (di/dt)L(t) + (dL/dt)i(t) \quad (1.9)$$

et si l'inductance est autonome

$$u(t) = L di/dt \quad (1.10)$$

En combinant (1.5) et (1.8) dans le cas autonome on obtient

$$i(t) = i(0) + L^{-1} \int_0^t u(x) dx \quad (1.11)$$

Une inductance est caractérisée par une courbe dans le plan  $(\Phi, i)$ . La figure 1.16 représente le cas d'une inductance linéaire et autonome. La figure 1.17 celui d'une inductance non linéaire.

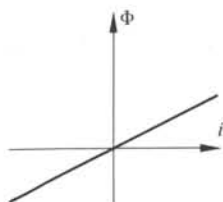


Fig. 1.16

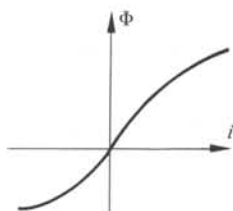


Fig. 1.17

Dans la suite, l'exposé sera limité aux circuits ne comportant que des inductances linéaires et autonomes. Avec les conventions de signe de la figure 1.15, on supposera en général que  $L$  est positif, c'est-à-dire qu'à un courant croissant correspond une tension positive.

#### 1.1.11. Définition de la capacité

Un bipôle élémentaire défini par la relation

$$q(t) = Cu(t) \quad (1.12)$$

ou

$$u(t) = Sq(t) \quad (1.13)$$

est une *capacité* de valeur  $C$  ou une *élastance* de valeur  $S$  avec  $S = C^{-1}$ . Le symbole graphique de ce bipôle est représenté à la figure 1.18.

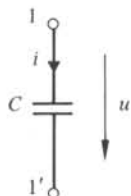


Fig. 1.18

En général  $C$  ou  $S$  dépend du temps et des grandeurs  $q$  ou  $u$ . Dans le cas particulier où  $C$  est constant, la capacité est dite linéaire et autonome (permanente).

En combinant (1.4) et (1.12), on obtient en général

$$i(t) = (du/dt)C(t) + (dC/dt)u(t) \quad (1.14)$$

qui se réduit dans le cas autonome à

$$i(t) = Cdu/dt \quad (1.15)$$

En combinant (1.3) et (1.13) dans le cas autonome on obtient

$$u(t) = u(0) + S \int_0^t i(x) dx \quad (1.16)$$

Une capacité est caractérisée par une courbe dans le plan  $(q, u)$  qui se réduit à une droite issue de l'origine dans le cas linéaire et autonome.

Dans la suite, l'exposé sera limité aux circuits ne comportant que des capacités linéaires et autonomes. Avec les conventions de signe de la figure 1.18, on supposera en général que  $C$  est positif, c'est-à-dire qu'à un courant positif correspond une tension croissante.

### 1.1.12. Commentaire

Grâce à la définition des nouvelles grandeurs  $q$  et  $\Phi$ , les définitions (1.7) et (1.12) de l'inductance et de la capacité sont formellement analogues à celle (1.1) de la résistance. Si l'on revient aux grandeurs fondamentales  $i$  et  $u$  comme on le fera dans l'analyse des réseaux, une différence fondamentale apparaîtra entre (1.1) d'une part, (1.11) et (1.16) d'autre part.

Ainsi la tension  $u(t)$  aux bornes d'une capacité dépend non seulement du courant de l'instant initial (arbitrairement identifié à  $t = 0$ ) jusqu'à l'instant considéré, mais aussi de la valeur initiale de cette tension. La fonction n'est proportionnelle à  $i$  sur l'intervalle  $[0, t]$  que dans la mesure où  $u(0) = 0$ .

Une nuance analogue doit être apportée au concept d'autonomie lorsqu'il s'applique à la capacité. La fonction  $u(t)$  est entièrement précisée pour une résistance lorsqu'

on fixe  $i(t)$  et cela quel que soit l'instant initial choisi. Par contre la tension aux bornes d'une capacité dépend non seulement de  $i(t)$  mais aussi de l'instant initial. De façon imagée, on dit qu'une capacité a de la mémoire.

En résumé, les concepts de linéarité et d'autonomie doivent être appliqués avec discernement lorsqu'il s'agit de capacités. Mutatis mutandis ce qui s'applique à la capacité, vaut aussi pour l'inductance.

### 1.1.13 Théorème

Si le courant (la tension) d'une capacité (inductance) est une fonction bornée et intégrable du temps dans l'intervalle  $[0, T]$ , la tension (le courant) est une fonction continue du temps dans  $[0, T]$ .

Ce théorème résulte directement des formules (1.11), (1.16) et du théorème de l'Analyse selon lequel la primitive d'une fonction intégrable est une fonction continue. Comme les courants et tensions sont en général des fonctions intégrables pour les dispositifs physiques qui sont représentés par un réseau de Kirchhoff, toute discontinuité des tensions (courants) relatifs à une capacité (inductance) doit être considérée comme l'indice d'un modèle trop idéalisé.

### 1.1.14. Définition du transformateur idéal

Le quadripôle élémentaire défini par les équations

$$u_1 = nu_2 \quad (1.17)$$

et

$$ni_1 = -i_2 \quad (1.18)$$

est appelé *transformateur idéal*. Les notations sont celles de la figure 1.19. La grandeur  $n$  est réelle, positive ou négative. Si elle est positive, cela signifie simplement que  $u_1$  et  $u_2$  ont même signe et que  $i_1$  et  $i_2$  sont de signes opposés. On appelle  $n$  le *rapport de transformation*. Si  $n$  est une constante, le transformateur est linéaire et autonome.

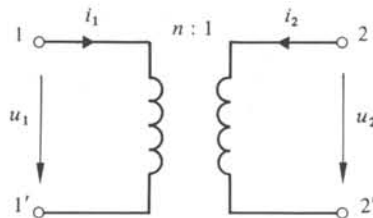


Fig. 1.19

### 1.1.15. Définition du gyrateur idéal

Le quadripôle élémentaire défini par les équations

$$u_1 = ri_2 \quad (1.19)$$

et

$$u_2 = -ri_1 \quad (1.20)$$

est appelé *gyrateur idéal*. La grandeur  $r$ , rapport d'une tension à un courant, est la *résistance de gyration* et son inverse est donc la *conductance de gyration*. Le symbole gra-



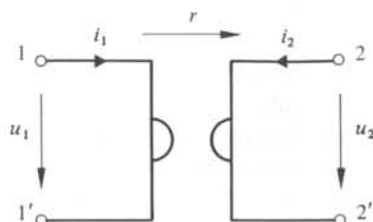


Fig. 1.20

phique du gyrateur est représenté à la figure 1.20. La flèche soulignant la lettre  $r$  est indispensable pour fixer laquelle des équations (1.19) et (1.20) est à affecter d'un signe négatif. Si  $r$  est une constante, le gyrateur est un élément linéaire et autonome.

### 1.1.16. Commentaire

Tels qu'ils ont été définis, le transformateur idéal et le gyrateur idéal sont des quadripôles qui fonctionnent toujours en biportes selon la définition du paragraphe 1.1.4.

### 1.1.17. Définition

Si l'on établit un court-circuit entre les bornes 1' et 2' d'un transformateur idéal, on obtient un tripôle qui est appelé *autotransformateur idéal*. On le représentera selon le symbole de la figure 1.21 et les équations sont identiques à (1.17) et (1.18).

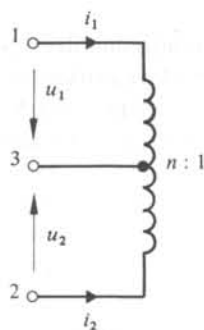


Fig. 1.21

### 1.1.18. Exemple

A titre d'exemple si  $n = -1$ ,  $u_1 = -u_2$ ,  $i_1 = i_2$ . Dans ce cas particulier, le potentiel de la borne 3 est la moyenne des potentiels des bornes 1 et 2; de façon équivalente la tension entre 2 et 3 est la moitié de la tension entre 2 et 1.

### 1.1.19. Redondance dans la définition des éléments

Dans ce qui suit, on n'ajoutera plus de nouveaux éléments à la liste de ceux définis dans la présente section à savoir: la résistance, la source de courant ou de tension indépendante ou commandée, l'inductance, la capacité, le transformateur idéal et le gyrateur idéal. On verra du reste que cet ensemble est déjà redondant en ce sens que

la connexion de plusieurs éléments de l'ensemble permet d'engendrer d'autres éléments de l'ensemble considéré.

Par ailleurs, on utilise dans la littérature technique bon nombre d'"éléments" qui ne sont pas repris dans la liste mentionnée. Ces éléments au sens large seront introduits dans la suite et ils seront chaque fois obtenus par connexion des éléments définis plus haut. L'introduction de ces éléments et de symboles conventionnels pour les représenter est justifiée par la simplification que cela apporte dans la représentation des réseaux.

La place privilégiée accordée aux éléments définis dans la présente section vient de ce qu'il est impossible de les définir au moyen d'un ensemble d'éléments différents et plus simples. On verra plus loin que certains des éléments de la liste ont une signification fondamentale en énergétique.

## 1.2. RÈGLES DE CONNEXION DES ÉLÉMENTS

### 1.2.1. Définition

La *connexion* de plusieurs éléments se réalise en faisant coïncider certaines de leurs bornes.

Au sens de la définition 1.1.2 du potentiel cela signifie que des bornes appartenant à des éléments différents ont le même potentiel. La définition du courant ne permet pas de dire pour l'instant ce que la connexion entraîne pour cette grandeur: un axiome sera énoncé au paragraphe 1.2.7.

### 1.2.2. Contraintes

A la section 1.1 nous avons introduit des équations définissant les éléments; dans la présente section nous établirons les équations qui résultent des connexions. Ces deux types d'équations risquent d'être incompatibles. Si c'était le cas, cela signifierait que le modèle n'est pas adéquat pour représenter la réalité.

A titre d'exemple, soit deux sources de tensions de valeurs  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  dont les bornes ont été connectées. D'une part, les équations de définition signifient que les tensions entre les bornes des sources valent respectivement  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$ . D'autre part, la connexion implique  $u_1(t) \equiv u_2(t)$ . Cette connexion n'est donc possible qu'entre sources de tension identiques. En particulier, cela n'a pas de sens en général de placer un court-circuit aux bornes d'une source de tension.

### 1.2.3. Commentaire

En supposant écartée toute connexion incohérente avec la définition des éléments, il reste à formuler des règles générales relatives aux contraintes de connexion. Pour ce faire, il faut au préalable introduire de nouveaux concepts. Comme les règles de connexions portent seulement sur des grandeurs caractéristiques et sont indépendantes de la nature des éléments, il est intéressant de remplacer chaque accès par un simple arc de courbe entre les deux bornes: le schéma du réseau est ainsi dépouillé des caractéristiques non pertinentes puisqu'il ne comporte plus que les chemins que peut emprunter le courant et les bornes auxquelles le potentiel est accessible. Afin de bien distinguer ce schéma dépouillé d'un réseau constitué de courts-circuits entre toutes les bornes, chaque accès sera représenté par un trait terminé par deux cercles noirs. Comme

les éléments définis à la section 1.1 sont caractérisés par un ou deux accès, le schéma dépouillé du réseau se ramène à la connexion d'arcs de courbe.

#### 1.2.4. Définitions

On appelle *branche (arête)* un arc de courbe sans point double. Une orientation est associée à chaque branche: elle coïncide avec le sens positif attribué au courant dans l'accès correspondant.

On appelle *noeuds (sommets)* les extrémités d'une branche. La branche est dite *incidente* en chacun des noeuds.

Un *graphe* orienté est un ensemble fini de branches qui possèdent certains noeuds en commun.

Un *sous-graphe* est un sous-ensemble de branches appartenant à un graphe.

Un *parcours (chemin)* est un sous-graphe composé d'une suite ordonnée de branches dont chacune possède en commun un noeud avec la précédente et où chaque noeud du graphe n'apparaît qu'une fois au plus.

Les *extrémités* d'un chemin sont les deux noeuds qui n'appartiennent qu'à une seule branche du chemin, la première et la dernière.

Un graphe est appelé *connexe* si entre deux noeuds quelconques il existe toujours un chemin qui soit un sous-graphe du graphe donné. Si un graphe n'est pas connexe, il est constitué d'un certain nombre  $p$  de *parties* connexes.

Une *maille (circuit ou cycle)* est constituée par l'union de deux chemins qui ont mêmes extrémités et dont tous les autres noeuds sont distincts. De façon équivalente, c'est un sous-graphe connexe possédant deux et seulement deux branches incidentes en chacun de ses noeuds.

Une *coupe (faisceau)* est un ensemble minimal de branches dont l'extraction augmente d'une unité le nombre de parties connexes du graphe. En particulier, on appelle *coupe nodale* celle comportant l'ensemble des branches incidentes en un noeud.

#### 1.2.5. Exemples

Considérons le graphe connexe à cinq noeuds et neuf branches de la figure 1.22. Les branches 1, 2 et 9 sont un sous-graphe non connexe. Les branches 1, 3 et 5 sont un chemin dont les extrémités sont les noeuds  $a$  et  $d$ . Les branches 1, 6, 5, 4 et 8 constituent une maille. Les branches 4, 5, 6, 7 et 8 constituent une coupe dont le complément est l'union des sous-graphes connexes (1, 2, 3) et (9). Les branches 1, 3, 6 et 7 constituent une coupe nodale.

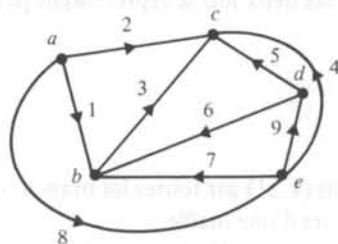


Fig. 1.22

### 1.2.6. Commentaire

Les définitions du paragraphe 1.2.4 sont empruntées à un chapitre de la topologie intitulé théorie des graphes. Ces concepts mathématiques interviennent dans de nombreuses disciplines et la terminologie est particulièrement floue.

Le concept de graphe a une définition mathématique très générale: c'est le couple constitué par un ensemble (symbolisé par les noeuds) et une application de cet ensemble dans lui-même (représentée par les branches). Pour une étude approfondie de ce sujet on consultera [1] et [7].

On remarquera que la forme graphique d'une branche (longueur, courbure) n'a aucune influence sur la définition du graphe. Ceci souligne que les réseaux de Kirchhoff n'ont pas de dimensions: rien dans la définition d'un élément n'en spécifie la longueur par exemple. Ceci est totalement différent du modèle de Maxwell, étudié au volume III. A rebours de celui-ci le modèle de Kirchhoff est situé dans un espace sans dimensions où la seule relation entre les éléments est topologique: sont-ils ou non connectés?

### 1.2.7. Premier lemme de Kirchhoff

La somme algébrique des courants circulant dans l'ensemble des branches incidentes au même noeud est nulle.

### 1.2.8. Second lemme de Kirchhoff

La somme algébrique des tensions aux bornes des branches constituant une maille est nulle.

### 1.2.9. Commentaire

La dénomination "lemmes de Kirchhoff" est aussi traditionnelle que peu judicieuse. Un lemme est un théorème préliminaire à la démonstration d'un autre théorème. Ici il s'agit de tout autre chose. L'énoncé du paragraphe 1.2.7 est un postulat: rien dans la définition du courant au paragraphe 1.1.2 ne permet de lui attribuer cette propriété. L'énoncé du paragraphe 1.2.8 est un simple corollaire des définitions de la tension et de la connexion. L'usage a cependant consacré l'emploi du terme lemme et nous nous y tiendrons.

Du reste à partir de maintenant, nous n'introduirons plus de nouveaux axiomes: la définition de sept éléments et les deux lemmes de Kirchhoff constituent l'ensemble d'axiomes sur lequel est construite la suite de ce volume.

### 1.2.10. Commentaires

Mathématiquement ces deux lois se représentent par des équations analogues

$$\sum i_m = 0 \quad (1.21)$$

et

$$\sum u_m = 0 \quad (1.22)$$

où la sommation porte dans (1.21) sur toutes les branches incidentes en un noeud et en (1.22) sur toutes les branches d'une maille.

Une répartition de courants et de tensions dans un réseau n'est admissible que si elle vérifie trois types de conditions :

- les équations liant tension(s) et courant(s) de chaque élément
- les équations du type (1.21) écrites pour les  $n$  noeuds du graphe
- les équations du type (1.22) écrites pour n'importe quelle maille du graphe.

Il est clair que cet ensemble d'équations est surabondant par rapport au nombre d'inconnues. Comme chaque branche comporte deux inconnues et qu'il y a autant d'équations du premier type que le nombre  $b$  de branches, il faut que les  $b$  inconnues non déterminées par ces premières équations vérifient les  $n$  équations du second type et le nombre, provisoirement non spécifié, d'équations du troisième type.

Par ailleurs, il est tout aussi évident que les équations des deux derniers types ne sont pas linéairement indépendantes. Ainsi les  $n$  équations du type (1.21) comportent dans leurs premiers membres deux fois chaque inconnue  $i_m$  : une fois avec le signe positif dans l'équation du noeud où pénètre le courant de branche; une fois avec le signe négatif dans l'équation du noeud dont le courant sort. La somme des  $n$  premiers membres est donc identiquement nulle ou, en d'autres mots, n'importe quelle des  $n$  équations peut être obtenue par addition membre à membre des  $n - 1$  autres. De même le lecteur découvrira à titre d'exercice un exemple où l'équation d'une maille est identique à la somme de deux autres équations du troisième type.

Le sujet de l'analyse des circuits linéaires est précisément le choix, parmi les équations résultant des deux lois 1.2.7 et 1.2.8, d'un ensemble d'équations linéairement indépendantes qui permettent de calculer les tensions et courants inconnus.

Par ailleurs, dès lors qu'un réseau comporte des inductances (et) ou des capacités, la combinaison des équations définissant ces éléments avec les équations du type (1.21) et (1.22) produira un système d'équations différentielles linéaires. Pour résoudre ces équations il faut, de plus, spécifier les conditions initiales, à savoir les tensions sur les capacités et les courants dans les inductances.

Le but de l'analyse des circuits est donc double: d'une part l'élaboration de méthodes permettant de mettre en équation correctement un réseau; d'autre part la recherche de méthodes permettant de résoudre aisément ces équations. C'est sur ce second point que l'analyse des réseaux a nécessité le plus d'efforts. On a développé un formalisme qui permet d'algrébriser complètement la résolution des systèmes d'équations.

### 1.2.11. Corollaire

La somme algébrique des courants d'une coupe est nulle. Cette propriété est un corollaire du lemme 1.2.7. Considérons l'ensemble des noeuds constituant un des sous-graphes connexes du complément de la coupe. Si l'on écrit l'équation (1.21) pour chacun des noeuds, la somme des premiers membres de ces équations ne comporte pas les courants, apparaissant une fois avec un signe positif et une fois avec un signe négatif, c'est-à-dire les courants circulant dans les branches du sous-graphe connexe considéré. Par contre les courants des branches de la coupe subsistent avec un signe différent selon qu'ils pénètrent ou sont issus d'un des noeuds considérés.

### 1.2.12. Exemple

Considérons le graphe de la figure 1.23. Les branches numérotées de 1 à 5 sectionnées par la ligne interrompue A B constituent une coupe. En écrivant les équations (1.21) pour les noeuds  $a$ ,  $b$  et  $c$ , on obtient par sommation de ces équations

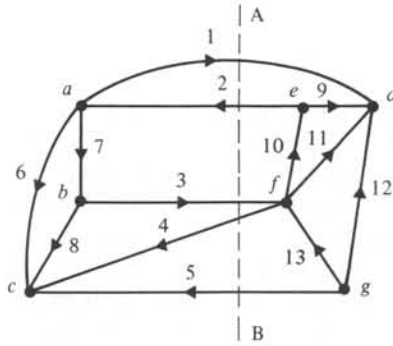


Fig. 1.23

$$i_1 - i_2 + i_3 - i_4 - i_5 = 0$$

La somme des courants traversant la ligne A B symbolisant la coupe est nulle.

### 1.2.13. Dualité

Considérons le tableau 1.24. Dans la première colonne on a écrit, à côté de la dénomination de chaque élément, la ou les équations qui le définissent. Les coefficients des équations ont été uniformément notés par la lettre  $k$  parce que celle-ci sera soumise à deux interprétations distinctes. Dans la seconde colonne on a réécrit ces mêmes équations en permutant les symboles  $u$  et  $i$  et on a déduit la nature des éléments obtenus. Les deux dernières lignes du tableau sont relatives non à des éléments mais aux expressions algébriques des lois de Kirchhoff.

En effectuant cette opération, on constate qu'on n'introduit pas de nouvel élément ni de nouvelle règle de connexion. Une capacité de valeur  $k$  devient une inductance de même valeur et réciproquement. Une résistance  $k$  devient une conductance de même valeur. Un transformateur de rapport  $k$  devient un transformateur de rapport  $-1/k$  et un gyrateur de résistance de gyration  $k$  devient un gyrateur de résistance de gyration  $-1/k$ . Le premier lemme de Kirchhoff devient le second et vice versa.

Tableau 1.24

Résistance	$u = ki$	$i = ku$	Conductance
Capacité	$i = k du/dt$	$u = k di/dt$	Inductance
Inductance	$u = k di/dt$	$i = k du/dt$	Capacité
Transformateur idéal	$\begin{cases} u_1 = ku_2 \\ ki_1 = -i_2 \end{cases}$	$\begin{cases} i_1 = ki_2 \\ ku_1 = -u_2 \end{cases}$	Transformateur idéal
Gyrateur idéal	$\begin{cases} u_1 = ki_2 \\ u_2 = -ki_1 \end{cases}$	$\begin{cases} i_1 = ku_2 \\ i_2 = -ku_1 \end{cases}$	Gyrateur idéal
Source de courant	$i(t)$	$u(t)$	Source de tension
Source de tension	$u(t)$	$i(t)$	Source de courant
Courants traversant une coupe	$\Sigma i_m = 0$	$\Sigma u_m = 0$	Tensions dans une maille
Tensions dans une maille	$\Sigma u_m = 0$	$\Sigma i_m = 0$	Courants traversant une coupe

Cette remarquable symétrie est valable pour l'ensemble des sept éléments idéaux et des deux règles de connexion. Comme toute la théorie des réseaux repose sur ces neuf équations, la même symétrie est valable pour tous les résultats à obtenir.

**1.2.14. Définitions**

Deux graphes sont *duaux* lorsqu'une correspondance biunivoque peut être établie entre les branches des deux graphes de telle sorte qu'à toute coupe de l'un corresponde une maille de l'autre. Tous les graphes n'admettent pas un dual et on énoncera au chapitre 5 les conditions pour qu'un graphe ait un dual.

Deux réseaux sont *duaux* lorsque leurs graphes sont duaux et que les branches correspondantes sont constituées par les éléments d'une même ligne du tableau 1.24.

Il importe de souligner, dès à présent, que tout réseau n'admet pas nécessairement un dual. Cela est évidemment le cas lorsque son graphe n'admet pas de dual. Mais il est d'autres causes qui seront exposées au chapitre 5.

**1.2.15. Exemple**

Soit le graphe de la figure 1.25 dont les coupes sont 124, 346, 235, 156, 1236, 2456 et 1345. Les mailles sont 125, 234, 356, 146, 2456, 1236 et 1345. Le graphe de la figure 1.26 est le dual du premier avec la numérotation des branches indiquées. On vérifiera qu'à chaque coupe de l'un correspond une maille de l'autre et réciproquement. Ces graphes duaux ont même topologie et ne diffèrent que par la numérotation des branches. Il s'agit en fait d'un cas particulier.

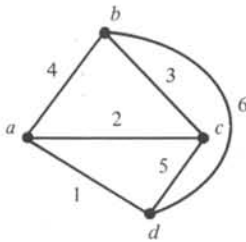


Fig. 1.25

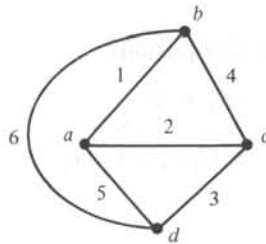


Fig. 1.26

**1.2.16. Exemple**

Considérons le circuit de la figure 1.27. On peut écrire les relations dérivant des lois de Kirchhoff

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$u - R_1 i_1 = R_2 i_3 + L di_3/dt = C^{-1} \int_{-\infty}^t i_2 dt$$

On dispose de trois équations permettant de résoudre par rapport aux trois inconnues  $i_1, i_2$  et  $i_3$ .

Le circuit 1.28 est le dual de 1.27 si

$$i(t) = u(t) \quad G_1 = R_1 \quad G_2 = R_2 \quad L = C' \quad C = L'$$

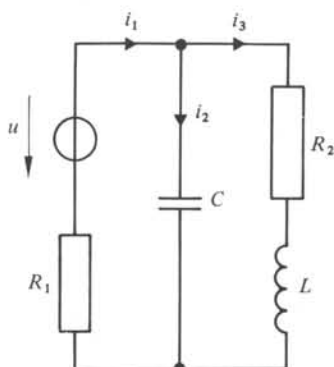


Fig. 1.27

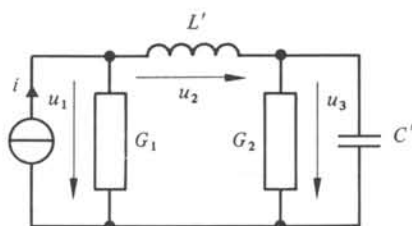


Fig. 1.28

Il est décrit par les équations

$$u_1 - u_2 - u_3 = 0$$

$$i - G_1 u_1 = G_2 u_3 + C' du_3 / dt = L'^{-1} \int_{-\infty}^t u_2 dt$$

### 1.3. ÉNERGÉTIQUE

#### 1.3.1. Définitions

La *puissance instantanée pénétrant dans un accès* est définie comme la fonction réelle du temps

$$p(t) = u(t)i(t) \quad (1.23)$$

lorsque les sens conventionnels du courant et de la tension sont ceux de la figure 1.1. Lorsque les conventions sont celles de la figure 1.29, il s'agit de la *puissance sortant* d'un accès.

Si la puissance est une fonction intégrable sur l'intervalle  $[-\infty, t]$ , on appelle *énergie absorbée* par l'accès, la fonction

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(x) dx \quad (1.24)$$



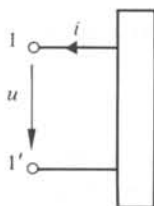


Fig. 1.29

où l'on a supposé que les conventions de signes sont celles de la figure 1.1. Si l'énergie absorbée par l'accès d'un bipôle ou les accès d'un quadripôle est une fonction à valeurs non négatives pour toutes valeurs de  $u$  et  $i$ , cet élément est dit *passif*. Sinon il est *actif*.

### 1.3.2. Propriété

La résistance, l'inductance et la capacité linéaires sont des éléments passifs. Dans le cas de la résistance, on a par (1.1), (1.23) et (1.24)

$$w_R(t) = R \int_{-\infty}^t i^2(x) dx \geq 0 \quad (1.25)$$

La propriété découle immédiatement du caractère non négatif de l'intégrand  $i^2(x)$ .

Dans le cas de l'inductance, on a par (1.10), (1.23) et (1.24)

$$w_L(t) = (L/2) \int_{-\infty}^t d[i^2(x)] = Li^2(t)/2 \geq 0 \quad (1.26)$$

On a supposé qu'il n'y avait pas de courant parcourant l'inductance à l'instant infiniment reculé où le réseau a été assemblé.

Par le même raisonnement, on obtient pour l'énergie absorbée par une capacité

$$w_C(t) = Cu^2(t)/2 \geq 0 \quad (1.27)$$

Il importe de souligner que ces résultats dépendent de la linéarité des paramètres  $R$ ,  $L$  et  $C$ .

### 1.3.3. Dissipation et emmagasinement de l'énergie

Quoique ces trois éléments aient la passivité en commun, ils diffèrent entre eux si l'on considère la puissance instantanée qui vaut respectivement

$$p_R(t) = Ri^2(t) \quad (1.28)$$

$$p_L(t) = (L/2) d[i^2(t)]/dt \quad (1.29)$$

$$p_C(t) = (C/2) d[u^2(t)]/dt \quad (1.30)$$

En comparant (1.28) à (1.29) et (1.30), on constate que  $p_R(t)$  est une fonction non négative tandis que le signe de  $p_L(t)$  et  $p_C(t)$  est quelconque. Ainsi une résistance ne peut jamais qu'absorber de la puissance alors que l'inductance ou la capacité peuvent en resti-

tuer. Du reste en comparant  $w_R(t)$ ,  $w_L(t)$  et  $w_C(t)$ , on constate que la première n'est nulle que si  $i(x) \equiv 0$  pour  $x \in [-\infty, t]$  tandis que les deux dernières peuvent être nulles dès lors que  $i(t) = 0$  ou  $u(t) = 0$  quelles qu'aient été les valeurs antérieures de  $i$  et  $u$ .

### 1.3.4. Définitions

La résistance absorbe de la puissance et ne la restitue jamais: elle transforme l'énergie de façon irréversible; c'est un élément *dissipatif*. La capacité et l'inductance peuvent restituer à tout instant l'énergie qu'ils ont absorbée; ce sont des éléments *non dissipatifs* ou *réactifs* qui emmagasinent l'énergie. *L'énergie emmagasinée* se note respectivement

$$w_C = Cu^2/2 = qu/2 = q^2/2C$$

$$w_L = Li^2/2 = \Phi i/2 = \Phi^2/2L$$

$w_C$  est appelée *énergie électrostatique* et  $w_L$  *énergie magnétique*. Les expressions équivalentes à (1.26) et (1.27) ont été obtenues à partir de (1.12) et (1.7)

A posteriori, ceci justifie l'importance de  $i(0)$  et  $u(0)$  dans (1.11) et (1.16): ces valeurs spécifient le niveau d'énergie existant dans les éléments à l'instant initial.

### 1.3.5. Éléments actifs

Puisque les trois bipôles considérés peuvent dissiper ou emmagasiner l'énergie, mais qu'ils ne peuvent en aucun cas l'engendrer, il faut pour alimenter un réseau en énergie prévoir d'autres éléments.

Ce peuvent être les éléments déjà envisagés dont les paramètres seraient négatifs. Une résistance négative ne peut que fournir de la puissance de même qu'une résistance positive ne peut qu'en absorber. Une capacité ou une inductance négative peuvent emmagasiner une énergie négative, c'est-à-dire fournir plus d'énergie qu'ils n'en ont absorbée. Dans ce qui suit ces éléments négatifs ne sont pas étudiés.

De même, les sources de courant ou de tension sont des éléments actifs. Une des grandeurs étant indépendante de l'autre,  $w(t)$  peut prendre des valeurs positives ou négatives. Ainsi dans le cas de la source de courant dont la caractéristique ( $i, u$ ) à un instant déterminé est celle de la figure 1.9, la source débite de la puissance si le point représentatif est dans le deuxième quadrant, par exemple A. Par contre en B, la source absorbe de la puissance.

### 1.3.6. Définition

Le court-circuit et le circuit ouvert sont caractérisés par  $p(t) \equiv 0$  et donc  $w(t) \equiv 0$ . Un élément dont la puissance instantanée est identiquement nulle est appelé *non énergétique*.

En multipliant membre à membre les équations (1.17) et (1.18) d'une part, les équations (1.19) et (1.20) d'autre part, on obtient chaque fois

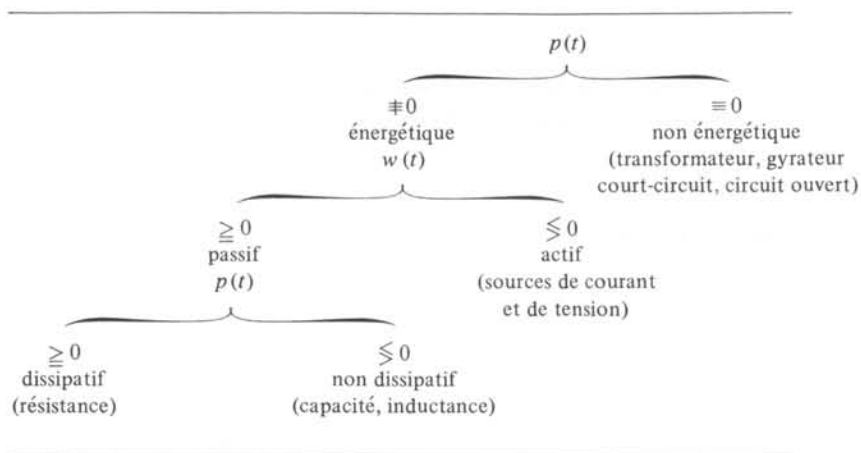
$$u_1 i_1 + u_2 i_2 = 0$$

Ainsi le transformateur idéal et le gyrateur idéal sont des quadripôles non énergétiques.

### 1.3.7. Classification des éléments

Une classification dichotomique des éléments est représentée au tableau 1.30. Il

Tableau 1.30



apparaît que, du point de vue énergétique, les éléments se répartissent en quatre classes: ceux qui fournissent de l'énergie, ceux qui consomment de la puissance et ceux qui l'emmagasinent, enfin ceux qui sont inopérants au point de vue énergétique. On peut légitimement se demander s'il est nécessaire, pour bâtir les réseaux, des sept éléments définis à la section 1.1 ou s'il ne suffit pas de prévoir un élément de chaque classe.

Les réseaux des figures 1.31 et 1.32 permettent de répondre à cette question. Ils représentent des identités entre des éléments simples et des bipôles ou quadripôles équivalents obtenus par connexion d'autres éléments. L'établissement des identités est une pure manipulation des équations de définition.

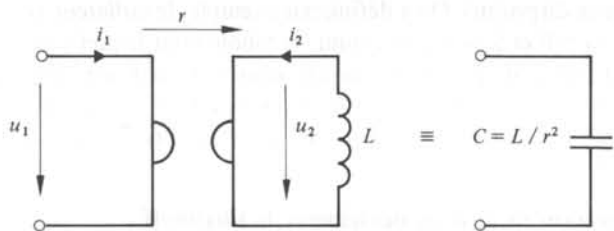


Fig. 1.31

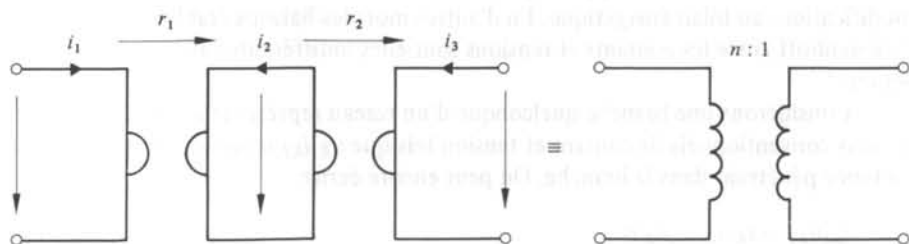


Fig. 1.32

Pour le réseau de la figure 1.31, on a les équations (1.19), (1.20) et

$$u_2 = -L di_2/dt$$

où le signe négatif provient de la convention de signe de  $i_2$  inverse de celle de la figure 1.15. Par élimination de  $i_2$  et  $u_2$  entre les trois équations, on obtient

$$i_1 = (L/r^2) du_1/dt$$

qui définit une capacité de valeur  $L/r^2$ .

A titre d'exercice on démontrera l'équivalence de la figure 1.32 avec l'égalité  $n = r_1/r_2$ .

### 1.3.8. Propriété

L'ensemble des éléments définis à la section 1.2 peut être engendré à partir de l'ensemble composé de la résistance, la source de courant, l'inductance et le gyrateur.

### 1.3.9. Commentaire

On peut évidemment se demander si l'ensemble des éléments définis à la section 1.1 est complet. N'existe-t-il pas d'autres éléments linéaires?

On peut prouver de façon théorique, à partir des équations de Lagrange, que les seuls éléments conservatifs linéaires (non dissipatifs et non énergétiques) sont ceux qui ont été décrits à la section 1.2. On lira à ce sujet [2].

D'un point de vue pratique, on constatera dans les sections suivantes que les éléments définis axiomatiquement suffisent à rendre compte des phénomènes observables physiquement.

De temps à autre apparaissent des éléments neufs suscités par la nécessité de décrire de nouveaux dispositifs. On a défini, par exemple, le *nullateur* comme le bipôle pour lequel  $u = i = 0$  et le *norateur* comme le bipôle pour lequel  $u$  et  $i$  sont arbitraires. Ces bipôles ont permis de donner un modèle adéquat pour l'amplificateur opérationnel.

Nous ne parlerons pas davantage de ces extensions de l'ensemble des éléments. La suite du volume IV est strictement consacrée aux éléments définis à la section 1.1.

### 1.3.10. Signification énergétique des lemmes de Kirchhoff

Jusqu'à présent nous sommes bornés d'une part à classifier les éléments au point de vue énergétique, d'autre part à les ramener par le paragraphe 1.3.8 à un ensemble moins redondant. Ceci suppose que la connexion des éléments n'introduise pas de modifications au bilan énergétique. En d'autres mots les liaisons établies par les lemmes de Kirchhoff entre les courants et tensions sont-elles indifférentes au point de vue énergétique?

Considérons une branche quelconque d'un réseau représenté à la figure 1.33 avec les sens conventionnels de courant et tension tels que  $u_k i_k$  représente la puissance instantanée pénétrant dans la branche. On peut encore écrire

$$i_k u_k = i_k v_k + i_k v_l \quad (1.31)$$

Si l'on effectue la somme des équations (1.31) pour toutes les branches du réseau,

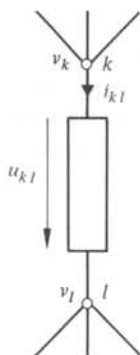


Fig. 1.33

on trouve

$$\sum i_{kl} u_{kl} = \sum_k v_k \left[ \sum_l i_{kl} \right] \quad (1.32)$$

où les sommations du second membre portent successivement sur tous les noeuds et sur tous les courants quittant ces noeuds. Par (1.21), on en déduit que la somme (1.32) est identiquement nulle.

### 1.3.11. Commentaire

Ce résultat est obtenu sans faire appel à d'autres éléments que les lemmes de Kirchhoff. Il est donc valable quelle que soit la nature des éléments constituant le réseau, même s'ils sont non linéaires ou non autonomes.

Il est par ailleurs intéressant de remarquer que les autres relations nécessaires pour analyser le réseau, c'est-à-dire les équations liant courant et tension de chaque branche, n'interviennent pas dans la démonstration. En d'autres mots pourvu que l'on dispose d'un ensemble de courants et d'un ensemble de tensions satisfaisant séparément les lois pertinentes, le résultat est toujours valide.

### 1.3.12. Théorème

La somme des puissances absorbées par toutes les branches d'un réseau est identiquement nulle.

### 1.3.13. Expression de l'énergie

Si l'on considère le cas d'un réseau composé de sources d'une part et de résistances, capacités et inductances d'autre part, il est intéressant de répartir les accès en ces deux groupes: celui des branches actives notées  $a$  et celui des branches passives notées  $p$ . On peut donc récrire (1.32) sous la forme

$$\sum_a u_a (-i_a) = \sum_p u_p i_p$$

Cette équation exprime qu'à tout instant la puissance pénétrant dans les branches passives est identique à celle sortant (signe négatif de  $i_a$ ) des sources. On n'a pas tenu comp-

te des transformateurs et des gyrateurs idéaux dont la contribution à la puissance instantanée est nulle.

Si l'on intègre les deux membres de l'équation de  $-\infty$  jusqu'à l'instant  $t$ , on trouve à gauche l'énergie fournie par les sources au réseau. La somme située à droite peut être décomposée en trois termes correspondant respectivement aux branches résistives, capacitives et inductives. On trouve en fonction de (1.25), (1.26) et (1.27)

$$w_R = \sum_k R_k \int_{-\infty}^t i_k^2(\tau) d\tau$$

$$w_C = \sum_k C_k u_k^2(t)/2$$

$$w_L = \sum_k L_k i_k^2(t)/2$$

L'énergie  $w_R$  a été dissipée,  $w_L$  et  $w_C$  sont des énergies emmagasinées. On constate que l'énergie emmagasinée ne dépend que de la valeur des courants dans les inductances et des tensions aux bornes des capacités. Dans la section 4.7, on reviendra sur le rôle joué par ces grandeurs.

#### 1.3.14. Commentaire

Ce principe de conservation de l'énergie n'est pas déduit de la première loi de la Thermodynamique: il s'agit d'un corollaire des lemmes de Kirchhoff. Si le deuxième lemme de Kirchhoff apparaît comme une déduction logique de la définition des connexions, l'introduction du premier lemme est par contre arbitraire. En considérant le second membre de (1.32), il apparaît clairement qu'il revient au même de requérir la conservation de l'énergie ou d'énoncer comme postulat le premier lemme de Kirchhoff: l'un se déduit de l'autre.

Par ailleurs, il faut remarquer que ce principe de conservation de l'énergie est étroitement lié à une configuration topologique donnée. Toute modification du graphe d'un circuit peut en principe entraîner une modification énergétique, paradoxale et inexplicable du point de vue de la Thermodynamique. A titre d'exemple, soit deux réseaux caractérisés chacun par une certaine énergie emmagasinée. Si on établit une connexion entre eux, rien ne dit que l'énergie du réseau résultant est égale à la somme de celles des réseaux constituants. On en donnera un exemple au chapitre 3.

#### 1.3.15. Théorème de Tellegen

Pour un réseau donné par son graphe, tout ensemble  $i_b$  de courants de branche vérifiant le premier lemme de Kirchhoff pour tous les noeuds et tout ensemble  $u_b$  de tensions de branche vérifiant indépendamment le second lemme de Kirchhoff pour toutes les mailles, vérifient la relation

$$\sum u_b i_b = 0 \tag{1.33}$$

La démonstration est immédiate si l'on se rapporte à la formule (1.32).

### 1.3.16. Commentaires

On peut donc, si l'on a calculé les tensions et courants de deux réseaux quelconques qui ont seulement en commun un graphe identique, multiplier les tensions de l'un par les courants de l'autre, les produits étant relatifs à des branches homologues: la somme des produits pour toutes les branches est nulle.

De même, on peut calculer les courants et tensions d'un circuit, remplacer les potentiels calculés par des potentiels quelconques, en déduire les valeurs des tensions de branche et obtenir une formule du type (1.33).

## 1.4. CIRCUITS ÉLECTRIQUES

### 1.4.1. Relation entre le modèle mathématique et le circuit électrique

Si l'on veut bien se reporter aux sections 1.1, 1.2 et 1.3, on constatera qu'aucune allusion n'a été faite aux lois de la Physique qui traitent les phénomènes électriques telles que celles exposées au chapitre I.2. Quoiqu'un abondant usage ait été fait du vocabulaire propre à cette discipline (courant, tension, résistance, transformateur, etc.), ces termes ont reçu dans le présent contexte une définition purement axiomatique et indépendante de leur signification physique.

A ce point de vue, la théorie des réseaux adopte la démarche classique de la Physique Mathématique: définir des concepts idéaux, opérer sur eux avec toute la rigueur de la mathématique et, cependant, disposer à tout instant d'une interprétation physique des résultats. Une résistance, selon la définition adoptée, est un concept aussi abstrait que celui de point matériel ou de corps indéformable. Néanmoins ce concept recouvre, plus ou moins étroitement selon les circonstances, le comportement de certains dispositifs physiques.

L'opération d'analyse d'un circuit électrique comporte donc trois phases :

- l'établissement d'un réseau équivalent composé d'éléments idéaux, tels que définis plus haut;
- l'analyse mathématique du comportement de ce réseau;
- la traduction de ces résultats mathématiques en des conclusions significatives au point de vue physique.

En particulier, cette dernière phase est cruciale en ce sens que les résultats de l'analyse mathématique doivent coïncider avec ceux des mesures effectuées sur le système physique. En cas de discordance, on peut incriminer l'exactitude des mesures et celle des calculs, mais, après avoir éliminé ces erreurs grossières, il convient de mettre en cause la première phase. Un modèle mathématique n'est adéquat que dans certaines limites de température, d'amplitude des excitations, de fréquence des oscillations sinusoïdales, etc.

Le but de la présente section est de fournir une initiation aux problèmes soulevés par la première phase.

### 1.4.2. Limitations dues à la fréquence

Dans l'optique des sections précédentes, le réseau n'a pas de dimensions en ce sens que les phénomènes s'y propagent instantanément. Pour nombre de réseaux électriques,

cette hypothèse est une bonne approximation de la réalité puisque la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques atteint la valeur élevée de  $3 \cdot 10^8$  m/s. Néanmoins un autre facteur doit être pris en considération de façon à tenir compte de la rapidité de variation des grandeurs électriques. Il est clair que, si toutes les grandeurs électriques sont des constantes, au bout d'un certain temps les ondes se seront propagées à travers tout le réseau quelles qu'en soient les dimensions: on atteindra un état stationnaire parfaitement indépendant de ces dimensions. Par contre, si une source fournit une grandeur électrique subissant des variations appréciables dans le temps que met l'onde à se propager jusqu'aux extrémités du circuit, dans ce cas l'hypothèse admise n'est pas pertinente.

On donnera un seul exemple familier d'un dispositif où cette hypothèse tombe manifestement en défaut: une antenne de voiture n'est parcourue par aucun courant à son extrémité mais bien à sa base. L'axiome 1.1.3 au sujet des éléments est donc invalidé.

Pour chiffrer les limites de validité de la théorie, il est utile de considérer la propagation d'une onde variant sinusoidalement dans le temps avec une fréquence  $f$  et une période  $T = f^{-1}$ . Si  $l$  est la plus grande dimension du circuit, la durée de propagation est  $\tau = l/c$ . Il faut que  $\tau$  soit négligeable devant  $T$ : par exemple que l'on ait  $\tau \leq T \cdot 10^{-2}$ . De façon équivalente on peut comparer  $l$  avec la longueur d'onde  $\lambda = c/f$ .

Ainsi la pertinence de la théorie axiomatique développée plus haut dépend à la fois des dimensions du circuit électrique et de la plus haute fréquence qui s'y propage.

### 1.4.3. Exemples

La distribution de puissance s'opère en Europe par l'intermédiaire d'un courant à la fréquence de 50 Hz. La longueur d'onde correspondante est  $\lambda = 6 \cdot 10^6$  m et  $\lambda \cdot 10^{-2} = 60$  km. Un réseau de distribution est donc normalement bien en dessous de cette limite. Par contre la transmission de puissance sur plusieurs centaines de kilomètres n'est plus analysable dans le cadre envisagé.

Le circuit d'un amplificateur audio a des dimensions de l'ordre du décimètre et traite des fréquences inférieures ou égales à  $15 \cdot 10^3$  Hz. Comme la longueur d'onde correspondante est de  $2 \cdot 10^4$  m, on se trouve bien dans le cadre de la théorie envisagée.

Un équipement de radar utilise une fréquence de  $10^{10}$  Hz. La longueur d'onde correspondante est de  $3 \cdot 10^{-2}$  m et la théorie envisagée est inapplicable puisque les dimensions de l'équipement sont de l'ordre du mètre.

### 1.4.4. Définition

Un circuit, analysable en fonction d'un modèle constitué d'éléments idéaux sans dimensions, est appelé *circuit à constantes localisées*. Sinon c'est un *circuit à constantes réparties*. Dans ce qui suit nous nous occuperons uniquement de la première catégorie.

### 1.4.5. Commentaire

Un circuit à constantes réparties sera décrit par des équations aux dérivées partielles qui sont les équations de Maxwell pour les phénomènes électriques. L'étude de ces systèmes fait partie de l'Electromagnétisme étudié au volume III. La théorie des circuits localisés peut donc être considérée comme une théorie simplifiée où la formulation mathématique est ramenée dans le cadre des équations différentielles ordinaires.



### 1.4.6. Bipôles élémentaires passifs

Il existe des composants électriques dont le comportement est très proche de celui des éléments idéaux que sont la résistance, l'inductance ou la capacité. Ceux-ci ont été décrits au chapitre I.11.

Ainsi un cylindre de carbone ou une lame de cuivre placés entre deux bornes obéissent à la *loi d'Ohm* (sect. I.2.4) qui a été utilisée en (1.1) comme définition de la résistance. Cependant, même dans des circonstances aussi proches de l'idéal, la valeur de  $R$  se modifiera selon la température et celle-ci est du reste influencée par l'*effet Joule* (sect. I.2.4) calculé par la formule (1.28) : chaque dispositif physique est caractérisé par une puissance limite qui peut y être dissipée sans danger. Au-delà le dispositif se détruit;  $R$  devient nul ou infini, cas extrême d'un comportement non linéaire.

Les condensateurs sont constitués par des plaques de métal séparées par un diélectrique qui est parfois simplement de l'air. Ces dispositifs se comportent comme des capacités avec une excellente approximation mais ils sont affectés de diverses limitations: il y a des pertes assez faibles dont on peut tenir compte en choisissant comme circuit équivalent du condensateur une capacité en parallèle avec une résistance; il existe une tension maximum au-delà de laquelle le diélectrique est percé, etc.

La bobine de fil de cuivre, dont le noyau est un matériau ferromagnétique, simule assez bien le comportement d'une inductance. Néanmoins l'écart entre l'élément idéal et le composant physique est ici plus grand que celui qui existe entre condensateur et capacité. La circulation du courant dans le cuivre provoque inévitablement un effet Joule qui est encore accentué aux hautes fréquences par divers phénomènes (effet de peau): par ailleurs il y a également des pertes dans le noyau. En fin de compte, il faut tenir compte de ces dissipations et un modèle réaliste pour une bobine comporte une résistance en parallèle ou en série avec une inductance. De plus, il existe une capacité parasite dont il faut aussi tenir compte: le circuit équivalent d'une bobine est celui de la figure 1.34.

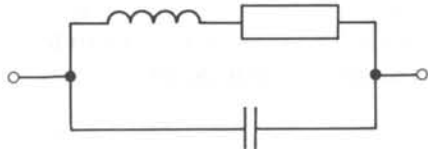


Fig. 1.34

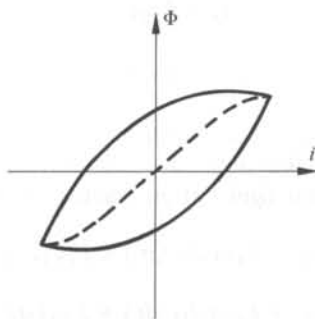


Fig. 1.35

Par ailleurs, le comportement d'une bobine à noyau ferromagnétique n'est qu'approximativement linéaire: le phénomène de *saturation* (représenté à la figure 1.17) rend  $L$  dépendant de  $i$  dans (1.7); le phénomène d'*hystérèse* représenté à la figure 1.35 ne permet plus de définir  $\Phi$  comme une fonction univoque de  $i$ . Ces deux phénomènes doivent être maintenus entre d'étroites limites si l'on veut pouvoir considérer la bobine comme un élément linéaire.

### 1.4.7. Terminologie

Par suite de la pauvreté du vocabulaire technique français, on désigne du même mot trois êtres différents; on appelle résistance :

- le composant physique
- le bipôle idéal
- la valeur en ohms du rapport  $u/i$ .

Dans le cas d'autres composants et éléments, on dispose des couples bobine - inductance et condensateur - capacité pour introduire la distinction nécessaire. Nous nous en tiendrons strictement à cette distinction qui n'est pas seulement d'ordre philologique mais qui souligne aussi une distinction conceptuelle entre la réalité et le modèle.

L'archaïsme de la littérature technique française et son flou conceptuel sont tels que le lecteur risque de rencontrer des termes mal définis tels que: inductance résistive, résistance selfique, capacité imparfaite. La redondance du contexte permet le plus souvent de deviner de quoi il s'agit.

### 1.4.8. Définitions et conventions relatives à l'inductance mutuelle

Le transformateur idéal défini au paragraphe 1.1.14 n'existe pas parmi les composants électriques. Aucun de ceux-ci ne s'en rapproche suffisamment pour que les équations (1.17) et (1.18) soient valables même approximativement en courant continu. Par contre, le transformateur idéal intervient dans le modèle de l'inductance mutuelle telle que nous l'étudierons maintenant.

Si deux bobines sont couplées par un flux magnétique (soit qu'elles soient enroulées sur le même noyau, soit qu'elles soient simplement à proximité l'une de l'autre), une variation de courant dans une bobine induit une tension aux bornes de l'autre. Les équations décrivant le quadripôle constitué par les deux bobines sont

$$\Phi_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2 \quad (1.34)$$

$$\Phi_2 = L_{12}i_1 + L_{22}i_2 \quad (1.35)$$

où  $L_{12}$  est l'*inductance mutuelle* des deux bobines. Il s'agit là d'équations globales qui ne postulent nullement que toutes les spires d'une bobine sont traversées par le même flux. Leur signification exacte provient de la relation (1.6) qui donne

$$u_1 = L_{11}(di_1/dt) + L_{12}(di_2/dt) \quad (1.36)$$

$$u_2 = L_{12}(di_1/dt) + L_{22}(di_2/dt) \quad (1.37)$$

Ces équations supposent bien entendu que les relations liant flux et courants sont linéaires et autonomes, qu'il n'y a ni pertes ni capacités parasites. Elles supposent de plus que les inductances mutuelles de la bobine 1 vers la bobine 2 et réciproquement ont une valeur commune  $L_{12}$ . Concrètement, cela signifie qu'un courant  $i$  circulant dans la bobine 1 crée un certain flux  $\Phi$  traversant la bobine 2, supposée à circuit ouvert ( $i_2 = 0$ ), et que le même courant circulant dans la bobine 2 crée le même flux traversant la bobine 1. Cette propriété est fondée sur les résultats de l'Electromagnétisme (§ III.4.6.2).

Les grandeurs  $L_{11}$  et  $L_{22}$  sont positives si une convention de signe analogue à celle de la figure 1.15 est adoptée pour chaque accès de la figure 1.36 qui symbolise une paire de bobines couplées par inductance mutuelle. Le signe de  $L_{12}$  est par contre quelconque: selon le sens respectif des enroulements ou bien les flux créés par  $i_1$  et  $i_2$  s'additionnent, ou bien ils se soustraient. Si  $L_{12}$  est positif et  $i_2 = 0$ , par (1.6)  $u_2 = d\Phi_2/dt = L_{12} di_1/dt$  et  $u_1 = L_{11} di_1/dt$ : en d'autres mots,  $u_2$  et  $u_1$  auront même signe, positif par exemple pour  $i_1$  croissant.

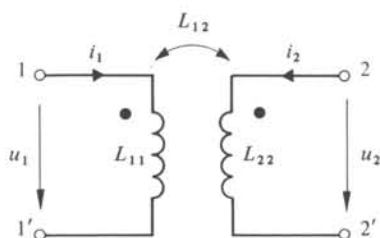


Fig. 1.36

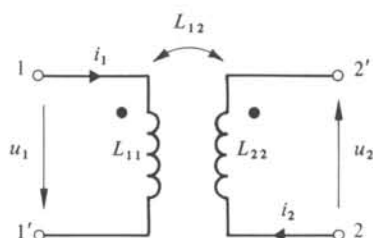


Fig. 1.37

Pour repérer les bornes des enroulements qui deviennent simultanément positives, on les marque d'un point ainsi que cela est représenté à la figure 1.36. La double flèche en dessous de  $L_{12}$  repère simplement les deux bobines qui sont couplées et ne dit rien quant au sens des enroulements. Cette double flèche est redondante dans un schéma aussi simple que celui de la figure considérée, mais elle devient nécessaire dans un réseau compliqué où les bobines ne sont pas dessinées à proximité l'une de l'autre.

Avec le symbolisme décrit et les conventions de sens de courant de la figure 1.36,  $u_2 = L_{12} di_1/dt$ . Si les conventions sont celles de la figure 1.37,  $u_2 = -L_{12} di_1/dt$ . Mais  $L_{12}$  est positif pour la figure 1.36 et négatif pour la figure 1.37.

#### 1.4.9. Exercice

Calculer l'inductance du dipôle obtenu en connectant en série deux bobines couplées par inductance mutuelle.

Si les bornes court-circuitées sont 1' et 2 à la figure 1.36, on a  $i_1 = i_2 = i$ ; par (1.36) et (1.37), on obtient

$$u = u_1 + u_2 = (L_{11} + L_{22} + 2L_{12})di/dt$$

Par contre si les bornes court-circuitées sont 1' et 2', on a  $i_1 = -i_2 = i$  et  $u = u_1 - u_2$ , d'où l'on déduit

$$u = (L_{11} + L_{22} - 2L_{12})di/dt$$

#### 1.4.10. Corollaire

Dans la mesure où le système (1.34), (1.35) est inversible (le cas particulier où il ne l'est pas sera traité au paragraphe 1.4.13), on peut écrire

$$i_1 = K_{11}\Phi_1 + K_{12}\Phi_2 \quad (1.38)$$

$$i_2 = K_{12}\Phi_1 + K_{22}\Phi_2 \quad (1.39)$$

#### 1.4.11. Energie emmagasinée dans deux bobines couplées

Par application de (1.24) au système (1.36) et (1.37), on trouve que l'énergie emmagasinée dans le système s'écrit

$$w(t) = [L_{11}i_1^2 + 2L_{12}i_1i_2 + L_{22}i_2^2]/2 \quad (1.40)$$

Puisque cette énergie doit être non négative pour toutes valeurs des courants, la forme quadratique (1.40) doit être définie positive : les relations  $L_{11} > 0$  ou  $L_{22} > 0$  et la relation

$$L_{11}L_{22} - L_{12}^2 \geq 0 \quad (1.41)$$

constituent des conditions nécessaires et suffisantes. La condition (1.41) peut se mettre sous la forme

$$|L_{12}|/(L_{11}L_{22})^{1/2} = k \leq 1 \quad (1.42)$$

Le coefficient de couplage  $k$  doit être inférieur ou égal à l'unité pour que deux bobines couplées constituent un quadripôle passif. Le couplage est dit serré ou lâche selon que  $k$  est proche de l'unité ou de zéro. Pour  $k = 1$  le couplage est parfait.

#### 1.4.12. Couplage parfait

Pour  $k = 1$ , les équations déduites de (1.36) et (1.37) s'écrivent

$$u_1 = L_{11}^{1/2}[L_{11}^{-1/2}di_1/dt + L_{22}^{1/2}di_2/dt] \quad (1.43)$$

$$u_2 = L_{22}^{1/2}[L_{11}^{-1/2}di_1/dt + L_{22}^{-1/2}di_2/dt] \quad (1.44)$$

Quels que soient  $i_1$  et  $i_2$ , on en déduit

$$u_1/u_2 = (L_{11}/L_{22})^{1/2} \quad (1.45)$$

Si l'on rappelle le fait que l'inductance d'une bobine est proportionnelle au carré du nombre de spires, (1.45) peut encore s'écrire

$$u_1/u_2 = n_1/n_2 \quad (1.46)$$

où  $n_1$  et  $n_2$  représentent respectivement les nombres de spires des deux bobines. Cette équation (1.46) est à rapprocher de (1.17) : la première équation décrivant le transformateur idéal est obtenue lorsque deux bobines sont parfaitement couplées, cas limite impossible à réaliser physiquement de façon rigoureuse.

### 1.4.13. Circuit équivalent de deux bobines couplées

L'analyse du circuit de la figure 1.38 fournit les équations

$$ni_1 = -i_2'$$

$$u_1' = nu_2$$

$$u_1 = u_1' + L_1 di_1/dt$$

$$i_2 = i_2' + i_2''$$

$$u_2 = L_2 di_2''/dt$$

d'où l'on déduit par élimination de  $i_2', i_2''$  et  $u_1'$

$$u_1 = (L_1 + n^2 L_2) di_1/dt + nL_2 di_2/dt \tag{1.47}$$

$$u_2 = nL_2 di_1/dt + L_2 di_2/dt \tag{1.48}$$

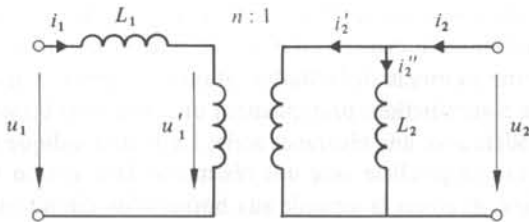


Fig. 1.38

Par comparaison de (1.47) et (1.36), (1.48) et (1.37) on trouve

$$L_{11} = L_1 + n^2 L_2, \quad L_{22} = L_2, \quad L_{12} = nL_2 \tag{1.49}$$

Deux bobines couplées sont donc représentables au moyen de deux inductances et d'un transformateur idéal.

Si  $L_1 = 0$ , le couplage est parfait et si, de plus,  $L_2$  tend vers l'infini, le schéma équivalent se réduit au transformateur idéal.

Dans le dispositif physique, le premier passage à la limite suppose que le flux magnétique traversant les deux bobines est identique et vaut  $\Phi = \Phi_1/n_1 = \Phi_2/n_2$ . Soit dit en passant, il faut remarquer que la grandeur baptisée flux au paragraphe 1.1.9 représente physiquement le produit du flux magnétique par le nombre de spires.

Le second passage à la limite suppose que les inductances  $L_{11}$  et  $L_{22}$  deviennent infinies; cela correspond à supposer que la perméabilité magnétique du noyau soit infinie.

### 1.4.14. Bipôles actifs

Il n'existe pratiquement pas de dispositifs physiques qui se comportent comme les sources indépendantes ou dépendantes qui ont été définies aux paragraphes 1.1.7 et 1.1.8. Ces sources interviennent cependant, combinées avec d'autres éléments, dans les modèles

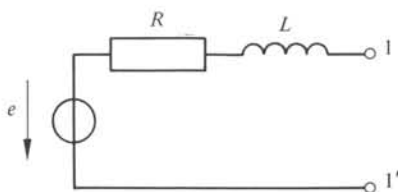


Fig. 1.39

équivalents de nombreux dispositifs qu'il n'est pas possible de recenser exhaustivement.

La distinction la plus commune entre les sources réelles et les bipôles idéaux est la présence dans les premières d'une résistance interne. Ainsi une dynamo peut être assimilée au modèle équivalent de la figure 1.39. L'inductance tient compte de l'énergie emmagasinée dans le circuit magnétique par le rotor et le stator de la machine (flux transversal). La résistance tient compte des effets dissipatifs dans le cuivre des enroulements.

La présence d'une résistance en série avec une source de tension peut encore recevoir une autre explication physique: ainsi que cela a été noté au paragraphe 1.2.2, la mise en court-circuit d'une source de tension non identiquement nulle est en contradiction avec les définitions axiomatiques d'une tension et d'une source. A cette exigence de cohérence interne au niveau de la Mathématique, correspond une situation physique qui prévient toute contradiction: pratiquement une source de tension est toujours associée dans un modèle avec une résistance série. La dualité indique qu'une source de courant est toujours en parallèle avec une résistance. Dès lors on ne peut ni court-circuiter la première, ni placer la seconde aux bornes d'un circuit ouvert.

#### 1.4.15. Paramètres incrémentaux

Les dispositifs électriques décrits jusqu'à présent simulent des éléments idéaux dans une zone plus ou moins large: au-delà de certaines valeurs limites, des effets non linéaires, toujours présents d'ailleurs, deviennent dominants. On peut dire que ces dispositifs sont linéaires pour des valeurs de courants et tensions qui ne s'écartent pas trop de zéro.

Un autre type de circuit électrique est constitué par des dispositifs qui sont franchement non linéaires autour de l'origine ( $i = 0, u = 0$ ) mais dont les paramètres ont

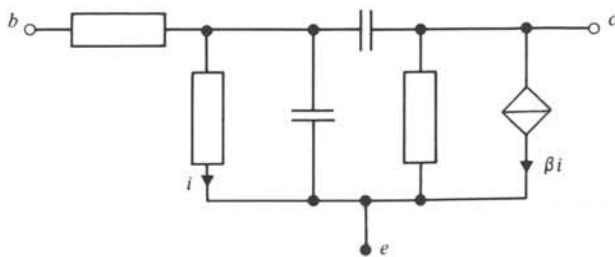


Fig. 1.40

une variation relativement faible autour d'un point de fonctionnement caractérisé par certains courants ou tensions de polarisation  $i = I_0, u = V_0$ . Tel est le cas des tubes à vide, des transistors, des amplificateurs magnétiques. A titre d'exemple, nous donnons à la figure 1.40 le modèle équivalent incrémental d'un transistor : il comporte en plus de deux capacités et de trois résistances, une source de courant commandée par un courant. Peu importe ici la signification physique de ce modèle : il constitue simplement un exemple de modèles très complexes.

#### 1.4.16. Réalisation physique du gyrateur

La plupart des éléments idéaux ont été suggérés par le comportement physique de composants électriques qui a été plus ou moins idéalisé. Il n'en va pas de même pour le gyrateur qui a été essentiellement introduit pour des raisons théoriques. Contrairement à la démarche historique propre aux autres éléments, où l'on est allé du composant physique à l'élément idéal, dans le cas du gyrateur on va de l'élément au composant. En fait les équations (1.19) et (1.20) sont celles de deux sources de tensions commandées par des courants (ou l'inverse) comme cela est représenté à la figure 1.41. Comme on dispose de composants (transistors par exemple) approchant le comportement d'une source commandée, on peut par connexion de ces composants approcher le comportement du gyrateur.

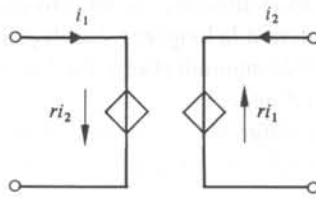


Fig. 1.41

#### 1.4.17. Conclusion

Cette section 1.4 a pour but de réaliser la liaison entre les phénomènes électromagnétiques, étudiés par la Physique, et le modèle mathématique proposé par la Théorie des Circuits pour les réseaux linéaires, autonomes et à constantes localisées.

Ceci a permis d'introduire ces composants que sont les bobines couplées et les sources réelles.

Par ailleurs, on aura remarqué combien les éléments idéaux sont rarement isolés. Hormis le cas de la capacité et de la résistance, la plupart des éléments sont disponibles seulement en combinaison avec d'autres. Il apparaît très clairement dans ce cas que les éléments idéaux n'ont pas d'existence physique proprement dite : il est impossible d'isoler la résistance de l'inductance et de la capacité de la figure 1.34. Les capacités et résistances de la figure 1.40 n'ont à proprement parler pas de localisation mais tiennent compte d'une foule de phénomènes physiques qui ne sont pas réductibles à l'effet Joule ou à la liaison entre charge et potentiel.

## 1.5. SYSTÈMES MÉCANIQUES

### 1.5.1. Introduction

Les considérations générales émises aux paragraphes 1.4.1 et 1.4.2 sont valables pour des systèmes mécaniques moyennant un certain nombre de précautions. Dans la mesure où un dispositif mécanique est constitué par l'assemblage de composants décrits par des relations algébriques ou différentielles analogues à celles définissant les éléments idéaux, on peut établir une correspondance entre les grandeurs physiques et idéales. Cette correspondance était implicite dans la section 1.4 : ici elle doit être explicitée. Une telle correspondance est désignée traditionnellement comme une analogie électromécanique encore qu'elle fasse se correspondre d'une part des grandeurs mécaniques et d'autre part des êtres mathématiques qui ont une terminologie commune avec les grandeurs électriques.

### 1.5.2. Limitations dues à la fréquence

Ces limitations sont beaucoup plus étroites que celles évoquées au paragraphe 1.4.2 pour les systèmes électriques. La vitesse de propagation des ondes mécaniques est en effet beaucoup plus basse : 331 m/s dans l'air, 1 450 m/s dans l'eau, 5 000 m/s dans l'acier. Ainsi dans ce dernier matériau, les longueurs d'onde correspondant respectivement à 50 Hz et à 50 kHz sont respectivement de 100 m et de 0,1 m. Dans le premier cas, typique des moteurs et alternateurs, on peut considérer les dimensions des machines comme négligeables devant la longueur d'onde ; dans le second cas, typique d'un filtre mécanique utilisé en télécommunications, les dimensions du dispositif sont du même ordre que la longueur d'onde.

Aussi la théorie des systèmes mécaniques à constantes localisées est-elle limitée aux applications à basse fréquence telles que celles rencontrées dans le domaine des servomécanismes.

### 1.5.3. Grandeurs "dans" et "entre"

Chaque bipôle doit être caractérisé par deux fonctions du temps selon le paragraphe 1.1.2 dont le produit a les dimensions d'une puissance selon le paragraphe 1.3.1. Enfin ces grandeurs relatives à des éléments connectés obéissent aux lemmes de Kirchhoff.

Ces trois exigences sont vérifiées si l'on considère, pour un système en mouvement de translation, la force comme analogue du courant et la vitesse comme analogue de la tension. L'analogie entre les grandeurs électriques et mécaniques est encore précisée si l'on considère les procédés de mesure. Un courant électrique se mesure par insertion dans le circuit d'un ampèremètre : une force se mesure par interposition d'un dynamomètre dans sa ligne d'action. Un potentiel se mesure entre la borne considérée et une référence appelée terre ou masse. Une vitesse se mesure entre deux points en mouvement. Une référence est appelée bâti ou référentiel galiléen ; sa vitesse est supposée identiquement nulle.

Dans certaines circonstances, il est parfois fait usage de l'analogie inverse : tension-force ; courant-vitesse. Rien d'essentiel n'est changé sinon que l'on opère en plus de l'ana-



logie électromécanique une transformation par dualité. Pour éviter cette complication, nous nous en tiendrons à la première analogie.

L'énoncé des lemmes de Kirchhoff est alors parallèle à celui des paragraphes 1.2.7 et 1.2.8.

#### 1.5.4. Lemmes de Kirchhoff pour réseaux mécaniques

La somme des forces incidentes en un noeud est nulle.

La somme algébrique des vitesses associées à des éléments constituant une maille est nulle.

#### 1.5.5. Bipôles passifs

La *masse*  $M$  a pour symbole graphique celui représenté à la figure 1.42. La grandeur  $f$  représente la somme des forces agissant sur la masse en son centre de gravité. La grandeur  $v$  représente la vitesse de déplacement du centre de gravité par rapport au référentiel. On constate qu'une borne du bipôle est toujours connectée au référentiel.

La relation entre  $f$  et  $v$  s'écrit

$$f = Mdv/dt \quad (1.50)$$

ou

$$v = M^{-1} \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = v(0) + M^{-1} \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (1.51)$$

La masse est donc l'équivalent d'une capacité avec la particularité que toutes les capacités du réseau ont une borne à la terre;  $M$  est une grandeur positive si  $f$  et  $v$  ont même sens avec les conventions de signe de la figure 1.42.

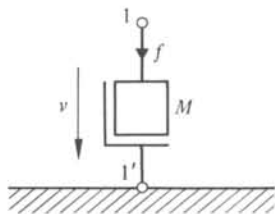


Fig. 1.42

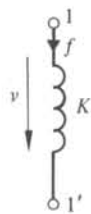


Fig. 1.43

Le *ressort* représenté à la figure 1.43 a un *coefficient de raideur*  $K$ . La grandeur  $f$  représente la force qui comprime le ressort et  $v$  la vitesse de déformation de celui-ci, c'est-à-dire la vitesse relative d'une extrémité du ressort par rapport à l'autre. La relation entre  $v$  et  $f$  s'écrit

$$v = K^{-1}df/dt \quad (1.52)$$

ou

$$f = K \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau = f(0) + K \int_0^t v(\tau) d\tau \quad (1.53)$$

Le ressort est donc une inductance et  $K$  est positif.

Le *dash-pot* ou *résistance de frottement* est représenté à la figure 1.44. La grandeur  $f$  représente la force qui provoque un déplacement relatif des deux organes en frottement et  $v$  la vitesse relative de ces deux organes. Ces grandeurs sont reliées par la relation

$$v = Bf \quad (1.54)$$

et cet élément est donc une résistance.

Les hypothèses habituelles de linéarité et d'autonomie doivent évidemment être respectées pour ces éléments. A titre d'exemple, signalons que la loi (1.54) n'est généralement valable que par approximation pour de petits mouvements.

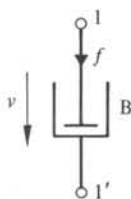


Fig. 1.44

### 1.5.6. Systèmes mécaniques en mouvement circulaire

Dans un système mécanique en mouvement de rotation, la grandeur “dans” est le couple  $C$  et la grandeur “entre” est la vitesse angulaire  $\omega$ . L'équivalent de la résistance est le frottement produisant un couple  $C = D\omega$ ; l'équivalent de la capacité est le moment d'inertie  $J$  produisant un couple  $C = Jd\omega/dt$ ; l'équivalent de l'inductance est un coefficient de raideur  $K$  tel que  $\omega = KdC/dt$ .

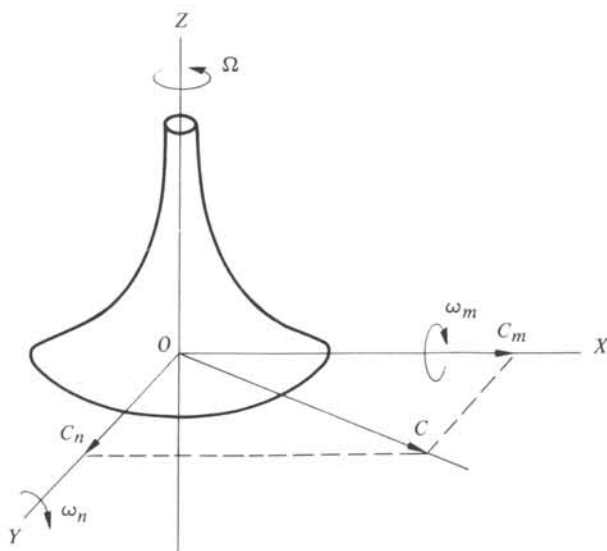


Fig. 1.45

Pour les systèmes en mouvement circulaire, un engrenage sans frottement est l'équivalent d'un transformateur idéal. D'autre part, considérons un gyroscope, corps rigide de forme cylindrique en rotation uniforme de vitesse  $\Omega$  autour de son axe  $OZ$  (fig. 1.45); on lui applique un couple  $C$  représenté par un vecteur situé dans un plan  $XOY$  perpendiculaire à  $OZ$ ; si  $C_n$  et  $C_m$  sont les composantes de  $C$  et si  $\omega_x$  et  $\omega_y$  sont les vitesses angulaires correspondantes, on a, pour de petits mouvements autour de la position initiale

$$C_m = I d\omega_m/dt + \Omega(I - I_R)\omega_n$$

$$C_n = I d\omega_n/dt - \Omega(I - I_R)\omega_m$$

Dans ces relations,  $I_R$  désigne le moment d'inertie autour de  $OZ$ , tandis que  $I$  est le moment d'inertie autour d'un axe quelconque situé dans le plan  $XOY$ .

Le modèle électrique qui simule l'effet gyroscopique est donc un gyrateur dont chaque accès est connecté à une capacité (fig. 1.46).

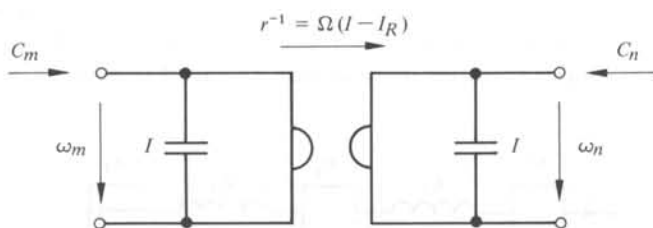


Fig. 1.46

### 1.5.7. Quadripôles passifs pour un mouvement de translation

Le levier infiniment rigide, sans masse et sans frottement est un transformateur idéal. Avec les notations de la figure 1.47, on a les équations

$$f_1 = \alpha f_2 \quad (1.55)$$

$$\alpha v_1 = -v_2 \quad (1.56)$$

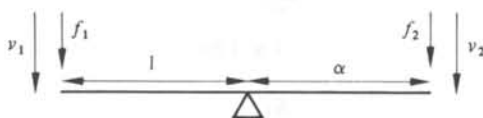


Fig. 1.47

### 1.5.8. Sources

On peut concevoir des sources de force et des sources de vitesse et leur affecter respectivement les symboles des figures 1.8 et 1.7. Un exemple du second type est un piston mû par un fluide incompressible introduit dans le cylindre par une pompe à débit constant.

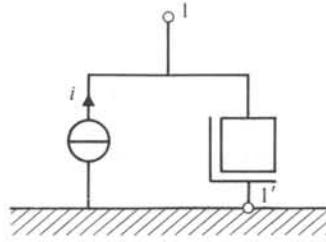


Fig. 1.48

Le champ de gravité dans lequel est généralement plongée toute masse offre un exemple de source de force que l'on est tenté d'oublier. Le circuit équivalent d'une masse plongée dans un champ est donc celui de la figure 1.48.

### 1.5.9. Mise en circuit d'un système mécanique

Le principe de la méthode consiste à repérer les points doués d'un déplacement indépendant: il y correspondra autant de vitesses indépendantes et donc, dans l'analogie choisie, de noeuds à potentiels indépendants. Le circuit se construit alors branche par branche.

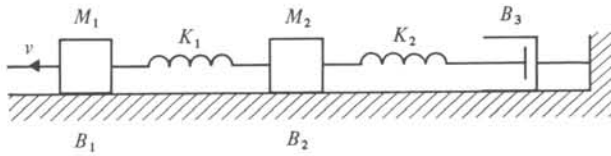


Fig. 1.49

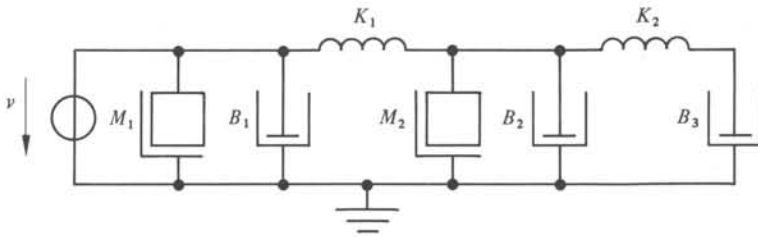


Fig. 1.50

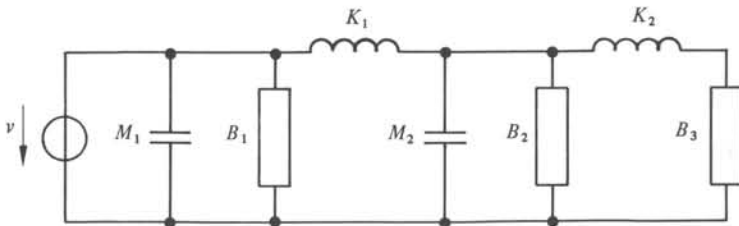


Fig. 1.51

Un premier exemple est celui de la figure 1.49, où est représenté un schéma physique comportant deux masses  $M_1$  et  $M_2$  glissant avec les frottements  $B_1$  et  $B_2$ ;  $M_1$  est animé d'une vitesse  $v$  imposée et est relié à  $M_2$  par un ressort de raideur  $K_1$ ;  $M_2$  est relié au bâti via un ressort de raideur  $K_2$  et un dash-pot  $B_3$ . La figure 1.50 explicite tous les éléments mécaniques en particulier  $B_1$  et  $B_2$  et marque bien que  $M_1$  et  $M_2$  ont une borne à la masse. Le circuit équivalent 1.51 s'en déduit immédiatement.

Le second exemple est celui de la figure 1.52 où deux masses  $M_1$  et  $M_2$  reliées entre elles par un levier sont attachées au bâti par un ressort et un dash-pot pour  $M_1$  et un ressort pour  $M_2$ . Le circuit équivalent est dessiné en 1.53.

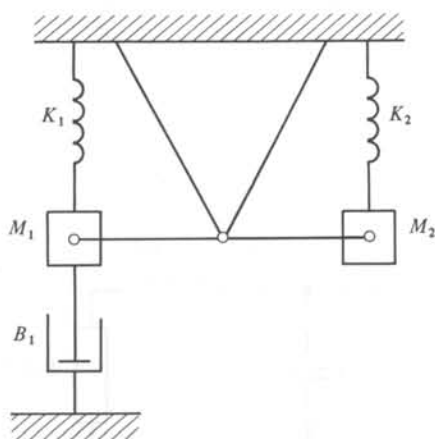


Fig. 1.52

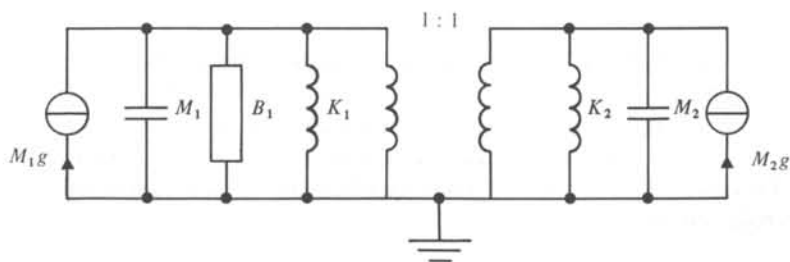


Fig. 1.53

### 1.5.10. Transducteurs

La plupart des dispositifs physiques impliquent des échanges entre plusieurs types d'énergie. On peut même dire que c'est généralement le cas pour les circuits électriques où l'électricité joue principalement un rôle d'intermédiaire: un alternateur transforme l'énergie mécanique en énergie électrique à la seule fin d'alimenter un moteur qui effectuera l'opération inverse; un microphone et un haut-parleur réalisent le même type d'opération. En général, tout dispositif réalisant une conversion d'énergie est appelé *transducteur*.

Le transducteur lui-même a un circuit équivalent où les grandeurs de type différent coexistent. Si l'on désire toujours se ramener à l'analogie électromécanique, décrite au paragraphe 1.5.3, il faut le cas échéant prévoir un gyrateur dans ce circuit équivalent.

Un circuit équivalent très sommaire d'un transducteur à magnétostriction est un transformateur idéal : le courant est proportionnel à la force. Par contre celui d'un transducteur piézoélectrique est un gyrateur : le courant est proportionnel à la vitesse.

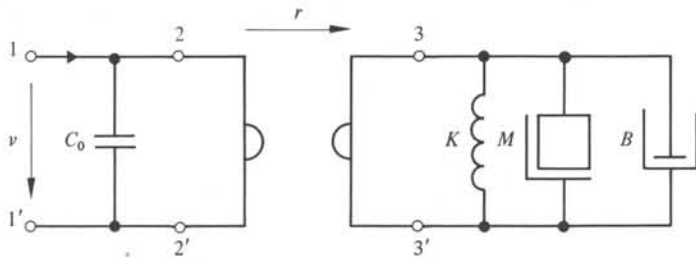


Fig. 1.54

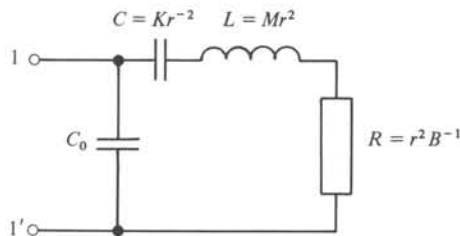


Fig. 1.55

A titre d'exemple, le schéma équivalent électromécanique d'un quartz piézoélectrique est donné à la figure 1.54 et la figure 1.55 représente le schéma purement électrique; les éléments équivalents ( $C$ ,  $L$ ,  $R$ ) ont été transférés vers l'autre accès du gyrateur où ils se retrouvent connectés en série; l'accès 3, 3' du gyrateur étant resté ouvert, on peut considérer que l'accès 2, 2' est en court-circuit : c'est la raison pour laquelle on n'a pas redessiné le gyrateur.

## 1.6. SYSTÈMES ACOUSTIQUES

### 1.6.1. Introduction

Soit le dispositif physique de la figure 1.56, constitué d'une cavité et d'un tube supposés remplis d'un fluide, air par exemple; sous l'action d'un piston animé d'un mouvement oscillatoire de vitesse  $v_0(t)$ , une onde acoustique  $y$  est générée et s'y propage.

Un tel dispositif est un exemple simple de système acoustique se traitant par l'étude d'un circuit à constantes localisées, pour autant que ses dimensions soient petites par rapport aux longueurs d'onde des phénomènes considérés.

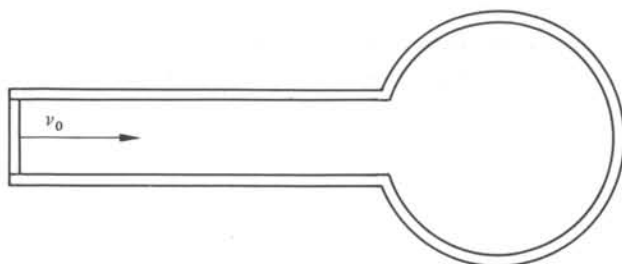


Fig. 1.56

A titre d'exemple, l'enceinte acoustique d'un haut-parleur a des dimensions de l'ordre du décimètre. Aux basses fréquences, dans le voisinage de 30 Hz, la longueur d'onde est de l'ordre de 10 m correspondant à la vitesse de propagation de 331 m/s. On peut effectivement considérer l'enceinte comme un élément localisé.

Comme dans la section 1.5, il est nécessaire d'explicitier la correspondance entre composants acoustiques et éléments idéaux.

### 1.6.2. Définition des grandeurs "dans" et "entre"

Les grandeurs acoustiques caractéristiques sont la *pression acoustique*  $p(t)$ , différence entre pression instantanée et pression au repos et le *flux de vitesse acoustique*  $U(t)$  correspondant à un débit volumique de fluide.

On vérifie que leur produit a bien les dimensions d'une puissance conformément à l'exigence du paragraphe 1.3.1.

Ces grandeurs doivent être définies sur une *surface caractéristique*  $S$  du système étudié. Pour le dispositif de la figure 1.56, il s'agit de la section droite du tube. Dans certaines conditions, on a

$$U(t) = Sv(t) \quad (1.57)$$

$$p(t) = S^{-1}f(t) \quad (1.58)$$

où  $v(t)$  et  $f(t)$  sont respectivement la vitesse acoustique sur la surface  $S$  et la force due à la pression  $p(t)$ .

Comme pour les systèmes mécaniques décrits sous 1.5, deux types d'analogie sont possibles selon les correspondances établies avec les grandeurs courant et tension.

Le premier fait correspondre pression acoustique et tension d'une part, flux de vitesse acoustique et courant d'autre part. Le second établit les correspondances contraires. Le premier s'avère d'usage plus aisé, en particulier pour la mise en circuit d'un système acoustique. On remarque en effet que la mesure d'une pression acoustique se fait au moyen d'un microphone placé en un point d'un système, par rapport à une pression acoustique nulle régnant en un point, terre ou masse, très éloigné: par nature, la pression acoustique est donc une grandeur "entre". Par contre, le flux de vitesse acoustique est, par sa définition même, une grandeur "dans". Aussi, dans cette section, utilise-t-on uniquement ce premier type d'analogie.

### 1.6.3. Lemmes de Kirchhoff pour les systèmes acoustiques

La somme des flux de vitesse incidents en un noeud est nulle.

La somme algébrique des pressions associées à des éléments constituant une maille est nulle.

### 1.6.4. Bipôles passifs

La masse acoustique correspond à une portion de fluide subissant un déplacement sans déformation appréciable. Par exemple, dans le système de la figure 1.56, on admet que c'est le cas de la portion de fluide contenue dans le tube.

Une telle portion de fluide se comportant alors comme un solide indéformable, on est en droit de lui appliquer la relation (1.50) qui, compte tenu des relations (1.57) et (1.58), s'écrit

$$p = M_a dU/dt \quad (1.59)$$

ou

$$U = M_a^{-1} \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = v(0) + M_a^{-1} \int_0^t p(\tau) d\tau \quad (1.60)$$

où  $M_a$  est la masse acoustique de valeur  $M/S^2$ ,  $M$  étant la masse en kg de la portion de fluide.

La relation (1.59) montre que dans le type d'analogie considéré, la masse acoustique est l'équivalent d'une inductance, de valeur positive par un choix convenable des conventions de signe pour  $p$  et  $U$ .

Le *ressort acoustique* correspond à une portion de fluide subissant une déformation sans déplacement de son centre de gravité. Par exemple, on admet que c'est le cas de la portion de fluide contenue dans la cavité du dispositif de la figure 1.56. Une telle portion de fluide se comportant comme un ressort mécanique, on est en droit de lui appliquer la relation (1.52) qui, compte tenu des relations (1.57) et (1.58), s'écrit

$$U = K_a^{-1} dp/dt \quad (1.61)$$

ou

$$p = K_a \int_{-\infty}^t U(\tau) d\tau = p(0) + K_a \int_0^t U(\tau) d\tau \quad (1.62)$$

où  $K_a$  est le coefficient de raideur acoustique de valeur  $K/S^2$ ,  $K$  étant la raideur d'un ressort mécanique équivalent à la portion de fluide considérée.

Le ressort acoustique est donc l'analogie d'une capacité de valeur positive avec la particularité que toutes les capacités d'un réseau ont une borne à la terre.

La *résistance acoustique* correspond aux pertes dissipatives par frottement à travers des tubes capillaires, des fentes ou des trous fins, des grilles ou des tissus à mailles serrées.

La résistance acoustique apparaît souvent comme un composant parasite. Par exemple, le dispositif de la figure 1.56 ne contient pas explicitement de résistance acoustique; un élément correspondant doit néanmoins être introduit dans le circuit analogue pour rendre compte des pertes constatées par expérimentation.

Inversement, il n'est pas possible de réaliser un composant résistance acoustique dénué de masse acoustique parasite. Pour une résistance acoustique idéale, la relation



entre pression et flux de vitesse s'écrit

$$p = R_a U \tag{1.63}$$

et cet élément est donc l'analogie de la résistance.

Lorsqu'un système acoustique débouche dans un milieu et y génère une onde, le rayonnement d'énergie correspondant peut se représenter dans le circuit analogue par une combinaison d'éléments idéaux. Cette dernière dépend des conditions de rayonnement et de la structure de l'onde produite. Par exemple, le rayonnement d'un haut-parleur dans un espace libre se représente par la connexion en série d'une résistance et d'une masse de rayonnement dont les valeurs dépendent de la fréquence.

### 1.6.5. Quadripôles passifs

Un pavillon, à savoir un conduit de section croissante ou décroissante, peut être considéré comme équivalent à un transformateur idéal au prix de certaines approximations et dans un domaine de fréquence restreint.

Il n'existe pas de systèmes acoustiques correspondant au gyrateur.

Comme mentionné dans le paragraphe 1.5.10, l'étude des transducteurs électro- et mécanoacoustiques fait un large usage des quadripôles passifs pour expliciter les différentes transformations d'énergie mises en jeu.

### 1.6.6. Sources acoustiques

On peut réaliser des sources de pression et de flux de vitesse acoustiques et leur affecter respectivement les symboles des figures 1.7 et 1.8. Ainsi le piston du dispositif de la figure 1.56 est une source de flux de vitesse  $U_0 = S v_0$ . Un exemple de source de pression est le système acoustique usuellement appelé voix artificielle; il est principalement constitué d'un petit haut-parleur et d'un microphone destinés à permettre la régulation de la pression acoustique produite par un asservissement ad hoc.

### 1.6.7. Mise en circuit d'un système acoustique

Le principe de la méthode consiste à repérer les sources, puis les portions de fluide se comportant comme des masses ou des ressorts acoustiques et celles subissant des pertes dissipatives, et enfin les éventuels rayonnements; leurs jonctions définissent les noeuds du circuit entre lesquels on insère les éléments adéquats.

La figure 1.57 représente le circuit analogue ainsi construit pour le dispositif de la figure 1.56.

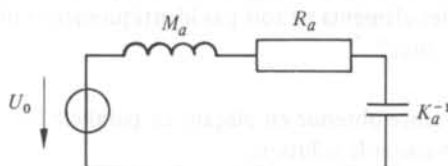


Fig. 1.57

## 1.7. EXERCICES

- 1.7.1.** Quel est l'élément équivalent à deux résistances en série, en parallèle? Même question pour deux inductances et deux capacités. En supposant que les valeurs des résistances soient  $1\,000\ \Omega$  et  $1\ \Omega$  calculer la valeur résultante. Même opération avec des inductances et des capacités dont les valeurs sont dans le rapport de 1 à 1 000.
- 1.7.2.** Calculer la résistance (l'inductance, la capacité) équivalente à  $n$  résistances (inductances, capacités) mises en série (en parallèle). Que devient le résultat lorsque les  $n$  éléments considérés ont même valeur?
- 1.7.3.** Soit un premier bipôle constitué d'une source de courant  $i$  en parallèle avec une résistance  $R$  et un second bipôle constitué par une source de tension  $u_s$  en série avec une résistance  $R'$ . Quelles conditions doivent satisfaire  $i$ ,  $u_s$ ,  $R$  et  $R'$  pour que ces deux bipôles soient équivalents?
- 1.7.4.** Mettre en équation le circuit constitué par la mise en série d'une résistance  $R$ , d'une capacité  $C$ , d'une inductance  $L$  et d'une source de tension. Trouver le circuit dual.
- 1.7.5.** Si l'on connecte une résistance (une inductance, une capacité, une source de tension, une source de courant) entre les bornes  $2, 2'$  d'un transformateur idéal, quel est le bipôle résultant?
- 1.7.6.** Soit un premier biporte constitué par un gyrateur déséquilibré de résistance de gyration  $r$  et par une inductance  $L$  entre les bornes  $2, 2'$ . Un second biporte est constitué par le même gyrateur et par une capacité  $C$  en série avec la borne 1. Prouver l'équivalence de ces deux biportes et établir la relation qui en résulte entre  $C$  et  $L$ .
- 1.7.7.** Supposons que l'on ne dispose comme éléments que de gyrateurs et de capacités déséquilibrés. Est-il possible de construire au moyen de ces éléments un biporte équivalent à celui constitué par une capacité entre 1 et 2,  $1'$  et  $2'$  étant la masse?
- 1.7.8.** Soit un circuit constitué par la mise en série d'une source de courant  $i = I \cos \omega t$ , une inductance  $L$  et une capacité  $C$  pour laquelle on suppose  $u(0) = 0$ . Calculer la puissance instantanée absorbée par chaque élément et son niveau d'énergie. Existe-t-il une valeur de  $\omega$ , fonction de  $L$  et  $C$ , telle que la source ne débite pas de puissance instantanée? Expliquer comment il se fait que néanmoins la puissance instantanée absorbée par les éléments ne soit pas identiquement nulle. Quelle est la tension aux bornes de la source?
- 1.7.9.** Calculer l'inductance obtenue en plaçant en parallèle les deux accès d'une paire de bobines couplées. Discuter la solution.
- 1.7.10.** Imaginer un autre schéma équivalent du gyrateur que celui de la figure 1.41.

1.7.11. Soient trois inductances  $L_a, L_b$  et  $L_c$  qui ont une borne en commun. La borne libre de  $L_a$  constitue la borne 1 d'un quadripôle, celle de  $L_b$  la borne 2, celle de  $L_c$  les bornes 1' et 2'. Prouver que ce quadripôle est équivalent à celui de la figure 1.36 lorsque 1' et 2' sont court-circuitées. Discuter le signe des inductances. Imaginer un autre quadripôle comportant trois inductances et équivalent à celui de la figure 1.36.

1.7.12. Soient deux transformateurs idéaux de rapport  $n_1$  et  $n_2$ . Si l'on connecte un accès de l'un à un accès de l'autre, calculer le rapport de transformation du transformateur idéal résultant.

1.7.13. Si deux transformateurs idéaux ont des rapports  $n_1 \neq n_2$  pourquoi ne peut-on mettre les deux paires d'accès ni en parallèle, ni en série? Par contre on peut mettre une paire en série et l'autre en parallèle. Quel est le rapport résultant?

1.7.14. Soit un bipôle constitué par la mise en parallèle d'une résistance  $R$  et d'une source de courant  $\alpha i$  commandée par le courant  $i$  pénétrant dans le bipôle. Quel est l'élément équivalent? Discuter le signe.

1.7.15. Construire un circuit comportant des résistances et des sources de tension sur lequel on puisse vérifier le théorème de Tellegen.

1.7.16. Dessiner le système mécanique dont le circuit équivalent est : une résistance en parallèle avec une inductance; deux résistances en parallèle; une source de tension en série avec une inductance et une capacité.

1.7.17. Quel est le circuit équivalent du système mécanique constitué par deux masses  $M_1, M_2$  reliées au bâti par les ressorts  $K_1$  et  $K_2$  et une troisième masse  $M_3$  reliée aux deux premières par des ressorts  $K_3$  et  $K_4$ ? Les masses sont dans un champ gravitationnel.

1.7.18. Trouver des exemples de transducteurs réalisant la conversion

- de l'énergie électrique en énergie thermique et réciproquement;
- de l'énergie hydraulique en énergie mécanique et réciproquement;
- de l'énergie thermique en énergie mécanique et réciproquement.

1.7.19. La résistance est-elle un transducteur?

1.7.20. Soit un circuit constitué par la mise en série d'une source de tension continue  $U$ , d'une résistance  $R_1$  et d'une résistance  $R_2$ . Si  $U$  et  $R_1$  sont fixes, quelle valeur de  $R_2$  choisir pour que la puissance dissipée sur  $R_2$  soit maximum? Quelles sont alors les valeurs de cette puissance et de la tension aux bornes de  $R_2$ ? Donner deux valeurs de  $R_2$  pour lesquelles la puissance dissipée soit nulle.



PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES  
DES SYSTÈMES

## 2.1. ANALYSE FRÉQUENTIELLE

## 2.1.1. Introduction

Au chapitre précédent on a introduit une description des réseaux de Kirchhoff qui sont spécifiés par un graphe, par la nature des éléments dans chaque branche de celui-ci et par les valeurs initiales des grandeurs électriques intéressant inductances et capacités. Nous avons montré sur un exemple au paragraphe 1.2.16 que les grandeurs inconnues constituaient les solutions d'une ou de plusieurs équations différentielles. Le but de ce chapitre 2 est de montrer comment l'on peut résoudre ces équations différentielles avant d'aborder au chapitre 3 le problème qui consiste à écrire ces équations dans les cas les plus simples.

Pour comprendre ce chapitre 2, le lecteur est censé connaître la matière des annexes relatives à la transformée de Fourier (chap. 7) et à la transformée de Laplace (chap. 8).

## 2.1.2. Définitions

On appelle *signal* (*excitation, sollicitation*) toute grandeur  $s(t)$ , courant ou tension, qui est spécifiée par une source indépendante et qui constitue donc une donnée du problème.

On appelle *réponse*  $r(t)$  toute autre grandeur caractérisant le réseau et, en particulier, celle qui a une importance au point de vue de l'application technique considérée.

Les signaux et les réponses, considérés dans ce volume, sont des distributions. Hormis le cas de la distribution de Dirac, ces distributions sont toujours des distributions régulières associées à des fonctions. Selon les besoins de l'exposé, on considérera tantôt signaux et réponses sous leur aspect de fonctions, tantôt sous celui de distributions.

## 2.1.3. Propriété

L'ensemble des signaux et celui des réponses constituent des espaces vectoriels par la propriété 7.1.7. La somme de plusieurs signaux (réponses) multipliés par des constantes est donc toujours un signal (une réponse).

## 2.1.4. Propriété

La dérivée d'un signal ou d'une réponse est toujours un signal ou une réponse par suite de la propriété 7.1.25.

### 2.1.5. Définition

Si l'on ne considère que la description mathématique d'un réseau, c'est-à-dire le système d'équations liant les réponses et les signaux, on peut définir l'application de l'espace des signaux dans l'espace des réponses par l'opérateur

$$r(t) = N[s(t)] \quad (2.1)$$

Cette spécification abstraite définit un *système*. Celui-ci admet généralement plusieurs réalisations concrètes par des réseaux construits au moyen d'éléments idéaux.

On supposera dans la suite que les systèmes considérés sont *continus*, c'est-à-dire qu'à toute suite  $s_n$  convergeant vers zéro au sens du paragraphe 7.1.30 correspond une suite  $r_n$  convergeant également vers zéro. La spécification d'un système par un opérateur suppose un certain nombre d'hypothèses supplémentaires que nous ne pouvons pas détailler ici [3], [4].

Un système sera représenté par le symbole de la figure 2.1.



Fig. 2.1

### 2.1.6. Exemple

Le système défini par l'équation  $u = L di/dt$  où  $u$  est le signal et  $i$  la réponse peut être construit concrètement au moyen d'une source de tension fermée soit sur une inductance, soit sur un gyrateur dont un accès est fermé sur une capacité.

### 2.1.7. Décomposition en signaux élémentaires

Un système peut être soumis à une variété infinie de signaux. C'est spécialement le cas pour un système transmettant de l'information tel qu'un réseau téléphonique et c'est précisément le fait que les signaux soient variés et imprévisibles qui fait l'utilité du téléphone. Comment peut-on étudier un tel circuit?

L'idée fondamentale pour résoudre cette question consiste à étudier la réponse du système à certains signaux élémentaires. En pratique, on en considère deux: l'exponentielle complexe et l'impulsion unité. Le but des sections 2.1 et 2.2 est de montrer que la réponse à l'un ou à l'autre de ces signaux permet de déduire la réponse à un signal quelconque.

### 2.1.8. Définitions

Un système est à l'état *quiescent* si, en l'absence de signal, il n'y a pas de réponse:  $r(t) \equiv 0$ . Tel est le cas pour un réseau de Kirchhoff si les inductances et les capacités ne contiennent pas d'énergie emmagasinée: sans sources, il n'y a pas de courant qui circule puisqu'on ne peut ni dissiper, ni emmagasiner de l'énergie selon le théorème 1.3.12. Pour un système à l'état quiescent, les réponses dépendent exclusivement des signaux.

La réponse du système à l'état quiescent est appelée *réponse forcée*.

Si un système n'est pas à l'état quiescent, sa réponse  $r(t) \neq 0$  à un signal  $s(t) \equiv 0$  est appelée *réponse libre*. Dans un réseau de Kirchhoff cette réponse est due à l'énergie emmagasinée dans les inductances et les capacités.

Un système est *linéaire*, si, à toutes les paires de réponses forcées

$$r_a(t) = N[s_a(t)]$$

et

$$r_b(t) = N[s_b(t)]$$

qui sont associées au système, correspond la réponse forcée

$$ar_a(t) + br_b(t) = N[as_a(t) + bs_b(t)] \quad (2.2)$$

pour  $a$  et  $b$ , grandeurs complexes quelconques.

Un système est *invariant dans le temps*, si, à toute réponse forcée

$$r(t) = N[s(t)]$$

associée au système, correspond la réponse forcée

$$r(t - \tau) = N[s(t - \tau)] \quad (2.3)$$

où  $\tau$  est une grandeur réelle quelconque.

### 2.1.9. Théorème

La réponse forcée à la dérivée d'un signal est la dérivée de la réponse au signal si le système est linéaire et invariant dans le temps.

Il ressort immédiatement de (2.2) et (2.3) que le système admettant la réponse  $r(t) = N[s(t)]$  admet aussi

$$[r(t + \Delta t) - r(t)]/\Delta t = N\{[s(t + \Delta t) - s(t)]/\Delta t\}$$

En faisant tendre  $\Delta t$  vers zéro, le théorème est prouvé pour les signaux qui sont des fonctions dérivables. Par un passage à la limite identique à celui utilisé à la section 7.1, il est prouvé pour les distributions.

### 2.1.10. Définition

Une *fonction isomorphe*  $f(t)$  d'un système est une fonction telle que le système admette la paire

$$bf(t) = N[af(t)]$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes complexes.

### 2.1.11. Théorème

L'exponentielle complexe est une fonction isomorphe d'un système linéaire et invariant dans le temps.

Soit  $s(t) = \exp(pt)$  et  $r(t)$  la réponse inconnue. Par (2.3),  $s(t + \tau) = \exp p(t + \tau)$  entraîne une réponse  $r(t + \tau)$ . Par (2.2),  $s(t + \tau)$ , qui peut s'écrire  $\exp(p\tau) \cdot \exp(pt)$ , entraîne une réponse  $\exp(p\tau)r(t)$ . Dès lors on a

$$r(t + \tau) = \exp(p\tau)r(t)$$

et pour  $t = 0$

$$r(\tau) = r(0) \exp(p\tau) \quad (2.4)$$

Comme (2.4) est valable pour  $\tau$  quelconque, le théorème est démontré.

### 2.1.12. Définitions

Le facteur de proportionnalité  $r(0)$  intervenant dans (2.4) est en général une fonction de  $p$ . On posera donc  $r(0) = G(p)$ . Dans ce cas on a

$$r(t) = G(p) \exp(pt) \quad (2.5)$$

et  $G(p)$  est appelée *fonction de réponse isomorphe*. A la figure 2.2 on a représenté un système caractérisé par sa fonction de réponse isomorphe.

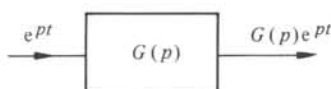


Fig. 2.2

Si la fonction de réponse a les dimensions de la résistance, on l'appelle *impédance*. Si elle a les dimensions de la conductance, on l'appelle *admittance*. Si elle n'a pas de dimension, on parle de *coefficient de transfert en courant* ou *en tension*, selon qu'il s'agit du rapport de deux courants ou de deux tensions.

Si les deux grandeurs constituant le signal et la réponse sont relatives à la même branche, l'une étant la tension et l'autre le courant, la fonction de réponse est désignée du terme général d'*immittance*, couvrant à la fois le cas de l'impédance et de l'admittance. Si les deux grandeurs sont relatives à des branches différentes, on parle de *transmittance*.

### 2.1.13. Commentaire

Le théorème 2.1.11 est valable pour toute valeur de  $p$ , hormis pour les valeurs  $p_i$  correspondant à des pôles de  $G(p)$ , c'est-à-dire telles que  $G(p_i) = \infty$ . Dans ce cas, on montrera que la réponse contient un terme  $t \exp(pt)$ . Ce cas particulier sera étudié au paragraphe 2.3.9. De toute façon pour les réseaux de Kirchhoff, on montrera que les valeurs  $p_i$  sont en nombre fini.

### 2.1.14. Commentaire

Si l'on exclut le cas particulier traité au paragraphe 2.1.13, l'exponentielle complexe jouit donc de la propriété remarquable de traverser un système linéaire et invariant dans le temps sans être modifiée si ce n'est dans son amplitude: la dépendance par rapport au temps n'est pas modifiée.



Par ailleurs, les transformées de Fourier et de Laplace montrent qu'un signal peut être exprimé par la combinaison linéaire (somme ou intégrale) de fonctions exponentielles. Chacune de celles-ci se propage indépendamment dans le système: la réponse peut se calculer en superposant, par suite de la linéarité, les exponentielles qui constituent les réponses partielles.

### 2.1.15. Transmission de signaux quelconques

A la figure 2.3, on a représenté successivement la transmission d'une exponentielle pour  $p$  imaginaire pur et la transmission d'une somme de telles exponentielles. Il est clair que la connaissance de  $G(p)$  permet de calculer la réponse à tout signal périodique, exprimé sous forme d'une série de Fourier.

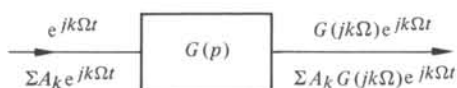


Fig. 2.3

De façon plus générale, à la figure 2.4 tout signal peut être exprimé en fonction de sa transformée de Fourier par la formule (7.57)

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

Chaque composante  $S(\omega) \exp(j\omega t)$  est transmise sous la forme  $G(j\omega) S(\omega) \exp(j\omega t)$  et la transformée de Fourier de la réponse est donnée par  $S(\omega) G(j\omega)$ .

De la même façon, on peut démontrer la propriété analogue pour la transformée de Laplace.

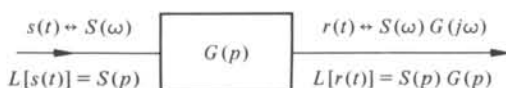


Fig. 2.4

### 2.1.16. Théorème

La transformée de Laplace ou de Fourier de la réponse forcée est respectivement le produit de la transformée de Laplace ou de Fourier du signal par la fonction de réponse isomorphe  $G(p)$  ou  $G(j\omega)$ .

### 2.1.17. Commentaire

Ce dernier théorème constitue la base de l'analyse fréquentielle des systèmes. En effet, la notion d'exponentielle complexe recouvre le cas particulier du signal  $\exp(j\omega t) = \cos \omega t + j \sin \omega t$ . La représentation d'un système par sa fonction de réponse isomorphe permet de calculer directement la réponse à une excitation sinusoïdale. Il

suffit de remplacer  $p$  par  $j\omega$  dans l'expression de  $G(p)$ . La réponse forcée à  $\cos \omega t = \operatorname{Re} [\exp(j\omega t)]$  est donnée par  $\operatorname{Re} [G(j\omega) \exp(j\omega t)]$ .

Grâce à la représentation d'un signal quelconque au moyen de sa transformée de Laplace, on peut calculer la réponse si l'on connaît  $G(p)$ . Cette dernière fonction apparaît donc comme un outil fondamental en théorie des systèmes linéaires.

Pour un débutant, cette méthode apparaît au premier abord comme inutilement compliquée: pourquoi représenter des signaux réels et de durée limitée comme une superposition de signaux complexes de la forme  $\exp(pt)$  existant depuis  $t = -\infty$ ? Pourquoi étudier la propagation d'un signal  $\exp(j\omega t)$  alors que le signal intéressant est de la forme  $\cos \omega t$ ? Pourquoi représenter les courants et les tensions, qui ont été définis comme des fonctions, par des distributions?

Il faut accepter ces complications apparentes dans le même esprit que celui qui préside par exemple à la recherche des racines d'un polynôme à coefficients réels: l'énoncé simple et élégant, selon lequel le nombre des racines est égal au degré, n'est exact que si l'on se place dans le corps des complexes. Ainsi, maints problèmes élémentaires se résolvent à moindre frais si l'on fait l'effort de les formuler dans une structure mathématique suffisamment riche.

Ce choix de la méthode ne modifie en rien l'énoncé du problème tel qu'il a été donné au chapitre I. A la fin d'un calcul, on retrouvera des courants et des tensions qui sont des fonctions à valeurs réelles. L'emploi de distributions et de grandeurs complexes ne constitue qu'un outil intermédiaire.

## 2.2. ANALYSE TEMPORELLE

### 2.2.1. Définitions

L'échelon unité est défini par

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= 0 & t < 0 \\ &= 1/2 & t = 0 \\ &= 1 & t > 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

La réponse forcée à l'échelon unité est la *réponse indicielle*  $\gamma(t)$ .

La dérivée de l'échelon unité est l'*impulsion unité*  $\delta(t)$ : la réponse forcée est appelée *réponse impulsionnelle*  $g(t)$ .

### 2.2.2. Réponse isomorphe et réponse impulsionnelle

Par le théorème 2.1.16,  $L[g(t)] = G(p)$ . En effet,  $L[\delta(t)] = 1$ . Dès lors, il apparaît que la fonction de réponse isomorphe permet de calculer la réponse impulsionnelle et réciproquement. La connaissance de l'un ou l'autre détermine entièrement le système. On a vu au paragraphe 2.1.15 comment  $G(p)$  permettait de calculer la réponse forcée à un signal quelconque. Voyons comment opérer avec  $g(t)$ .

### 2.2.3. Intégrale de Duhamel

Par le théorème 2.1.16 et la règle 7.3.27, il vient

$$r(t) = s(t) * g(t) \quad (2.7)$$

Si l'on se restreint au cas d'un signal qui est une fonction causale et si l'on suppose que  $g(t)$  est également une fonction causale, (2.7) prend la forme

$$r(t) = \int_0^t s(x)g(t-x)dx \quad (2.8)$$

On appelle encore (2.8) intégrale de *Carson* ou de *superposition*. Elle montre que la réponse à un signal quelconque  $s(t)$  peut être obtenue dès que l'on connaît  $g(t)$ .

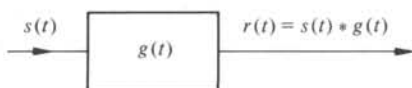


Fig. 2.5

### 2.2.4. Causalité

Dans la formule (2.8), on a supposé que  $g(t)$  était une fonction causale. On verra plus loin que c'est toujours le cas pour un réseau de Kirchhoff linéaire et passif. On comprend mieux ce résultat en considérant  $\gamma(t)$ . Par le théorème 2.1.9, on a  $g(t) = \gamma'(t)$ . Si  $g(t)$  est causal,  $\gamma(t)$  l'est également. Intuitivement on a le sentiment qu'il doit bien en être ainsi: on conçoit mal une réponse indicielle qui serait différente de zéro pour  $t < 0$  alors que le signal  $\epsilon(t)$  est toujours égal à zéro. Ce résultat, découlant des postulats à la base du modèle de Kirchhoff, coïncide avec une hypothèse fondamentale de la Physique.

En effet, énoncer qu'un signal nul ne fournit pas de réponse revient à dire que l'effet ne précède pas la cause. Ce concept de causalité est à la base de la Physique: il est impossible d'énoncer des lois si l'on ne suppose pas que les mêmes causes produisent les mêmes effets et en particulier que l'absence de cause entraîne un effet nul.

La causalité, concept fondamental en théorie des réseaux, n'est donc pas un postulat supplémentaire. Tout comme la conservation de l'énergie pour le modèle de Kirchhoff est une conséquence mathématique des lemmes de Kirchhoff, la causalité est une conséquence du choix d'éléments linéaires et passifs. Le modèle de Kirchhoff est adéquat précisément parce que ses postulats de base entraînent des propriétés (conservation de l'énergie, causalité) que l'on observe expérimentalement dans la Nature.

### 2.2.5. Commentaire

Des paragraphes 2.1.16 et 2.2.3, il apparaît que la réponse impulsionnelle ou la fonction de réponse isomorphe constituent l'une et l'autre une spécification complète du système. Ces deux caractéristiques sont du reste liées univoquement par la transformée de Laplace. La première met en évidence les caractères instantanés de la réponse, la seconde les caractères permanents. Si l'on désire analyser la transmission d'un signal sinusoïdal, on utilisera  $G(p)$ ; si l'on désire analyser la transmission d'autres signaux, tel un message télégraphique, on utilisera  $g(t)$ .

L'analyse fréquentielle et l'analyse temporelle sont deux aspects de la même réalité.

### 2.2.6. Propriété

Par suite de la propriété 7.2.3, on obtient la même réponse forcée d'un système de réponse impulsionnelle  $f_2(t)$  excité par un signal  $f_1(t)$  que d'un système où l'on permute les rôles de  $f_1(t)$  et  $f_2(t)$  ainsi que cela est représenté à la figure 2.6.



Fig. 2.6

### 2.2.7. Propriété

Par suite de la propriété 7.2.5, l'ordre, dans lequel on dispose deux systèmes dont la réponse forcée de l'un constitue le signal de l'autre, n'a pas d'importance ainsi que cela est représenté à la figure 2.7.

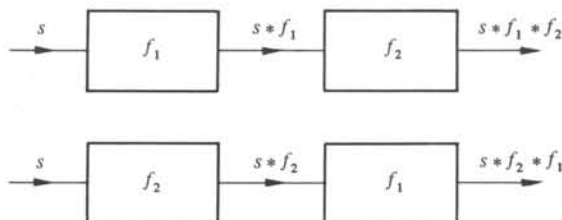


Fig. 2.7

### 2.2.8. Calcul de la réponse impulsionnelle

Soit un système décrit par une seule équation différentielle linéaire dont l'inconnue est  $x(t)$ . Les conditions initiales sont toutes nulles. Si cette équation a un second membre qui vaut  $\delta(t)$ , la transformée de Laplace de l'équation s'écrit

$$P(p)X(p) = 1$$

où  $P(p)$  est le polynôme caractéristique. Dès lors, il vient

$$X(p) = [P(p)]^{-1} = \sum_i A_i (p - p_i)^{-1} \quad (2.9)$$

Si les racines de  $P(p)$  sont notées  $p_i$  et les résidus correspondants  $A_i$ , on a

$$g(t) = \epsilon(t) \sum A_i \exp(p_i t) \quad (2.10)$$

où l'on a supposé que les racines  $p_i$  sont simples. La généralisation au cas de pulsation propre multiple est immédiate par le paragraphe 8.2.5. On a vérifié par ce calcul que  $g(t)$  est bien causal comme cela avait été supposé dans la formule (2.8).

Si le système est décrit par une équation intégro-différentielle ou par un système d'équations, la résolution du système fournit une expression de  $G(p)$  sous forme d'une fraction rationnelle qui dans le cas particulier de (2.9) se réduisait à l'inverse d'un polynôme. L'expression (2.10) demeure valide tant que le degré du dénominateur est supérieur à celui du numérateur.

### 2.2.9. Commentaires

Il est important de noter que la forme de la réponse impulsionnelle dépend uniquement des valeurs de  $p_i$ . Tant que celles-ci correspondent à des exponentielles décroissantes,  $g(t)$  tend vers zéro pour  $t$  tendant vers l'infini.

Un réseau risque toujours d'être soumis à une excitation aléatoire (bruit d'origine thermique dans les résistances, parasites). Si cette excitation est assimilée à une impulsion de brève durée,  $g(t)$  est une mesure de la tendance à l'amortissement de ces parasites. D'une façon plus générale, la formule (2.8) montre que la réponse à un signal borné restera bornée si  $g(t)$  est borné. Une grandeur, tension ou courant, prenant des valeurs infinies n'a pas de sens physique: le modèle mathématique ne recouvre pas la réalité d'un réseau physique puisqu'une tension infinie implique le percement des isolants et un courant infini signifie la destruction par effet Joule des résistances. Bien avant d'arriver à de telles extrémités, les non-linéarités toujours présentes dans un composant physique se seraient manifestées.

### 2.2.10. Définitions

Les pôles de la fonction de réponse isomorphe sont appelés *pulsations propres*.

Un système est appelé *stable*, ssi les pulsations propres sont situées exclusivement dans le demi-plan de gauche fermé. Les pulsations propres situées sur l'axe imaginaire sont simples.

Un système est *strictement stable* s'il n'y a pas de pulsations propres sur l'axe imaginaire.

### 2.2.11. Corollaires

Par le paragraphe 2.2.8, il s'ensuit qu'un système stable a une réponse impulsionnelle bornée et qu'un système strictement stable a une réponse impulsionnelle qui tend vers zéro pour  $t$  tendant vers l'infini.

Si le degré du dénominateur de  $G(p)$  est inférieur à celui de son numérateur,  $G(j\omega)$  a un pôle sur l'axe imaginaire à l'infini: ce pôle est multiple si la différence des degrés dépasse l'unité. La stabilité d'un système implique donc une différence de degrés inférieure à l'unité entre le numérateur et le dénominateur de  $G(p)$ .

### 2.2.12. Commentaires

La stabilité est un des concepts fondamentaux de la théorie des systèmes au même titre que la causalité ou la linéarité. Bien qu'il soit possible de construire théoriquement avec les éléments définis au chapitre I des circuits instables, dans la suite, on se limitera à l'étude de circuits stables. En fonction du paragraphe 2.2.9, il est clair qu'un dispositif physique ne peut être en permanence instable et linéaire. Par contre, il faut citer des circuits non linéaires et instables qui sont couramment utilisés, par exemple pour constituer un oscillateur. Le rôle de la non-linéarité est précisément de limiter l'amplitude des oscillations.

De même les montages multivibrateurs à transistors, circuits fortement non linéaires, traversent des zones linéaires d'instabilité qui permettent précisément de basculer rapidement d'un état vers un autre (voir vol. VIII).

Par ailleurs, en fonction du paragraphe 8.2.8, on peut remarquer qu'un système stable dont le degré du numérateur dépasse d'une unité celui du dénominateur a une ré-

ponse  $g(t)$  contenant un terme  $\delta'(t)$ . Dès lors,  $\gamma(t)$  réponse à une fonction  $\epsilon(t)$  comporte un terme  $\delta(t)$ . Un tel comportement, admissible au niveau du modèle, n'est pas interprétable pour un réseau physique. Cela signifie en clair que des éléments parasites ont été indûment négligés; à titre d'exemple, une capacité parasite entre deux bornes constitue un court-circuit pour  $j\omega$  tendant vers l'infini. Si la réponse est constituée par la tension entre ces deux bornes, il n'est pas réaliste de considérer une fonction de réponse isomorphe  $G(j\omega \neq 0$  pour  $j\omega$  tendant vers l'infini. On se limitera dans la suite, sauf exceptions, à des fonctions de réponse sans pôle à l'infini.

### 2.2.13. Calcul de la réponse indicielle

Considérons le système du paragraphe 2.2.8 excité par un signal  $\epsilon(t)$ . La transformée de Laplace de l'équation s'écrit

$$P(p)X(p) = p^{-1} \quad (2.11)$$

et

$$X(p) = [pP(p)]^{-1} = G(p)/p \quad (2.12)$$

Cette dernière fraction peut être décomposée selon le second développement d'Heaviside. Les pôles sont les pulsations propres  $p_i$  et la valeur  $p = 0$ . Les résidus valent respectivement  $[G(p)(p - p_i)/p]$  pour  $p = p_i$ , c'est-à-dire  $A_i/p_i$  et  $G(0)$ . Il vient

$$X(p) = G(0)/p + \sum A_i/p_i(p - p_i)$$

et donc

$$\gamma(t) = G(0)\epsilon(t) + \epsilon(t) \sum \frac{A_i}{p_i} \exp(p_i t) \quad (2.13)$$

La dérivée de  $\gamma(t)$  s'écrit

$$\gamma'(t) = G(0)\delta(t) + \delta(t) \sum \frac{A_i}{p_i} \exp(p_i t) + \epsilon(t) \sum A_i \exp(p_i t) \quad (2.14)$$

Par le paragraphe 7.1.32 le second terme du second membre s'écrit  $\delta(t) \sum A_i/p_i$  et par (2.9)  $G(0) = -\sum A_i/p_i$ . On vérifie dès lors que  $\gamma'(t) = g(t)$ , conformément au théorème 2.1.9.

## 2.3. RÉPONSE GLOBALE

### 2.3.1. Introduction

Les sections 2.1 et 2.2 ont traité exclusivement le problème de la réponse forcée, soit à un signal exponentiel, soit à un signal impulsionnel. Le but de cette section 2.3 est de considérer en plus la réponse libre. Dans le cas d'un réseau de Kirchhoff, celle-ci est due aux conditions initiales, c'est-à-dire aux courants dans les inductances et aux tensions aux bornes des capacités qui existent à l'instant où l'on applique le signal. Cette situation est très courante. Si l'on enclenche un alternateur sur un réseau de distribu-

tion, celui-ci est déjà alimenté par d'autres sources. Si l'on étudie la réponse indicielle d'une voie télégraphique, celle-ci a été antérieurement excitée par d'autres échelons dont la réponse n'est pas encore entièrement amortie.

### 2.3.2. Calcul de la réponse globale

Soit un système décrit par une seule équation linéaire, dont l'inconnue s'écrit  $x(t)$ . Le second membre s'écrit  $y(t)$ ,  $P(p)$  est le polynôme caractéristique et  $Q(p)$  le polynôme obtenu à partir des conditions initiales selon le paragraphe 8.3.2. Par (8.74), on a

$$x(t) = L_1^{-1} [Q(p)/P(p)] + L_1^{-1} [Y(p)/P(p)] \quad (2.15)$$

Cette propriété de la solution d'une équation différentielle linéaire se traduit en théorie des systèmes par le théorème 2.3.3.

### 2.3.3. Théorème

La réponse globale est la somme de la réponse libre et de la réponse forcée.

### 2.3.4. Corollaires

Il est donc possible et souvent judicieux de calculer séparément la réponse forcée et la réponse libre et ensuite de les additionner.

Si le signal est lui-même la somme de plusieurs termes, on peut également calculer la réponse forcée à chaque terme considéré séparément et en additionner les réponses par suite du théorème 8.1.11.

Si l'on se rapporte à la formule donnant le polynôme  $Q(p)$ , on peut aussi considérer séparément chaque condition initiale.

De façon tout à fait générale, en se rapportant au paragraphe 8.1.11, la réponse d'un réseau comportant plusieurs sources et plusieurs éléments réactifs s'obtient en calculant séparément la réponse à chaque source et à chaque condition initiale.

L'ensemble de ces règles peut être résumé dans le principe de superposition.

### 2.3.5. Principe de superposition

La réponse d'un réseau peut se calculer en considérant séparément l'effet de chaque source indépendante et de chaque condition initiale.

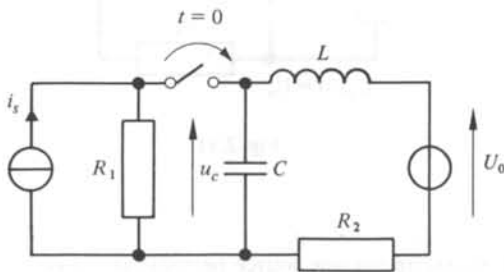


Fig. 2.8

### 2.3.6. Exemple

Le réseau représenté à la figure 2.8 est supposé être en régime établi depuis  $t = -\infty$ ; l'évolution de la tension aux bornes de la capacité suite à la fermeture de l'interrupteur à l'instant  $t = 0$  résulte de l'action de  $U_0$  (fig. 2.9), de  $i_s$  (fig. 2.10) et de l'état initial (fig. 2.11).

$$u_C(t) = u_{C_1}(t) + u_{C_2}(t) + u_{C_3}(t)$$

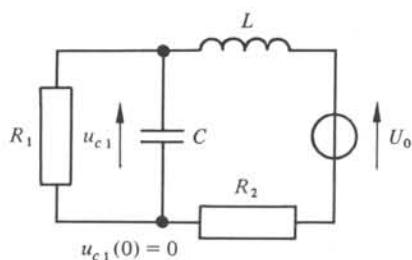


Fig. 2.9

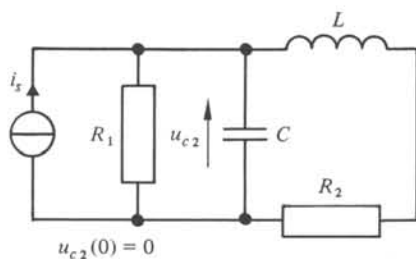


Fig. 2.10

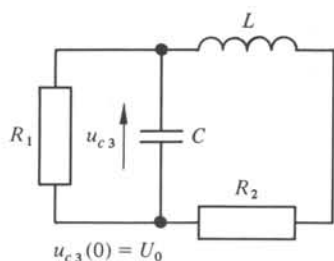


Fig. 2.11

### 2.3.7. Exemple

Si un réseau est excité par une source périodique, on peut calculer la réponse correspondant à chaque terme sinusoïdal du développement en série de Fourier et les additionner ensuite.



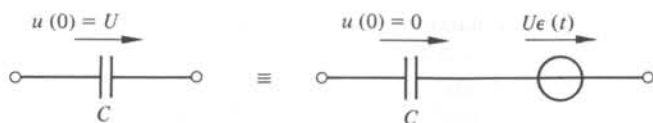


Fig. 2.12

### 2.3.8. Sources fictives

La formule (2.15) montre qu'il n'y a pas de différence dans le calcul de  $x(t)$  entre l'effet d'une source et celui d'une condition initiale. Chacune produit un terme dans le second membre. Rien n'est changé à la solution si l'on considère  $Q(p)$  comme la transformée de Laplace d'une excitation appliquée au réseau dans l'état quiescent.

Si dans une branche se trouve une capacité  $C$  aux bornes de laquelle la tension initiale  $u(0) = U$ , rien n'est changé au comportement du réseau pour  $t > 0$  si on remplace cette branche par une capacité  $C$  en série avec une source de tension  $U\epsilon(t)$  (fig. 2.12). L'équivalence duelle, valide pour l'inductance, est représentée à la figure 2.13.

En résumé, on peut toujours éviter les conditions initiales en les remplaçant par ces sources fictives.

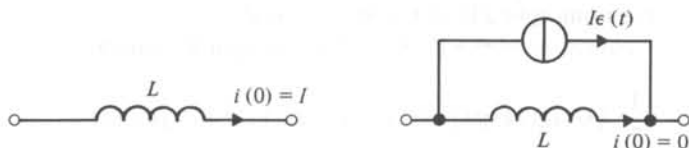


Fig. 2.13

### 2.3.9. Calcul de la réponse forcée à l'exponentielle complexe

Considérons le cas d'un réseau à l'état quiescent dont l'excitation vaut

$$\epsilon(t) \exp(p_0 t) = L_1^{-1}[(p - p_0)^{-1}]$$

Avec les notations du paragraphe 2.2.8, la réponse s'écrit

$$r(t) = L_1^{-1}[G(p)/(p - p_0)] \quad (2.16)$$

En appliquant le second développement d'Heaviside, on trouve

$$\frac{G(p)}{p - p_0} = \frac{G(p_0)}{p - p_0} + \sum_i \frac{A_i}{(p - p_i)(p_i - p_0)} \quad (2.17)$$

et

$$r(t) = \epsilon(t) \left[ G(p_0) \exp(p_0 t) + \sum \frac{A_i \exp(p_i t)}{(p_i - p_0)} \right] \quad (2.18)$$

Si la pulsation  $p_0$  coïncide avec une pulsation propre  $p_i$ , (2.16) possède un pôle double qui, par (8.58) engendrera un terme  $t \exp(p_0 t)$  en plus du terme  $\exp(p_0 t)$ .

Si  $p_0$  est proche de l'un des  $p_i$  sans être confondu, il ressort de (2.18) que le terme correspondant de la somme aura une amplitude  $|A_i|/(p_i - p_0)$  très importante. On trouve ici l'expression la plus générale du phénomène de résonance étudié déjà à la section 1.8.6 dans un cas particulier.

### 2.3.10. Corollaire

Si  $p_0 = j\omega_0$  et si le réseau est un système strictement stable, on aura après un temps suffisant

$$r(t) \cong G(j\omega_0) \exp(j\omega_0 t) \quad (2.19)$$

De façon encore plus générale, si  $\text{Re } p_0 > \text{Re } p_i \forall p_i$ ,

$$r(t) \cong G(p_0) \exp(p_0 t) \quad , \quad t \rightarrow \infty \quad (2.20)$$

Autrement dit, la réponse devient isomorphe à l'excitation exponentielle après un certain laps de temps pourvu que les pulsations propres soient amorties davantage que l'exponentielle considérée.

Cette réponse isomorphe à une excitation exponentielle entraîne, à une nuance près, une réponse isomorphe à l'excitation sinusoïdale.

Si  $s(t) = \cos \omega t = (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) / 2$ , il vient par le principe de superposition

$$r(t) = \frac{1}{2} [G(j\omega) \exp(j\omega t) + G(-j\omega) \exp(-j\omega t)]$$

Or,  $G(p)$  est une fraction rationnelle à coefficients réels et  $G(-j\omega) = [G(j\omega)]^*$ . Si l'on pose  $G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\theta}$  il vient

$$r(t) = |G(j\omega)| \cos(\omega t + \theta)$$

Une sinusoïde engendre une réponse sinusoïdale qui sera en général déphasée par rapport au signal.

### 2.3.11. Définitions

On distingue dans une réponse (forcée ou libre) deux termes: l'un qui s'amortit et qui s'appelle *terme transitoire*; l'autre qui ne s'amortit pas et qui s'appelle *terme de régime*.

### 2.3.12. Classification des réponses

Au paragraphe 2.1.8, on a introduit une première caractérisation de la réponse selon sa nature, forcée ou libre. Au paragraphe 2.3.11, on introduit une seconde caractérisation fondée sur le caractère permanent ou non des termes de la réponse. Ces deux caractérisations délimitent au total quatre types de réponses en les combinant selon le schéma suivant

Termes	Réponse	
	libre	forcée
de régime	1	2
transitoires	3	4

A titre d'exemple, (2.19) est une réponse forcée comportant un terme de régime et se trouve donc dans la case 2. Si le système est stable, la réponse impulsionnelle (2.10) est une réponse forcée ne comportant qu'un terme transitoire et se trouve donc dans la case 4. Le terme  $Q(p)/P(p)$  de  $(p)$  de (2.15) donne la réponse libre : le terme de régime (case 1) correspond aux pulsations propres situées sur l'axe imaginaire (système stable mais non strictement stable), le terme transitoire (case 3) aux pulsations propres situées dans le demi-plan gauche ouvert.

La case 1 correspond à un système non strictement stable : par exemple, l'oscillation sinusoïdale qui s'entretient indéfiniment si l'on connecte en parallèle une inductance et une capacité initialement chargée. La réponse libre n'atteint ce régime que dans la mesure où il n'y a pas de pertes. Il s'agit donc d'un comportement idéal difficilement observable en pratique.

### 2.3.13. Commentaire

Le théorème 2.1.11 prouve qu'un système linéaire et autonome soumis à une excitation  $\exp(pt)$  a une réponse isomorphe. Le corollaire 2.3.10 montre qu'une excitation  $\epsilon(t) \exp(pt)$  comporte dans sa réponse forcée un terme  $\exp(pt)$  qui dominera les autres dans certaines conditions. En particulier, l'excitation en  $\exp(j\omega t)$  d'un système strictement stable fournit pour  $t$  suffisamment grand une réponse isomorphe.

Ces deux résultats constituent deux présentations de la même propriété de réponse isomorphe. Ou bien l'on excite depuis  $t = -\infty$  par  $\exp(pt)$  et la réponse est strictement isomorphe. Ou bien on excite par  $\epsilon(t) \exp(pt)$  et la réponse isomorphe n'apparaît qu'après amortissement du terme transitoire. Ces deux procédés fournissent le même résultat : si l'on n'est vraiment intéressé qu'au terme de régime, inutile de s'embarrasser du calcul du terme transitoire. C'est ce qui est fait dans la méthode d'analyse des circuits en régime sinusoïdal exposée au chapitre I.8.

### 2.3.14. Continuité de la réponse à l'origine

Au paragraphe 8.3.2 on démontre que la solution d'une équation différentielle d'ordre  $n$  avec second membre nul jouit d'une propriété de continuité à l'origine. Si  $x(t)$  est la variable inconnue, on a  $x^{(k)}(0-) = x^{(k)}(0+)$  pour  $k = 0, \dots, n-1$ . Autrement dit, la réponse libre est continue de même que ses  $(n-1)$  premières dérivées. Pour un réseau de Kirchhoff, cela signifie qu'en l'absence d'excitation les courants dans les inductances et les tensions aux bornes des capacités ne subissent pas de sauts. Cela correspondrait du reste à des variations instantanées de l'énergie ou encore à des puissances infinies : ce n'est pas un comportement admissible pour le modèle d'un réseau physique.

La réponse forcée ne jouit pas nécessairement de la même propriété. Si le second membre de l'équation différentielle  $y(t)$  supposé causal ne comporte pas de distribu-

tion  $\delta$  ou les dérivées de celles-ci, la continuité des conditions initiales [ici  $x^{(k)}(t) \equiv 0$ ,  $k = 0, \dots, n - 1$ ] est assurée. En effet, une discontinuité de  $x^{(n-1)}(t)$  à l'origine, entraînerait l'apparition d'un terme  $\delta(t)$  dans l'expression de  $x^{(n)}(t)$  : celui-ci ne correspond à aucun terme semblable dans  $y(t)$ . A fortiori, les dérivées d'ordres inférieurs de  $x(t)$  ne peuvent être discontinues puisqu'il en résulterait des termes  $\delta', \delta'', \dots$  dans  $x^{(n)}(t)$ .

Si par contre,  $y(t)$  comporte une distribution  $\delta^{(m)}(t)$ ,  $x^{(n)}(t)$  comporte une distribution identique et  $x^{(n-m)}(t)$  comporte une distribution  $\delta(t)$ . Dans ce cas,  $x^{(k)}(0^-) \neq x^{(k)}(0^+)$  pour  $k \geq n - m - 1$  où  $x^{(k)}(t)$  représente la dérivée d'ordre  $k$  de la réponse  $x(t)$  dont on a soustrait les distributions  $\delta$ . On remarquera que la discontinuité des grandeurs à l'origine implique l'existence de signaux comportant des distributions : si  $y(t)$  est discontinu, seul  $x^{(n)}(t)$  sera discontinu,  $x(t)$  et ses  $(n - 1)$  premières dérivées restent continues.

On peut résumer ces résultats dans le théorème 2.3.15.

### 2.3.15. Théorème

Si le signal causal comporte éventuellement une discontinuité à l'origine mais point de distributions  $\delta$ , la réponse forcée ainsi que ses  $(n - 1)$  premières dérivées ne possèdent pas de discontinuités à l'origine lorsque le système est décrit par une équation différentielle d'ordre  $n$ .

### 2.3.16. Termes transitoires des réponses libres et forcées

L'équation (2.15) montre qu'en règle générale les termes transitoires des réponses libres et forcées sont des sommes d'exponentielles complexes dont les arguments  $p_i$  sont les mêmes. Le mécanisme qui engendre ces termes transitoires est toujours le même : si l'on exclut le cas d'une excitation de type impulsif, la continuité à l'origine doit être assurée ; pour la réponse libre, c'est la continuité des conditions initiales ; pour la réponse forcée à un signal causal, c'est la continuité à l'origine d'une réponse et de ses  $(n - 1)$  premières dérivées qui sont causales. Ainsi, les termes transitoires ne constituent pas un parasite : ils ont leur origine dans l'exigence de continuité à l'origine.

Dès lors, si les conditions initiales sont égales aux valeurs correspondantes du terme de régime, il n'y aura pas de terme transitoire. Si  $x^{(k)}(0^-) = x_r^{(k)}(0^+)$ , où  $x_r$  désigne le terme de régime, pour  $t > 0$ ,  $x \equiv x_r$ . Ceci peut se résumer dans le théorème 2.3.17.

### 2.3.17. Théorème

Si les valeurs initiales du terme transitoire de la réponse libre et de ses dérivées jusqu'à l'ordre  $(n - 1)$  sont celles du terme transitoire de la réponse forcée changées de signe, la réponse se limite aux termes de régime.

### 2.3.18. Exemple

Soit un système décrit par l'équation

$$x' + x = \epsilon(t) \cos 2t$$

et la valeur initiale  $X_0$  de  $x$ . C'est par exemple le circuit de la figure 2.14 où l'interrupteur

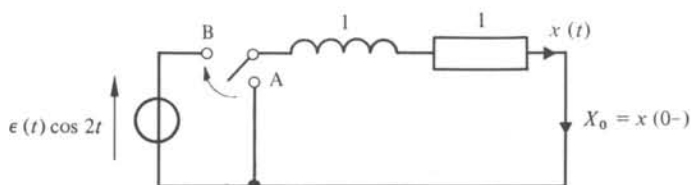


Fig. 2.14

teur est déplacé au temps  $t = 0$  de A vers B. La transformée de Laplace de cette équation s'écrit

$$pX(p) - X_0 + X(p) = p(p^2 + 4)^{-1}$$

On a donc avec les notations du paragraphe 2.3.2,  $P(p) = p + 1$ ,  $Q(p) = X_0$  et  $Y(p) = p(p^2 + 4)^{-1}$ . Il en résulte la solution

$$x(t) = \epsilon(t) \left[ (X_0 - 1/5) \exp(-t) + \frac{1}{\sqrt{5}} \cos(2t - 63,43^\circ) \right]$$

Les termes entre crochets représentent respectivement: le terme transitoire de la réponse libre auquel se résume cette dernière; le terme transitoire de la réponse forcée; le terme de régime de la réponse forcée. Dans le cas particulier où  $X_0 = 1/5$ , seul subsiste ce dernier terme.

On remarquera que le terme de régime est isomorphe à l'excitation: tous deux sont des sinusoides bien qu'il y ait un déphasage entre les deux. On aurait pu calculer directement le terme de régime en considérant la fonction de réponse isomorphe

$$G(j2) = (1 + j2)^{-1} = 1/5 - j2/5 = \frac{1}{\sqrt{5}} \exp(-j63,43^\circ)$$

C'est la valeur complexe prise par  $G(j2)$  qui engendre le déphasage: à une excitation  $\exp(j2t)$  correspond une réponse forcée en régime

$$G(j2) \exp(j2t) = (1/\sqrt{5}) \exp[j(2t - 63,43^\circ)].$$

### 2.3.19. Définition

On appelle *degré d'un système* celui de son équation caractéristique.

### 2.3.20. Degré d'un système

Le lecteur attentif aura sans doute déjà remarqué que le nombre de pulsations propres est identique à celui des conditions initiales dont la continuité est assurée à l'origine. Ce n'est pas un hasard.

Soit  $n$  le degré de l'équation caractéristique,  $p_i$  les  $n$  pulsations propres supposées distinctes et  $\sum A_i \exp(p_i t)$  le terme transitoire. On suppose que l'excitation ne contient pas de termes impulsionsnels: la réponse forcée et ses  $n - 1$  premières dérivées sont continues à l'origine. Pour  $t = 0 +$ , la réponse vaut  $\sum A_i$  et sa dérivée  $k$ ième prend la

valeur  $\sum A_i p_i^k$ . Dès lors, en appelant  $X_0^{(k)}$  la valeur initiale de la dérivée  $k$ ème, on a continuité si

$$\sum A_i p_i^k = X_0^{(k)} \quad k = 0, \dots, n - 1$$

Ce système linéaire aux inconnues  $A_i$  admet toujours une solution puisque son déterminant est un Vandermondien différent de zéro.

En conclusion, l'équation caractéristique fixe non seulement la nature de la réponse transitoire par le type de ses racines mais aussi le nombre des conditions initiales par son degré.

Le degré d'un réseau de Kirchhoff dépend du nombre d'éléments réactifs qui en font partie. Aussi dans un problème bien posé n'y-a-t-il pas plus de conditions initiales que l'on ne peut en satisfaire.

### 2.3.21. Exemple

Si l'on prend le cas concret d'un réseau, on ne peut pas spécifier indépendamment plus de valeurs initiales qu'il ne s'y trouve d'inductances et de capacités. Du reste, pour certaines configurations du réseau, le nombre de conditions initiales indépendantes est inférieur au nombre total de ces éléments: cette question sera discutée de façon plus approfondie au chapitre 4. Les équations du circuit peuvent cependant être données sous forme d'un système pour lequel il faudrait apparemment en spécifier davantage.

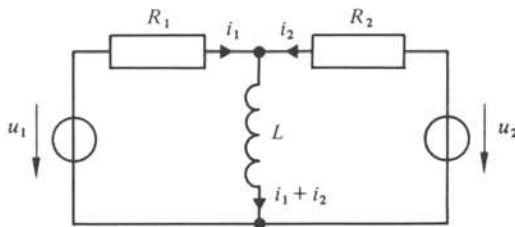


Fig. 2.15

Considérons l'exemple d'un quadripôle représenté à la figure 2.15. Les équations s'écrivent

$$(R_1 + Lp)I_1 + LpI_2 = U_1 + L(I_{10} + I_{20}) \quad (2.21)$$

$$LpI_1 + (R_2 + Lp)I_2 = U_2 + L(I_{10} + I_{20}) \quad (2.22)$$

Si l'on étudie la réponse propre, on trouve comme valeurs initiales

$$i_1(0+) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} (I_{10} + I_{20}) \quad (2.23)$$

et (2.23) est équivalent à

$$R_1 I_{10} = R_2 I_{20} \quad (2.24)$$

C'est l'équation que l'on obtient en posant dans (2.21) et (2.22)  $U_1 = U_2 = 0$  et en les soustrayant l'une de l'autre. On peut encore récrire le système sous la forme

$$LpI + R_1 I_1 = LI_0 + U_1$$

$$I - I_1 - I_2 = 0$$

$$R_1 I_1 - R_2 I_2 = U_1 - U_2$$

où il apparaît plus clairement qu'une seule variable  $i$  est dérivée et qu'une seule condition initiale doit être spécifiée: le courant dans l'unique inductance. Si l'on calcule le déterminant de la matrice des coefficients du système (2.21) et (2.22), on trouve une équation caractéristique du premier degré.

## 2.4. EXERCICES

2.4.1. Quelle condition doit vérifier la fonction de réponse isomorphe d'un système pour que la sinusoïde et la cosinusoïde soient des fonctions isomorphes de ce système ? Même question pour le sinus et le cosinus hyperbolique.

2.4.2. Exprimer par combinaison d'échelons unité la fonction suivante :

$$f(x) = 0, x < -1; f(x) = 1, -1 < x < 0; f(x) = 2, 0 < x < 1; f(x) = 0, x > 1.$$

2.4.3. Discuter la stabilité du système dont la fonction de réponse est

$$H(p) = (p^2 + 2bp + c)^{-1}$$

selon la valeur des paramètres  $b$  et  $c$ .

2.4.4. Classer les fonctions de réponses qui suivent selon la stabilité du système correspondant :  $1/(p+1)(p-1)$ ;  $(p-1)/(p+1)$ ;  $1/p(p+1)$ ;  $1/p^2$ ;  $1/(p^2-1)$ ;  $1/(p^2-1)^2$ ;  $1/(p^2+2p+2)$ ;  $p^6/(p^2+2p+2)$ .

2.4.5. Calculer la réponse indicielle des systèmes de l'exercice 2.4.4.

2.4.6. Calculer le terme de régime de la réponse forcée des mêmes systèmes à l'excitation  $\cos 2t$  pour les systèmes où le concept de régime a un sens.





## ANALYSE DES RÉSEAUX ÉLÉMENTAIRES

### 3.1. ANALYSE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

#### 3.1.1. Réponse d'un bipôle en régime sinusoïdal; immittance

Le bipôle représenté à la figure 3.1, supposé dans l'état quiescent  $i_L(0) = 0$ ,  $u_C(0) = 0$  est connecté à une source de tension  $u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \Phi) \cdot \epsilon(t)$ ; il obéit à l'équation suivante:

$$Ri + Ldi/dt + C^{-1} \int_0^t i d\tau = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \Phi) \epsilon(t)$$

Si à la tension réelle on substitue la tension complexe  $U\sqrt{2} \cdot \exp(j\Phi) \cdot \exp(j\omega t)$   $\epsilon(t)$ , l'équation devient, en transformée de Laplace:

$$RI(p) + Lp I(p) + (Cp)^{-1} I(p) = U\sqrt{2} \exp(j\Phi) (p - j\omega)^{-1}$$

soit:

$$\begin{aligned} I(p) &= [R + Lp + (Cp)^{-1}]^{-1} \cdot (p - j\omega)^{-1} \cdot U\sqrt{2} \exp(j\Phi) \\ &= Y(p) \cdot U(p) \end{aligned} \quad (3.1)$$

où  $Y(p)$  remplace le terme entre crochets.

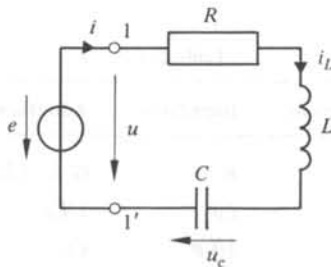


Fig. 3.1

Dans cette relation,  $Y(p)$  est la fonction de réponse isomorphe du bipôle. La réponse  $i(t)$  comporte un terme transitoire et un terme de régime (§ 2.3.12); excepté dans le cas limite où  $R = 0$ , on peut écrire, après extinction du terme transitoire:

$$\begin{aligned}
 i(t) &= I\sqrt{2} \exp(j\Psi) \exp(j\omega t) \\
 &= (R + j\omega L + (j\omega C)^{-1})^{-1} \cdot U\sqrt{2} \exp[j(\omega t + \Phi)] \\
 &= Y(j\omega) U\sqrt{2} \exp[j(\omega t + \Phi)]
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

et le courant de régime dû à la tension réelle  $u(t)$  est donné par la partie réelle de cette expression.

La fonction de réponse de régime sinusoïdal  $Y(j\omega)$  est obtenue par simple substitution de  $j\omega$  à  $p$  dans la fonction de réponse isomorphe. D'autre part, si  $\underline{U} = U\sqrt{2} \exp(j\Phi)$  et  $\underline{I} = I\sqrt{2} \exp(j\Psi)$  désignent les substituts complexes de la tension et du courant (cf. vol. I, chap. 8), on peut déduire de (3.2) la relation :

$$\underline{I} = Y\underline{U} \tag{3.3}$$

que l'on écrit aussi

$$\underline{U} = Y^{-1} \underline{I} = Z\underline{I} \tag{3.4}$$

Le courant de régime sinusoïdal dans le bipôle de la figure 3.1 est lié à la tension de régime à ses bornes par la relation (3.4) dans laquelle

$$\begin{aligned}
 Z &= |Z| \exp(j\theta); & |Z| &= [R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2]^{1/2} \\
 & & \theta &= \arctan(L\omega - 1/C\omega)/R
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Par conséquent, si  $u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \Phi)$ , le courant de régime vaut  $i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \Psi)$ , avec

$$I = U[R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2]^{-1/2} \quad \Psi = \Phi - \theta \tag{3.6}$$

### 3.1.2. Définitions

A chaque bipôle passif on associera une impédance et une admittance définies par le tableau 3.2; à une tension induite par induction mutuelle  $L_{ij} di/dt$  on fera correspondre le terme  $p L_{ij} I$ .

Tableau 3.2

Élément	Impédance	Admittance
$R$	$R$	$G = 1/R$
$L$	$Lp$	$1/Lp$
$C$	$1/Cp$	$Cp$

Pour  $p = j\omega$ , on a

$$Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \tag{3.7}$$

La partie réelle  $R(\omega)$  est appelée *résistance*: il faut éviter de confondre cette fonc-

tion avec l'élément résistance  $R$  défini au paragraphe 1.1.6 et composant éventuel du bipôle; la partie imaginaire  $X(\omega)$  est appelée *réactance*.

On pose de même:

$$Y(j\omega) = G(\omega) + jB(\omega) \quad (3.8)$$

La partie réelle  $G(\omega)$ , est appelée *conductance* (même danger de confusion) et la partie imaginaire  $B(\omega)$ , *susceptance*. Toutes ces quantités sont liées par les relations:

$$G = R/(R^2 + X^2) \quad B = -X/(R^2 + X^2) \quad (3.9)$$

$$R = G/(G^2 + B^2) \quad X = -B/(G^2 + B^2) \quad (3.10)$$

### 3.1.3. Connexions en série et en parallèle

On a observé au paragraphe précédent que l'association en série de trois éléments simples  $R$ ,  $L$  et  $C$  constitue un bipôle dont l'impédance est égale à la somme des impédances des éléments constitutifs; de même, l'association en parallèle de ces trois éléments (fig. 3.3) constitue un bipôle dont l'admittance est égale à la somme des admittances des éléments constitutifs par dualité:

$$Y = G + (j\omega L)^{-1} + j\omega C \quad (3.11)$$

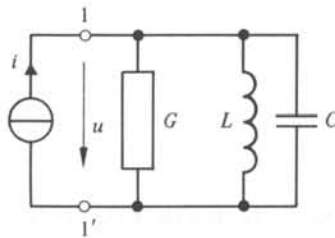


Fig. 3.3

Des bipôles tels que ceux des figures 3.1 et 3.3 où certains éléments manquent éventuellement peuvent à leur tour être connectés en série ou en parallèle; pour le bipôle qui résulte d'une connexion en série (fig. 3.4) on peut définir une impédance totale  $Z$ , et comme chaque bipôle constitutif est parcouru par le même courant, on peut écrire:

$$\underline{U} = Z_1 \underline{I} + Z_2 \underline{I} + Z_3 \underline{I} = Z \underline{I}$$

d'où

$$Z = \sum_k Z_k \quad (3.12)$$

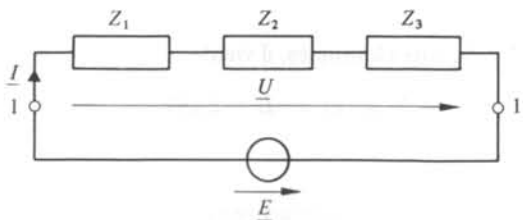


Fig. 3.4

L'impédance totale est égale à la somme des impédances des bipôles connectés en série.

D'une façon duale, l'admittance totale qui résulte de la connexion en parallèle (fig. 3.5) est égale à la somme des admittances:

$$Y = \sum_k Y_k \quad (3.13)$$

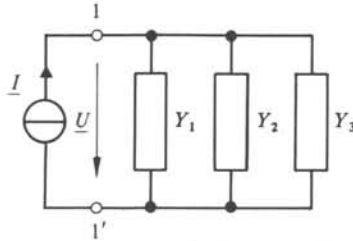


Fig. 3.5

Les résultats qui précèdent s'appliquent évidemment à la connexion en série de  $N$  éléments de même nature (cf. chap. 1.6); on obtient les relations suivantes, indépendantes de la fréquence :

$$\begin{aligned} R &= \sum_k R_k \\ L &= \sum_k L_k \\ 1/C &= \sum_k 1/C_k \end{aligned} \quad (3.14)$$

En particulier si l'on connecte en série  $N$  éléments identiques  $R_0$ ,  $L_0$  ou  $C_0$  il vient:

$$R = NR_0, \quad L = NL_0 \quad \text{et} \quad C = C_0/N.$$

Si d'autre part on connecte en parallèle  $N$  éléments de même nature, il vient par dualité:

$$\begin{aligned} G &= \sum_k G_k \\ C &= \sum_k C_k \\ 1/L &= \sum_k 1/L_k \end{aligned} \quad (3.15)$$

S'il s'agit de  $N$  éléments identiques, il vient:

$$G = NG_0, \quad C = NC_0 \quad \text{et} \quad L = L_0/N.$$

### 3.1.4. Définitions

Si l'on opère uniquement des connexions en série ou en parallèle, le réseau obtenu est appelé *série parallèle*. L'application répétée des règles énoncées au paragraphe

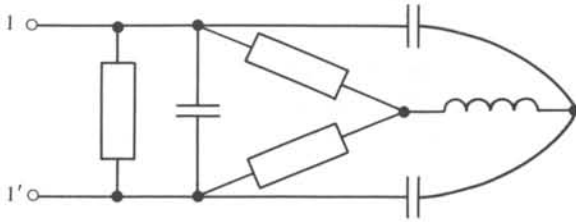


Fig. 3.6

3.1.3 permet d'en calculer l'impédance ou l'admittance. Par contre, un bipôle tel que celui de la figure 3.6 exige pour son calcul l'utilisation de méthodes décrites au chapitre 4.

Un *bipôle en échelle* est un bipôle série-parallèle dont la configuration rappelle la forme d'une échelle (fig. 3.7); un bipôle en échelle comporte un certain nombre de *sections* en forme de *L* renversé ( $N$  sur la figure).

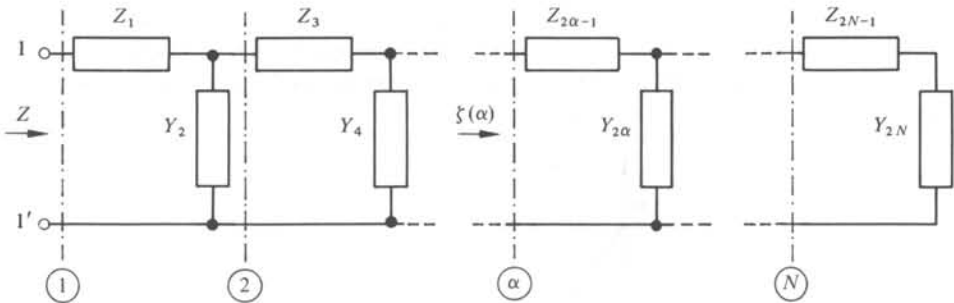


Fig. 3.7

### 3.1.5. Impédance d'un bipôle en échelle

Si l'on coupe le bipôle selon un axe  $\alpha$  l'impédance de la partie située à droite de l'axe et vue des lèvres de la coupure est notée  $\zeta(\alpha)$ ; on peut écrire successivement:

$$Z = \zeta(1) = Z_1 + [Y_2 + \zeta^{-1}(2)]^{-1}$$

$$\zeta(2) = Z_3 + [Y_4 + \zeta^{-1}(3)]^{-1}$$

$$\zeta(\alpha) = Z_{2\alpha-1} + [Y_{2\alpha} + \zeta^{-1}(\alpha + 1)]^{-1}$$

$$\zeta(N) = Z_{2N-1} + Y_{2N}^{-1}$$

L'impédance du bipôle peut donc être mise sous la forme d'une fraction continue:

$$Z = Z_1 + (Y_2 + (Z_3 + (Y_4 + (\dots + (Z_{2N-1} + (Y_{2N})^{-1})^{-1})^{-1} \dots)^{-1})^{-1})^{-1} \quad (3.16)$$

que l'on écrit souvent sous la forme:

$$Z = (Z_1, Y_2, Z_3, \dots, Z_{2N-1}, Y_{2N}) \quad (3.17)$$

## 3.2. ANALYSE DES RÉSEAUX DU PREMIER ORDRE

## 3.2.1. Réponse propre d'un réseau du premier ordre

Un réseau du premier ordre comporte un seul élément réactif, une ou plusieurs résistances et une ou plusieurs sources; il est régi par une équation différentielle du premier ordre: sa pulsation propre  $p_i = \lambda$  est donc réelle, et si le réseau est strictement stable, elle est réelle négative; la réponse propre est une exponentielle.

## 3.2.2. Définition

L'inverse du module de la pulsation propre  $\lambda$  est appelé *constante de temps*  $\tau$  de l'exponentielle.

## 3.2.3. Construction de l'exponentielle

Une exponentielle est complètement définie par sa valeur à un instant déterminé, sa valeur asymptotique et sa constante de temps, qui détermine sa sous-tangente; il en résulte une construction très simple schématisée aux figures 3.8 et 3.9. Le tableau 3.10 donne les valeurs prises par une exponentielle pour quelques valeurs du rapport  $t/\tau$ ; on retiendra qu'elle approche sa valeur asymptotique à moins de 1% près après un temps égal à  $5\tau$ .

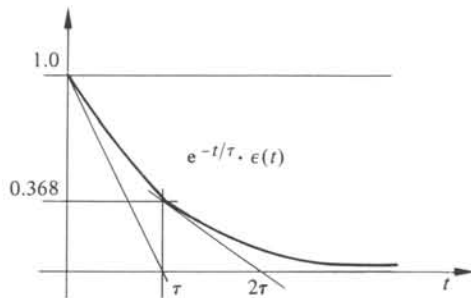


Fig. 3.8

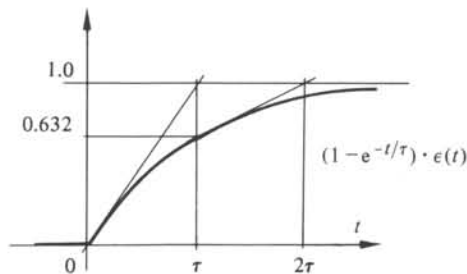


Fig. 3.9

## 3.2.4. Charge et décharge d'une capacité

Une capacité non chargée est connectée à une source de tension continue  $e(t) = E_0 \cdot \epsilon(t)$  en série avec une résistance  $R$  (fig. 3.11); on désire connaître l'évolution de la tension à ses bornes, soit  $u(t)$ .

Tableau 3.10

$t/\tau$	$e^{-t/\tau}$	$1 - e^{-t/\tau}$
1	0,3679	0,6321
3	0,0498	0,9502
5	0,0067	0,9933
7	0,0009	0,9991

On sait que le courant vaut  $i = Cdu/dt$  de sorte que l'équation du circuit s'écrit:

$$\begin{aligned} E_0 \epsilon(t) &= Ri + u \\ &= RC \, du/dt + u \end{aligned}$$

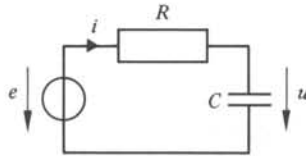


Fig. 3.11

D'après le théorème 2.3.15, il n'y a pas de discontinuité sur la condition initiale ( $u(0^+) = u(0^-) = 0$ ).

Si l'on prend la transformée de Laplace unilatérale de chaque membre, il vient:

$$E_0/p = RC \, p \, U(p) + U(p)$$

d'où

$$\begin{aligned} U &= E_0/(RC) [p(p + 1/(RC))]^{-1} \\ &= E_0 [1/p - (p + 1/(RC))^{-1}] \end{aligned}$$

et enfin:

$$u(t) = E_0 [1 - \exp(-t/\tau)] \epsilon(t) \quad (3.18)$$

Dans cette expression,  $\tau = RC$  est la constante de temps du circuit.

La réponse forcée (3.18) comporte un terme transitoire:

$$u_1 = -E_0 \exp(-t/\tau) \epsilon(t)$$

et un terme de régime:

$$u_2 = E_0 \epsilon(t)$$

qui se réduit à une constante; la réponse propre est nulle puisque la condition initiale est nulle.

Par un autre procédé, on peut écrire immédiatement la réponse totale d'un circuit simple; en effet, le terme transitoire est solution de l'équation différentielle homogène, en l'occurrence:

$$du/dt + (RC)^{-1}u = 0$$

et il est donc de la forme

$$u_1 = \epsilon(t)A \exp(-t/\tau)$$

D'autre part, le terme de régime correspond à la composante continue:

$$u_2 = E_0 \epsilon(t)$$

La constante  $A$  doit être déterminée pour satisfaire la continuité de la condition initiale:

$$u(0) = u_1(0^+) + u_2(0^+) = A + E_0 = 0$$

et on retrouve donc bien (3.18).

Cette façon de résoudre le problème ne présente sans doute pas d'avantage marqué dans le cas présent; on verra cependant dès le paragraphe suivant l'intérêt qu'il peut y avoir à organiser le calcul de la réponse globale par superposition des réponses partielles.

Après un temps de l'ordre de  $10\tau$ , on peut légitimement considérer que le charge de la capacité est terminée (l'erreur relative commise est inférieure à  $10^{-4}$ ); on va alors provoquer la décharge de la capacité en annulant la source ( $e = 0$ ); pour des raisons de commodité on peut considérer cet instant comme l'instant initial ( $t = 0$ ). La condition initiale est désormais  $u(0^-) = u(0^+) = E_0$  et l'équation du circuit est :

$$u = u(0) + C^{-1} \int_0^t id\tau = -Ri$$

soit

$$RCdu/dt + u = 0 ; \quad t \geq 0$$

Comme il n'y a pas d'excitation, la réponse totale coïncide avec la réponse propre:

$$u = A\epsilon(t) \exp(-t/\tau)$$

et en tenant compte de la condition initiale, il vient:

$$u(t) = E_0 \epsilon(t) \exp(-t/\tau) \quad (3.19)$$

Les lois de charge et de décharge d'une capacité sont illustrées (en variable réduite  $u/E_0$ ) respectivement par les figures 3.9 et 3.8.

### 3.2.5. Raccordement d'une inductance à une source de tension sinusoïdale

Une inductance  $L$  en série avec une résistance  $R$  est connectée à une source de tension sinusoïdale  $e(t)$  nulle pour  $t < 0$  et dont la phase  $\Phi$  est quelconque (fig. 3.12);



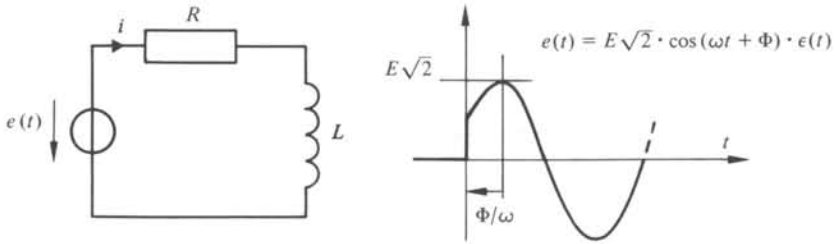


Fig. 3.12

on se propose de déterminer la loi du courant  $i$  sachant que sa valeur initiale est nulle.

Le circuit obéit à l'équation

$$\begin{aligned} e(t) &= E\sqrt{2} \cos(\omega t + \Phi) \cdot \epsilon(t) \\ &= Ri + Ldi/dt \end{aligned}$$

soit  $i_1$  le terme transitoire de la réponse forcée; par application du théorème 2.3.14 on a :

$$i_1(0^+) = i_1(0^-) = 0$$

$i_1$  est de la forme:

$$i_1 = A \exp(-t/\tau) \cdot \epsilon(t); \quad \tau = L/R$$

Quant au terme de régime  $i_2$ , il peut être obtenu par le formalisme exposé au paragraphe 3.1.1; on trouve:

$$\underline{I} = \underline{E}(R + j\omega L)^{-1}$$

et on en déduit:

$$i_2 = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \Phi - \theta) \cdot \epsilon(t)$$

avec

$$I = E(R^2 + \omega^2 L^2)^{-1/2}$$

$$\theta = \arctan(\omega L/R)$$

Le courant total vaut donc:

$$i(t) = [A \exp(-t/\tau) + I\sqrt{2} \cos(\omega t + \Phi - \theta)] \cdot \epsilon(t)$$

et si l'on tient compte de la condition initiale, il vient

$$i(t) = I\sqrt{2} [\cos(\omega t + \Phi - \theta) - \cos(\Phi - \theta) \exp(-t/\tau)] \cdot \epsilon(t) \quad (3.20)$$

Ce courant est illustré à la figure 3.13, et on observera que le terme transitoire est identiquement nul lorsque  $\Phi - \theta = \pm \pi/2$ , c'est-à-dire lorsque le terme de régime est nul pour  $t = 0$ .

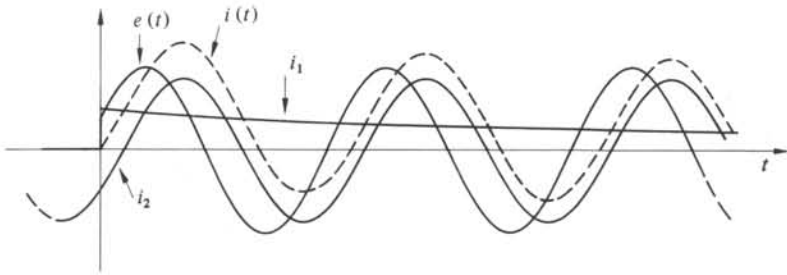


Fig. 3.13

D'autre part, la constante de temps  $\tau$  est liée à l'argument de l'impédance par la relation:

$$\tau/T = (L/R) \cdot \omega/2\pi = 1/2\pi \cdot \tan \theta \quad (3.21)$$

dans laquelle  $T$  est la période  $2\pi/\omega$ .

Lorsque l'argument  $\theta$  est voisin de  $\pi/2$  ( $\omega L \gg R$ ), le terme transitoire, s'il existe, garde une valeur appréciable pendant un nombre considérable de périodes  $T$ ; dans ce cas, si  $\Phi - \theta = 0$  ou  $\pi$  (c'est-à-dire si  $\Phi \cong \pm \pi/2$ , soit  $e(0^+)$  voisin de sa valeur maximale  $E\sqrt{2}$ ), la valeur instantanée du courant total peut atteindre le double de la valeur maximale du courant de régime.

### 3.2.6. Fonction de réponse de bipôles du premier ordre

On considère quelques bipôles simples du premier ordre dans l'état quiescent en  $t = 0^-$ .

Le bipôle représenté à la figure 3.14 obéit à l'équation:

$$u = Ri + Ldi/dt$$

soit en transformée de Laplace:

$$U(p) = RI(p) + LpI(p) = Z(p)I(p)$$

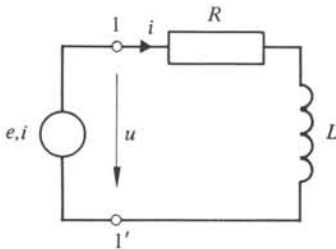


Fig. 3.14

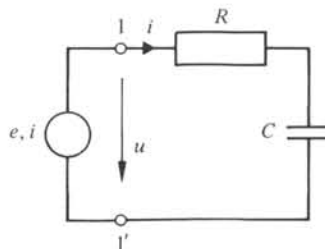


Fig. 3.15

On trouve de même pour le bipôle de la figure 3.15:

$$u(t) = Ri + C^{-1} \int_0^t i d\tau$$

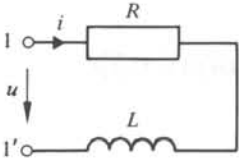
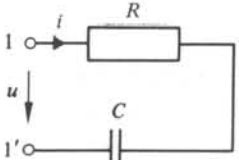
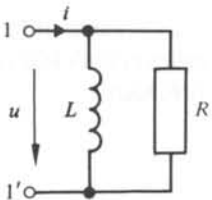
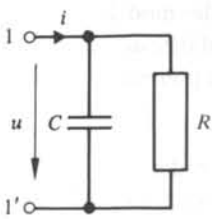
soit:

$$U(p) = RI(p) + (Cp)^{-1}I(p) = Z(p)I(p)$$

Si le courant est le signal, la réponse du bipôle est la tension qui en résulte à ses bornes, de sorte que la fonction de réponse est l'impédance  $Z(p)$ ; d'autre part, si le signal est la tension, la réponse est le courant et la fonction de réponse, l'admittance  $Y(p) = Z^{-1}(p)$ .

Le tableau 3.16 donne, pour quelques bipôles simples, les fonctions de réponses  $Z$  et  $Y$ : elles sont de la forme, soit  $[a/(p+a)]^{\pm 1}$ , soit  $[p/(p+a)]^{\pm 1}$ ; les réponses impulsionnelles et indicielles correspondantes seront explicitées et illustrées au paragraphe 3.2.8, tableau 3.19.

Tableau 3.16

Bipôle	Fonction de réponse	Pôle ou zéro (module)
	$\left. \begin{aligned} Z &= Ra^{-1}(p+a) \\ Y &= R^{-1}a(p+a)^{-1} \end{aligned} \right\} a = R/L$	
	$\left. \begin{aligned} Z &= R(p+a)p^{-1} \\ Y &= 1/R \cdot p(p+a)^{-1} \end{aligned} \right\} a = 1/RC$	
	$\left. \begin{aligned} Z &= Rp(p+a)^{-1} \\ Y &= 1/R \cdot (p+a)p^{-1} \end{aligned} \right\} a = R/L$	
	$\left. \begin{aligned} Z &= Ra(p+a)^{-1} \\ Y &= 1/R \cdot a^{-1}(p+a) \end{aligned} \right\} a = 1/RC$	

### 3.2.7. Fonction de réponse de biportes du premier ordre

On considère quelques biportes simples du premier ordre dans l'état quiescent en  $t = 0^-$ .

Dans le biporte de la figure 3.17, chaque branche est constituée par un bipôle; comme ces bipôles sont traversés par le même courant  $i$ , si  $Z_A$  et  $Z_B$  désignent les impédances respectives, on a:

$$E(p) = [Z_A + Z_B] I(p)$$

$$U_2(p) = Z_B \cdot I(p)$$

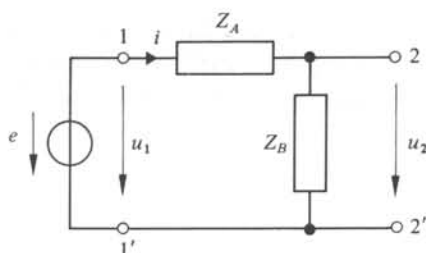


Fig. 3.17

La fonction de réponse considérée est le rapport  $G(p) = U_2(p)/E(p)$ , soit en l'occurrence:

$$\begin{aligned} G(p) &= Z_B [Z_A + Z_B]^{-1} \\ &= Y_A [Y_A + Y_B]^{-1} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Le tableau 3.18 donne la fonction de réponse pour quelques biportes simples; elle est de la forme  $a(p+a)^{-1}$  ou  $p(p+a)^{-1}$ ; les réponses impulsionnelles et indicielles correspondantes seront explicitées et illustrées au paragraphe 3.2.8, tableau 3.19.

### 3.2.8. Réponses impulsionnelles et indicielles de réseaux du premier ordre

Le tableau 3.19 rassemble les réponses impulsionnelles et indicielles des bipôles et des biportes examinés dans les deux paragraphes qui précèdent.

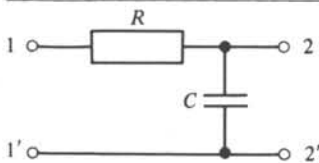
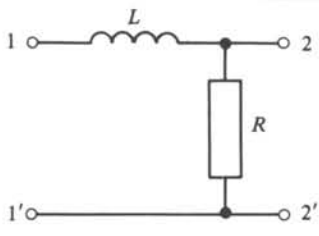
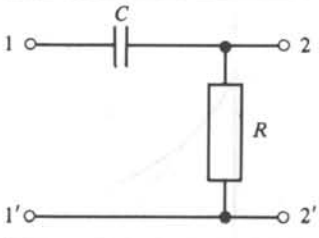
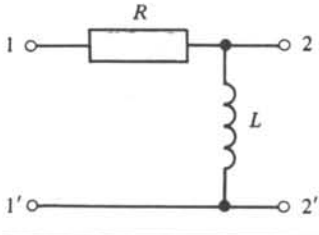
### 3.2.9. Commentaires

Les réponses impulsionnelles et indicielles du tableau 3.19 sont des résultats formels dont la validité repose sur l'adéquation physique des modèles de réseau d'une part et des signaux impulsion ou échelon d'autre part. La validité des modèles de réseau a déjà été discutée au paragraphe 2.3.8; la discussion sera poursuivie à la section 3.4.

### 3.2.10. Réponse en fréquence d'un biporte du premier ordre

La fonction de réponse en tension des biportes du tableau 3.18 a été notée  $G(p)$ ; on sait que la réponse en régime sinusoïdal est obtenue par substitution de  $j\omega$  à  $p$  (§

Tableau 3.18

Biporte	Fonction de réponse $G(p)$	Constante de temps $\tau = 1/a$
	$a(p+a)^{-1}$	$RC$
	$a(p+a)^{-1}$	$L/R$
	$p(p+a)^{-1}$	$RC$
	$p(p+a)^{-1}$	$L/R$

3.1.1): le comportement de la fonction  $G(j\omega)$  pour  $\omega \in (0, \infty)$  caractérise la réponse en fréquence du biporte.

### 3.2.11. Définition. Gain logarithmique

Si l'on pose:

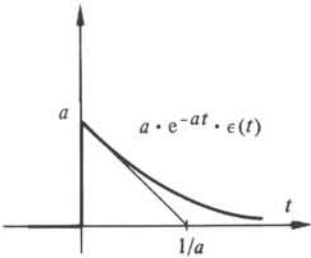
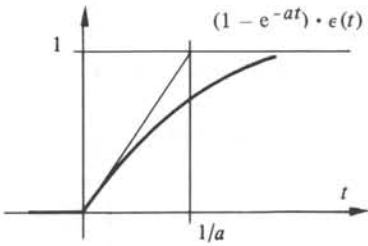
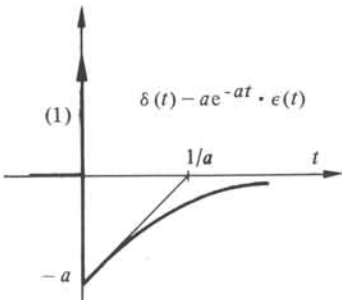
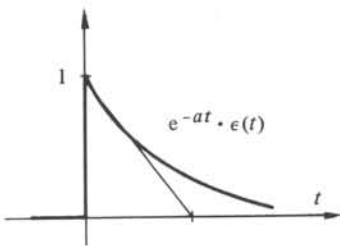
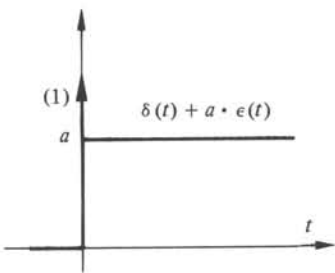
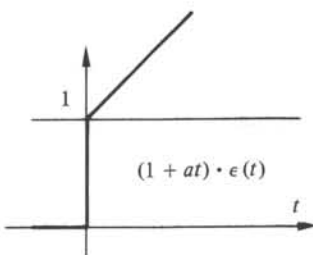
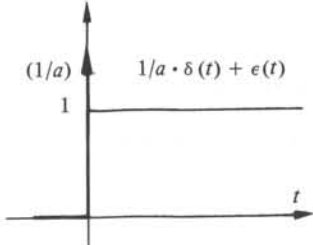
$$\ln G(j\omega) = a(\omega) + jb(\omega) \quad (3.23)$$

$a(\omega)$  est appelé *gain logarithmique* et  $b(\omega)$  *phase* ou *argument* de la fonction de réponse; on a en effet:

$$a(\omega) = \ln |G(j\omega)| \quad (3.24)$$

$$b(\omega) = \arg G(j\omega) \quad (3.25)$$

Tableau 3.19

Fonction de réponse $G(p)$	Réponse impulsionnelle $g(t) = L^{-1}(G(p))$	Réponse indicielle $\gamma(t) = L^{-1}[p^{-1} \cdot G(p)]$
$a/(p+a)$	 <p><math>a \cdot e^{-at} \cdot \epsilon(t)</math></p>	 <p><math>(1 - e^{-at}) \cdot \epsilon(t)</math></p>
$p/(p+a)$	 <p><math>\delta(t) - a e^{-at} \cdot \epsilon(t)</math></p>	 <p><math>e^{-at} \cdot \epsilon(t)</math></p>
$(p+a)/p$	 <p><math>\delta(t) + a \cdot \epsilon(t)</math></p>	 <p><math>(1 + at) \cdot \epsilon(t)</math></p>
$(p+a)/a$	$1/a \delta'(t) + \delta(t)$	 <p><math>1/a \cdot \delta(t) + \epsilon(t)</math></p>

### 3.2.12. Définitions. Unités de gain

Le gain défini par (3.24) s'exprime en *Néper* (N); dans la pratique cependant, on utilise beaucoup la définition

$$a(\omega) = 20 \log |G(j\omega)| \quad (3.26)$$

et dans ce cas l'unité est le *décibel* (dB).

Rappelons que le bel a été défini en acoustique comme l'unité dans l'expression d'un rapport de puissance:

$$a = \log |G(j\omega)|^2 \quad (3.27)$$

et le décibel est un sous-multiple adéquat pour l'usage courant; le facteur 20 dans (3.26) provient du fait que  $|G|$  est un rapport de racines carrées de puissances.

### 3.2.13. Relation entre les unités de gain

Si l'on compare (3.24) et (3.26), on observe que

$$1 \text{ N} \cong 8,686 \text{ dB} \quad (3.28)$$

Lorsque le rapport des puissances vaut  $1/2$ , soit  $|G| = 1/\sqrt{2}$ , on a  $a = 10 \log 2 \cong 3 \text{ dB}$ , ou encore  $0,345 \text{ N}$ . Un rapport de puissances égal à 10 correspond à 10 dB; or il est courant de travailler dans l'ordre de grandeur de 80 dB, c'est-à-dire avec un rapport de puissances de  $10^{-8}$ : ceci explique l'origine d'une échelle logarithmique des puissances et des tensions.

### 3.2.14. Définition

Le *lieu complexe* relatif à une grandeur complexe quelconque  $F(j\omega)$  est la courbe décrite par l'extrémité du vecteur qui représente cette grandeur lorsque l'on fait varier la pulsation  $\omega$  de 0 à  $+\infty$ . En général, la fonction envisagée  $F(p)$  est une fraction rationnelle à coefficients réels et on a donc:

$$F(-j\omega) = F^*(j\omega) \quad (3.29)$$

Le lieu qui correspond à  $\omega \in (-\infty, 0)$  est donc le symétrique du précédent par rapport à l'axe réel.

### 3.2.15. Lieux complexes pour biportes du premier ordre

Le lieu complexe associé à la fonction de réponse des biportes du tableau 3.18 est un cercle. En effet, le lieu associé à la fonction  $a^{-1}(j\omega + a)$  est une droite verticale qui passe par le point de coordonnées (1,0) (fig. 3.20) et on a vu en géométrie que l'inverse d'une droite qui ne passe pas par l'origine est un cercle qui passe par l'origine.

On peut raisonner de la même façon à propos de la fonction  $j\omega(j\omega + a)^{-1}$  (fig. 3.21).

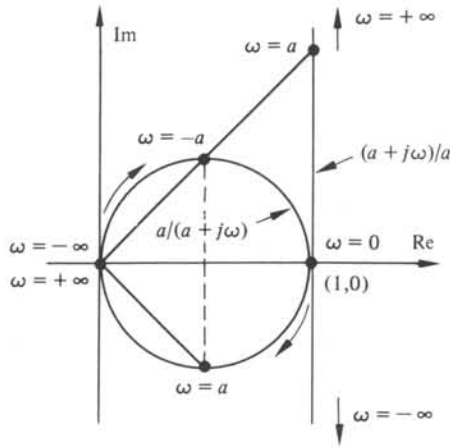


Fig. 3.20

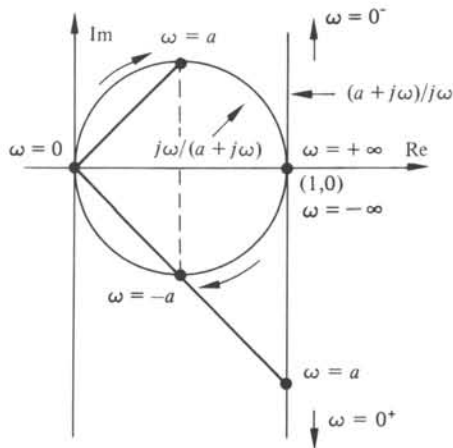


Fig. 3.21

### 3.2.16. Diagrammes logarithmiques

Considérons la transmittance du premier ordre  $G(p) = K \cdot (p - \lambda)^{-1}$  dont on désire représenter la courbe de gain logarithmique. On a :

$$a(\omega) = 20 \log |K/\lambda| - 20 \log |1 - j(\omega/\lambda)| \quad (3.30)$$

Pour  $\omega = 0$ , il vient

$$a(0) = 20 \log |K/\lambda| \quad (3.31)$$

et pour  $\omega$  tendant vers l'infini :

$$a(\omega) \cong a(0) - 20 \log |\omega/\lambda| \quad (3.32)$$



Ces deux expressions caractérisent respectivement une asymptote basse fréquence et une asymptote haute fréquence si l'on choisit  $\log \omega$  pour abscisse.

Le diagramme logarithmique du gain:

$$a(\omega) = a(0) - 20 \log [1 + (\omega/\lambda)^2]^{1/2} \quad (3.33)$$

est représenté à la figure 3.22.

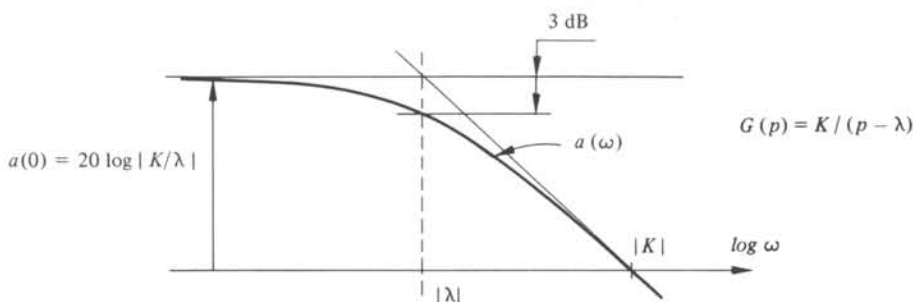


Fig. 3.22

### 3.2.17. Définitions

L'unité utilisée pour l'abscisse  $\log \omega$  est généralement la *décade* qui caractérise un rapport de fréquences égal à 10; la pente de l'asymptote haute fréquence est donc de  $-20$  dB/décade. On utilise parfois l'*octave* qui est le rapport entre deux fréquences dont l'une est le double de l'autre: la pente de la même asymptote est de  $-6$  dB/octave.

### 3.2.18. Construction du diagramme logarithmique

Considérons trois valeurs particulières caractéristiques de  $\omega$ :

- $\omega = |\lambda|$  :  $a = a(0) - 20 \log \sqrt{2} \cong a(0) - 3$  dB
- $\omega = 2 |\lambda|$  :  $a = a(0) - 20 \log \sqrt{5} \cong a(0) - 7$  dB
- $\omega = 1/2 |\lambda|$  :  $a = a(0) - 20 \log \sqrt{5/4} \cong a(0) - 1$  dB

On peut ainsi construire aisément trois points de la courbe du gain à partir des asymptotes.

On obtiendra de la même façon la courbe du gain logarithmique qui correspond à la fonction  $Kp(p - \lambda)^{-1}$  (fig. 3.23); on observe une asymptote horizontale haute fréquence :

$$a(\infty) = 20 \log |K| \quad (3.34)$$

et une asymptote basse fréquence:

$$a(\omega) = a(\infty) - 20 \log |\lambda/\omega| \quad (3.35)$$

dont la pente vaut  $+20$  dB/décade.

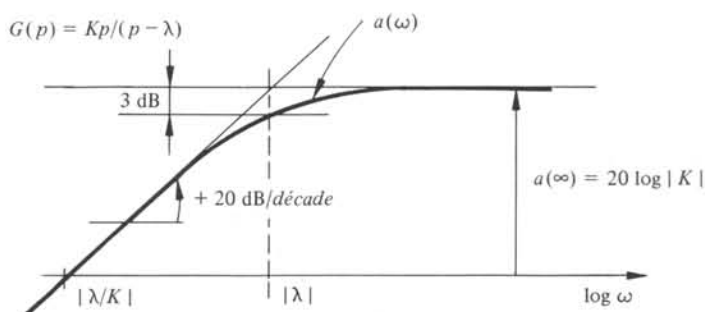


Fig. 3.23

### 3.2.19. Résumé des résultats pour les biportes élémentaires du premier ordre

Pour l'étude d'un système linéaire, les réponses les plus utiles et surtout les plus accessibles à l'expérience sont la réponse indicielle et la réponse en fréquence. Ces informations sont résumées au tableau 3.24 pour les biportes élémentaires du premier ordre.

## 3.3. ANALYSE DES RÉSEAUX DU SECOND ORDRE

### 3.3.1. Réponse propre d'un réseau du second ordre

Un réseau du second ordre comprend deux éléments réactifs indépendants; selon leur nature, le réseau est du type  $(R, C)$ ,  $(R, L)$  ou  $(R, L, C)$ . On remarquera dans les exemples qui vont suivre que la réponse propre d'un réseau  $(R, C)$  ou  $(R, L)$  est toujours du type exponentiel (les pulsations propres  $p_i$  sont réelles négatives) tandis que celle d'un réseau  $(R, L, C)$  peut être oscillatoire amortie ou exponentielle (les pulsations propres sont complexes à parties réelles négatives).

### 3.3.2. Réponse d'un biporte $(R, C)$ à un signal donné

Un signal  $e(t)$  est appliqué à un biporte  $(R, C)$  en échelle (fig. 3.25); les charges initiales sur les capacités sont supposées nulles; on recherche la loi de la tension  $u_2$ .

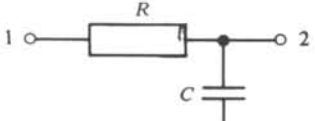
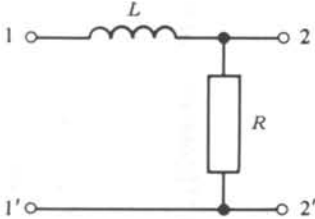
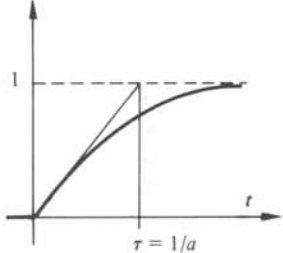
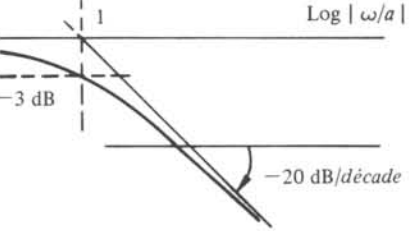
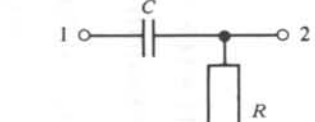
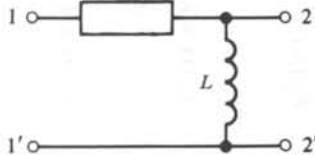
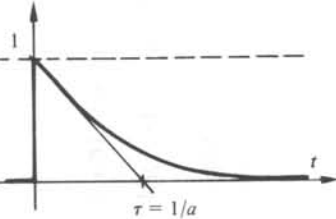
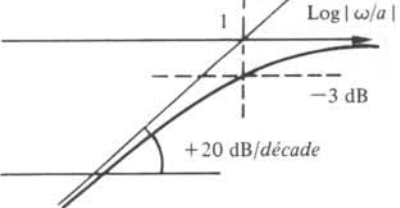
Le réseau obéit aux équations suivantes:

$$e(t) = u_1 = R_1 i_1 + C_1^{-1} \int_0^t (i_1 - i_2) d\tau$$

$$C_1^{-1} \int_0^t (i_1 - i_2) d\tau = R_2 i_2 + C_2^{-1} \int_0^t i_2 d\tau$$

$$u_2 = C_2^{-1} \int_0^t i_2 d\tau$$

Tableau 3.24

Biporte	$G(p)$	$\gamma(t)$	Gain logarithmique
 	$a/(p + a)$ $a = 1/RC, R/L$		
 	$p/(p + a)$ $a = 1/RC, R/L$		

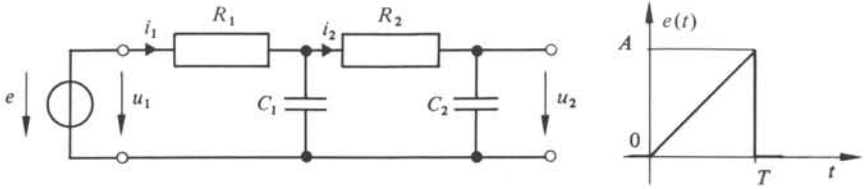


Fig. 3.25

Si l'on substitue les transformées de Laplace, il vient:

$$E(p) = [R_1 + (C_1 p)^{-1}] I_1 - (C_1 p)^{-1} I_2$$

$$0 = (C_1 p)^{-1} I_1 - [R_2 + (C_1 p)^{-1} + (C_2 p)^{-1}] I_2$$

$$U_2 = (C_2 p)^{-1} I_2$$

Le système des deux premières équations est résolu par rapport à  $I_2$  et le résultat est substitué dans la troisième. Si l'on pose:

$$\begin{aligned} p^2 + p [(R_1 C_1)^{-1} + (R_2 C_2)^{-1} + (R_2 C_1)^{-1}] + (R_1 R_2 C_1 C_2)^{-1} &= \\ = (p + a)(p + b) \end{aligned}$$

on obtient:

$$U_2(p) = E(p) ab(p + a)^{-1}(p + b)^{-1}$$

On observera que les pulsations propres  $-a$  et  $-b$  sont bien réelles négatives. La transformée du signal vaut:

$$E(p) = (A/T)(1/p^2) [1 - \exp(-Tp)] - (A/p) \exp(-Tp)$$

Si l'on pose encore:

$$\begin{aligned} F_1(p) &= ab p^{-2}(p + a)^{-1}(p + b)^{-1} \\ &= b/a(b - a)^{-1}(p + a)^{-1} - a/b(b - a)^{-1}(p + b)^{-1} + p^{-2} - p^{-1}(a + b)/ab \end{aligned}$$

$$F_2(p) = pF_1(p)$$

il vient:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= L^{-1}[F_1(p)] = \{ (b - a)^{-1} [b/a \exp(-at) - a/b \exp(-bt)] \\ &\quad + t - (a + b)/ab \} \epsilon(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(t) &= L^{-1}[F_2(p)] = df_1/dt + f_1(0)\delta(t) \\ &= \{ 1 - (b - a)^{-1} [b \exp(-at) - a \exp(-bt)] \} \epsilon(t) \end{aligned}$$

et on en déduit la loi de la réponse pour  $0 < t \leq T$ :

$$u_2(t) = (A/T)f_1(t)$$

et pour  $T < t$ :

$$u_2(t) = (A/T)[f_1(t) - f_1(t-T)] - Af_2(t-T)$$

Cette réponse est représentée à la figure 3.26.

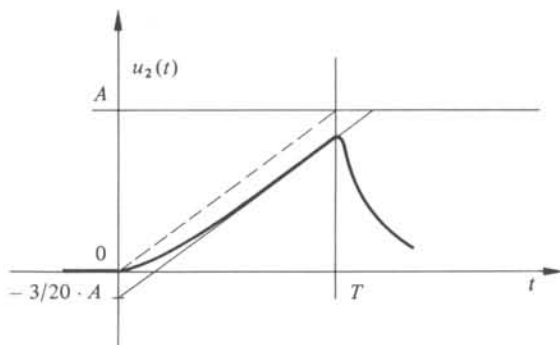


Fig. 3.26

### 3.3.3. Réponse indicielle d'un bipôle $(R, L, C)$ série

Une tension  $A \cdot \epsilon(t)$  est appliquée à un bipôle  $(R, L, C)$  série (fig. 3.27); on va déterminer la loi du courant  $i(t)$  qui en résulte sachant que les conditions initiales sont nulles.

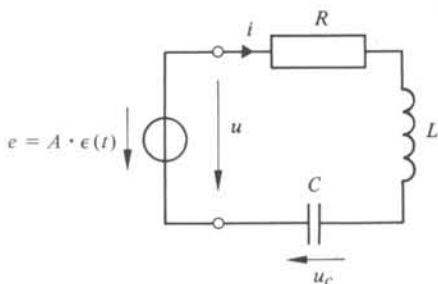


Fig. 3.27

Le circuit est régi par l'équation

$$A\epsilon(t) = Ri + L \frac{di}{dt} + u_C(0) + C^{-1} \int_0^t i d\tau$$

avec

$$i(0) = u_C(0) = 0.$$

Il vient après transformation:

$$A/p = RI + LpI + I/(Cp)$$

soit

$$I(p) = A/L[p^2 + (R/L)p + (LC)^{-1}]^{-1} \quad (3.36)$$

L'original  $i(t)$  est, à un facteur près, la réponse indicielle du bipôle; le terme de régime est nul car  $I(p)$  ne possède pas de pôle à l'origine; en effet, la fonction de réponse  $Cp [LCp^2 + RCp + 1]^{-1}$  possède un zéro à l'origine.

Les pulsations propres du réseau (pôles de  $I(p)$ ) sont les solutions de l'équation caractéristique:

$$p^2 + (R/L)p + (LC)^{-1} = 0 \quad (3.37)$$

Elles peuvent être réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives; la forme de la réponse indicielle dépend uniquement de la valeur de ces pulsations propres, et trois cas sont à considérer. On posera:

$$R/L = 2\sigma \quad (3.38)$$

$$(LC)^{-1} = \rho^2$$

- $\sigma^2 - \rho^2 < 0$ , soit  $R < 2\sqrt{L/C}$

Les pulsations propres sont complexes conjuguées:

$$p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega; \quad \omega = (\rho^2 - \sigma^2)^{1/2}$$

et on a (cf formule 20 du dictionnaire du § 8.2.2):

$$i(t) = A(\omega L)^{-1} \exp(-\sigma t) \sin \omega t \epsilon(t) \quad (3.39)$$

La réponse est une sinusoïde amortie (fig. 3.28).

- $\sigma^2 - \rho^2 = 0$ , soit  $R = 2\sqrt{L/C}$

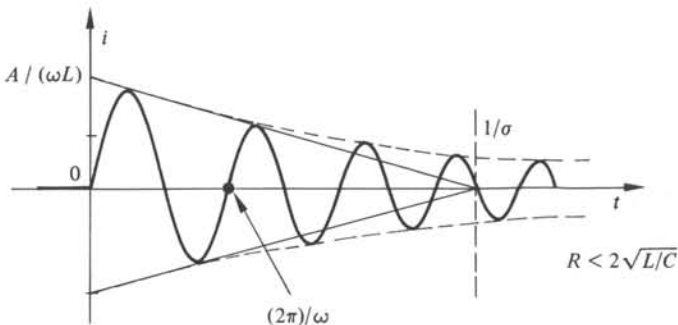


Fig. 3.28

Les pulsations propres sont négatives et confondues:

$$p_{1,2} = -\sigma = -R/2L$$

et on a (formule 19 du dictionnaire du § 8.2.2):

$$i(t) = AL^{-1}t \exp(-\sigma t) \cdot \epsilon(t) \quad (3.40)$$

La réponse est une exponentielle décroissante multipliée par un facteur linéaire en  $t$  (fig. 3.29).

•  $\sigma^2 - \rho^2 > 0$ , soit  $R > 2\sqrt{L/C}$

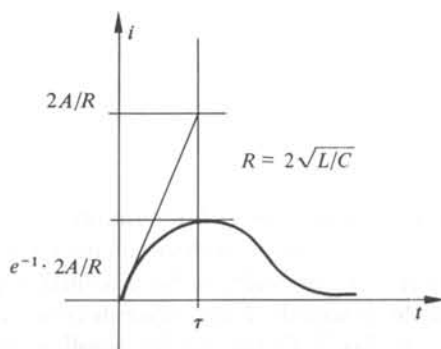


Fig. 3.29

Les pulsations propres sont réelles, négatives et distinctes :

$$p_{1,2} = -\sigma \pm \beta ; \quad \beta = (\sigma^2 - \rho^2)^{1/2}$$

et on a (formule 9 du dictionnaire du paragraphe 8.2.2, avec la règle de translation 8.1.14):

$$i(t) = A(\beta L)^{-1} \exp(-\sigma t) \sinh(\beta t) \epsilon(t) \quad (3.41)$$

Si l'on pose

$$\tau_1 = (\sigma - \beta)^{-1} ; \quad \tau_2 = (\sigma + \beta)^{-1} \quad (3.42)$$

on peut aussi écrire:

$$i(t) = A(2\beta L)^{-1} [\exp(-t/\tau_1) - \exp(-t/\tau_2)] \epsilon(t)$$

La réponse est une différence de deux exponentielles décroissantes (fig. 3.30).

### 3.3.4. Définition

La valeur particulière  $R = 2\sqrt{L/C}$  est appelée *résistance critique* pour un bipôle ( $R, L, C$ ) série connecté à une source de tension.

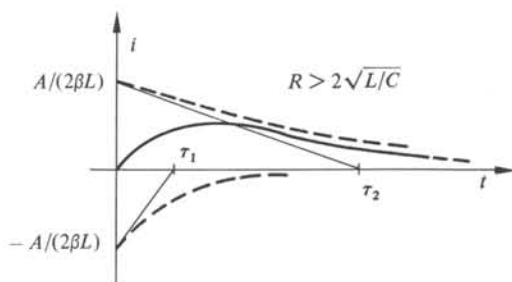


Fig. 3.30

- Lorsque  $R < 2\sqrt{L/C}$ , la réponse est dite *oscillatoire amortie*.
- Lorsque  $R = 2\sqrt{L/C}$ , la réponse est *apériodique critique*.
- Lorsque  $R > 2\sqrt{L/C}$ , la réponse est *apériodique*.

### 3.3.5. Réponse indicielle d'un bipôle $(R, L, C)$ parallèle

On montrera, à titre d'exercice, que les résultats obtenus aux paragraphes 3.3.3 et 3.3.4 peuvent être étendus par dualité au bipôle constitué par trois éléments  $R$ ,  $L$  et  $C$  connectés en parallèle et raccordés à une source de courant; la valeur de la résistance critique est désormais  $(1/2)\sqrt{L/C}$  et le sens des inégalités doit être inversé.

### 3.3.6. Réponse d'un bipôle $(R, L, C)$ avec conditions initiales non nulles

Les résultats du paragraphe 3.3.3 restent valables lorsque la charge initiale sur la capacité n'est pas nulle: il suffit de remplacer  $A$  par  $A - u_c(0)$  (cf § 2.3.8, excitations fictives); d'une façon duale, dans le bipôle parallèle, si l'inductance est parcourue par un courant  $i(0)$ , il suffit de la retrancher de la source.

### 3.3.7. Réponse d'un réseau $(R, L, C)$ à une excitation sinusoïdale avec conditions initiales non nulles

Dans le réseau de la figure 3.31, la source sinusoïdale  $e(t) = E \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \Phi)$ .  $e(t)$  est nulle pour  $t < 0$  tandis que la source continue existe depuis  $t = -\infty$ . La réponse cherchée est le courant  $i_1$  fourni par la source sinusoïdale pour  $t \geq 0$ .

Il faut tout d'abord déterminer les conditions initiales,  $u(0)$  et  $i_1(0)$ , pour  $t < 0$

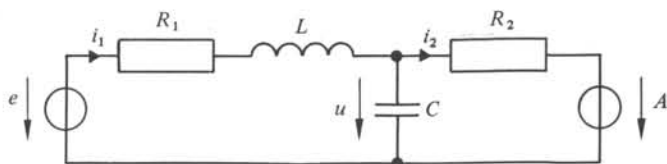


Fig. 3.31



le réseau est en régime continu: la tension aux bornes de l'inductance et le courant dans la capacité sont nuls et on peut écrire:

$$\begin{aligned} i_1(0) &= -A(R_1 + R_2)^{-1} \\ u(0) &= R_1(R_1 + R_2)^{-1}A \end{aligned} \quad (3.43)$$

Pour  $t \geq 0$ , on a:

$$e(t) = R_1 i_1 + L di_1/dt + u$$

$$u = u(0)\epsilon(t) + C^{-1} \int_0^t (i_1 - i_2) dt = A\epsilon(t) + R_2 i_2$$

Ce système devient après transformation:

$$E(p) = (R_1 + Lp)I_1 - Li_1(0) + U(p) \quad (3.44)$$

$$U(p) = u(0)/p + (Cp)^{-1}(I_1 - I_2) = A/p + R_2 I_2 \quad (3.45)$$

Si l'on résoud par rapport à  $I_1$ , et en tenant compte des expressions des conditions initiales (3.43), on trouve:

$$I_1(p) = E(p)/L(p+a)(p^2 + 2\sigma p + \rho^2) - A/p(R_1 + R_2) \quad (3.46)$$

On a posé

$$E(p) = E\sqrt{2}(p \cos \Phi - \omega \sin \Phi)(p^2 + \omega^2)^{-1}$$

$$a = (R_2 C)^{-1} \quad (3.47)$$

$$2\sigma = R_1/L + (R_2 C)^{-1}$$

$$\rho^2 = (R_1 + R_2)R_2^{-1}(LC)^{-1}$$

On observera que la solution (3.46) aurait pu être obtenue d'une façon plus immédiate par application de la propriété de superposition (§ 2.3.5).

La décomposition de  $I_1(p)$  en éléments simples fait apparaître les termes transitoires, de régime sinusoïdal et de régime continu

- le terme transitoire:

$$i_{1,T} = L^{-1}[m(p+\alpha)(p^2 + 2\sigma p + \rho^2)^{-1}E]\epsilon(t)$$

où  $m$  et  $\alpha$  sont des constantes dont la valeur résulte de la décomposition de (3.46); si par exemple on a  $\rho^2 - \sigma^2 = \omega^2 > 0$ , il vient :

$$i_{1,T} = mE \exp(-\sigma t)[\cos \omega t + (\alpha - \sigma)\omega^{-1} \sin \omega t]\epsilon(t) \quad (3.48)$$

- le terme de régime continu

$$i_{1,C} = A(R_1 + R_2)^{-1} = i_1(0)\epsilon(t)$$

- le terme de régime alternatif sinusoïdal: ici, il y a intérêt à utiliser le formalisme des substitués complexes; on trouve ainsi

$$i_{1,A} = I_1 \sqrt{2} \cos(\omega t + \Psi) \cdot \epsilon(t) \quad (3.49)$$

avec:

$$I_1 = E/L |(a + j\omega)(\rho^2 - \omega^2 + j2\sigma\omega)^{-1}| \quad (3.50)$$

$$\Psi = \Phi + \arctan(\omega/a) - \arctan 2\sigma\omega(\rho^2 - \omega^2)^{-1}$$

### 3.3.8. Réponses impulsionnelle et indicielle d'un biporte (R,C)

Le biporte de la figure 3.32 est considéré dans l'état quiescent en  $t = 0^-$ ; sa fonction de réponse en tension est définie par  $G(p) = U_2/U_1$  et une analyse semblable à celle explicitée au paragraphe 3.3.2 fournit l'expression:

$$\begin{aligned} G(p) &= (R_1 C_1)^{-1} p \{ p^2 + p[(R_2 C_1)^{-1} + (R_2 C_2)^{-1} \\ &\quad + (R_1 C_1)^{-1}] + (R_1 R_2 C_1 C_2)^{-1} \}^{-1} \\ &= K p [(p + a)(p + b)]^{-1} \quad a > b > 0, K > 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

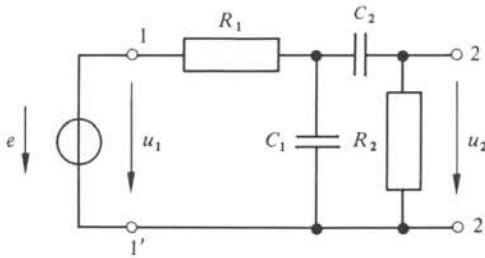


Fig. 3.32

La réponse impulsionnelle vaut:

$$g(t) = K(a - b)^{-1} [a \exp(-at) - b \exp(-bt)] \epsilon(t) \quad (3.52)$$

Elle s'annule pour  $t_1 = (a - b)^{-1} \ln(a/b)$ .

De même l'original de  $p^{-1} \cdot G(p)$  est la réponse indicielle :

$$\gamma(t) = K(a - b)^{-1} [\exp(-bt) - \exp(-at)] \epsilon(t) \quad (3.53)$$

On vérifie que cette réponse est maximale pour  $t = t_1$ . Les réponses impulsionnelle et indicielle sont représentées respectivement aux figures 3.33 et 3.34.

### 3.3.9. Réponse en fréquence de biportes (R,C) du second ordre

Le biporte de la figure 3.25 a pour fonction de réponse en tension (§ 3.3.2):

$$G_1(p) = ab [(p + a)(p + b)]^{-1} \quad a > b > 0 \quad (3.54)$$

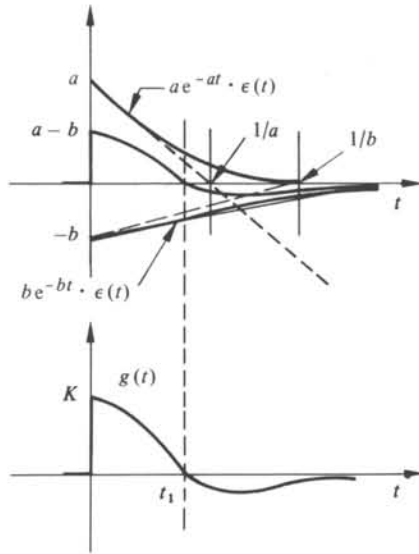


Fig. 3.33

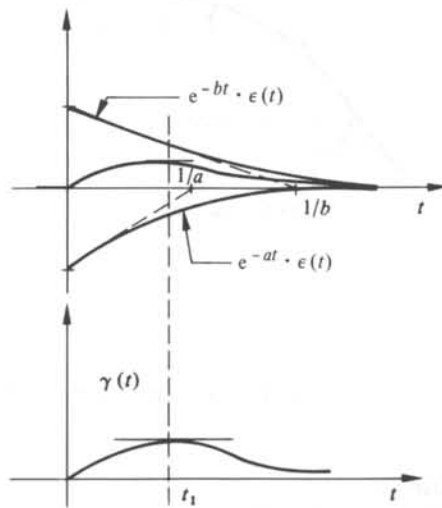


Fig. 3.34

On vérifiera que le même biporte dans lequel on a permuté capacités et résistances a pour fonction de réponse:

$$G_2(p) = p^2 [(p + a)(p + b)]^{-1} \quad (3.55)$$

Le gain logarithmique défini au paragraphe 3.2.11 est obtenu en sommant la contri-

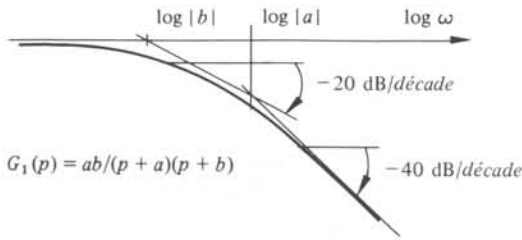


Fig. 3.35

bution de chaque binôme du dénominateur de  $G_1$  (généralisation de la relation 3.33):

$$a(\omega) = a(0) - 20 \log [1 + (\omega/a)^2]^{1/2} - 20 \log [1 + (\omega/b)^2]^{1/2} \quad (3.56)$$

et sa représentation en fonction de  $\log \omega$  est immédiate (fig. 3.35).

Une procédure similaire permet d'obtenir le gain associé à la fonction  $G_2$ ; sa représentation est donnée à la figure 3.36.

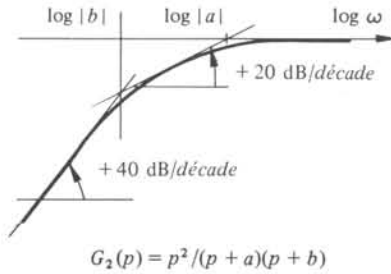


Fig. 3.36

### 3.4. PROBLÈMES ASSOCIÉS AUX SOURCES DISCONTINUES

#### 3.4.1. Sources discontinues

Dans l'analyse d'un circuit interviennent souvent des sources dont la grandeur est une fonction discontinue du temps. C'est là une idéalisation commode de certains systèmes physiques. Il faut cependant prendre certaines précautions lorsque l'on remplace ces systèmes physiques par leurs modèles mathématiques faute de quoi on aboutit à des résultats mathématiques dont l'interprétation physique est douteuse. Les restrictions introduites ci-après sur les connexions admissibles ne se situent donc pas au niveau de celles évoquées au paragraphe 1.2.3, qui ont pour but d'assurer la cohérence formelle de l'ensemble des résultats constituant la théorie des circuits, mais bien au niveau de celles qui assurent une adéquation convenable entre la physique et la mathématique.

On sait que dans un circuit autonome l'énergie emmagasinée dans les inductances et dans les capacités est fournie par les sources (cf § 1.3.13); si par conséquent on admet qu'une source physiquement réalisable ne peut à aucun moment fournir une puissance infinie, l'énergie emmagasinée dans chaque élément ne peut pas subir de discontinuités: le courant dans chaque inductance et la charge sur chaque capacité sont des fonctions continues du temps (cf § 2.3.14).

Par suite des lemmes de Kirchhoff, cette exigence physique entraîne les deux règles suivantes:

- une source de courant située dans une coupe constituée à part elle exclusivement par des inductances doit être une fonction continue du temps (ex. fig. 3.37);
- une source de tension située dans une maille constituée à part elle exclusivement par des capacités doit être une fonction continue du temps (ex. fig. 3.38).

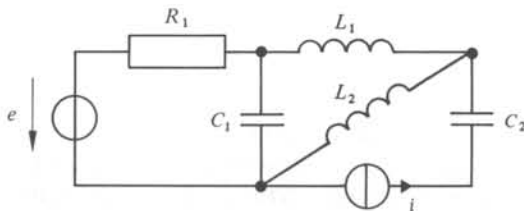


Fig. 3.37

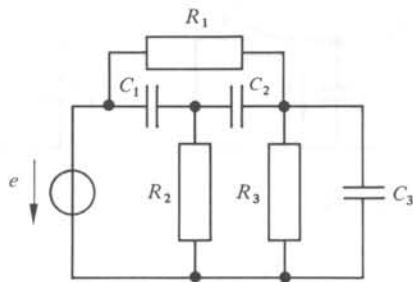


Fig. 3.38

On remarquera que ces restrictions sont toujours satisfaites lorsque chaque source de courant est accompagnée d'une conductance interne parallèle (source réelle de courant) et lorsque chaque source de tension est accompagnée d'une résistance interne série (source réelle de tension) (cf § 1.4.14).

### 3.4.2. Réseaux avec interrupteurs

Les phénomènes transitoires dans un réseau résultent généralement de l'ouverture ou de la fermeture d'un ou de plusieurs *interrupteurs*.

On appelle *interrupteur* un dispositif qui permet d'établir un court-circuit entre deux noeuds d'un circuit ou encore de déconnecter une branche en introduisant un circuit ouvert en série avec elle; ces modifications ont lieu en principe en un temps infiniment court.

Comme le fonctionnement d'un interrupteur modifie la topologie d'un réseau, le système des lemmes de Kirchhoff est modifié et le théorème de Tellegen (§ 1.3.15) n'est plus applicable. Au point de vue de la théorie des circuits, la conservation de l'énergie n'est plus assurée et on aboutit dans certains cas à la situation inadmissible physiquement selon laquelle l'énergie présente dans un réseau change brusquement de valeur à la suite du fonctionnement d'un interrupteur.

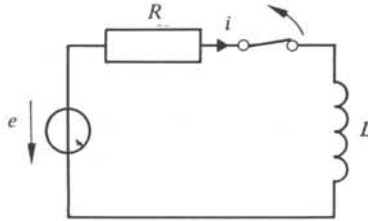


Fig. 3.39

Ainsi dans le circuit de la figure 3.39 si on ouvre l'interrupteur à l'instant  $t = 0$ , on a  $W(0^-) = 1/2 Li^2(0^-)$  et  $W(0^+) = 0$ ; dans celui de la figure 3.40, la fermeture de l'interrupteur annule brusquement l'énergie :  $W(0^-) = 1/2 Cu^2(0^-)$ ,  $W(0^+) = 0$ .

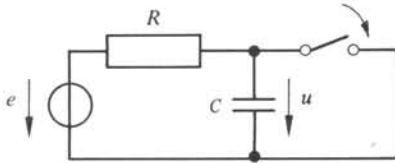


Fig. 3.40

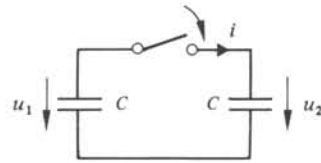


Fig. 3.41

Considérons encore la figure 3.41; si avant la fermeture on a  $u_1 = A$ ,  $u_2 = 0$ , on peut écrire dès la fermeture de l'interrupteur:

$$u_1 = u_1(0^-) - C^{-1} \int_0^t i(\tau) d\tau = A - q/C$$

$$u_2 = u_2(0^-) + C^{-1} \int_0^t i(\tau) d\tau = q/C$$

et l'égalisation de ces tensions impose  $q = CA/2$ . Le circuit a atteint cet état en un temps infiniment court. L'énergie emmagasinée dans les capacités après fermeture vaut

$$W(0^+) = C(A/2)^2 = 1/4 CA^2$$

alors qu'elle valait avant fermeture:

$$W(0^-) = 1/2 CA^2$$

Dans chacun de ces exemples, il y a destruction instantanée d'une quantité finie d'énergie et il faut en conclure que l'idéalisation du dispositif est inadéquate: un interrupteur réel ne peut pas couper un courant fini en un temps infiniment court car il se produirait entre ses mâchoires un arc électrique dont l'effet serait de prolonger le passage du courant et éventuellement de détruire l'interrupteur; de même un interrupteur réel ne peut pas décharger instantanément un condensateur. D'autre part, dans le circuit de la figure 3.41, l'insertion d'une résistance non nulle, si petite soit-elle, entre les deux capacités, lève l'inadéquation du modèle: on démontrera, à titre d'exercice, que l'énergie ayant disparu a été dissipée sur cette résistance. Comme ce résultat est valable quelle que soit la résistance, il l'est aussi à la limite.

En fait un interrupteur que l'on ferme peut être assimilé à une source de tension discontinue imposant une annulation brusque de la différence de potentiel entre deux noeuds; un interrupteur que l'on ouvre peut être assimilé à une source de courant discontinue imposant une annulation brusque du courant qui le traverse; on peut donc énoncer les deux règles suivantes qui découlent de celles données au paragraphe précédent :

- on ne peut pas ouvrir un interrupteur situé dans une coupe constituée à part lui exclusivement par des inductances, sauf à l'instant précis où le courant qui le traverse s'annule (fig. 3.42 :  $S_1$ );
- on ne peut pas fermer un interrupteur situé dans une maille constituée à part lui exclusivement par des capacités, sauf à l'instant précis où la tension à ses bornes s'annule spontanément (fig. 3.42 :  $S_2$ ).

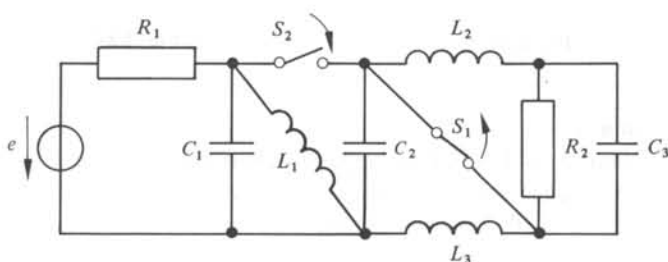


Fig. 3.42

Il est inutile d'insister sur les difficultés techniques que présente une synchronisation parfaite du fonctionnement d'un interrupteur avec le passage spontané à zéro d'un courant ou d'une tension.

### 3.5. CIRCUITS RÉSONANTS EN RÉGIME SINUSOÏDAL

#### 3.5.1. Circuit résonant série

Le comportement en régime sinusoïdal des circuits résonants présente un grand intérêt en technique, ce qui justifie l'étude particulière qui va être faite.

Le circuit résonant série (fig. 3.43) a pour impédance

$$Z(j\omega) = R + j(\omega L - 1/\omega C) \quad (3.57)$$

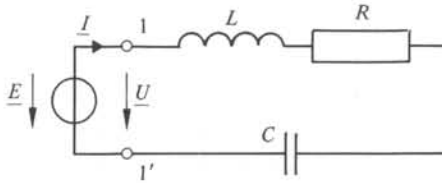


Fig. 3.43

La fonction  $X(\omega)$  est représentée à la figure 3.44; elle s'annule à la pulsation  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , à laquelle le circuit résonant série se réduit à la résistance  $R$ .

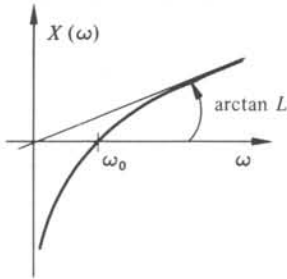


Fig. 3.44

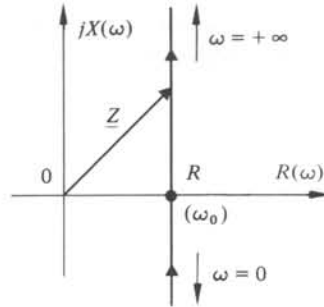


Fig. 3.45

### 3.5.2. Définition

La pulsation  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  est appelée *pulsation de résonance*; pour une tension  $E$  constante, la puissance dissipée dans la résistance est maximale à la fréquence de résonance  $f_0 = \omega_0/2\pi$  et elle vaut alors  $E^2/R$ .

### 3.5.3. Lieux complexes

Le lieu complexe relatif à  $Z(j\omega)$  est représenté à la figure 3.45, tandis que celui relatif à l'admittance  $Y(j\omega)$  est donné à la figure 3.46.

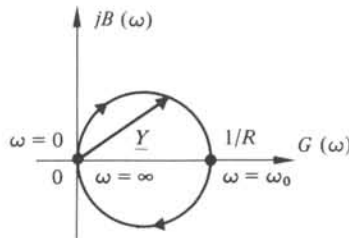


Fig. 3.46



### 3.5.4. Définition

La résistance  $R$  permet en fait de simuler les pertes par dissipation dans le bipôle; on admet provisoirement que ces pertes sont localisées exclusivement dans la bobine dont on définit le *facteur de qualité*  $Q_L$  par le rapport:

$$Q_L = \omega L/R \quad (3.58)$$

### 3.5.5. Courbes de résonance

On posera ici

$$Q_0 = \omega_0 L/R = R^{-1} \sqrt{L/C} = (\omega_0 CR)^{-1} \quad (3.59)$$

Le courant de régime vaut  $\underline{I} = Z^{-1} \underline{U}$ , avec

$$Z(j\omega) = |Z| \exp(j\theta) = R [1 + jQ_0(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)] \quad (3.60)$$

soit

$$|Z| = R [1 + Q_0^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2]^{1/2} \quad (3.61)$$

$$\theta = \tan^{-1} [Q_0(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)] \quad (3.62)$$

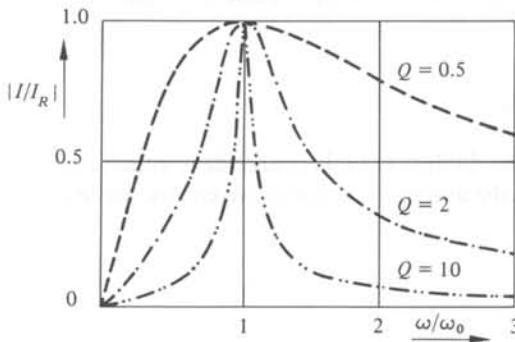


Fig. 3.47

La valeur du courant est maximale à la résonance et elle vaut  $|I_{\text{res}}| = |U/R|$ .

La figure 3.47 représente un faisceau de courbes de résonance qui illustrent le rapport

$$|I/I_{\text{res}}| = |RI/U| = [1 + Q_0^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2]^{-1/2} \quad (3.63)$$

en fonction de la pulsation réduite  $\omega/\omega_0$  pour quelques valeurs du facteur de qualité; la loi de la phase  $\theta$  est donnée à la figure 3.48.

### 3.5.6. Définition

La variable sans dimension

$$x = \omega/\omega_0 - \omega_0/\omega \quad (3.64)$$

caractérise le *désaccord* du circuit résonant.

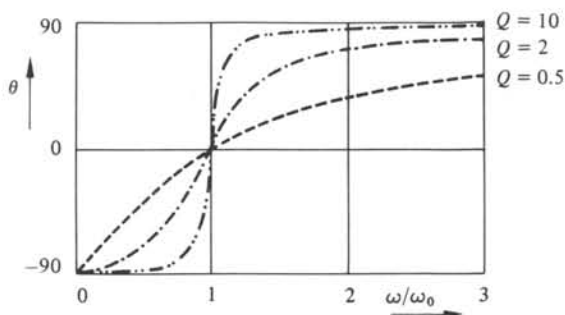


Fig. 3.48

### 3.5.7. Propriétés des courbes de résonance

La loi de la résonance (3.63) peut s'écrire en fonction du désaccord  $x$ :

$$|I/I_{\text{res}}| = [1 + (Q_0 x)^2]^{-1/2} \quad (3.65)$$

Considérons deux valeurs opposées du désaccord:  $x_1 < 0$  et  $x_2 = -x_1$  et désignons par  $\omega_1$  et  $\omega_2$  les pulsations correspondantes, on vérifie sans peine que l'on a

$$\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2 \quad (3.66)$$

$$\omega_2 - \omega_1 = x_2 \omega_0 \quad (3.67)$$

Tracée en fonction du désaccord, la courbe de résonance est symétrique; on obtient d'ailleurs une courbe universelle si l'on porte en abscisse le produit  $Q_0 x$  (fig. 3.49).

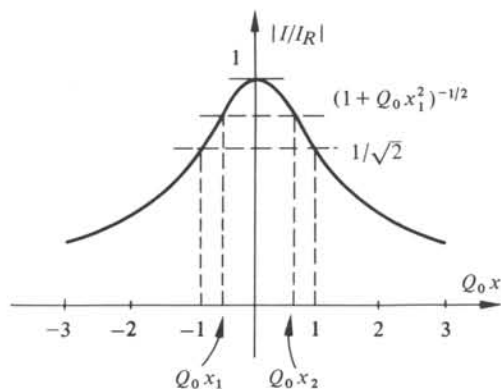


Fig. 3.49

### 3.5.8. Définitions

On appelle *bande passante* d'un circuit résonant le domaine de fréquences à l'intérieur duquel la puissance dissipée dans la résistance vaut au moins la moitié de la puis-

sance maximale  $E^2/R$ ; aux frontières  $\omega_-$  et  $\omega_+$  de la bande passante on a donc d'après (3.65),  $Q_0 x_{\pm} = \pm 1$ .

La *bande passante relative* est le rapport de la bande passante à la pulsation de résonance; d'après (3.67), la bande passante relative est égale à l'inverse du facteur de qualité:

$$(\omega_+ - \omega_-)/\omega_0 = 1/Q_0 \quad (3.68)$$

La figure 3.50 illustre le lieu complexe du rapport  $\underline{I}/\underline{I}_R$ ; aux limites de la bande passante, le déphasage de  $\underline{I}$  sur  $\underline{E}$  vaut  $\pm \pi/4$ .

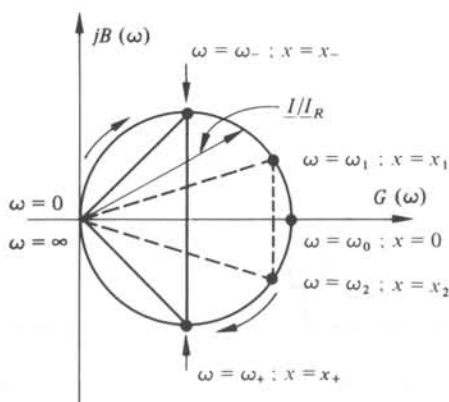


Fig. 3.50

### 3.5.9. Commentaires

On observera que pour de petites valeurs du désaccord ( $x \ll 1$ ), on a :

$$x = (\omega^2 - \omega_0^2)(\omega_0 \omega)^{-1} = (\omega - \omega_0)\omega_0^{-1}(1 + \omega_0/\omega) \cong 2\Delta\omega/\omega_0 \quad (3.69)$$

Le désaccord est sensiblement égal au double de l'écart relatif de fréquence par rapport à la fréquence de résonance.

On remarquera aussi que la valeur du facteur de qualité conditionne la forme de la réponse propre d'un circuit résonant (cf § 3.3.3); cette réponse est oscillatoire amortie dès que  $Q_0$  est supérieur à 1/2.

### 3.5.10. Simulation des pertes dans un circuit résonant

On peut donner du facteur de qualité d'un élément réactif une définition plus générale en posant

$$Q_0 = \frac{2\pi \cdot \text{valeur maximale de l'énergie emmagasinée}}{\text{énergie dissipée par cycle}} \quad (3.70)$$

$$= \frac{\omega \cdot \text{valeur maximale de l'énergie emmagasinée}}{\text{puissance moyenne dissipée}} \quad (3.71)$$

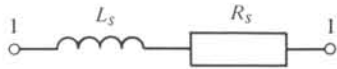


Fig. 3.51

Pour un bipôle constitué par une inductance  $L_s$  en série avec une résistance  $R_s$  (fig. 3.51) la valeur maximale de l'énergie magnétique vaut  $L_s I_M^2/2$  tandis que la puissance moyenne vaut  $R_s I^2 = R_s I_M^2/2$  de sorte que la nouvelle définition conduit bien au rapport (3.58).

En fait, les pertes dans un élément réactif sont dues à plusieurs phénomènes physiques et on sait que pour une bobine il faut accepter une variation de  $R_s$  avec la fréquence; on constate d'ailleurs que ces pertes pourraient tout aussi bien être simulées par la présence d'une résistance parallèle  $R_p$ , elle-même fonction de la fréquence (fig. 3.52).

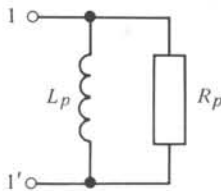


Fig. 3.52

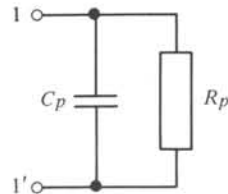


Fig. 3.53

La représentation parallèle d'une bobine utilise une inductance  $L_p$  dont la valeur peut différer de celle de  $L_s$ ; cependant si l'on exprime que pour une fréquence donnée, les représentations série et parallèle sont équivalentes, il vient:

$$L_p = L_s (1 + 1/Q_L^2) \quad (3.72)$$

$$R_p = R_s (1 + Q_L^2) \quad (3.73)$$

et

$$Q_L = \omega L_s / R_s = R_p / \omega L_p \quad (3.74)$$

Lorsque  $Q > 10$ , on commet une erreur normalement négligeable si l'on pose:

$$L_p \cong L_s; \quad R_p \cong R_s \cdot Q_0^2 \quad (3.75)$$

Les pertes dans un condensateur sont en général moins significatives que celles dans une bobine; on considère aussi les représentations parallèle et série (fig. 3.53 et 3.54) dont l'équivalence conduit aux relations:

$$C_s = C_p (1 + 1/Q_C^2) \quad (3.76)$$

$$R_s = R_p (1 + Q_C^2)^{-1} \quad (3.77)$$

et

$$Q_C = (\omega R_s C_s)^{-1} = \omega R_p C_p \quad (3.78)$$

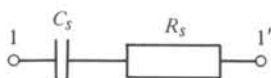


Fig. 3.54

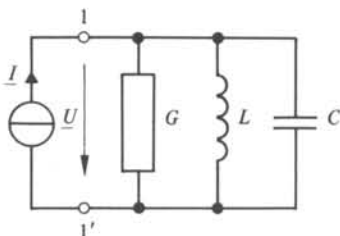


Fig. 3.55

En général  $Q_c \gg 10$  et on peut écrire:

$$C_s \cong C_p \quad (3.79)$$

$$R_s \cong R_p/Q_c^2 \quad (3.80)$$

L'analyse du circuit résonant série réel faite à partir des représentations série de la bobine et du condensateur avec  $R_{s1}$  et  $R_{s2}$  comme résistances de perte respectives; le facteur de qualité  $Q$  à utiliser pour l'usage des courbes de résonance est donné pour  $\omega = \omega_0$  par

$$\begin{aligned} 1/Q_0 &= (R_{s1} + R_{s2})/(\omega_0 L_s) \\ &= R_{s1}/(\omega_0 L_s) + \omega_0 C_s R_{s2} = 1/Q_L + 1/Q_C \end{aligned} \quad (3.81)$$

### 3.5.11. Circuit résonant parallèle

L'étude du circuit résonant parallèle (parfois appelé *circuit bouchon* ou *antirésonant*) se fait à partir des représentations parallèles des éléments réactifs (fig. 3.55); ses propriétés découlent par dualité de celles du circuit série: elles sont résumées au tableau 3.56; la valeur de la tension à la résonance est notée  $U_{res}$ .

La loi de la susceptance  $B(\omega)$  s'identifie à celle de la réactance  $X(\omega)$  du circuit série (fig. 3.45 et 3.46); à la fréquence de résonance un circuit résonant parallèle se réduit à la conductance parallèle. Les courbes de résonance (fig. 3.47, 3.48 et 3.49) doivent être interprétées comme fournissant le rapport  $|G \underline{U}/\underline{I}| = |\underline{U}/\underline{U}_{res}|$ ; de même la courbe de phase représente la phase de la tension  $\underline{U}$  par rapport au courant  $\underline{I}$  de la source.

En pratique, un circuit résonant parallèle est parfois raccordé à une source de tension  $\underline{E}$  de résistance interne  $R_0$  (fig. 3.57); or on sait que cette source est équivalente à une source de courant  $\underline{I} = \underline{E} \cdot R_0^{-1}$  en parallèle avec une conductance  $G_0 = R_0^{-1}$  (chap. I.7) : on se trouve ainsi ramené au schéma de la figure 3.58 dans lequel il vient

$$G = G_0 + G_L + G_C \quad (3.82)$$

Le facteur de qualité du circuit global se trouve réduit par la présence de  $G_0$ .

Tableau 3.56

Circuit série	Circuit parallèle
$Z = R + j(\omega L - 1/\omega C)$	$Y = G + j(\omega C - 1/\omega L)$
	$\omega_0 = (LC)^{-1/2}$
	$x = \omega/\omega_0 - \omega_0/\omega$
	$1/Q_0 = 1/Q_L + 1/Q_C$
$Z = R(1 + jQ_0x)$	$Y = G(1 + jQ_0x)$
$Z(j\omega_0) = R$	$Y(j\omega_0) = G$
$ RI/\underline{U}  =  I/I_{\text{res}}  = [1 + Q_0^2x^2]^{-1/2}$	$ GU/\underline{I}  =  \underline{U}/\underline{U}_{\text{res}}  = [1 + Q_0^2x^2]^{-1/2}$

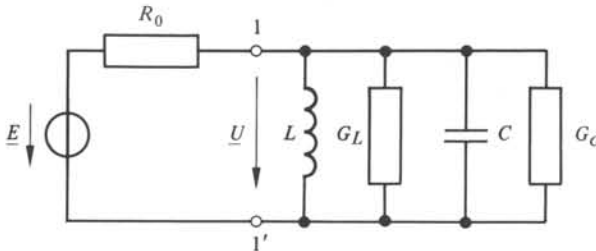


Fig. 3.57

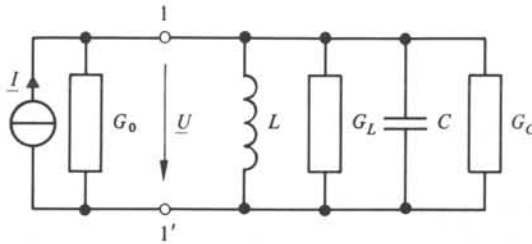


Fig. 3.58

### 3.5.12. Commentaire

Un circuit résonant peut être considéré comme un filtre élémentaire qui favorise la transmission d'un signal sinusoïdal à la fréquence d'accord (circuit série) ou au contraire qui le bloque (circuit parallèle). En effet, dans le premier cas, l'impédance passe par un minimum et, dans le second cas, elle passe par un maximum.

### 3.5.13. Circuits résonants série couplés

La figure 3.59 représente deux circuits résonants série identiques couplés par induction; l'un des circuits est raccordé à une source de tension sinusoïdale  $\underline{E}$  qui délivre un courant  $\underline{I}_1$  et l'autre est parcouru par un courant  $\underline{I}_2$ : on se propose de calculer la fonction de réponse suivante:

$$G(j\omega) = RI_2/\underline{E} \quad (3.83)$$

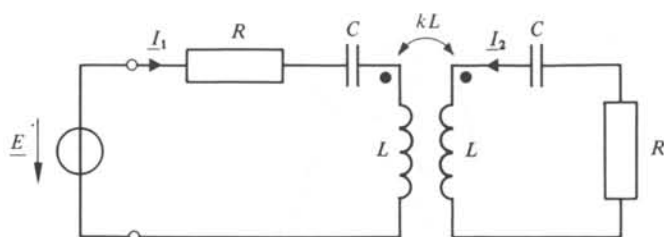


Fig. 3.59

Si  $k$  désigne le coefficient de couplage de l'inductance mutuelle (§ 1.4.11) on peut écrire les équations:

$$\underline{E} = [R + j(\omega L - 1/\omega C)]I_1 + j\omega k L I_2 \quad (3.84)$$

$$0 = j\omega k L I_1 + [R + j(\omega L - 1/\omega C)]I_2 \quad (3.85)$$

Posons encore, comme plus haut

$$\omega_0 = (LC)^{-1/2} \quad Q_0 = \omega_0 L/R \quad x = \omega/\omega_0 - \omega_0/\omega$$

L'élimination de  $I_1$  entre (3.84) et (3.85) fournit le résultat suivant:

$$G(j\omega) = \frac{R I_2}{\underline{E}} = \frac{-j(\omega/\omega_0) k Q_0}{(1 + j Q_0 x)^2 + k^2 Q_0^2 (\omega/\omega_0)^2} \quad (3.86)$$

On s'intéresse particulièrement au module de cette fonction dans le voisinage de la fréquence d'accord des circuits isolés; on va donc travailler sur une approximation de (3.86) qui consiste à poser  $\omega/\omega_0 \cong 1$ , et il vient:

$$|G|^2 \cong \frac{k^2 Q_0^2}{(1 - Q_0^2 x^2 + k^2 Q_0^2)^2 + 4 Q_0^2 x^2} \quad (3.87)$$

Si l'on annule la dérivée du dénominateur par rapport à  $x$ , on trouve les extréma de la fonction de réponse pour

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = k^2 - 1/Q_0^2 \end{cases} \quad (3.88)$$

Le comportement de la réponse en fréquence dans le voisinage de  $\omega_0 (x = 0)$  dépend de la valeur du coefficient de couplage (fig. 3.60); en pratique, celui-ci est toujours petit vis-à-vis de 1:

- pour  $k < 1/Q_0$ , la réponse des circuits couplés présente un maximum unique à la fréquence de résonance des circuits isolés;
- pour  $k \geq 1/Q_0$ , il y a deux maxima égaux à  $1/2$ , situés symétriquement par rapport à  $\omega_0$  et d'autant plus éloignés l'un de l'autre que le couplage est plus important.

La bande passante définie au paragraphe 3.5.8 correspond à l'intervalle de fréquen-

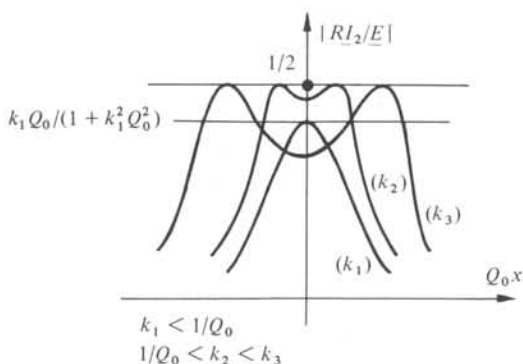


Fig. 3.60

ces dans lequel le module de la fonction de réponse est supérieur à sa valeur maximale divisée par  $\sqrt{2}$  (fig. 3.49); pour des circuits couplés, cette bande passante peut être maximisée par un choix judicieux du coefficient de couplage.

Si l'on pose  $\xi = kQ_0$ , il vient d'après (3.87)

$$|G(0)| = \xi(1 + \xi^2)^{-1} \quad (3.89)$$

$$|G_{\max}| = 1/2; \quad \xi \geq 1 \quad (3.90)$$

La valeur du couplage pour lequel  $|G(0)| = |G_{\max}| / \sqrt{2}$  correspond à  $\xi = 1 + \sqrt{2}$ ; d'autre part on vérifie sans peine que  $|G|$  reprend cette même valeur pour  $Q_0 x_{\pm} = \pm 2(1 + \sqrt{2})^{1/2} = \pm 3,1075$  (fig. 3.61); on en déduit la valeur de la bande passante relative:

$$\Delta\omega/\omega_0 = 1/2(x_+ - x_-) = x_+ = 3,1075/Q_0 \quad (3.91)$$

qui est à comparer avec l'expression  $1/Q_0$  valable pour un circuit résonant isolé.

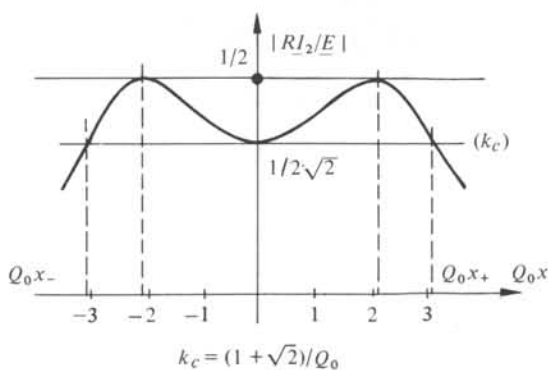


Fig. 3.61

### 3.5.14. Circuits résonants parallèles couplés

La figure 3.62 représente deux circuits résonants parallèles couplés par induction mutuelle, dont l'un est raccordé à une source de courant  $I$ ; on vérifiera à titre d'exer-



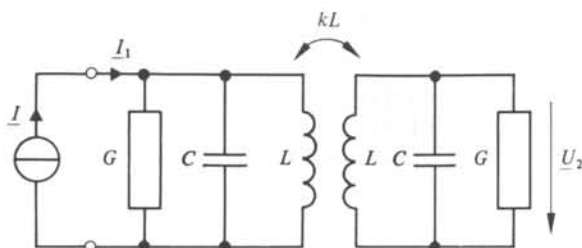


Fig. 3.62

cice que les résultats du paragraphe qui précède restent valables si l'on considère comme fonction de réponse le rapport

$$G(j\omega) = \underline{U}_2 / R \underline{I}_1 \quad (3.92)$$

### 3.5.15. Circuits résonants couplés par capacité

Le couplage entre circuits résonants peut être conçu de diverses façons; à titre d'exemple, considérons le circuit série de la figure 3.59 redessiné à la figure 3.63 après remplacement de l'inductance mutuelle par un schéma équivalent; si l'on transforme ce circuit par dualité (cf § 1.2.13) on obtient deux circuits parallèles couplés par capacité (fig. 3.64); la fonction de réponse  $G = \underline{U}_2 / (R \underline{I}_1)$  de ce réseau jouit de propriétés en tout point identiques à celles développées au paragraphe 3.5.13.

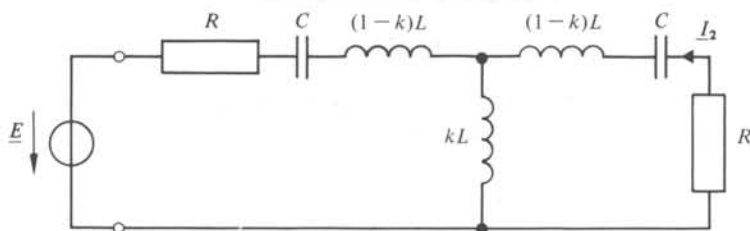


Fig. 3.63

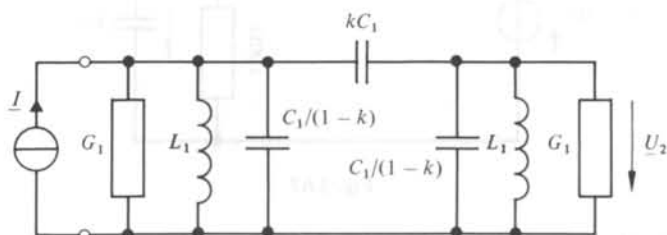


Fig. 3.64

## 3.6. EXERCICES

3.6.1. Dans le réseau 3.65, on suppose que la valeur efficace de la source de tension est constante (1 V), mais que  $f \in (0, \infty)$ ; on demande la tension de régime aux bornes de la résistance de  $20\text{k}\Omega$  pour les diverses valeurs de la fréquence.

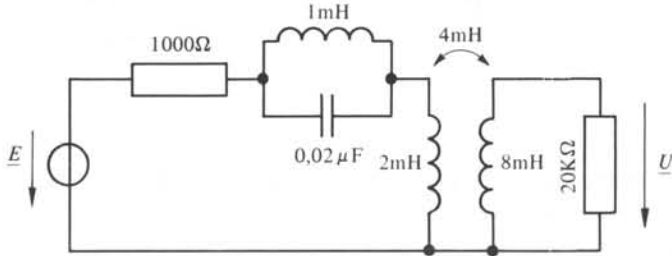


Fig. 3.65

3.6.2. Tracer le lieu complexe associé à l'impédance du bipôle de la figure 3.66 lorsque  $f \in (0, \infty)$ .

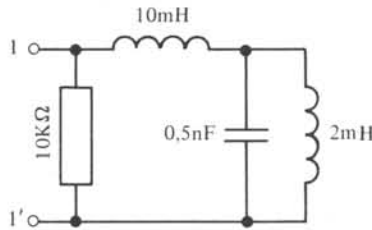


Fig. 3.66

3.6.3. Dans le circuit 3.67, on demande l'évolution de la tension aux bornes de la capacité si l'interrupteur  $S$  est ouvert brusquement à l'instant  $t = 0$ .

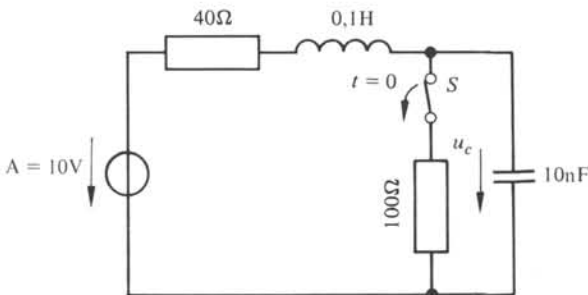


Fig. 3.67

3.6.4. Le bipôle 3.68, dans lequel la capacité n'est pas chargée, est connecté en  $t = 0$  à une source de tension sinusoïdale redressée; on demande la loi d'établissement de la tension  $u$  aux bornes de la résistance de  $10\text{k}\Omega$ .

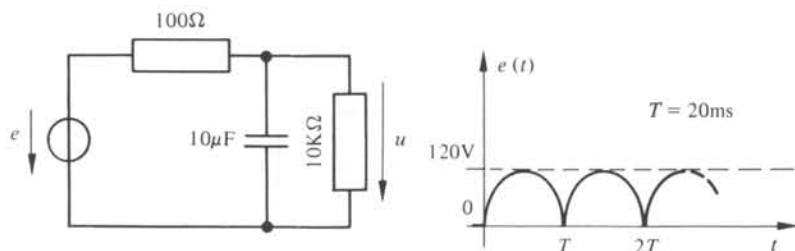


Fig. 3.68

3.6.5. Un bipôle constitué par trois éléments  $R$ ,  $L$  et  $C$  connectés en série avec une source de tension se trouve en régime sinusoïdal permanent ( $V_s = 200$  V,  $50$  Hz,  $R = 50$   $\Omega$ ,  $L = 1$  H,  $C = 20$   $\mu$  F). Un court-circuit se produit brusquement aux bornes de la capacité à l'instant précis où sa tension passe par un maximum. On demande la loi du courant après court-circuit.

3.6.6. On demande la réponse  $u(t)$  du quadripôle 3.69 au signal  $e(t)$ .

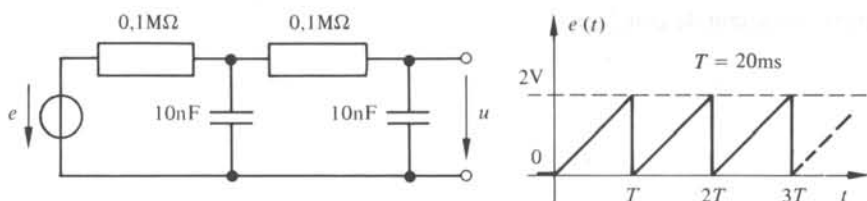


Fig. 3.69

3.6.7. Dans le réseau 3.70, l'interrupteur  $S$  fonctionne à partir de  $t = 0$ . On demande l'évolution de la tension aux bornes de chaque capacité. ( $S = 0$  : interrupteur ouvert;  $S = 1$  : interrupteur fermé).

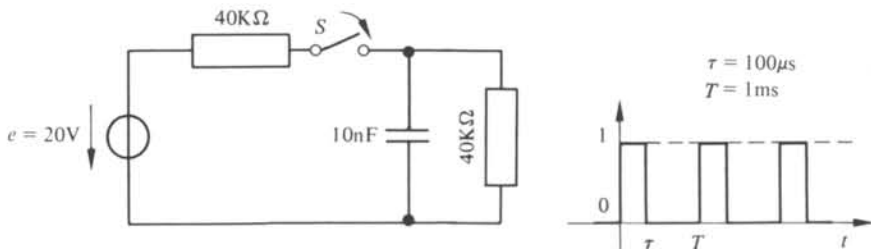


Fig. 3.70

3.6.8. Etudier la réponse en fréquence avec représentation du gain logarithmique du quadripôle de la figure 3.71.

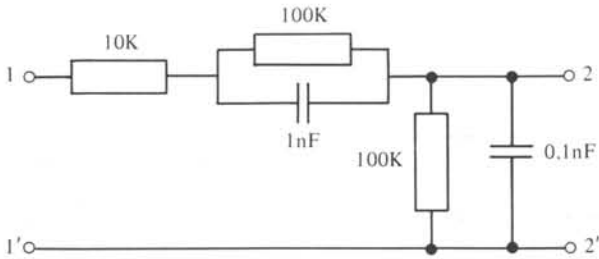


Fig. 3.71

3.6.9. La capacité parasite d'une bobine est assimilée en première approximation à une capacité concentrée  $C_p$  en parallèle sur l'inductance  $L$ ; on néglige la résistance de pertes  $R$ . A l'aide d'une capacité externe  $C_1$  connectée en parallèle sur la bobine, on réalise l'accord sur le fondamental d'un signal périodique (imaginer un circuit d'essai); on obtient ensuite l'accord sur l'harmonique 3 de ce même signal avec une capacité  $C_3$ ; sachant que  $C_1 = 215 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 15 \mu\text{F}$ , trouver la valeur de  $C_p$ .

3.6.10 Etudier la réponse indicelle des circuits résonants couplés (fig. 3.59 ou 3.62) en fonction du facteur de couplage.

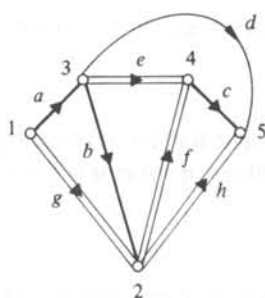
## MISE EN ÉQUATION DES RÉSEAUX

### 4.1. CONCEPTS FONDAMENTAUX DE LA THÉORIE DES GRAPHES

#### 4.1.1. Définitions

Soit  $G$  un graphe fini orienté et connexe (§ 1.2.4) comportant  $b$  branches et  $n$  noeuds (fig. 4.1).

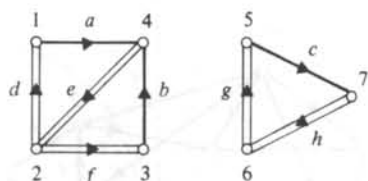
On appelle *arbre* tout sous-graphe connexe qui contient tous les noeuds de  $G$  mais ne contient aucune maille (ex.:  $e, f, g, h$ ).



$$n = 5 \quad b = 8 \quad p = 1 \quad \rho = 4 \quad \mu = 4$$

Fig. 4.1

Dans un graphe qui comporte  $p$  parties connexes, un *arbre complet* résulte de la réunion de  $p$  *arbres partiels* (ex.: fig. 4.2;  $d, e, f, g, h$ ).



$$n = 7 \quad b = 8 \quad p = 2 \quad \rho = 5 \quad \mu = 3$$

Fig. 4.2

Les *branches pendantes* d'un arbre sont celles dont une extrémité n'est connectée à aucune autre branche de l'arbre.

Un *co-arbre* est le sous-graphe complémentaire d'un arbre; ses branches sont appelées *chaînon* (ex.:  $a, b, c, d$  à la fig. 4.1).

#### 4.1.2. Propriétés

On considère en général le cas d'un graphe connexe ( $p = 1$ ); les propriétés et les théorèmes qui vont suivre sont étendus sans peine à un graphe quelconque.

Il existe dans un arbre un parcours et un seul entre toute paire de noeuds.

Un arbre possède  $(n - 1)$  branches; il peut en effet être construit branche par branche: la première branche contient deux noeuds et toute nouvelle branche permet d'atteindre un nouveau noeud; le  $n$ ième noeud est donc atteint par la  $(n - 1)$ <sup>e</sup> branche, et toute branche supplémentaire créerait une maille.

Un arbre contient au moins deux branches pendantes; en effet, le nombre de noeuds étant fini, l'ensemble des parcours dans l'arbre est lui aussi fini; par conséquent, un au moins des parcours contient un nombre maximal de branches et ses branches terminales sont nécessairement pendantes.

#### 4.1.3. Définitions. Rang et nullité d'un graphe

Le rang d'un graphe ( $\rho$ ) est égal au nombre de branches dans un arbre:

$$\rho = n - 1 \quad (4.1)$$

La nullité d'un graphe ( $\mu$ ) est égale au nombre de chaînons:

$$\mu = b - n + 1 \quad (4.2)$$

La généralisation à un graphe non connexe comprenant  $p$  parties connexes est immédiate: on a respectivement  $\rho = n - p$  et  $\mu = b - n + p$ .

#### 4.1.4. Structure d'une coupe

Si dans l'ensemble des noeuds d'un graphe on effectue une partition qui permet de définir deux sous-graphes connexes mais disjoints (ex.: fig. 4.3:  $G_a$  et  $G_b$ ), les branches qui possèdent une extrémité dans chaque sous-graphe constituent une coupe (ex.:  $h, g, f, i$ ); ceci résulte de la définition d'une coupe (§ 1.2.4).

Une orientation est attribuée à chaque coupe (par exemple de  $G_b$  vers  $G_a$ ).

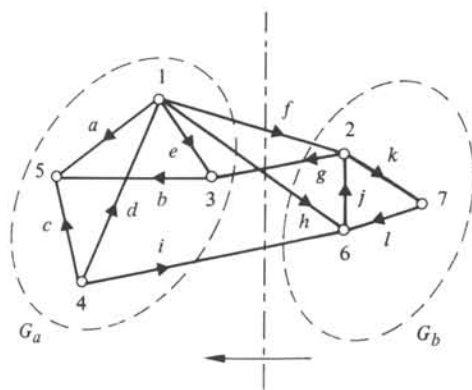


Fig. 4.3

#### 4.1.5. Définition

L'ensemble des branches incidentes en chaque noeud constitue une coupe appelée *coupe nodale*.

#### 4.1.6. Théorèmes

Une coupe quelconque contient au moins une branche de chaque arbre; il doit en effet exister dans tout arbre un parcours entre un sommet de  $G_a$  et un sommet de  $G_b$  (fig. 4.3) et ce parcours emprunte une branche de la coupe.

Une coupe contient un nombre pair de branches de chaque maille; en effet, si une maille contient des sommets de  $G_a$  et de  $G_b$ , elle doit contenir un nombre pair de branches de la coupe; ce nombre est nul lorsque la maille ne contient que des sommets de  $G_a$  ou des sommets de  $G_b$ .

### 4.2. MATRICES ASSOCIÉES À UN GRAPHE

#### 4.2.1. Matrice d'incidence

Un graphe peut être décrit par une matrice  $A_a = (a_{ij})$  appelée *matrice d'incidence* dont chaque colonne correspond à une branche et chaque ligne à un noeud si l'on pose:

- $a_{ij} = +1$  si la branche  $j$  est incidente au noeud  $i$  et est orientée vers lui
- $a_{ij} = -1$  si la branche  $j$  est incidente au noeud  $i$  et s'éloigne de lui
- $a_{ij} = 0$  si le noeud  $i$  n'est pas une extrémité de la branche  $j$ .

La matrice d'incidence du graphe  $G$  (fig. 4.1) s'écrit

$$A_a = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

#### 4.2.2. Théorème

Le rang de la matrice d'incidence est égal au rang du graphe.

Chaque colonne de  $A_a$  contient exactement deux éléments différents de zéro ( $-1$  et  $+1$ ); la somme des  $n$  lignes est donc identiquement nulle et le rang ne peut excéder  $(n - 1)$ .

Par un nombre fini de permutations, on peut faire en sorte que la sous-matrice  $S$  des  $(n - 1)$  premières colonnes se rapporte à des branches qui constituent un arbre  $T$ ; on va démontrer que l'on peut en extraire un déterminant  $\Delta$  non nul d'ordre  $(n - 1)$ .

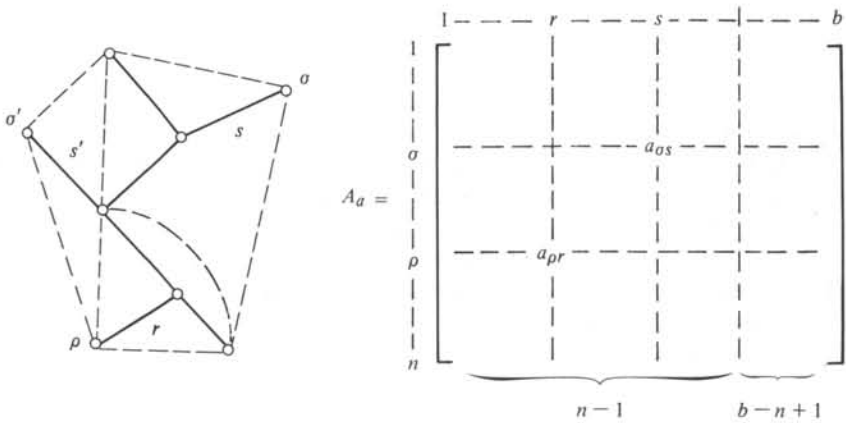


Fig. 4.4

L'arbre  $T$  comporte au moins deux branches pendantes notées  $r$  et  $s$  dont les extrémités sont  $\rho$  et  $\sigma$  (fig. 4.4); or les lignes de  $S$  qui correspondent aux noeuds extrémités de branches pendantes, soit en particulier les lignes  $\rho$  et  $\sigma$ , ne comportent qu'un seul élément non nul : par conséquent, après suppression de la ligne  $\rho$  par exemple, le déterminant  $\Delta$  des  $(n-1)$  premières colonnes est égal en module au mineur  $\Delta(\sigma, s)$  du seul élément  $a(\sigma, s)$  non nul de la ligne  $\sigma$ . Ce mineur  $\Delta(\sigma, s)$ , qui est d'ordre  $(n-2)$ , correspond à l'arbre  $T$  privé de la branche  $s$  et puisque celle-ci était pendante, il correspond à un arbre  $T'$  à  $(n-2)$  branches, dont une au moins en plus de  $r$  est pendante; soit  $s'$  cette branche et  $\sigma'$  son extrémité.

La ligne  $\sigma'$  de  $\Delta(\sigma, s)$  ne comporte qu'un seul élément non nul :  $a(\sigma', s')$ ; par conséquent  $\Delta(\sigma, s)$  est égal en module à son mineur. On a donc jusqu'à présent

$$|\Delta| = |\Delta(\sigma, s)| = |\Delta(\sigma\sigma', ss')|$$

Ce dernier mineur est associé à l'arbre  $T'$  privé de la branche pendante  $s'$ , c'est-à-dire à un arbre  $T''$  à  $(n-3)$  branches. Il est clair que le processus de dépouillement de l'arbre initial  $T$  par suppressions successives de branches pendantes conduit à considérer des mineurs d'ordres de plus en plus petits : le dernier mineur est un élément unique  $a(\epsilon, r)$  qui vaut  $+1$  ou  $-1$ , ce qui démontre le théorème.

#### 4.2.3. Corollaire

Toute sous-matrice  $S$  d'ordre  $(n-1)$  extraite de la matrice d'incidence et dont les colonnes correspondent aux branches d'un arbre  $T$  est régulière.

Soit  $\Delta_\alpha$  le déterminant de la sous-matrice  $S$  dans laquelle on a supprimé la ligne  $\alpha$ ; d'après le théorème qui précède, si  $\alpha$  est le noeud extrémité d'une branche pendante de  $T$ , alors  $|\Delta_\alpha| = 1$ . Si tel n'est pas le cas, soit  $\beta$  le noeud extrémité d'une des branches pendantes de  $T$ , on a  $|\Delta_\beta| = 1$  et on va montrer que  $|\Delta_\alpha| = |\Delta_\beta|$ .

Chaque ligne de la matrice d'incidence  $A_a$  est égale à la somme de toutes les autres changée de signe : on ne change donc pas  $|\Delta_\beta|$  si à la ligne  $\alpha$  on substitue la somme des  $(n-1)$  autres; on peut donc dire que  $\Delta_\beta$  est égal à la somme de  $(n-1)$  déterminants



dont  $(n - 2)$  sont nuls comme ayant deux lignes identiques et dont le  $(n - 1)^{\text{e}}$  est précisément égal à  $\Delta_\alpha$  au changement de signe près qui résulte de la permutation des lignes  $\alpha$  et  $\beta$ .

#### 4.2.4. Définitions

La matrice  $A_a$  d'un graphe connexe privée d'une ligne quelconque est appelée *matrice d'incidence réduite*  $A$ ; celle-ci est de rang  $n - 1$ .

Le noeud associé à la ligne supprimée est appelé *noeud de référence*; il joue un rôle privilégié en ce sens qu'il constitue la terre (la masse) du réseau étudié (cf § 1.1.2).

#### 4.2.5. Cas d'un graphe non connexe

La matrice d'incidence réduite d'un graphe non connexe résulte de la suppression dans  $A_a$  de  $p$  lignes associées à des noeuds choisis dans  $p$  parties connexes distinctes; ces  $p$  noeuds peuvent être amenés en coïncidence pour former le noeud de référence.

#### 4.2.6. Matrice de mailles

Tout ensemble de mailles dans un graphe peut être décrit par une matrice  $B = (b_{ij})$ , appelée *matrice de mailles* dont chaque colonne est associée à une branche et chaque ligne à une maille supposée orientée; on pose

- $b_{ij} = +1$  si la branche  $j$  appartient à la maille  $i$  et si leurs orientations coïncident;
- $b_{ij} = -1$  si la branche  $j$  appartient à la maille  $i$  et si leurs orientations sont opposées;
- $b_{ij} = 0$  si la branche  $j$  n'appartient pas à la maille  $i$ .

Un exemple est donné à la figure 4.5.

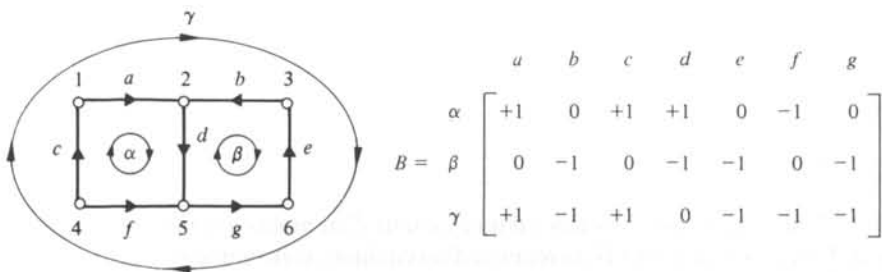


Fig. 4.5

#### 4.2.7. Théorème

Toute matrice de mailles est orthogonale à la matrice d'incidence

$$A_a B' \equiv B A'_a \equiv 0 \quad (4.3)$$

où ' note la transposition.

En effet, l'élément  $c_{ij}$  de la matrice  $A_a B'$  vaut

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^b a_{ik} b_{jk}$$

et il est associé au noeud  $i$  et à la maille  $j$ ; si cette dernière ne contient pas le noeud  $i$ , on a  $a_{ik} = 0, \forall k$  et donc  $c_{ij} = 0$ ; si elle contient le noeud  $i$ , le développement de  $c_{ij}$  ne comporte que deux termes non nuls dont la somme est nécessairement nulle. En effet, ces deux termes correspondent aux branches notées  $r$  et  $s$  de la maille  $j$  et incidentes au noeud  $i$ ; si  $r$  et  $s$  ont même orientation, celle-ci coïncide avec celle de la maille ou bien lui est opposée : dans chaque cas  $b_{rj}$  et  $b_{sj}$  sont de même signe, tandis que  $a_{ir}$  et  $a_{is}$  sont nécessairement de signes opposés; d'autre part, si les deux branches ont des orientations opposées,  $a_{ir}$  et  $a_{is}$  sont de même signe alors que  $b_{rj}$  et  $b_{sj}$  sont de signes opposés.

#### 4.2.8. Définition

Des mailles sont dites *indépendantes* lorsque les lignes de la matrice  $B$  qui leur sont associées sont elles-mêmes linéairement indépendantes; il est impossible de reconstituer l'une quelconque d'entre elles par une combinaison linéaire à coefficients non nuls des autres.

#### 4.2.9. Corollaire

Le nombre maximal de mailles indépendantes est égal à la nullité du graphe.

En effet, d'après le théorème de Sylvester [5], lorsque le produit de deux matrices  $P$  d'ordre  $m \times n$  et  $Q$  d'ordre  $n \times q$  est identiquement nul, la somme de leurs rangs est au plus égale à  $n$ ; par conséquent, si  $r$  désigne le rang d'une matrice de mailles, il résulte de (4.3) que l'on a

$$\rho + r \leq b$$

soit

$$r \leq b - n + 1 = \mu$$

Il reste à prouver l'existence d'un ensemble d'au moins  $\mu$  mailles indépendantes. Soit  $T$  un arbre du graphe  $G$ ; la réunion d'un chaînon quelconque et du parcours unique dans  $T$  entre ses extrémités constitue une maille de  $G$ ; comme chaque maille ainsi définie comprend un seul chaînon, on peut engendrer autant de mailles distinctes qu'il y a de chaînons, soit  $\mu = b - n + 1$ .

#### 4.2.10. Définition

On vient de montrer comment la connaissance d'un arbre  $T$  permet de définir un ensemble de  $\mu$  mailles indépendantes; un tel ensemble est appelé *ensemble fondamental de mailles par rapport à l'arbre  $T$* .

#### 4.2.11. Matrice associée à un ensemble fondamental de mailles

Si l'on convient de numérotter les chaînons de 1 à  $\mu$  et si l'orientation de chaque maille coïncide avec celle du chaînon qui l'a engendrée, la matrice des mailles prend la forme particulière :

$$B_f = (1_\mu, F) \quad (4.4)$$

où  $1_\mu$  représente la matrice unité d'ordre  $\mu$ . Avec ces conventions, on écrira la matrice d'incidence réduite sous la forme

$$A = (A_{CO}, A_{TR}) \quad (4.5)$$

les indices  $CO$  et  $TR$  se rapportant respectivement aux chaînons et aux branches de  $T$ .

A titre d'exemple, la matrice  $B_f$  qui correspond à l'arbre  $(e, f, g, h)$  du graphe  $G$  (fig. 4.1) vaut :

$$B_f = \begin{pmatrix} & a & b & c & d & e & f & g & h \\ +1 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & +1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice  $B_f$  peut être obtenue à partir de la matrice d'incidence réduite; la condition d'orthogonalité s'écrit en effet :

$$(1_\mu, F) \begin{pmatrix} A'_{CO} \\ A'_{TR} \end{pmatrix} = 0$$

ou

$$A'_{CO} + FA'_{TR} = 0$$

La sous-matrice  $A_{TR}$  correspond à un arbre; elle est donc régulière (§ 4.2.3) et on peut tirer  $F$  :

$$F = -A'_{CO} A'^{-1}_{TR}$$

et enfin

$$B_f = (1_\mu, -A'_{CO} A'^{-1}_{TR}) \quad (4.6)$$

#### 4.2.12. Définition

Un graphe est dit *planaire* lorsqu'il est possible de le représenter sur un plan de telle façon que les branches n'aient d'autres points communs que des noeuds.

#### 4.2.13. Ensemble de mailles indépendantes associées aux fenêtres d'un graphe planaire

Lorsqu'un graphe planaire est représenté comme indiqué en 4.2.12, chaque portion du plan délimitée par des branches est appelée *fenêtre* du graphe.

L'ensemble des mailles définies par les fenêtres d'un graphe planaire constitue un système indépendant. En effet, une combinaison quelconque de fenêtres fournit soit une maille qui entoure une ou plusieurs fenêtres, soit un ensemble disjoint de fenêtres et de telles mailles. Or, si l'on ne peut reconstituer une fenêtre en combinant un nombre quelconque de fenêtres, cela signifie que les fenêtres sont indépendantes.

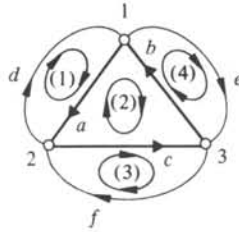


Fig. 4.6

Un exemple de graphe planaire est donné à la figure 4.6; on remarquera qu'il est impossible, pour cet exemple particulier, d'associer un arbre aux mailles définies par les fenêtres. Ceci souligne que tout ensemble de  $\mu$  mailles indépendantes n'est pas nécessairement un ensemble fondamental par rapport à un arbre.

#### 4.2.14. Matrice de coupes

Tout ensemble de coupes dans un graphe peut être décrit par une matrice  $Q = (q_{ij})$  appelée *matrice de coupes*, dont chaque colonne correspond à une branche et chaque ligne à une coupe supposée orientée; on pose :

- $q_{ij} = +1$  si la branche  $j$  appartient à la coupe  $i$  et si leurs orientations coïncident
- $q_{ij} = -1$  si la branche  $j$  appartient à la coupe  $i$  et si leurs orientations sont opposées
- $q_{ij} = 0$  si la branche  $j$  n'appartient pas à la coupe  $i$ .

On observera que la matrice d'incidence est une matrice de coupes particulière : chacune de ses lignes correspond à une coupe nodale.

#### 4.2.15. Théorème

Le rang de toute matrice de coupes est au plus égal à celui de la matrice d'incidence. On a montré au paragraphe 4.1.4 que toute coupe correspond à une partition des noeuds du graphe; or, on peut observer sur l'exemple de la figure 4.3 que la ligne de  $Q$  associée à la coupe  $(h, g, f, i)$  est égale à la somme des lignes de la matrice d'incidence associées aux noeuds  $(1, 3, 4, 5)$  du sous-graphe  $G_a$ ; par conséquent, on peut dire que toute coupe est une combinaison linéaire de coupes nodales, et le rang de  $Q$  ne peut donc excéder celui de  $A$ .

**4.2.16. Corollaire**

Toute matrice de coupes peut s'écrire sous la forme

$$Q = HA \quad (4.7)$$

où  $H$  est une matrice carrée d'ordre  $(\rho \times \rho)$  et dont les éléments sont égaux à  $+1$ ,  $-1$  ou  $0$ . Si  $H$  est régulière, elle définit un ensemble de  $\rho$  coupes indépendantes.

**4.2.17. Corollaire**

Toute matrice de coupes est orthogonale à toute matrice de mailles :

$$QB' \equiv BQ' \equiv 0 \quad (4.8)$$

Ceci résulte du théorème 4.2.7 et du corollaire 4.2.16.

**4.2.18. Définition**

Toute branche d'un arbre  $T$  définit une partition des noeuds de  $G$  susceptible d'engendrer une coupe (cf § 4.1.4) qui comprend cette branche et un certain nombre de chaînons.

L'ensemble des  $\rho$  coupes engendrées par les branches de  $T$  est appelé *ensemble fondamental de coupes par rapport à  $T$* .

**4.2.19. Matrice associée à un ensemble fondamental de coupes**

Si l'on convient de numérotter les branches de  $T$  de  $\mu + 1$  à  $b$  et si l'orientation de chaque coupe coïncide avec celle de la branche d'arbre qui l'a engendrée, la matrice de coupes prend la forme particulière :

$$Q_f = (Q_{CO}, 1_\rho) \quad (4.9)$$

où  $1_\rho$  représente la matrice unité d'ordre  $\rho$ .

A titre d'exemple la matrice  $Q$  qui correspond à l'arbre  $(e, f, g, h)$  du graphe  $G$  (fig. 4.1) vaut :

$$Q_f = \begin{pmatrix} -1 & +1 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & -1 & -1 & -1 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

En vertu du corollaire 4.2.17 et de (4.4), il vient :

$$(Q_{CO}, 1_\rho) \begin{pmatrix} 1_\mu \\ F' \end{pmatrix} = 0$$

soit

$$Q_{CO} = -F' = A_{TR}^{-1} A_{CO}$$

et enfin :

$$Q_f = (-F', 1_p) \quad (4.10)$$

### 4.3. ÉQUATIONS DES RÉSEAUX

#### 4.3.1. Structure du graphe associé à un réseau

Les branches du graphe  $G$  associé à un réseau  $R$  peuvent être définies de diverses façons; on peut par exemple faire correspondre une (deux) branche(s) de  $G$  à chaque bipôle (quadripôle) de  $R$ : cette convention est adoptée dans la section 4.6, mais elle conduit à un graphe trop complexe pour l'exploitation des méthodes plus classiques développées dans les sections 4.4 et 4.5. Notre but est d'obtenir un système d'équations avec un nombre d'inconnues aussi faible que possible.

Dans la section 4.4, une branche de  $G$  correspondra à un bipôle constitué par plusieurs bipôles passifs connectés en série (fig. 4.7); dans la section 4.5, ce bipôle sera constitué par des éléments passifs connectés en parallèle (fig. 4.8). On associera aussi dans chaque cas une branche à chaque accès d'un transformateur idéal ou d'un gyrateur.

Quelle que soit la convention choisie, les sources seront toujours incorporées dans une branche avec un ou des éléments passifs; en effet, outre qu'une source isolée ne correspond pas à une situation saine du point de vue physique (cf § 1.4.14), il est toujours

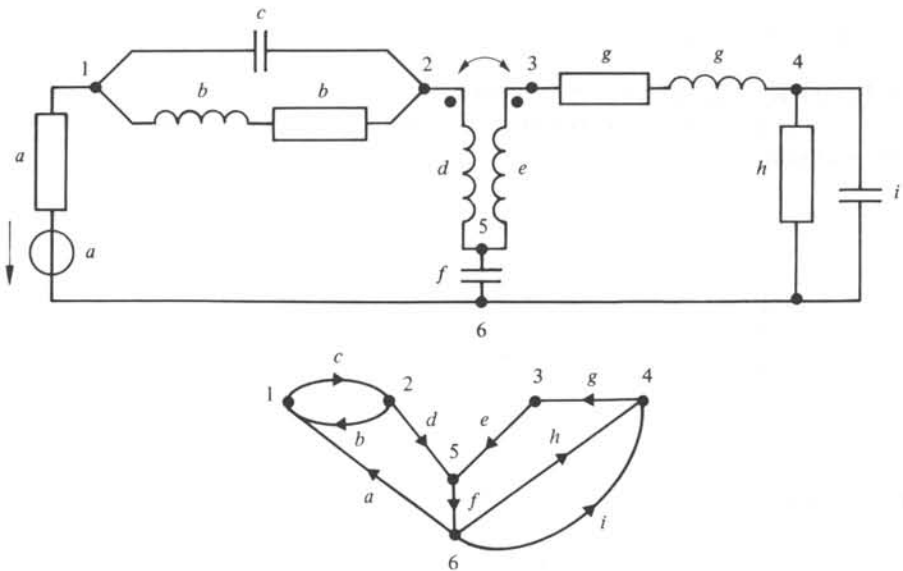


Fig. 4.7

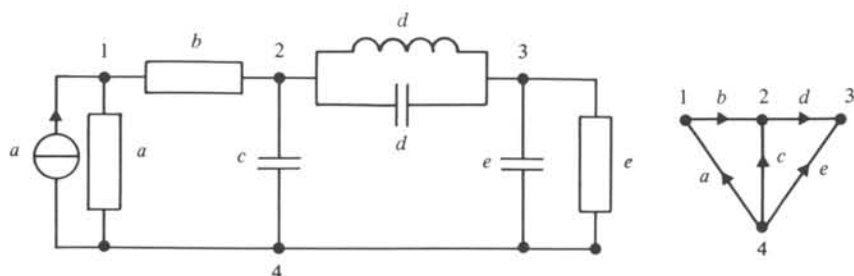


Fig. 4.8

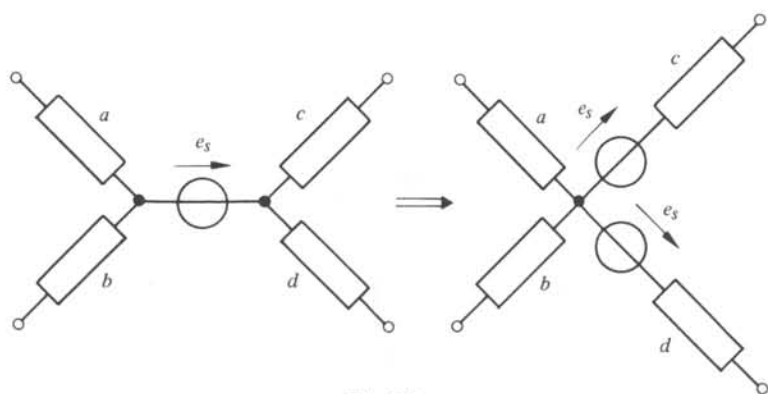


Fig. 4.9

possible de procéder à une transformation du réseau donné lorsque la résistance interne d'une source de tension ou la conductance interne d'une source de courant sont négligeables. Ces transformations sont illustrées par les figures 4.9 et 4.10, et on vérifie sans difficulté qu'elles sont compatibles avec les lemmes de Kirchhoff.

### 4.3.2. Expression matricielle des lemmes de Kirchhoff

L'orientation des branches du graphe correspond au sens positif choisi pour les courants; les tensions sont repérées comme indiqué à la figure 4.11.

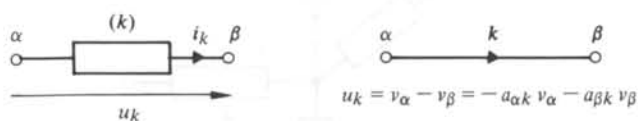


Fig. 4.11

Les courants et les tensions de branches en valeurs instantanées constituent respectivement les composantes des vecteurs suivants :

$$i = (i_1, i_2, \dots, i_b)'$$

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_b)'$$

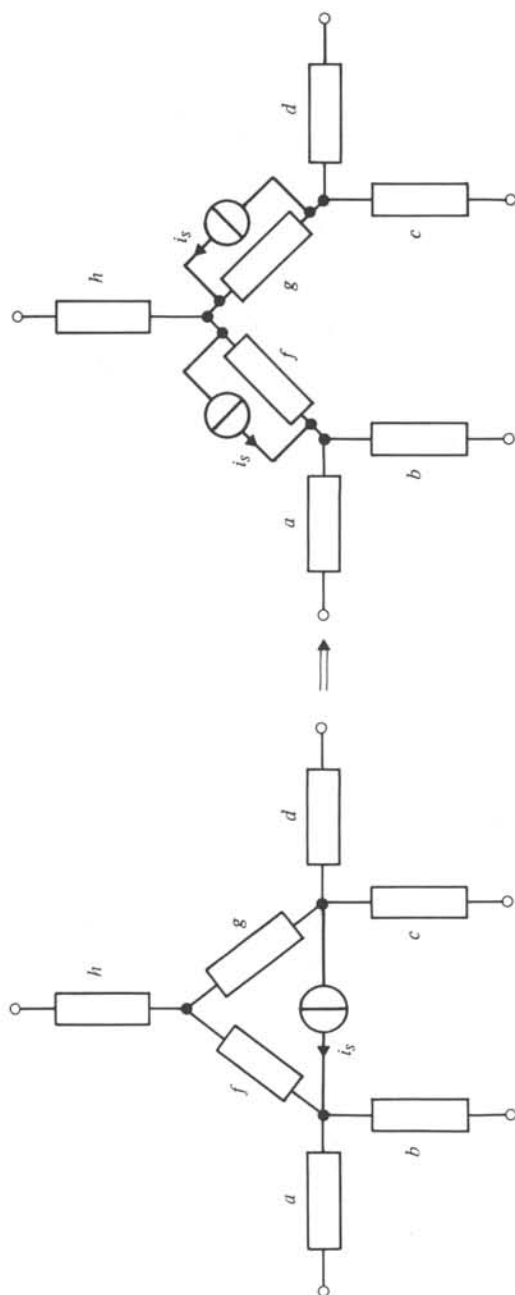


Fig. 4.10



La somme algébrique des courants dans un ensemble de branches incidentes au même noeud est nulle; si on applique cette loi à tous les noeuds de  $R$ , on obtient la relation matricielle suivante :

$$A_a i = 0 \quad (4.11)$$

En effet le produit termes à termes des éléments de la ligne  $k$  de  $A_a$  par les composantes de  $i$  est égal à la somme algébrique des courants incidents au noeud  $k$ . Le système (4.11) fournit un nombre d'équations indépendantes égal au rang de la matrice d'incidence, soit  $\rho = n - p$ ; on utilisera donc en fait la matrice d'incidence réduite pour l'expression des lemmes de première espèce :

$$A_i = 0 \quad (4.12)$$

D'une façon plus générale, la somme algébrique des courants dans un ensemble de branches constituant une coupe est nulle; ce qui, appliqué à un ensemble quelconque de coupes, s'exprime par l'équation :

$$Q_i = 0 \quad (4.13)$$

Lorsque la matrice de coupes  $Q$  est relative à un système fondamental de coupes par rapport à un arbre  $T$ , il vient, avec les conventions du paragraphe 4.2.19

$$Q_f i = (-F', 1_\rho) \begin{pmatrix} i_{CO} \\ i_{TR} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

équation dans laquelle des sous-vecteurs  $i_{CO}$  et  $i_{TR}$  sont associés respectivement aux courants dans les chaînons et aux courants dans les branches de l'arbre. De (4.14) on déduit :

$$i_{TR} = F' \cdot i_{CO} \quad (4.15)$$

Les courants dans les branches de  $T$  sont des combinaisons linéaires des courants dans les chaînons.

La somme algébrique des tensions aux bornes d'un ensemble de branches constituant une maille est nulle; appliquée à un ensemble quelconque de mailles cette loi s'exprime par l'équation :

$$B u = 0 \quad (4.16)$$

En effet, le produit termes à termes des éléments de la ligne  $k$  de la matrice  $B$  par les composantes de  $u$  est égal à la somme algébrique des tensions aux bornes des branches de la maille  $k$ . Le système (4.16) fournit un nombre d'équations indépendantes égal au rang de la matrice des mailles, soit  $\mu = b - n + p$ .

Lorsque la matrice  $B$  est relative au système fondamental de mailles par rapport à  $T$  il vient, toujours avec les conventions du paragraphe 4.2.11 :

$$(1_\mu, F) \begin{pmatrix} u_{CO} \\ u_{TR} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.17)$$

équation dans laquelle les sous-vecteurs  $u_{CO}$  et  $u_{TR}$  sont associés respectivement aux tensions aux bornes des chaînons et aux tensions aux bornes des branches de  $T$ . De (4.17) on déduit :

$$u_{CO} = -F \cdot u_{TR} \quad (4.18)$$

Les tensions aux bornes des chaînons sont des combinaisons linéaires des tensions aux bornes des branches de l'arbre.

#### 4.3.3. Méthodes d'analyse des réseaux

L'analyse d'un réseau contenant des bipôles passifs et des sources consiste en la détermination de  $b$  tensions de branches et de  $b$  courants de branches; ces  $2b$  inconnues sont liées par :

- les lemmes de Kirchhoff de 1ère espèce :  
 $Ai = 0$     ou     $Qi = 0$     ( $\rho$  équations indépendantes)
- les lemmes de Kirchhoff de 2ème espèce :  
 $Bu = 0$     ( $\mu$  équations indépendantes)
- les équations des branches explicitées plus loin :  $b$  équations indépendantes.

Ces trois systèmes d'équations sont indépendants entre eux et on dispose, grâce à l'utilisation de la transformation de Laplace, de  $\rho + \mu + b = 2b$  équations algébriques, linéaires et indépendantes en les  $2b$  inconnues : celles-ci peuvent être obtenues par une des méthodes classiques de résolution des systèmes linéaires.

En pratique cependant, lorsque le nombre de branches est élevé, la complexité du calcul est telle qu'il est opportun de réduire autant que possible l'ordre du système à résoudre tout en introduisant une systématisation dans la mise en équations; ces remarques restent valables lorsque le calcul est effectué sur ordinateur, car le temps de calcul nécessaire à la résolution d'un système algébrique linéaire est pratiquement proportionnel au cube du nombre d'inconnues.

Les méthodes qui seront exposées consistent à calculer en premier lieu soit un ensemble de  $\mu$  courants indépendants (sect. 4.4), soit un ensemble de  $\rho$  potentiels indépendants (sect. 4.5); toutes les autres grandeurs du réseau sont déduites par la suite sans difficultés. Les deux paragraphes qui viennent sont consacrés à l'étude de tels ensembles de courants indépendants (cf § 4.3.4) et de potentiels indépendants (cf § 4.3.5). Quant à la section 4.6, elle est consacrée à l'exposé d'une méthode spéciale de mise en équation qui utilise la notion de variable d'état.

#### 4.3.4. Courants de mailles

La relation (4.15) permet d'exprimer le vecteur  $i$  en fonction du sous-vecteur des courants de chaînons :

$$i = \begin{pmatrix} i_{CO} \\ i_{TR} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_\mu \\ F' \end{pmatrix} i_{CO} \quad (4.19)$$

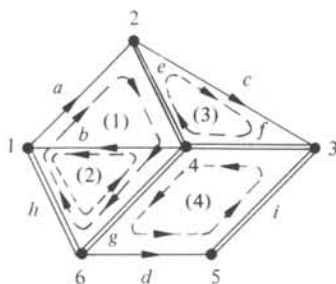


Fig. 4.12

On peut supposer que le courant dans un chaînon circule en fait dans la maille définie par ce dernier (fig. 4.12); un tel courant est appelé courant de maille. Au sous-vecteur  $i_{CO}$  correspond donc un système de  $\mu$  courants de mailles indépendantes, et dont la spécification impose, d'après (4.19) la répartition totale des courants dans le réseau. Si on tient compte de (4.4), il vient :

$$i = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ F' \end{pmatrix} i_{CO} = B_f' i_{CO} \quad (4.20)$$

Pour être tout à fait général il faut cependant remarquer qu'il peut exister des ensembles de  $\mu$  mailles indépendantes qu'il soit impossible d'engendrer à partir d'un co-arbre (cf § 4.2.13); les  $b$  courants de branches peuvent dans ce cas encore être exprimés en fonction de  $\mu$  courants de mailles par la relation

$$i = B' i_m \quad (4.21)$$

où  $i_m$  est le vecteur des courants de mailles.

Cette dernière relation généralise (4.20); elle résulte simplement du fait que le courant dans une branche quelconque  $k$  peut être obtenu par superposition des courants qui circulent dans toutes les mailles contenant la branche  $k$  :

$$i_k = \sum_{a=1}^{\mu} b_{ak} i_{ma} \quad (k = 1, 2, \dots, b) \quad (4.22)$$

#### 4.3.5. Tensions de branches et potentiels des noeuds

Sauf convention spéciale, le sommet  $n$  est celui qui correspond à la ligne qui a été supprimée dans la matrice  $A_a$  pour constituer la matrice d'incidence réduite  $A$  (cf § 4.2.4); il est utilisé comme référence pour la définition des potentiels des autres sommets du réseau; ces derniers potentiels constituent les composantes du vecteur  $v$  :

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_{n-1})' \quad (4.23)$$

Les tensions de branches dépendent des potentiels des noeuds par la relation :

$$u = -A'v \quad (4.24)$$

dont il est aisé de vérifier la validité (fig. 4.11).

#### 4.4. MÉTHODE DES COURANTS INDÉPENDANTS

##### 4.4.1. Branches avec sources de tension indépendantes

Les réseaux que l'on se propose d'analyser peuvent contenir des résistances, des capacités, des inductances propres et des inductances mutuelles, des sources indépendantes de tension et de courant; la structure d'une branche quelconque est choisie en conformité avec les remarques faites au paragraphe 4.3.1; elle est illustrée à la figure 4.13 sous la forme la plus générale. On exclut les circuits comportant des mailles de capacités et une source de tension discontinue ainsi que des coupes d'inductances et de sources de courants discontinues (cf § 3.4.1).

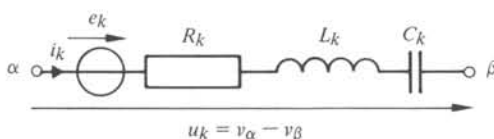


Fig. 4.13

La tension aux bornes de la branche  $k$  vaut:

$$u_k = e_k + [R_k i_k + \sum_{l=1}^b L_{kl} \frac{di_l}{dt} + u_{Ck}(0)\epsilon(t) + C_k^{-1} \int_0^t i_k d\tau] \quad t \geq 0 \quad (4.25)$$

On a admis, par souci de généralité, qu'il peut exister un couplage par induction mutuelle entre chaque paire de branches de réseau ( $L_{kl} = L_{lk}$ ); dans le cas où la branche  $k$  n'est couplée avec aucune autre branche, on pose  $L_{kl} = 0$  ( $k \neq l$ ),  $L_{kk} = L_k$ . Lorsque cette même branche ne contient pas de résistance ou pas d'inductance, on pose soit  $R_k = 0$ , soit  $L_k = 0$ ; lorsqu'elle ne contient pas de capacité, on pose  $C_k = \infty$ .

On suppose remplies les conditions sur les sources pour assurer la continuité de l'état énergétique du réseau (§ 2.3.14, 3.4.1 et 4.3.1) :

$$\left. \begin{aligned} i_l(0^-) &= i_l(0^+) = i_l(0) \\ u_{Ck}(0^-) &= u_{Ck}(0^+) = u_{Ck}(0) \end{aligned} \right\} \quad l, k = 1, 2, \dots, b$$

Si dans (4.25) on substitue à chaque fonction du temps sa transformée de Laplace unilatérale, il vient:

$$\begin{aligned}
 U_k = & \left[ E_k - \sum_{l=1}^b L_{kl} i_l(0) + p^{-1} u_{Ck}(0) \right] + \\
 & + \left[ R_k I_k + \sum_{l=1}^b L_{kl} p I_l + (C_k p)^{-1} I_k \right] \\
 & (k = 1, 2, \dots, b)
 \end{aligned}
 \tag{4.26}$$

Pour l'ensemble des branches du réseau, on a la relation matricielle:

$$U = [E - Mi(0) + p^{-1} u_C(0)] + ZI \tag{4.27}$$

On a posé :

$$\left. \begin{aligned}
 E = & \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_b \end{pmatrix}; \quad I = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_b \end{pmatrix}; \quad i(0) = \begin{pmatrix} i_1(0) \\ i_2(0) \\ \vdots \\ i_b(0) \end{pmatrix}; \quad u_C(0) = \begin{pmatrix} u_{C1}(0) \\ u_{C2}(0) \\ \vdots \\ u_{Cb}(0) \end{pmatrix} \\
 M = & \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & & L_{1b} \\ L_{21} & L_{22} & & L_{2b} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ L_{b1} & L_{b2} & \dots & L_b \end{pmatrix} \\
 Z = & \begin{pmatrix} R_1 + L_{11}p + (C_1p)^{-1} & & & L_{b1}p \\ L_{21}p & R_2 + L_{22}p + (C_2p)^{-1} & & L_{b2}p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{b1}p & L_{b2}p & \dots & R_b + L_{bb}p + (C_b p)^{-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \right\} \tag{4.28}$$

On remarquera que toutes ces équations et celles qui vont suivre restent formellement valables dans le cas du régime permanent sinusoïdal : il suffit de convenir que dans ce cas les variables sont des substituts complexes, d'ignorer les termes associés aux conditions initiales  $u_C(0)$  et  $i(0)$  et enfin de substituer  $j\omega$  à  $p$ . Dans ce qui suit (sect. 4.4 et 4.5) les mêmes notations seront donc utilisées pour un substitut complexe ou pour une transformée de Laplace; dans le cas du régime sinusoïdal la variable  $p$  vaudra simplement  $j\omega$ .

#### 4.4.2. Définitions

L'expression  $R_k + L_k p + (C_k p)^{-1} = Z_k(p)$  est appelée *impédance de la branche k*; l'élément non diagonal  $L_{kl} \cdot p = Z_{kl}(p)$  constitue l'*impédance de couplage* entre les branches  $k$  et  $l$ ; on sait par le paragraphe 1.4.8 que le couplage magnétique est réciproque

( $L_{kl} = L_{lk}$ ) : les matrices  $M$  et  $Z$  sont donc symétriques; dans un réseau sans inductances mutuelles, elles sont diagonales ( $Z_{kl} = 0$  pour  $k \neq l$ ); la matrice  $Z$  est la *matrice des impédances de branches*.

#### 4.4.3. Branches avec sources de tension et sources de courant indépendantes

La branche  $k$  peut contenir en outre une source de courant  $i_{sk}$  comme représenté à la figure 4.14; dans ce cas les éléments  $R_k$ ,  $L_k$  et  $C_k$  sont parcourus par le courant  $i_k + i_{sk}$ . Si l'on note le vecteur des sources de courant de branches :

$$I_s = (I_{s1}, I_{s2}, \dots, I_{sb})' \quad (4.29)$$

il suffit, dans la relation (4.27) de remplacer  $I$  par  $I + I_s$ , et il vient :

$$U = [E - Mi(0) + p^{-1}u_C(0) + ZI_s] + ZI \quad (4.30)$$

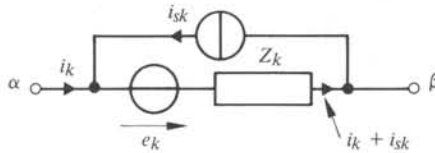


Fig. 4.14

#### 4.4.4. Définition

Le vecteur des *sources de tension totales de branches* est défini comme suit :

$$E_t = E - Mi(0) + p^{-1}u_C(0) + ZI_s \quad (4.31)$$

Il groupe toutes les sources indépendantes, réelles ou fictives qui agissent sur le réseau.

#### 4.4.5. Vecteur des sources fictives

Le vecteur

$$E^{(1)} = -Mi(0) + p^{-1}u_C(0) \quad (4.32)$$

caractérise les sources de tension équivalentes à l'action des conditions initiales, encore appelées sources fictives. Pour une analyse en régime sinusoïdal, on pose simplement  $E^{(1)} = 0$  (cf § 4.4.1).

#### 4.4.6. Sources de tension équivalentes aux sources de courant

Le vecteur

$$E^{(2)} = ZI_s \quad (4.33)$$

exprime que toutes les sources de courant peuvent être transformées en sources de tension équivalentes. En fait les branches qui contiennent une source de courant sont très

généralement exemptes d'inductance mutuelle : dans ce cas chaque source de courant est transformable en une source de tension équivalente unique localisée dans la même branche :

$$E_k^{(2)} = [R_k + L_k p + (C_k p)^{-1}] I_{sk} = Z_k I_{sk} \quad (4.34)$$

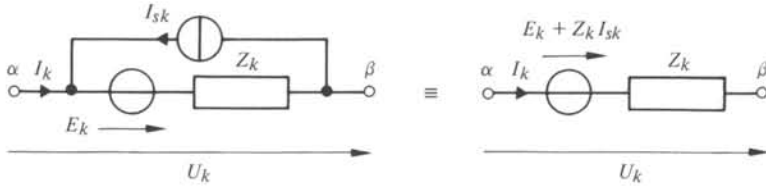


Fig. 4.15

Cette transformation est illustrée à la figure 4.15. Il s'agit d'un cas particulier d'une transformation plus générale qui sera étudiée aux sections 5.4 et 5.5.

Grâce à (4.31) le système des équations des branches (4.30) devient simple :

$$U = E_t + ZI \quad (4.35)$$

#### 4.4.7. Calcul des courants de mailles

Un ensemble de  $\mu$  mailles indépendantes étant choisi, en principe d'une façon arbitraire, les courants de branches s'expriment en fonction des courants de mailles par (4.21), soit en transformées par :

$$I = B' I_m \quad (4.36)$$

Etant donné (4.3), cette substitution linéaire a pour conséquence la satisfaction des équations de Kirchhoff de première espèce (4.12) :

$$AI = AB' I_m \equiv 0$$

Il suffit donc de satisfaire aux équations de seconde espèce (4.16); à cet effet on prémultiplie par  $B$  chaque membre de (4.35) :

$$BU = BE_t + BZB' I_m = 0$$

Si l'on pose :

$$E_m = -BE_t \quad (4.37)$$

$$Z_m = BZB' \quad (4.38)$$

il vient enfin

$$E_m = Z_m I_m \quad (4.39)$$

C'est le système des équations de mailles.

#### 4.4.8. Définitions

Le vecteur  $E_m$  est appelé *vecteur des sources de tension de mailles*; la matrice  $Z_m$  est la *matrice des impédances de mailles*; c'est une matrice carrée symétrique d'ordre  $\mu$ .

#### 4.4.9. Commentaires

L'analyse des réseaux complexes (par exemple, les réseaux de transport d'énergie électrique) est faite généralement en régime sinusoïdal;  $Z$  et  $Z_m$  sont des matrices de nombres complexes,  $E_m$  et  $I_m$  des vecteurs complexes; la résolution d'un système complexe de  $\mu$  équations algébriques linéaires équivaut à la résolution d'un système réel de  $2\mu$  équations linéaires à  $2\mu$  inconnues.

En effet si l'on pose :

$$\begin{aligned} E_m &= E'_m + jE''_m \\ I_m &= I'_m + jI''_m \\ Z_m &= R_m + jX_m \end{aligned} \quad (4.40)$$

il vient:

$$\begin{aligned} E'_m &= R_m I'_m - X_m I''_m \\ E''_m &= X_m I'_m + R_m I''_m \end{aligned}$$

Lorsqu'on analyse un réseau en fonctionnement transitoire,  $Z$  et  $Z_m$  sont des matrices polynomiales; la résolution de (4.39) fournit les courants de mailles sous la forme de fonctions rationnelles; lorsque le nombre d'éléments réactifs présents dans le réseau est élevé la résolution est rendue malaisée par suite du degré élevé de ces fonctions.

Le résultat de la présente section et ceux de la section suivante présentent un intérêt théorique fondamental pour l'établissement des propriétés générales des réseaux (chap. 5).

#### 4.4.10. Calcul des autres grandeurs électriques

Les vecteurs  $I$  et  $U$  peuvent être déduits de  $I_m$  par les opérations matricielles simples définies par les relations (4.36) et (4.35).

Si l'on ne désire calculer qu'un nombre restreint de courants de branches, il est intéressant de les faire coïncider avec des courants de mailles : cela est possible lorsque ces branches peuvent constituer un co-arbre; on utilise dans ce cas l'ensemble fondamental de mailles par rapport à l'arbre correspondant.

#### 4.4.11. Algorithme général d'analyse

Lorsqu'un réseau complexe est analysé par ordinateur (généralement en régime sinusoïdal) le processus suivant est prévu :

- la topologie du réseau est donnée par la matrice d'incidence réduite  $A$ ;
- la composition des branches est donnée (matrice  $Z$ );
- un algorithme est utilisé pour la construction d'un arbre  $T$  (cf [8]);



- les branches du graphe sont renumérotées d'après les conventions du paragraphe 4.2.11;
- la matrice  $B_f$  associée au système fondamental de mailles par rapport à  $T$  est obtenue par (4.6);
- le vecteur  $E_m$  et la matrice  $Z_m$  sont calculés (4.37) et (4.38);
- le système (4.39) est résolu;
- les vecteurs  $I$  et  $U$  sont calculés (si nécessaire) par (4.36) et (4.35).

La résolution du système (4.39) est l'opération qui nécessite le plus de temps de calcul.

#### 4.4.12. Analyse des réseaux simples

Lorsque le nombre de mailles indépendantes est peu élevé ( $\mu = 2, 3$  ou  $4$ ), l'utilisation des formules générales pour l'établissement du système (4.39) est évidemment possible et même recommandable dans les cas douteux (nombre élevé de couplages par induction mutuelle); on peut cependant très souvent écrire directement ce système par simple examen du réseau.

En effet d'après (4.37) la source de tension de maille  $E_m$  est égale à la somme algébrique des sources de tension réelles ou équivalentes situées dans la maille  $\lambda$ , une source étant comptée avec le signe négatif lorsqu'elle est orientée dans le sens de la maille, et avec le signe positif dans le cas contraire.

D'autre part, les éléments de la matrice des mailles  $Z_m$  découlent du développement de la congruence (4.38) qui peut s'écrire :

$$Z_m(\lambda, \mu) = \sum_{j=1}^b b_{\mu j} \left[ \sum_{i=1}^b b_{\lambda i} Z_{ij} \right] = \sum_{i,j=1}^b b_{\lambda i} b_{\mu j} Z_{ij} \quad (4.41)$$

expression dans laquelle la somme entre crochets vaut l'élément  $(\lambda, j)$  de la matrice produit  $BZ$ .

On en déduit la règle qui suit.

#### 4.4.13. Règle de calcul de la matrice des impédances de mailles

L'impédance de couplage  $Z_m(\lambda, \mu)$  entre les mailles  $\lambda$  et  $\mu$  est égale à la somme

- des impédances des branches communes aux mailles  $\lambda$  et  $\mu$ , comptées positivement lorsque les orientations des mailles coïncident, et négativement dans le cas contraire (fig. 4.16);
- des impédances mutuelles entre chaque branche de  $\lambda$  et chaque branche de  $\mu$ , comptées positivement lorsque les branches sont toutes deux orientées comme les mailles ou toutes deux de façon opposée aux mailles, et négativement dans le cas contraire (fig. 4.17).

L'impédance propre  $Z_m(\lambda, \lambda)$  de la maille  $\lambda$  est égale à la somme

- des impédances propres des branches de la maille  $\lambda$ , toutes comptées positivement; (car  $b_{\lambda i}^2 = 1$ ; fig. 4.18);
- des impédances mutuelles entre les branches de  $\lambda$  prises deux à deux, comptées

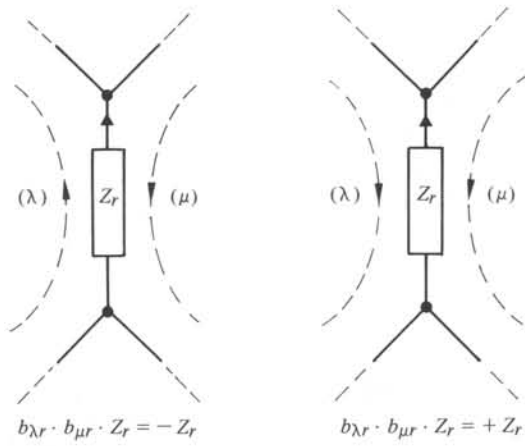
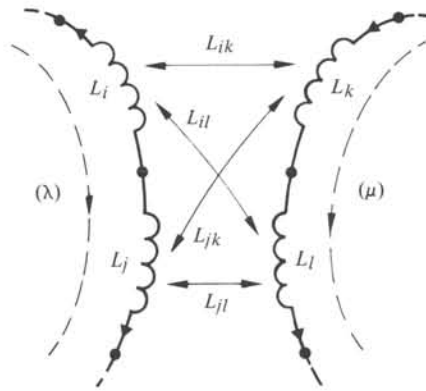
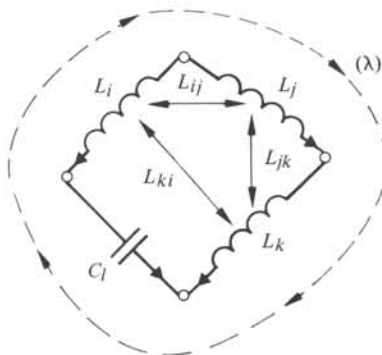


Fig. 4.16



$$b_{\lambda i} b_{\mu k} Z_{ik} + b_{\lambda i} b_{\mu l} Z_{il} + b_{\lambda j} b_{\mu k} Z_{jk} + b_{\lambda j} b_{\mu l} Z_{jl} = -L_{ik} p - L_{il} p + L_{jk} p + L_{jl} p$$

Fig. 4.17



$$Z_{\lambda\lambda}^{(m)} = L_i p + L_j p + L_k p + (C_l p)^{-1} - 2L_{ij} p + 2L_{jk} p - 2L_{ki} p$$

Fig. 4.18

positivement deux fois lorsque les branches sont toutes deux orientées comme la maille, ou toutes deux de façon opposée à la maille, et négativement deux fois dans le cas contraire (fig. 4.18).

Cette règle va être illustrée par deux exemples.

#### 4.4.14. Exemple. Conditions d'équilibre du pont de Carey-Foster

Le pont de Carey-Foster est représenté à la figure 4.19; les éléments inconnus sont  $R_x$  et  $C_x$  et les éléments de réglage  $L_{23} = M$  et  $R_1$ .

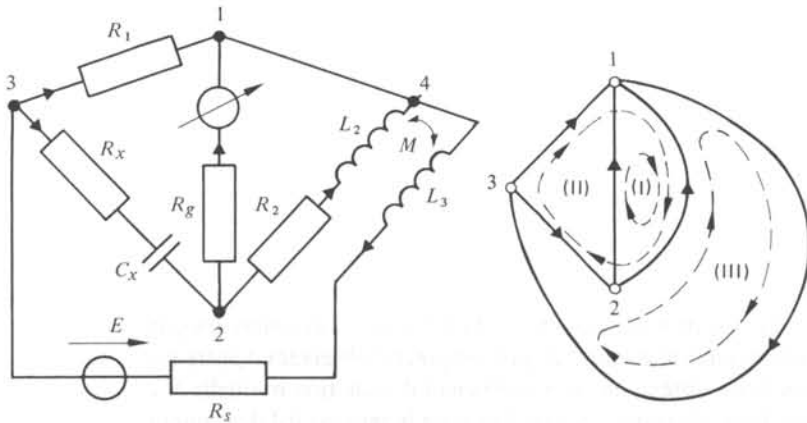


Fig. 4.19

Les conditions d'équilibre expriment que le courant dans le galvanomètre est identiquement nul; on choisit par conséquent un système de mailles tel que la branche qui contient le galvanomètre appartienne à une seule maille.

Le vecteur des sources de tension de mailles vaut :

$$E_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix}$$

et si on pose :

$$Z_2 = R_2 + j\omega L_2$$

$$Z_x = R_x + (j\omega C_x)^{-1}$$

il vient :

$$Z_m = \begin{pmatrix} R_g + Z_2 & Z_2 & -Z_2 - j\omega M \\ Z_2 & R_1 + Z_2 + Z_x & -Z_2 - Z_x - j\omega M \\ -Z_2 - j\omega M & -Z_2 - Z_x - j\omega M & Z_2 + Z_x + R_s + (L_3 + 2M)j\omega \end{pmatrix}$$

La condition d'équilibre s'écrit :

$$I = E \cdot \Delta(3,1) / \Delta_m \equiv 0$$

où  $\Delta_m$  et  $\Delta(3, 1)$  sont respectivement le déterminant de la matrice  $Z_m$  et le mineur de rang  $(3, 1)$  extrait de cette matrice.

Il vient donc simplement :  $\Delta(3, 1) \equiv 0$ , soit

$$-Z_2(Z_2 + Z_x + j\omega M) + (Z_2 + j\omega M)(R_1 + Z_2 + Z_x) \equiv 0$$

ou :

$$R_1 Z_2 + (R_1 + Z_x) \cdot j\omega M \equiv 0$$

ou encore :

$$\left[ R_1 R_2 + \frac{M}{C_x} \right] + j\omega [R_1(L_2 + M) + R_x M] \equiv 0$$

Les conditions d'équilibre sont :

$$R_x = -R_1(M + L_2)M^{-1}$$

$$C_x = -MR_1^{-1}R_2^{-1}$$

Elles sont indépendantes de la fréquence: l'équilibre du galvanomètre est donc maintenu pour une source  $E$  quelconque; on observera d'autre part que cet équilibre ne peut être obtenu que si le coefficient d'induction mutuelle  $M$  est négatif : ceci est lié au choix arbitraire qui a été fait pour le sens positif des courants dans les branches 2 et 3.

#### 4.4.15. Exemple

Le réseau représenté à la figure 4.20 est supposé se trouver à l'instant  $t = 0$  en régime permanent continu; son état initial est caractérisé par  $i_1(0)$ ,  $i_2(0)$  et  $u_C(0)$  dont la détermination nécessite une analyse préalable en régime continu; le schéma équivalent valable pour  $\omega = 0$  est donné à la figure 4.21 : la partie située à droite de l'interrupteur  $S$  présente deux mailles indépendantes; on a :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_4 + R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1(0) \\ i_2(0) \end{pmatrix}$$

d'où l'on tire :

$$i_1(0) = -R_3 [R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_3(R_2 + R_4)]^{-1} \cdot A$$

$$i_2(0) = (R_1 + R_3) [R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_3(R_2 + R_4)]^{-1} \cdot A$$

$$u_C(0) = A - R_4 i_2(0)$$

Pour  $t > 0$ , l'interrupteur  $S$  est ouvert et on peut remplacer la source de courant  $i_s$  et la résistance parallèle  $R_s$  par une source de tension  $E = R_s I_s$  en série avec la même résistance  $R_s$  (cf équation (4.34)), et on obtient la figure 4.22.

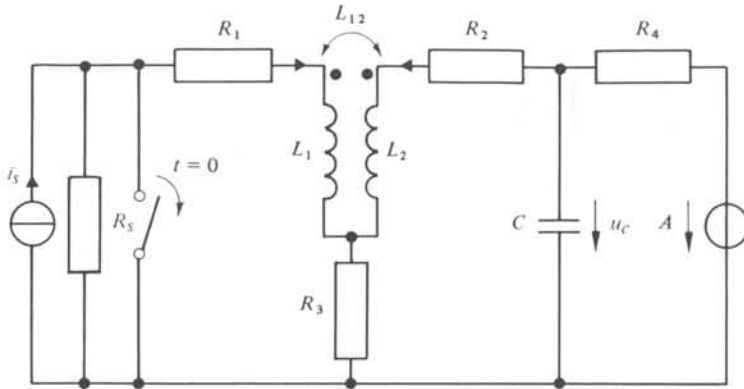


Fig. 4.20

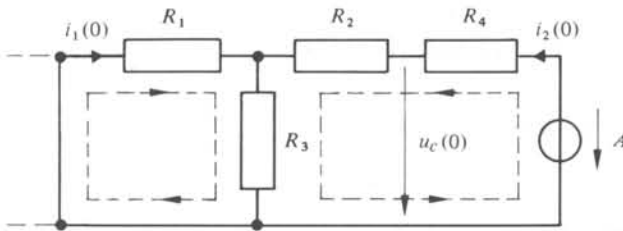


Fig. 4.21

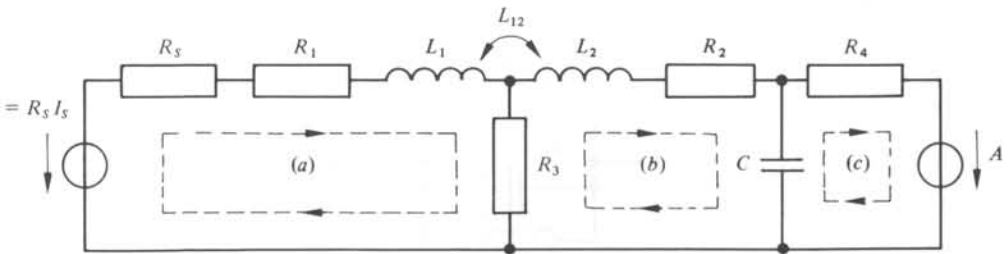


Fig. 4.22

Le système des équations de mailles s'écrit :

$$(E_m) = \begin{pmatrix} R_s + R_1 + R_3 + L_1 p & -L_{12} p - R_3 & 0 \\ -L_{12} p - R_3 & R_2 + R_3 + L_2 p + (Cp)^{-1} & -(Cp)^{-1} \\ 0 & -(Cp)^{-1} & R_4 + (Cp)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{pmatrix}$$

avec :

$$(E_m) = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ -A/p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -L_1 i_1(0) - L_{12} i_2(0) \\ L_2 i_2(0) + L_{12} i_1(0) \\ 0 \end{pmatrix} + p^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -u_C(0) \\ +u_C(0) \end{pmatrix}$$

et  $E(p) = R_s I_s(p)$ ; la résolution de ce système fournit les courants de mailles et ensuite toutes les autres variables du réseau peuvent être calculées.

#### 4.5. ANALYSE PAR LA MÉTHODE DES POTENTIELS INDÉPENDANTS

##### 4.5.1. Structure et équations des branches avec sources de courant indépendantes

La méthode qui va être développée est duale de la précédente à beaucoup de points de vue; elle consiste à écrire un système d'équations en les  $(n - 1)$  potentiels de noeuds indépendants; elle est en principe plus intéressante que la méthode des courants indépendants lorsque

$$n - 1 < b - n + 1$$

soit lorsque

$$b > 2(n - 1)$$

c'est-à-dire lorsqu'il existe un assez grand nombre de branches connectées en parallèle.

En réalité, les valeurs de  $n$  et de  $b$  dépendent de la manière dont on a structuré les branches du réseau; en effet pour la présente méthode, il est commode d'adopter pour chaque branche la structure de la figure 4.23.

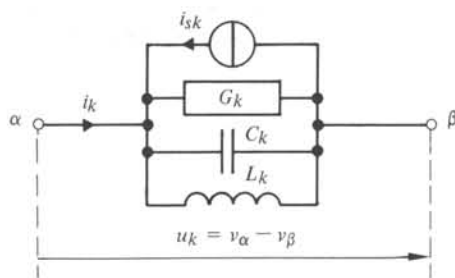


Fig. 4.23

Le courant dans la branche  $k$  vaut :

$$i_k = -i_{sk} + [G_k u_k + C_k du_k/dt + i_{Lk}(0) \epsilon(t) + L_k^{-1} \int_0^t u_k d\tau] \quad t \geq 0 \quad (4.42)$$

On remarquera que pour pouvoir exprimer le courant  $i_{Lk}$  en fonction de la seule tension  $u_k$ , le réseau doit être exempt d'inductances mutuelles; l'application de la méthode est malaisée lorsque cette restriction n'est pas faite; pour les réseaux avec inductances mutuelles, on utilisera de préférence la méthode des courants indépendants.

Lorsque la branche  $k$  ne contient pas de résistance (de capacité) on pose  $G_k = 0$  ( $C_k = 0$ ); si elle ne contient pas d'inductance, on pose  $L_k = \infty$ .

Comme au paragraphe 4.4.1 on suppose assurée la continuité de l'état énergétique du réseau. Si dans (4.42) on substitue les transformées, il vient :

$$I_k = [-I_{sk} - C_k u_{Ck}(0) + p^{-1} i_{Lk}(0)] + [G_k + C_k p + (L_k p)^{-1}] U_k \quad (4.43)$$

$(k = 1, 2, \dots, b)$

Pour l'ensemble du réseau, on a

$$I = -[I_s + C u_C(0) - p^{-1} i_L(0)] + Y U \quad (4.44)$$

On a posé

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & C_b \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ -U_b \end{pmatrix}$$

$$I_s = \begin{pmatrix} I_{s1} \\ I_{s2} \\ \vdots \\ I_{sb} \end{pmatrix}; \quad u_C(0) = \begin{pmatrix} u_{C1}(0) \\ u_{C2}(0) \\ \vdots \\ u_{Cb}(0) \end{pmatrix}; \quad i_L(0) = \begin{pmatrix} i_{L1}(0) \\ i_{L2}(0) \\ \vdots \\ i_{Lb}(0) \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

$$Y = Z^{-1} = \begin{pmatrix} G_1 + C_1 p + (L_1 p)^{-1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & G_2 + C_2 p + (L_2 p)^{-1} & & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & G_b + C_b p + (L_b p)^{-1} \end{pmatrix}$$

#### 4.5.2. Définitions

L'expression  $G_k + C_k p + (L_k p)^{-1} = Y_k(p)$  est appelée *admittance de la branche*  $k$ ; comme le réseau ne contient pas d'inductances mutuelles, on a

$$Y_k = Z_k^{-1} \quad Y_{kl} = 0 \quad (k \neq l)$$

La matrice  $Y$  est appelée *matrice des admittances des branches*; elle est diagonale.

#### 4.5.3. Branches avec sources de courant et sources de tension indépendantes

La branche  $k$  peut contenir en outre une source de tension comme indiqué à la figure 4.24; dans ce cas la tension aux bornes des éléments  $G_k$ ,  $C_k$ ,  $L_k$  vaut  $U_k - E_k$  et il suffit dans la relation (4.44) de remplacer  $U$  par  $U - E$ , et il vient

$$I = -[I_s + Cu_C(0) - p^{-1}i_L(0) + YE] + YU \quad (4.46)$$

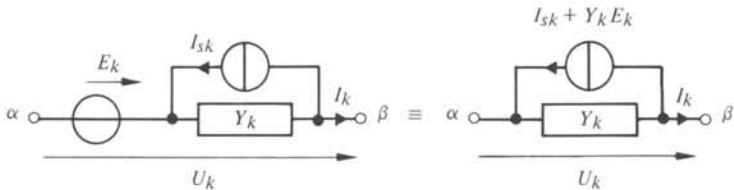


Fig. 4.24

#### 4.5.4. Définition

Le vecteur des *sources de courant totales de branches* est défini comme suit:

$$I_{st} = I_s + Cu_C(0) - p^{-1}i_L(0) + YE \quad (4.47)$$

Tout comme (4.31), il groupe toutes les sources indépendantes, réelles ou fictives qui agissent sur le réseau.

#### 4.5.5. Vecteur des sources fictives

Le vecteur

$$I_s^{(1)} = Cu_C(0) - p^{-1}i_L(0) \quad (4.48)$$

caractérise les sources de courant équivalentes à l'action des conditions initiales. Pour une analyse en régime sinusoïdal on pose simplement  $I_s^{(1)} = 0$ .

#### 4.5.6. Sources de courant équivalentes aux sources de tension

Le vecteur

$$I_s^{(2)} = YE \quad (4.49)$$

exprime que toutes les sources de tension peuvent être transformées en sources de courant; par suite des hypothèses faites sur le réseau,  $Y$  est une matrice diagonale et chaque source de tension est transformée en une source de courant unique localisée dans la même branche:

$$I_{sk}^{(2)} = [G_k + C_k p + (L_k p)^{-1}]E_k = Y_k E_k \quad (4.50)$$

Cette transformation est illustrée à la figure 4.24; une transformation plus générale sera étudiée aux sections 5.4 et 5.5.



Grâce à (4.47), le système des équations de branches (4.46) devient simplement:

$$I = -I_{st} + YU \quad (4.51)$$

#### 4.5.7. Calcul des potentiels des noeuds

Le noeud de référence étant choisi (cf § 4.3.5), les tensions de branches sont données par (4.24) en fonction des potentiels des noeuds, et après transformation il vient

$$U = -A'V \quad (4.52)$$

Etant donné (4.3), cette substitution linéaire a pour conséquence la satisfaction des lemmes de Kirchhoff de seconde espèce (4.16):

$$BU = -BA'V \equiv 0$$

Il suffit par conséquent de satisfaire aux équations de première espèce (4.12); à cet effet, on prémultiplie par  $A$  chaque membre de (4.51):

$$AI = -AI_{st} - AYA'V = 0$$

Si l'on pose

$$I_n = -AI_{st} \quad (4.53)$$

$$Y_n = AYA' \quad (4.54)$$

il vient enfin:

$$I_n = Y_n V \quad (4.55)$$

C'est le système des équations nodales.

#### 4.5.8. Définitions

Le vecteur  $I_n$  est appelé *vecteur des courants injectés aux noeuds*; la matrice  $Y_n$  est la *matrice des admittances nodales*; c'est une matrice carrée symétrique d'ordre  $\rho$ .

#### 4.5.9. Commentaires

On peut faire à propos de la résolution du système (4.55) toutes les remarques qui ont été faites au paragraphe 4.4.9 à propos de la résolution du système des équations de mailles.

#### 4.5.10. Calcul des autres grandeurs

Les vecteurs  $U$  et  $I$  peuvent être déduits de  $V$  par les opérations matricielles simples (4.52) et (4.51).

Pour l'analyse d'un réseau complexe le processus décrit au paragraphe 4.4.11 peut être suivi — mutatis mutandis.

#### 4.5.11. Analyse de réseaux simples

Lorsque le nombre de noeuds indépendants est peu élevé ( $\rho = 2, 3$  ou  $4$ ) on peut souvent écrire le système (4.55) par simple examen du réseau.

En effet, d'après (4.53) la composante  $I_{n\alpha}$  est égale à la somme algébrique des courants injectés par les sources de courant de branches au noeud  $\alpha$  (fig. 4.25):

$$I_{n\alpha} = - \sum_{k=1}^b a_{\alpha k} I_{sk} \quad (4.56)$$

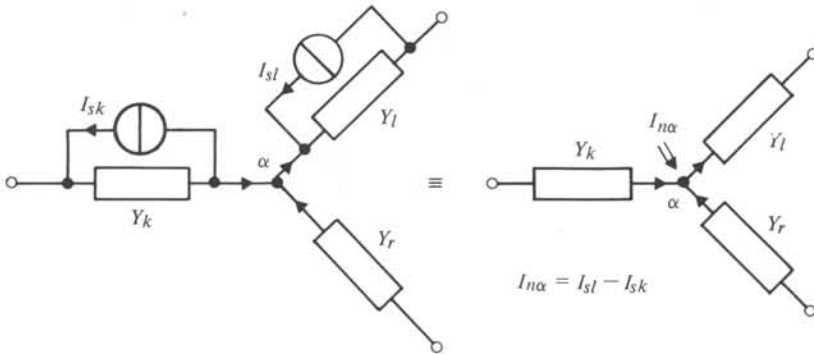


Fig. 4.25

On peut donc supposer que le courant injecté en chaque noeud provient d'une source unique appelée injecteur de courant, comme le montre la figure: physiquement ces injecteurs sont des sources de courant dont les autres bornes coïncident toutes avec le noeud de référence.

D'autre part, les éléments de la matrice  $Y_n$  découlent du développement de la congruence (4.54); on trouve comme au paragraphe 4.4.12 :

$$Y_n(\alpha, \beta) = \sum_{i,j=1}^b a_{\alpha i} a_{\beta j} Y_{ij} \quad (4.57)$$

On en déduit la règle qui suit.

#### 4.5.12. Règle de calcul de la matrice nodale

L'admittance de couplage  $Y_n(\alpha, \beta)$  est égale, mais de signe opposé à l'admittance de la branche qui joint les noeuds  $\alpha$  et  $\beta$ ; en effet si la branche  $i$  joint les noeuds  $\alpha$  et  $\beta$ , on a nécessairement  $a_{\alpha i} a_{\beta i} = -1$ . Si plusieurs branches joignent les noeuds  $\alpha$  et  $\beta$ , il faut prendre la somme de leurs admittances.

L'admittance propre  $Y_n(\alpha, \alpha)$  associée au noeud  $\alpha$  est égale à la somme des admittances des branches incidentes en ce noeud; en effet, pour toutes les branches  $i$  incidentes au noeud  $\alpha$ , on a  $a_{\alpha i}^2 = +1$ .

On observera que dans  $Y_n$ , la somme des termes d'une même ligne (d'une même colonne) est égale à l'admittance de la branche qui joint le noeud associé à cette ligne (à cette colonne) au noeud de référence.

#### 4.5.13. Exemple

Le système des équations nodales du réseau représenté à la figure 4.26 est le suivant:

$$\begin{pmatrix} I_{n1} \\ I_{n2} \\ I_{n3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_a + Y_d & -Y_a & 0 \\ -Y_a & Y_a + Y_b + Y_c & -Y_b \\ 0 & -Y_b & Y_b + Y_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

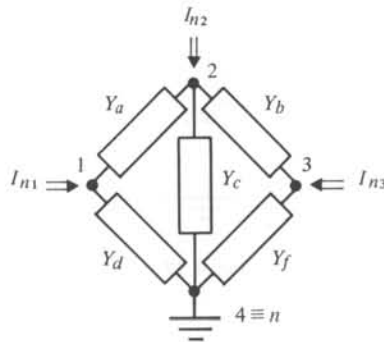


Fig. 4.26

#### 4.5.14. Définition

Pour certaines applications, il est nécessaire de repérer les potentiels des  $n$  noeuds par rapport à un  $(n + 1)^{\text{e}}$  noeud extérieur au réseau; dans ce cas la matrice des équations nodales est appelée *matrice flottante ou indéfinie*.

#### 4.5.15. Propriétés de la matrice flottante

Lorsque le noeud de référence est un  $(n + 1)^{\text{e}}$  noeud extérieur au réseau, le système nodal comporte  $n$  équations: la matrice flottante est donc d'ordre  $n$ , mais elle est de rang au plus égal à  $(n - 1)$ ; en effet, en vertu de la remarque en fin de paragraphe 4.5.12, la somme des éléments de chaque colonne est nulle car aucun noeud ne se trouve connecté au noeud de référence.

Par ailleurs il est clair que l'ensemble des  $n$  injecteurs constitue une coupe et que l'on a par conséquent:

$$\sum_{\alpha=1}^n I_{n\alpha} = 0 \quad (4.58)$$

A titre d'exemple, le système nodal relatif au réseau 4.26 dont les potentiels sont

repérés comme indiqué à la figure 4.27 par rapport à un noeud extérieur devient:

$$\begin{pmatrix} I_{n1} \\ I_{n2} \\ I_{n3} \\ I_{n4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_a + Y_d & -Y_a & 0 & -Y_d \\ -Y_a & Y_a + Y_b + Y_c & -Y_b & -Y_c \\ 0 & -Y_b & Y_b + Y_f & -Y_f \\ -Y_d & -Y_c & -Y_f & Y_c + Y_d + Y_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix}$$

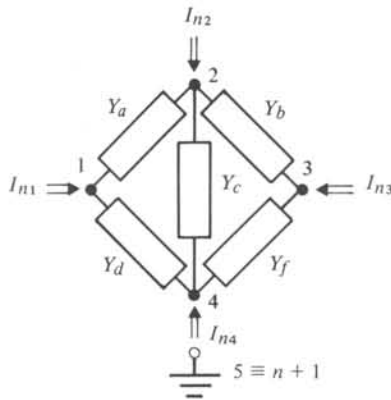


Fig. 4.27

#### 4.5.16. Exemple: transmission d'un signal à travers un biporte

Le biporte ( $R, C$ ) représenté à la figure (4.28) permet d'empêcher la transmission d'un signal sinusoïdal à une certaine fréquence de l'accès ( $1, 5'$ ) vers l'accès ( $2, 5'$ ); on demande de calculer cette fréquence en fonction des éléments constitutifs.

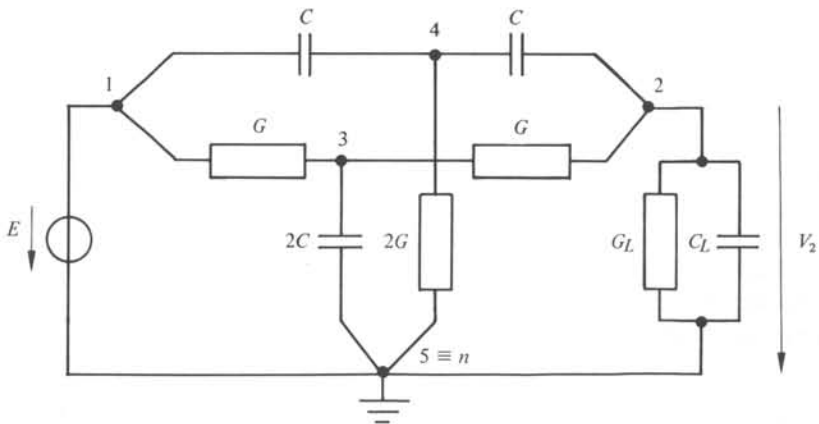


Fig. 4.28

Le réseau étant exempt d'inductances mutuelles, on peut utiliser la méthode qui vient d'être développée; soit  $I$  le courant injecté au noeud 1 par la source de tension  $E$ ; le système des équations nodales s'écrit:

$$\begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G+j\omega C & 0 & -G & -j\omega C \\ 0 & G+G_L+j\omega(C+C_L) & -G & -j\omega C \\ -G & -G & 2(G+j\omega C) & 0 \\ -j\omega C & -j\omega C & 0 & 2(G+j\omega C) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix}$$

On en déduit le rapport

$$V_2/E = V_2/V_1 = -\Delta(1, 2)/\Delta(1, 1)$$

Dans cette relation,  $\Delta(i, j)$  représente le mineur de l'élément de rang  $(i, j)$  du système. Aucun signal ne sera transmis à la fréquence pour laquelle  $\Delta(1, 2)$  s'annule, pour autant que  $\Delta(1, 1)$  ne s'annule pas aussi; il vient donc :

$$\Delta(1, 2) = \begin{vmatrix} 0 & -G & -j\omega C \\ -G & 2(G+j\omega C) & 0 \\ -j\omega C & 0 & 2(G+j\omega C) \end{vmatrix} = 0$$

et on trouve  $\omega_0 = (RC)^{-1}$ , soit  $f_0 = (2\pi)^{-1} \cdot (RC)^{-1}$ . On vérifie ensuite que  $\Delta(1, 1)$  est différent de zéro à cette fréquence.

#### 4.6. RÉSEAUX CONTENANT DES SOURCES INDÉPENDANTES ET DES SOURCES DÉPENDANTES

##### 4.6.1. Structure des sources dépendantes

Les quatre types de sources dépendantes peuvent exister dans un réseau

- une source de tension commandée par une tension :  $E_k = aU_l$
- une source de tension commandée par un courant :  $E_k = rI_l$
- une source de courant commandée par une tension :  $I_k = gU_l$
- une source de courant commandée par un courant :  $I_k = \alpha I_l$

Les coefficients  $a, r, g, \alpha$  sont supposés réels. Il est toujours possible d'effectuer des transformations de sources (relations (4.33) et (4.49)); d'autre part, un courant de branche qui commande une source est lié à la tension aux bornes de cette branche, et réciproquement une tension de branche qui commande une source est liée au courant : on peut donc, en principe convertir toutes les sources dépendantes d'un réseau donné pour ne garder que des sources d'un même type.

Dans l'exposé qui va suivre on admettra (§ 4.6.2) que l'on n'a affaire qu'à des sources de tension commandées par un courant, ou encore (§ 4.6.3) à des sources de courant commandées par une tension.

#### 4.6.2. Réseaux avec sources de tensions commandées par un courant

Lorsqu'un réseau contient des sources de tension commandées par des courants, la méthode d'analyse la plus commode est celle des courants indépendants; le système (4.35) devient :

$$U = E_t + ZI + Z_d I \quad (4.59)$$

La matrice  $Z_d$  est la matrice des facteurs  $r(k, l)$  qui caractérisent la dépendance des sources de tension par rapport aux courants de branches.

Si l'on pose

$$Z_t = Z + Z_d \quad (4.60)$$

il vient simplement

$$U = E_t + Z_t I \quad (4.61)$$

Ce formalisme revient à assimiler les sources de tension commandées par un courant à des résistances mutuelles unidirectionnelles ( $r(k, l) \neq 0, r(l, k) = 0$ ); la matrice  $Z_t$  n'est pas symétrique.

A partir de (4.61), l'analyse se poursuit comme exposé au paragraphe 4.4.7; le vecteur des sources de tension de mailles reste inchangé; la matrice des impédances de mailles devient :

$$Z_m = BZ_t B' \quad (4.62)$$

Elle n'est plus symétrique : les conséquences de ce fait seront examinées au chapitre 5; ses éléments peuvent être obtenus en suivant les règles énoncées au paragraphe 4.4.13 et modifiées comme suit.

#### 4.6.3. Règles de calcul de la matrice des mailles

Les éléments de la matrice  $Z_m$  sont constitués par les termes définis au paragraphe 4.4.13 auxquels viennent s'ajouter les termes associés aux sources dépendantes.

A une impédance de couplage  $Z_m(a, b)$  on ajoutera les résistances mutuelles  $r(k, l)$  qui correspondent aux sources dépendantes situées dans la maille ( $a$ ) et commandées par des courants localisés dans la maille ( $b$ ); un coefficient  $r(k, l)$  est affecté du signe plus si un courant  $I_b > 0$  commande dans la maille ( $a$ ) une source de tension orientée comme cette maille; il est affecté du signe moins dans le cas contraire.

Une impédance propre  $Z_m(a, a)$  est modifiée selon une règle identique à celle décrite dans l'alinéa précédent avec  $a = b$ .

#### 4.6.4. Exemple

On désire calculer l'impédance  $Z$  du bipôle de la figure 4.29.

Si une source de tension indépendante  $E$  est connectée entre les bornes 1 et 1', le système des équations de mailles s'écrit :

$$\begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 + r_{21} & -R_2 \\ -R_2 - r_{21} + r_{31} & R_2 + R_3 + (C_0 p)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_a \\ I_b \end{pmatrix}$$

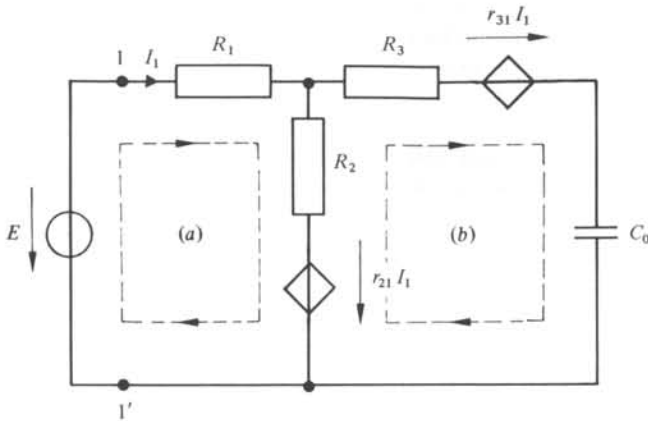


Fig. 4.29

On en tire le courant injecté par la source  $E$  :

$$I_1 = I_a = E \cdot \Delta(1, 1) / \Delta_m$$

où  $\Delta_m$  et  $\Delta(1,1)$  sont respectivement le déterminant du système des équations de mailles et le mineur de l'élément de rang  $(1,1)$  de ce déterminant; on en déduit

$$Z = E/I_1 = \Delta_m / \Delta(1, 1)$$

#### 4.6.5. Réseaux avec sources de courant commandées par une tension

Lorsqu'un réseau contient des sources de courant commandées par une tension, la méthode d'analyse la plus commode est celle des potentiels indépendants : le système (4.51) devient

$$I = -I_{st} + YU + Y_d U \quad (4.63)$$

La matrice  $Y_d$  est la matrice des facteurs  $g(k, l)$  qui caractérisent la dépendance des sources de courant par rapport aux tensions de branches.

Si l'on pose

$$Y_t = Y + Y_d \quad (4.64)$$

il vient simplement :

$$I = -I_{st} + Y_t U \quad (4.65)$$

Ce formalisme revient à assimiler les sources de courant commandées par une tension à des conductances mutuelles unidirectionnelles ( $g(k, l) \neq 0, g(l, k) = 0$ ); la matrice  $Y_t$  n'est pas symétrique.

A partir de (4.65), l'analyse se poursuit comme exposé aux paragraphes 4.5.7 et 4.5.11; le vecteur des courants injectés aux noeuds reste inchangé; la matrice des équations nodales devient

$$Y_n = A Y_t A' \quad (4.66)$$

Elle n'est plus symétrique : les conséquences de ce fait seront examinées au chapitre 5; ses éléments peuvent être obtenus en suivant les règles énoncées au paragraphe 4.5.12 et modifiées comme suit.

#### 4.6.6. Règles de calcul de la matrice nodale

Les éléments de la matrice  $Y_n$  sont constitués par les termes définis au paragraphe 4.5.12 auxquels viennent s'ajouter les termes associés aux sources dépendantes.

A une admittance de couplage  $Y_n(i, j)$  on ajoutera les conductances mutuelles  $g(k, l)$  qui correspondent aux sources de courant situées en parallèle sur les branches ( $k$ ) incidentes au noeud  $i$  et commandées par la tension aux bornes de branches ( $l$ ) incidentes au noeud  $j$ ; un coefficient  $g(k, l)$  est affecté du signe moins si le courant injecté au noeud  $i$  dépend de  $+V_j$ ; il est affecté du signe plus s'il dépend de  $-V_j$ .

Une admittance propre  $Y_n(i, i)$  est modifiée selon une règle identique à celle décrite dans l'alinéa précédent avec  $i = j$ .

#### 4.6.7. Exemple

En pratique il est commode de substituer aux sources de courant dépendantes connectées en parallèle sur des branches des sources incidentes aux extrémités de ces branches; pour plus de clarté encore, on indiquera la dépendance par rapport aux différences de potentiel. Ainsi au réseau de la figure 4.30, on associe le graphe de la figure 4.31; le système des équations nodales s'écrit :

$$\begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_a + G_b & 0 & -G_a \\ +g & G_d + C_e p & -G_d - g \\ -G_a - g & -G_d & G_a + G_d + G_c + g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

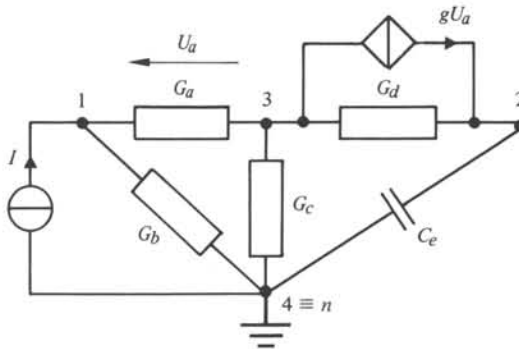


Fig. 4.30

#### 4.6.8. Cas particulier : réseaux avec gyrateurs

Le gyrateur défini au paragraphe 1.1.15 a pour matrice d'admittances

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -g \\ g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$



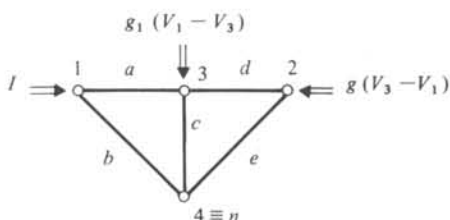


Fig. 4.31

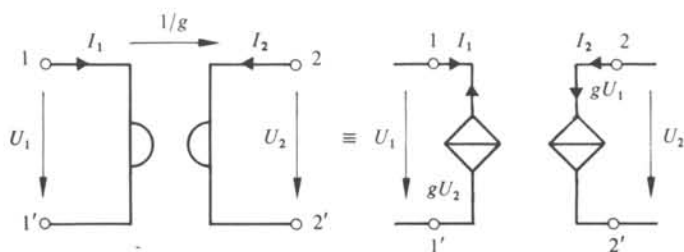


Fig. 4.32

Le schéma équivalent comporte deux sources de courant commandées par des tensions (fig. 4.32).

La réalisation physique du gyrateur par des circuits électroniques impose souvent l'identité des bornes 1' et 2'; de plus les sources de courant sont toujours accompagnées de conductances de fuite  $g_a$  et  $g_b$  : on obtient ainsi le schéma de la figure 4.33; celui-ci se simplifie lorsque les bornes 1' et 2' coïncident avec le noeud de référence  $n$  du réseau (fig. 4.34).

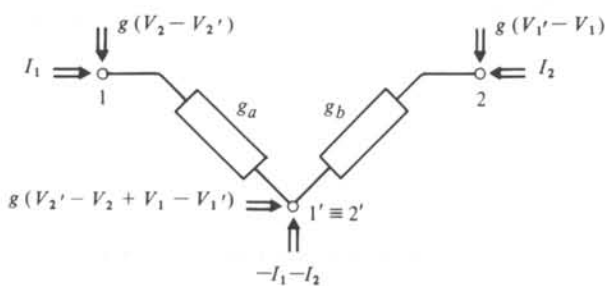


Fig. 4.33

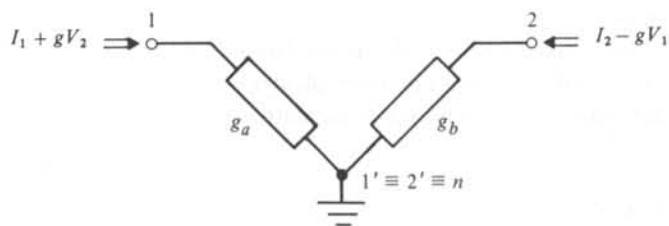


Fig. 4.34

## 4.6.9. Exemple

Le biporte représenté à la figure 4.35 comporte deux gyrateurs et deux capacités; le schéma équivalent est donné à la figure 4.36; les équations nodales sont :

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_a + C_2 p & -C_2 p & -g_1 \\ -C_2 p & G_d + C_2 p & +g_2 \\ +g_1 & -g_2 & G_b + G_c + C_1 p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

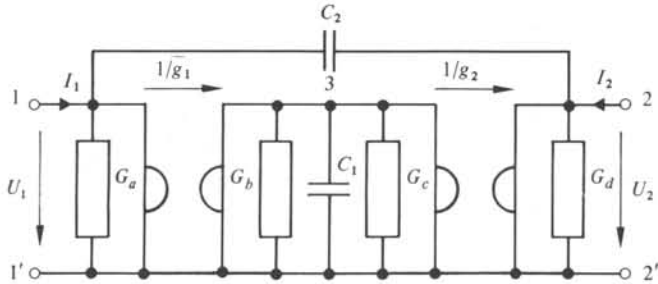


Fig. 4.35

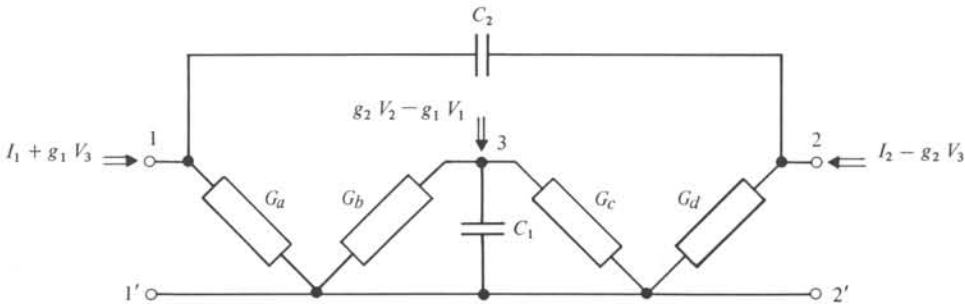


Fig. 4.36

## 4.7. ANALYSE DANS L'ESPACE DES ÉTATS

## 4.7.1. Définitions

L'état d'un réseau est l'ensemble des conditions qu'il est nécessaire et suffisant de connaître à un instant donné pour pouvoir calculer la réponse à un signal donné. Les variables d'état sont donc des tensions de capacités et des courants d'inductances.

## 4.7.2. Commentaires

Les tensions de capacités ne sont pas nécessairement indépendantes, car il peut exister des mailles de capacités, ce qui implique des contraintes linéaires sur ces ten-

sions; de même, chaque coupe constituée uniquement d'inductances impose une contrainte linéaire sur les courants d'inductances (§ 4.3.2).

Les variables d'état sont constituées par tout sous-ensemble maximal de tensions indépendantes de capacités et de courants indépendants d'inductances.

Si l'on désigne par :

- $n_C$  : le nombre de capacités
- $n_L$  : le nombre d'inductances
- $\mu_C$  : le nombre de mailles indépendantes constituées par des capacités uniquement
- $\rho_L$  : le nombre de coupes indépendantes constituées par des inductances uniquement,

le nombre maximal de conditions indépendantes que l'on peut spécifier à un instant quelconque vaut  $n_C + n_L - \mu_C - \rho_L$ .

#### 4.7.3. Définition

On appelle *ordre de complexité*  $\gamma$  du réseau le nombre de variables d'état indépendantes; on a

$$\gamma = n_C + n_L - \mu_C - \rho_L \quad (4.67)$$

#### 4.7.4. Exemple. Réponse propre d'un réseau du second ordre

On considère le réseau de la figure 4.37; les variables d'état sont la tension  $u_C$  et le courant  $i_L$ . Le réseau obéit aux équations suivantes :

$$e(t) = R_1 i_1 + u_C$$

$$u_C = L di_L/dt + R_3 i_L = R_2 i_2$$

$$i_1 = i_2 + i_C + i_L$$

$$i_C = C du_C/dt$$

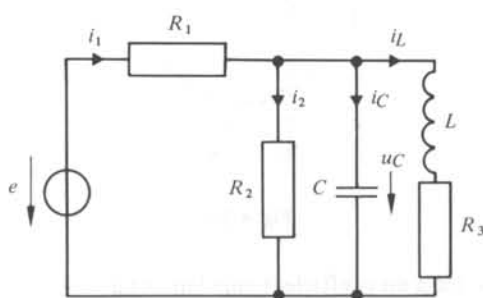


Fig. 4.37

On obtient le système des équations d'état par l'élimination des courants  $i_1$  et  $i_2$  :

$$du_C/dt = -(1/R_1 C + 1/R_2 C)u_C - i_L/C + 1/R_1 C \cdot e$$

$$di_L/dt = u_C/L - R_3 i_L/L$$

L'étude qualitative de la réponse libre d'un système du second ordre peut être effectuée dans le plan des états dont les coordonnées sont dans le cas présent  $u_C$  et  $i_L$ . Si l'on divise ces deux équations membre à membre après avoir posé  $e = 0$ , il vient :

$$du_C/di_L = \frac{1/RC \cdot u_C + 1/C \cdot i_L}{-1/L \cdot u_C + R_3/L \cdot i_L} \quad (4.68)$$

avec  $R = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ . C'est l'équation d'une famille de trajectoires dans le plan des états; chaque trajectoire est issue du point représentatif d'un état initial  $[u_C(0), i_L(0)]$ . La forme des trajectoires définit celle de la réponse libre; dans un réseau dissipatif toutes les trajectoires tendent asymptotiquement vers l'origine (état quiescent); dans un réseau non dissipatif ce sont des ellipses entourant l'origine dont l'équation résulte précisément de l'invariance de l'énergie totale :

$$\frac{1}{2} u_C^2 C + \frac{1}{2} L i_L^2 = \frac{1}{2} u_C^2(0) C + \frac{1}{2} L i_L^2(0)$$

Une étude géométrique peut faire apparaître les formes oscillatoires amortie (fig. 4.38) et apériodique (fig. 4.39) (on a posé  $R_3 = 0$ ). On appelle isocline le lieu des points où toutes les trajectoires possèdent une même pente  $\lambda$  : il s'agit en l'occurrence de droites passant par l'origine.

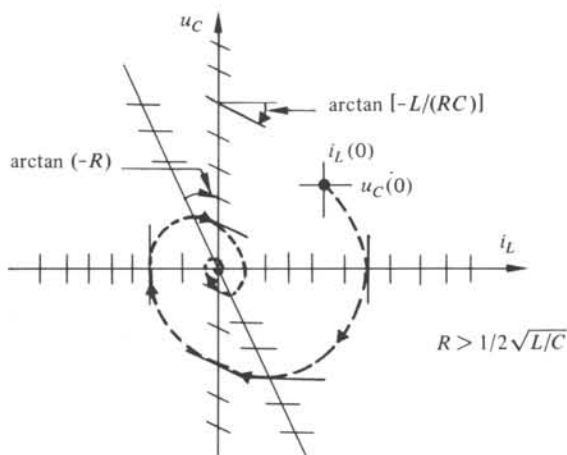


Fig. 4.38

Lorsqu'une isocline a un coefficient angulaire égal à la pente  $\lambda$  qui lui correspond, elle partage le plan des états en régions à l'intérieur desquelles les trajectoires se trouvent confinées. On obtient ces isoclines particulières en résolvant le système

$$du_C/di_L = u_C/i_L = \lambda$$

soit, pour l'exemple étudié, toujours avec  $R_3 = 0$  :

$$\lambda^2 + \frac{L}{RC} \lambda + L/C = 0$$

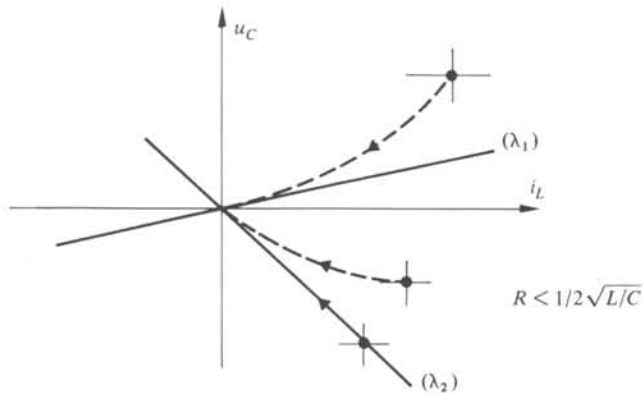


Fig. 4.39

La réponse libre est oscillatoire lorsque les racines de cette équation sont imaginaires; la forme apériodique critique correspond au cas où les racines sont confondues; la condition d'apériodicité s'écrit donc :

$$L - 4R^2C > 0$$

#### 4.7.5. Système des équations d'état

Le réseau représenté à la figure 4.40 possède

- deux signaux indépendants  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$
- deux variables d'état  $u_C$  et  $i_L$
- deux réponses  $u_1$  et  $u_2$

Il obéit aux équations suivantes :

$$e_1 - R_1 i_1 = e_2 - R_2 i_2 = L di_L/dt + u_C + R_3 i_L$$

$$i_1 + i_2 = i_L$$

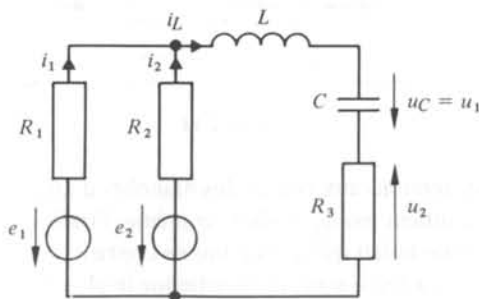


Fig. 4.40

Après élimination des courants  $i_1$  et  $i_2$  on peut écrire les équations différentielles du premier ordre qui régissent les variables d'état :

$$du_C/dt = C^{-1}i_L$$

$$di_L/dt = -L^{-1}Ri_L - L^{-1}u_C + L^{-1}R_2(R_1 + R_2)^{-1}e_1 + L^{-1}R_1(R_1 + R_2)^{-1}e_2$$

avec

$$R = (R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1)(R_1 + R_2)^{-1}$$

D'autre part, les réponses  $u_1$  et  $u_2$  sont données par

$$u_1 = u_C$$

$$u_2 = -R_3i_L$$

D'une façon générale, si l'on désigne par :

- $s$  : le vecteur des variables d'état ( $\gamma$  composantes)
- $x$  : le vecteur des signaux ( $\alpha$  composantes)
- $y$  : le vecteur des réponses ( $\beta$  composantes)

le système des équations d'état se présente comme suit :

$$ds/dt = As + Bx + E dx/dt \quad (4.69)$$

$$y = Cs + Dx \quad (4.70)$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  et  $E$  sont des matrices constantes d'ordres appropriés; pour l'exemple considéré, on avait  $E = D = 0$ .

#### 4.7.6. Enumération des variables d'état

Les conventions des sections 4.4 et 4.5 sont abandonnées : à chaque élément  $R$ ,  $L$  ou  $C$  connecté éventuellement à une source de tension série ou à une source de courant parallèle, on associe une branche distincte du graphe (fig. 4.41).

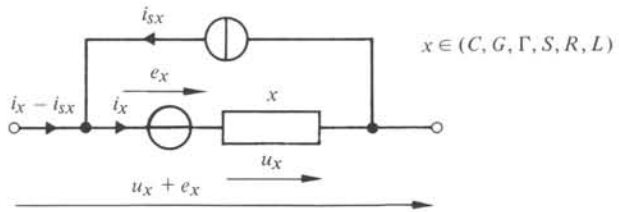


Fig. 4.41

On sait que les tensions aux bornes des branches d'un arbre sont indépendantes, puisqu'un arbre ne contient pas de mailles; de même, l'indépendance des courants de chaînons est assurée par le fait qu'un co-arbre ne contient pas de coupe. On va donc rechercher un arbre dit arbre normal qui contienne le plus grand nombre possible de capacités (toutes les capacités si elles ne forment pas de mailles); les inductances seront rejetées de préférence dans le co-arbre (toutes les inductances si elles ne constituent

pas de coupes); quant aux résistances, certaines sont nécessaires pour compléter l'arbre; les autres sont rejetées dans le co-arbre.

La détermination de l'arbre normal est immédiate dans les cas simples; d'une façon plus générale on peut utiliser l'algorithme suivant, illustré à la figure 4.42.

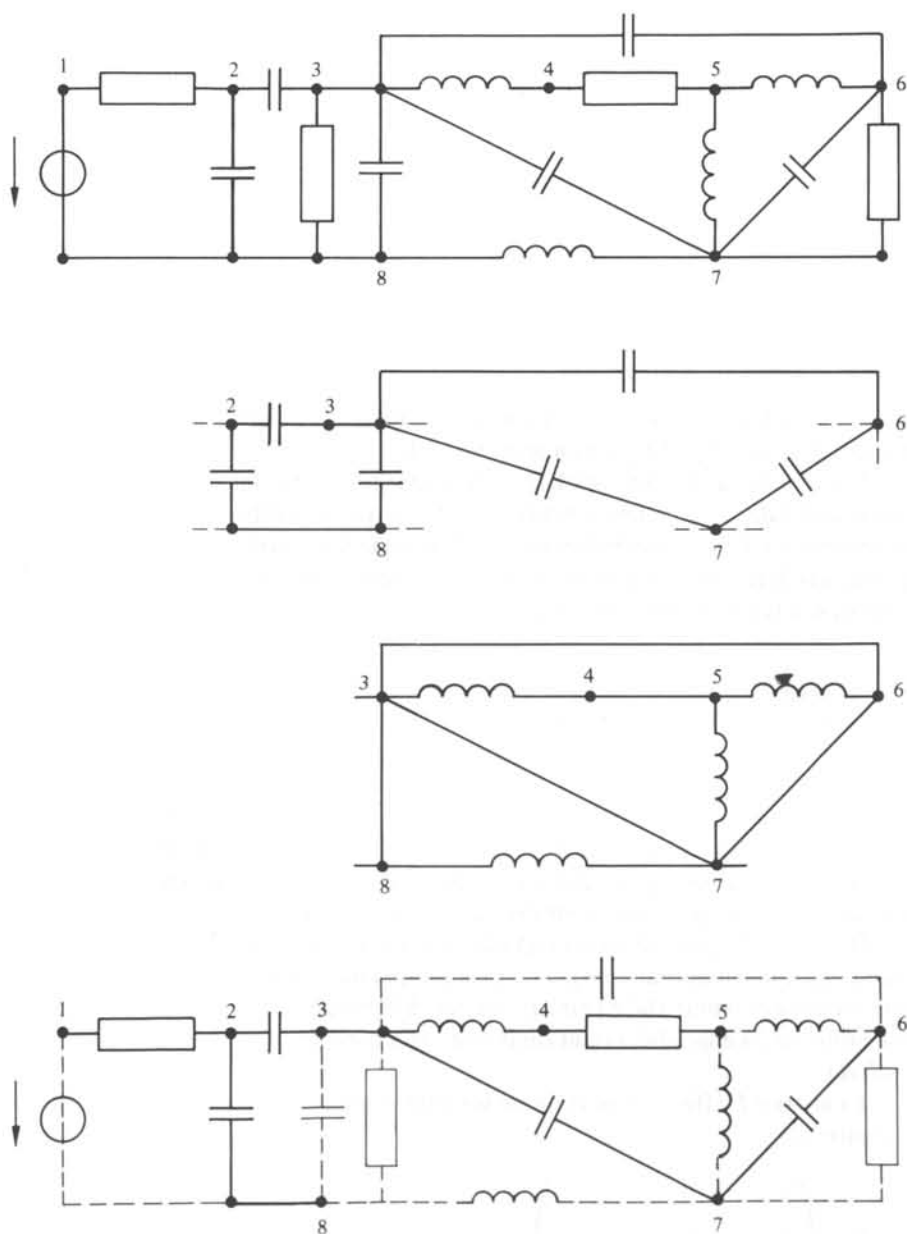


Fig. 4.42

Les indices suivants seront utilisés :

- $C$  : capacités situées dans l'arbre normal
- $G$  : conductances situées dans l'arbre normal
- $\Gamma$  : inductances situées dans l'arbre normal
- $S$  : capacités situées dans le co-arbre
- $R$  : résistances situées dans le co-arbre
- $L$  : inductances situées dans le co-arbre

- On extrait du réseau toutes les résistances et toutes les inductances; il subsiste un sous-graphe qui est en général non connexe; on choisit un arbre dans chacune des parties connexes; soit  $T_C$  la réunion de ces arbres partiels;  $T_C$  contient autant de branches qu'il y a de tensions de capacités indépendantes.
- On court-circuite toutes les résistances et toutes les capacités; dans le réseau ainsi obtenu on choisit un arbre  $T_\Gamma$ ; celui-ci contient autant de branches qu'il y a de coupes indépendantes d'inductances : ceci résulte de la structure d'une coupe (cf § 4.1.4 et fig. 4.3).
- La réunion  $T_C \cup T_\Gamma$  ne peut pas contenir de mailles; en effet une telle maille devrait contenir des inductances et des capacités et après avoir court-circuité ces dernières, il subsisterait une maille dans  $T_\Gamma$  ce qui est inadmissible.

On complète  $T_C \cup T_\Gamma$  par un nombre juste suffisant de branches  $T_G$  pour obtenir un arbre :  $T_C \cup T_\Gamma \cup T_G$  est un arbre normal.

L'ensemble des tensions aux bornes des capacités situées dans l'arbre normal et des courants dans les inductances situées dans le co-arbre constitue un système minimal de variables d'état; indépendamment de l'aide que le concept d'arbre normal peut apporter à la détermination d'un tel système, il conduit, comme on le verra, à une mise en équation à la fois simple et systématique.

#### 4.7.7. Matrice $F$

Considérons l'ensemble fondamental des mailles associées à l'arbre normal (§ 4.2.10); on sait que dans la matrice  $F$  définie par (4.4) l'élément  $f(a, b)$  est associé à la maille  $a$  (c'est-à-dire aussi au chaînon  $a$  qui l'a engendrée) et à la branche d'arbre  $b$ .

Un chaînon  $a$  contenant une capacité engendre nécessairement une maille constituée exclusivement par des capacités : en effet, si la maille contenait un élément d'une autre nature, le chaînon  $a$  pourrait lui être substitué et on obtiendrait un arbre contenant une capacité de plus que l'arbre donné, ce qui est absurde puisque celui-ci est normal.

On a donc  $f(a, b) = 0$  pour  $a \in (S)$ ,  $b \in (G, \Gamma)$ . D'une façon duale une branche d'arbre contenant une inductance ne peut engendrer qu'une coupe contenant exclusivement des inductances; comme  $f(a, b)$  est aussi associé à la coupe  $b$  (c'est-à-dire aussi à la branche d'arbre qui l'a engendrée) et au chaînon  $a$ , on a donc  $f(a, b) = 0$  pour  $b \in (\Gamma)$ ,  $a \in (S, R)$ .

La matrice  $F$  affecte donc la forme suivante, dans laquelle chaque élément est une sous-matrice.

$$F = \begin{pmatrix} F_{SC} & 0 & 0 \\ F_{RC} & F_{RG} & 0 \\ F_{LC} & F_{LG} & F_{L\Gamma} \end{pmatrix} \quad (4.71)$$



#### 4.7.8. Equations d'état

Avec les conventions de la figure 4.41, les courants dans les branches du co-arbre et dans celle de l'arbre s'expriment comme suit :

$$i_{CO} = \begin{pmatrix} i_S - i_{s,S} \\ i_R - i_{s,R} \\ i_L - i_{s,L} \end{pmatrix} \quad i_{TR} = \begin{pmatrix} i_C - i_{s,C} \\ i_G - i_{s,G} \\ i_\Gamma - i_{s,\Gamma} \end{pmatrix} \quad (4.72)$$

Les équations de Kirchhoff (4.15) deviennent :

$$\begin{aligned} & - \begin{pmatrix} F'_{SC} & F'_{RC} & F'_{LC} \\ 0 & F'_{RG} & F'_{LG} \\ 0 & 0 & F'_{L\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_S \\ i_R \\ i_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_C \\ i_G \\ i_\Gamma \end{pmatrix} = \\ & = - \begin{pmatrix} F'_{SC} & F'_{RC} & F'_{LC} \\ 0 & F'_{RG} & F'_{LG} \\ 0 & 0 & F'_{L\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{s,S} \\ i_{s,R} \\ i_{s,L} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_{s,C} \\ i_{s,G} \\ i_{s,\Gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{n,C} \\ i_{n,G} \\ i_{n,\Gamma} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.73)$$

Les sous-vecteurs  $i_{nC}$ ,  $i_{nG}$ ,  $i_{n\Gamma}$  représentent les sources de courant de coupes : on vérifiera qu'il s'agit de la somme algébrique des sources de courant situées dans les coupes engendrées respectivement par les branches (C), (G), ( $\Gamma$ ) de l'arbre normal.

D'une manière duale, toujours en concordance avec les conventions de la figure 4.41, les tensions aux bornes des branches du co-arbre et aux bornes de celles de l'arbre s'expriment comme suit :

$$u_{CO} = \begin{pmatrix} u_S + e_S \\ u_R + e_R \\ u_L + e_L \end{pmatrix} \quad u_{TR} = \begin{pmatrix} u_C + e_C \\ u_G + e_G \\ u_\Gamma + e_\Gamma \end{pmatrix} \quad (4.74)$$

Les équations de Kirchhoff (4.18) deviennent :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} u_S \\ u_R \\ u_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{SC} & 0 & 0 \\ F_{RC} & F_{RG} & 0 \\ F_{LC} & F_{LG} & F_{L\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_C \\ u_G \\ u_\Gamma \end{pmatrix} = \\ & = - \begin{pmatrix} e_S \\ e_R \\ e_L \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F_{SC} & 0 & 0 \\ F_{RC} & F_{RG} & 0 \\ F_{LC} & F_{LG} & F_{L\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_C \\ e_G \\ e_\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{mS} \\ e_{mR} \\ e_{mL} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.75)$$

Les sous-vecteurs  $e_{mS}$ ,  $e_{mR}$  et  $e_{mL}$  représentent les sources de tension de mailles : il s'agit de la somme algébrique des sources de tension situées dans les mailles engendrées respectivement par les chaînons (S), (R) et (L).

Les indices 1 et 2 étant affectés respectivement aux chaînons et aux branches de l'arbre normal, les équations des éléments sont :

$$\begin{pmatrix} i_S \\ i_C \end{pmatrix} = d/dt \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_S \\ u_C \end{pmatrix} \quad (4.76)$$

$$\begin{pmatrix} u_R \\ u_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & G_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_R \\ i_G \end{pmatrix} \quad (4.77)$$

$$\begin{pmatrix} u_L \\ u_\Gamma \end{pmatrix} = d/dt \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L \\ i_\Gamma \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

Dans ces équations,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $R_1$  et  $G_2$  sont des sous-matrices diagonales. Le système des équations d'état cherché est de la forme

$$\left. \begin{aligned} du_k/dt &= f_k(u_k, i_l, e_{mr}, i_{nt}) \\ di_l/dt &= f_l(u_k, i_l, e_{mr}, i_{nt}) \end{aligned} \right\} \quad (4.79)$$

avec

$$k \in C, \quad l \in L, \quad r \in (S, R, L), \quad t \in (C, G, \Gamma)$$

On calcule tout d'abord  $i_S$  et  $u_\Gamma$ , et ensuite  $i_R$  et  $u_G$  en fonction des variables d'état et des sources; la substitution des résultats dans les équations qui expriment  $u_C$  et  $i_L$  fournit le système cherché.

De (4.76) et (4.75) on tire :

$$i_S = d/dt[C_1 u_S] = d/dt[C_1(e_{mS} - F_{SC} u_C)] \quad (4.80)$$

et de (4.78) et (4.73) :

$$u_\Gamma = d/dt[(L_{21} + L_{22} F'_{L\Gamma}) i_L + L_{22} i_{n\Gamma}] \quad (4.81)$$

D'autre part, de (4.73), (4.75) et (4.77), on déduit le système :

$$-F'_{RG} i_R + G_2 u_G = i_{nG} + F'_{LG} i_L$$

$$R_1 i_R + F_{RG} u_G = e_{mR} - F_{RC} u_C$$

On pose :

$$R_2 = G_2^{-1} \quad G_1 = R_1^{-1} \quad (4.82)$$

$$\Phi = R_1 + F_{RG} R_2 F'_{RG} \quad (4.83)$$

$$\Psi = G_2 + F'_{RG} G_1 F_{RG} \quad (4.84)$$

et il vient :

$$i_R = \Phi^{-1}[e_{mR} - F_{RG} R_2 i_{nG}] - \Phi^{-1} F_{RC} u_C - \Phi^{-1} F_{RG} R_2 F'_{LG} i_L \quad (4.85)$$

$$u_G = \Psi^{-1}[i_{nG} + F'_{RG} G_1 e_{mR}] - \Psi^{-1} F'_{RG} G_1 F_{RC} u_C + \Psi^{-1} F'_{LG} i_L \quad (4.86)$$

Si dans la première équation de (4.73) on substitue les expressions trouvées pour  $i_S$  (4.80) et  $i_R$  (4.85), il vient, en utilisant (4.76) :

$$\begin{aligned} d/dt [Tu_C] &= -F'_{RC}\Phi^{-1}F'_{RC}u_C + [F'_{LC} - F'_{RC}\Phi^{-1}F'_{RG}R_2F'_{LG}]i_L \\ &\quad + i_{nC} + F'_{RC}\Phi^{-1}[e_{mR} - F'_{RG}R_2i_{nG}] \\ &\quad + d/dt[F'_{SC}C_1 e_{mS}] \end{aligned} \quad (4.87)$$

De même, si dans la dernière équation de (4.75) on substitue l'expression de  $u_G$  (4.86) et celle de  $u_\Gamma$  (4.81), il vient, en utilisant (4.78) :

$$\begin{aligned} d/dt [\Theta i_L] &= [-F_{LC} + F_{LG}\Psi^{-1}F'_{RG}G_1F'_{RC}]u_C - F_{LG}\Psi^{-1}F'_{LG}i_L \\ &\quad + e_{mL} - F_{LG}\Psi^{-1}[i_{nG} + F'_{RG}G_1e_{mR}] \\ &\quad - d/dt[(F_{L\Gamma}L_{22} + L_{12})i_{n\Gamma}] \end{aligned} \quad (4.88)$$

On a posé

$$T = F'_{SC}C_1F_{SC} + C_2 \quad (4.89)$$

$$\Theta = L_{11} + F_{L\Gamma}L_{21} + L_{12}F'_{L\Gamma} + F_{L\Gamma}L_{22}F'_{L\Gamma} \quad (4.90)$$

On posera aussi :

$$\Lambda = F'_{RC}\Phi^{-1}F'_{RC} \quad (4.91)$$

$$\Omega = F_{LG}\Psi^{-1}F'_{LG} \quad (4.92)$$

$$\Xi = F'_{LC} - F'_{RC}\Phi^{-1}F'_{RG}R_2F'_{LG} \quad (4.93)$$

Si en outre  $s$  et  $x$  désignent respectivement le *vecteur des variables d'état* et le *vecteur des excitations* :

$$s = (u_C, i_L)' \quad (4.94)$$

$$x = (e_{mS}, e_{mR}, e_{mL}, i_{nC}, i_{nG}, i_{n\Gamma})' \quad (4.95)$$

on obtient le système (4.69) (§ 4.7.5) :

$$ds/dt = As + Bx + Edx/dt \quad (4.69)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & \Theta^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Lambda & \Xi \\ -\Xi' & -\Omega \end{pmatrix} \quad (4.96)$$

$$B = \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & \Theta^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & F'_{RC}\Phi^{-1} & 0 & 1 & -F'_{RC}\Phi^{-1}F'_{RG}R_2 & 0 \\ 0 & -F_{LG}\Psi^{-1}F'_{RG}G_1 & 1 & 0 & -F_{LG}\Psi^{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.97)$$

$$E = \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & \Theta^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F'_{SC}C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -F_{L\Gamma}L_{22} - L_{12} \end{pmatrix} \quad (4.98)$$

On peut remarquer que le vecteur d'état  $s$  ne dépend de la *dérivée des sources* que dans le cas où il existe des sources de tension en série dans une maille de capacités ( $e_{mS} \neq 0$ ) ou des sources de courant en parallèle sur des coupes d'inductances, ( $i_{n\Gamma} \neq 0$ ).

#### 4.7.9. Réponse propre du réseau

La réponse propre du réseau est la solution de l'équation

$$ds/dt = As \quad (4.99)$$

dans laquelle  $A$  est une matrice carrée d'ordre  $\gamma$ ; elle doit satisfaire aux conditions initiales :

$$s(0) = [u_C(0), i_L(0)]' \quad (4.100)$$

La solution peut être mise sous la forme

$$s(t) = \exp(At) \cdot s(0) \quad (4.101)$$

où la matrice  $\exp(At)$  est définie par son développement :

$$\exp(At) = 1 + At + \frac{1}{2}(At)^2 + \dots + \frac{1}{n!}(At)^n + \dots \quad (4.102)$$

En effet, la dérivée de  $\exp(At)$  s'obtient à partir de (4.102) :

$$d/dt[\exp(At)] = A + A^2t + \dots + \frac{1}{(n-1)!}A^n t^{n-1} + \dots = A \exp(At)$$

et on peut vérifier la validité de (4.101) par substitution dans (4.99).

#### 4.7.10. Pulsations propres du réseau

On va montrer que les pulsations propres du réseau coïncident avec les valeurs propres de la matrice  $A$ .

Supposons que  $A$ , d'ordre et de rang  $\gamma$ , possède  $\gamma$  valeurs propres distinctes  $\lambda_i$  auxquelles correspondent  $\gamma$  vecteurs propres indépendants  $a_i$  :

$$Aa_i = \lambda_i a_i \quad (i = 1, 2, \dots, \gamma) \quad (4.103)$$

qui constituent une base de l'espace des états.

La réponse propre  $s(t)$  est donc une combinaison linéaire des vecteurs propres :

$$s(t) = \sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i(t) \cdot a_i$$

Après substitution dans (4.99), il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\gamma} a_i d\alpha_i/dt &= A \sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i a_i \\ &= \sum_{i=1}^{\gamma} \lambda_i \alpha_i a_i \end{aligned}$$

Les vecteurs propres étant indépendants, on peut écrire :

$$d\alpha_i/dt = \lambda_i \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots, \gamma)$$

soit

$$\alpha_i(t) = \alpha_i(0) \exp(\lambda_i t)$$

et par conséquent :

$$s(t) = \sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i(0) a_i \exp(\lambda_i t) \quad (4.104)$$

ce qui démontre la propriété.

On dit que la réponse propre du réseau résulte de la superposition de  $\gamma$  modes propres; chaque mode est excité indépendamment des autres; en effet, si l'état initial est tel que  $\alpha_i(0) = 0$  ( $\forall i \neq k$ ), il vient :

$$s(t) = \alpha_k(0) a_k \exp(\lambda_k t) \quad (4.105)$$

Lorsque certaines valeurs propres sont complexes, elles se présentent par paires conjuguées car la matrice  $A$  est réelle : il suffit dans ce cas de grouper dans (4.104) les termes qui correspondent aux valeurs propres conjuguées.

Le cas des valeurs propres multiples est plus délicat à traiter : on trouvera des renseignements sur ce sujet dans [3].

#### 4.7.11. Réponse forcée

Si l'on pose :

$$b(t) = Bx(t) + Edx/dt \quad (4.106)$$

la réponse totale du réseau à une excitation  $x(t)$  peut s'écrire :

$$s(t) = \exp(At) \cdot s(0) + \int_0^t \exp[A(t-\tau)] \cdot b(\tau) d\tau \quad (4.107)$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} d/dt \left\{ \int_0^t \exp[A(t-\tau)] b(\tau) d\tau \right\} &= d/dt \left[ \exp(At) \int_0^t \exp(-A\tau) \cdot b(\tau) d\tau \right] \\ &= A \exp(At) \int_0^t \exp(-A\tau) \cdot b(\tau) d\tau + b(t) \end{aligned}$$

et la validité de (4.107) peut être vérifiée par substitution dans (4.69).

#### 4.7.12. Commentaires

La méthode des équations d'état peut être appliquée dans certains cas aux réseaux linéaires contenant des sources dépendantes, des transformateurs idéaux et des gyrateurs; on consultera à ce sujet [6].

Il est clair que le problème crucial pour l'application de la méthode est le calcul numérique de  $\exp(At)$ ; on trouvera des renseignements à ce sujet dans [3].

Il convient enfin de noter que cette méthode révèle en fait toute sa puissance dans le cas des réseaux variables ou non-linéaires; on trouvera des renseignements et une importante bibliographie à ce sujet dans la référence [6].

#### 4.7.13. Exemple

Soit le réseau représenté à la figure 4.43; l'arbre normal contient deux capacités (fig. 4.44) et le co-arbre comprend deux inductances; on a donc  $\gamma = 4$ . Les branches du graphe étant numérotées dans l'ordre  $S, R, L, C, G$  (l'indice  $\Gamma$  est inexistant), la matrice  $F$  se présente sous la forme suivante :

$$F = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{cc|cc} e & f & g & h & k \\ \hline -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & -1 & +1 & 0 \\ \hline -1 & -1 & -1 & 0 & +1 \end{array} = \begin{pmatrix} F_{SC} & 0 \\ F_{RC} & F_{RG} \\ F_{LC} & F_{LG} \end{pmatrix}$$

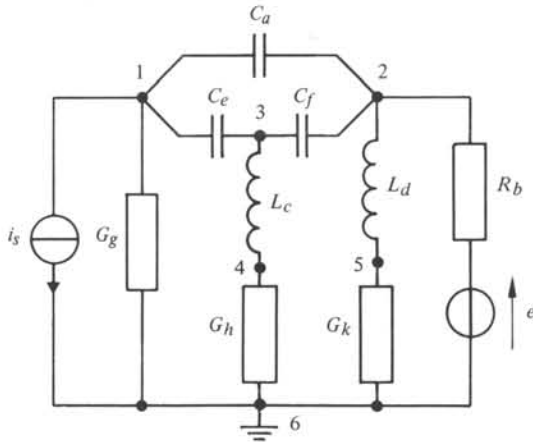


Fig. 4.43

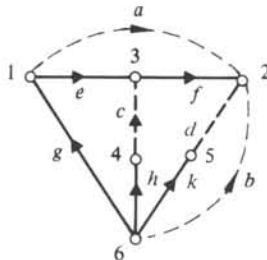


Fig. 4.44

D'autre part on a :

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|cc} C_a & 0 & 0 \\ \hline 0 & C_c & 0 \\ 0 & 0 & C_f \end{array} \right)$$

$$L_{11} = \begin{pmatrix} L_c & 0 \\ 0 & L_d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|ccc} R_b & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & G_g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_k \end{array} \right)$$

On calcule successivement :

$$T = \begin{pmatrix} C_a + C_c & C_a \\ C_a & C_a + C_f \end{pmatrix}$$

$$\Theta = L_{11}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} R_g & 0 & 0 \\ 0 & R_h & 0 \\ 0 & 0 & R_k \end{pmatrix}, G_1 = G_b$$

$$\Phi = R_b + R_g$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} G_g + G_b & 0 & 0 \\ 0 & G_h & 0 \\ 0 & 0 & G_k \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = (R_b + R_g)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Omega = (R_b + R_g)^{-1} \begin{pmatrix} R_g R_b + R_g R_h + R_h R_b & R_g R_b \\ R_g R_b & R_g R_b + R_b R_k + R_k R_g \end{pmatrix}$$

$$\Xi = (R_b + R_g)^{-1} \begin{pmatrix} -R_b & -R_b \\ R_g & -R_b \end{pmatrix}$$

$$F'_{RC} \Phi^{-1} = (R_g + R_b)^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$-F'_{RC} \Phi^{-1} F_{RG} R_2 = (R_b + R_g)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -R_g & 0 & 0 \\ -R_g & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-F'_{LG} \Psi^{-1} = (R_b + R_g)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} R_g R_b & -(+R_b R_h + R_h R_g) & 0 \\ R_g R_b & 0 & -(+R_b R_k + R_k R_g) \end{pmatrix}$$

$$-F'_{LG} \Psi^{-1} F'_{RG} G_1 = -R_g (R_b + R_g)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{F}'_{SC} C_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} C_a$$

Sachant enfin que

$$s = (u_e, u_f, i_c, i_d)'$$

$$x = (0, e, 0, 0, i_s, 0)'$$

on dispose de tous les éléments pour écrire le système des équations d'état (4.69); aucune source n'y intervient par sa dérivée.

#### 4.8. EXERCICES

4.8.1. Sous quelles conditions un sous-graphe peut-il faire partie d'un co-arbre ?

4.8.2. Donner une interprétation topologique pour les termes du déterminant de la matrice des équations nodales  $Y_n = AYA'$  d'un réseau  $(R, L, C)$ .

(On utilisera le théorème de Binet-Cauchy relatif au développement du déterminant d'un produit de matrices).

4.8.3. Montrer que le nombre d'arbres distincts dans un graphe est égal à la valeur du déterminant du produit  $AA'$ .

4.8.4. Dans un réseau  $(R, L, C)$  on a défini un système fondamental de mailles par rapport à un arbre; montrer que chaque élément de la matrice des équations de mailles  $Z_m$  est une somme de termes tous affectés du même signe.

4.8.5. Calculer l'impédance du bipôle de la figure 4.45 lorsque le nombre de sections de l'échelle est infiniment grand.

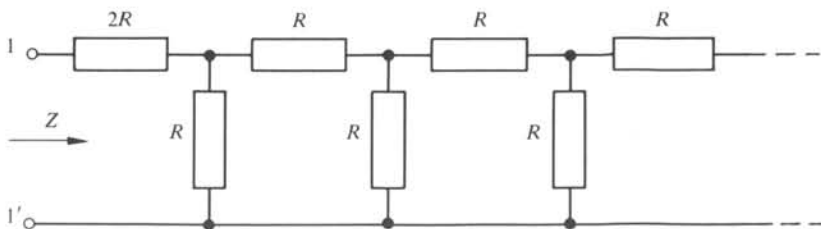


Fig. 4.45



4.8.6. Calculer la fonction de réponse  $U/I$  du réseau de la figure 4.46.

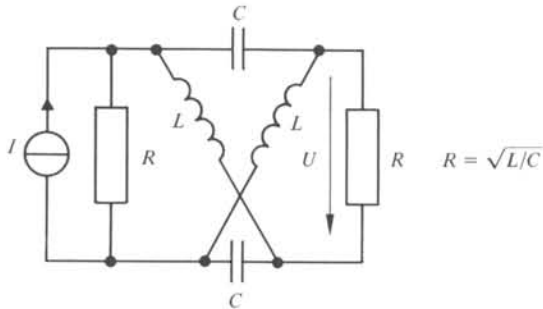


Fig. 4.46

4.8.7. Même question pour le réseau de la figure 4.47; discuter l'influence du signe de  $L_{12}$  sur la courbe de réponse en fréquence.

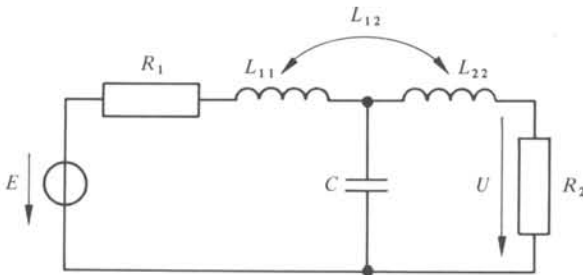


Fig. 4.47

4.8.8. Calculer la fonction de réponse  $U/I$  du réseau de la figure 4.48.

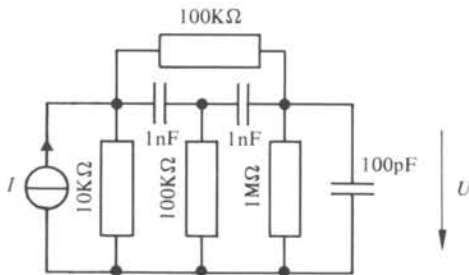


Fig. 4.48

4.8.9. Soit un réseau linéaire dans lequel chaque branche contient un seul élément :  $R$ ,  $L$  ou  $C$ . Si  $\Delta_m$  est le déterminant de la matrice des équations de mailles et si  $\Delta_n$  est celui des équations de noeuds, démontrer la relation

$$\Delta_m(p) = \Delta_n(p) \cdot \prod_k Z_k(p)$$

dans laquelle le produit est étendu aux impédances de toutes les branches.



## PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES RÉSEAUX

### 5.1. DUALITÉ

#### 5.1.1. Graphes de Kuratowski

La notion de graphe planaire a été introduite au paragraphe 4.2.12. Les deux graphes non planaires les plus simples sont le graphe complet à cinq noeuds et l'hexagone avec ses trois diagonales principales (fig. 5.1); ces deux graphes sont appelés graphes de Kuratowski.

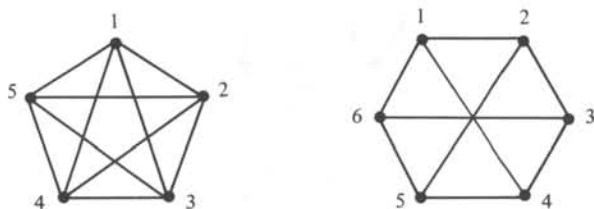


Fig. 5.1

#### 5.1.2. Théorème

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit planaire est qu'il ne contienne pas comme sous-graphe l'un des deux graphes de Kuratowski.

On trouvera une démonstration de ce théorème dans l'ouvrage de Berge [1].

#### 5.1.3. Graphes duaux

La définition du graphe dual qui va être donnée précise celle qui a été esquissée au paragraphe 1.2.14.

Soit  $G_1$  un graphe connexe à  $b_1$  branches et  $n_1$  noeuds; son dual  $G_2(b_2, n_2)$ , s'il existe, est défini comme suit :

- les branches de  $G_1$  et de  $G_2$  se correspondent d'une façon biunivoque :

$$b_1 = b_2 \tag{5.1}$$

- à tout noeud de  $G_1$  correspond une maille de  $G_2$  et le rang de  $G_1$  est égal à la nullité de  $G_2$  :

$$n_1 - 1 = b_2 - n_2 + 1 \tag{5.2}$$

Si l'on compare (5.1) et (5.2) on observe que l'on a aussi :

$$b_1 - n_1 + 1 = n_2 - 1 \quad (5.3)$$

De (5.1) et (5.3) on déduit que si  $G_2$  est le dual de  $G_1$ , réciproquement  $G_1$  peut être le dual de  $G_2$ . En fait, il l'est, ainsi que cela ressortira du procédé de construction.

Bien que le dual d'un noeud de  $G_1$  (de  $G_2$ ) soit une maille de  $G_2$  (de  $G_1$ ), le dual d'une maille quelconque est en général une coupe quelconque, car les branches dualles ne sont pas nécessairement en un même noeud, auquel cas elles constitueraient une coupe nodale; cependant, lorsqu'il s'agit d'une maille constituée par la fenêtre d'un graphe planaire, il est possible de construire le graphe dual de telle façon que les branches dualles soient incidentes en un même noeud qu'il est d'ailleurs commode de situer dans la fenêtre. A toute fenêtre de  $G_1$  ainsi qu'à la région du plan qui lui est extérieure on peut faire correspondre une coupe nodale de  $G_2$ ; une telle correspondance permet une construction aisée de  $G_2$  (fig. 5.2).

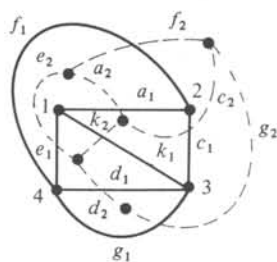


Fig. 5.2

#### 5.1.4. Théorème

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe possède un dual est qu'il soit planaire.

La construction du dual telle qu'elle vient d'être décrite est donc toujours possible; on trouvera la démonstration de ce théorème dans [7].

Tableau 5.3

$G_1$	$G_2$
branche ( $b_1$ )	branche ( $b_2 = b_1$ )
branches en série	branches en parallèle
branches en parallèle	branches en série
noeud ( $n_1$ )	fenêtre et région extérieure
fenêtre et région extérieure	noeud ( $n_2$ )
maille	coupe
coupe	maille
arbre	co-arbre
co-arbre	arbre
rang ( $\rho_1 = n_1 - 1$ )	nullité ( $\mu_2 = \rho_1$ )
nullité ( $\mu_1 = b_1 - n_1 + 1$ )	rang ( $\rho_2 = \mu_1$ )

### 5.1.5. Correspondances entre graphes duaux

Entre un graphe connexe et planaire  $G_1$  et son dual  $G_2$  il existe un certain nombre de correspondances qui sont reprises au tableau 5.3.

La plupart de ces correspondances sont immédiates; la correspondance (arbre, co-arbre) se démontre comme suit. Soient  $(T, C, D)$  respectivement un arbre de  $G_1$ , le co-arbre correspondant et le dual de ce co-arbre : il faut démontrer que  $D$  est un arbre.

Comme  $C$  ne contient pas de coupe,  $D$  ne contient pas de maille; de plus,  $D$  contient  $b_1 - n_1 + 1 = n_2 - 1$  branches : par conséquent il contient tous les noeuds de  $G_2$ ; c'est donc un arbre.

### 5.1.6. Réseaux duaux

Soit un réseau  $R_1$  pris dans l'état quiescent ; on lui associe un graphe  $G_1$  en faisant correspondre une branche à chaque composant et à chaque accès d'un transformateur ou d'un gyrateur (ex. : fig. 5.4).

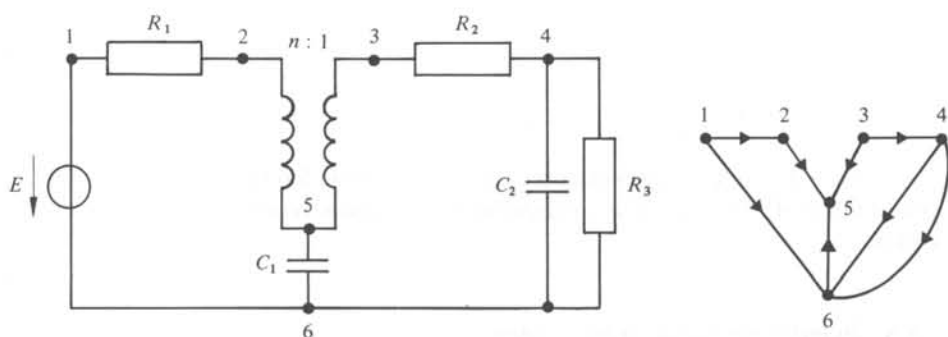


Fig. 5.4

Le réseau  $R_1$  possède un dual  $R_2$  lorsque les conditions qui suivent peuvent être satisfaites.

- Il existe entre les branches de  $R_1$  et celles de  $R_2$  une correspondance biunivoque telle que les graphes  $G_1$  et  $G_2$  sont duaux;
- chaque tension de branche dans  $R_1$  (dans  $R_2$ ) est proportionnelle au courant dans la branche homologue de  $R_2$  (de  $R_1$ ); le coefficient de proportionnalité possède les dimensions d'une résistance et il est le même pour toutes les branches :

$$\left. \begin{aligned} u_{k1} &= R_0 i_{k2} \\ i_{k1} &= R_0^{-1} u_{k2} \\ k &= 1, 2, \dots, b \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Bien que l'orientation des branches d'un graphe soit purement conventionnelle, dès lors que l'on établit une correspondance entre deux graphes et les équations des circuits correspondants, il est indispensable d'avoir des conventions de signes cohérentes. Pour ce faire, il faut choisir les orientations de deux branches homologues de sorte qu'en les faisant coïncider par rotation autour de leur intersection l'angle de rotation soit positif et inférieur à  $\pi$  (fig. 5.5).

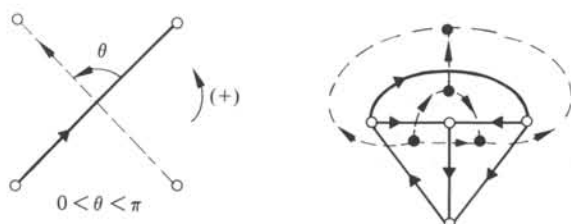


Fig. 5.5

### 5.1.7. Branche contenant un élément bipôle

Les relations (5.4) peuvent s'écrire en transformées. Si :

$$U_{k1} = Z_{k1} I_{k1} \quad Z_{k1} = R_{k1}, L_{k1} p \text{ ou } (C_{k1} p)^{-1}$$

il vient :

$$R_0 I_{k2} = Z_{k1} R_0^{-1} U_{k2} = Z_{k1} R_0^{-1} Z_{k2} I_{k2}$$

d'où :

$$Z_{k1} Z_{k2} = R_0^2 \quad (k = 1, 2, \dots, b) \quad (5.5)$$

On en déduit les correspondances reprises au tableau 5.6 (§ 5.1.9). D'après les conditions (5.4), les sources se correspondent par dualité comme l'indique le même tableau.

### 5.1.8. Branche contenant un interrupteur

Soit dans  $R_1$  un interrupteur ouvert pour  $t < t_0$  et fermé pour  $t \geq t_0$ ; si  $u_1$  et  $i_1$  sont respectivement la tension à ses bornes et le courant qui le traverse, on a

$$i_1 = 0, \quad t < t_0$$

$$u_1 = 0, \quad t \geq t_0$$

Les contraintes dans la branche duale de  $R_2$  sont :

$$u_2 = 0, \quad t < t_0$$

$$i_2 = 0, \quad t \geq t_0$$

Ce sont celles imposées par un interrupteur fermé pour  $t < t_0$  et ouvert pour  $t \geq t_0$ . Réciproquement, un tel interrupteur a pour dual un interrupteur ouvert pour  $t < t_0$  et fermé pour  $t \geq t_0$ .

### 5.1.9. Règle de construction du réseau dual

Le dual d'un réseau planaire s'obtient en construisant tout d'abord le graphe dual selon les règles du paragraphe 5.1.3; on utilise ensuite les correspondances reprises au tableau 5.6 pour la substitution des éléments duaux dans les branches homologues. La constante dimensionnelle  $R_0$  est en principe arbitraire : elle est choisie en fonction

Tableau 5.6

Réseau ( $R_1$ )	Réseau ( $R_2$ )
$R_1$	$R_2 = R_0^2 \cdot R_1^{-1}$
$L_1$	$C_2 = L_1 \cdot R_0^{-2}$
$C_1$	$L_2 = C_1 \cdot R_0^2$
	Sources indépendantes
$E_1$	$I_{S2} = E_1 R_0^{-1}$
$I_{S1}$	$E_2 = I_{S1} \cdot R_0$
	Sources dépendantes
$E_{dk} = r_1(k, l) I_l$	$I_{dk} = g_2(k, l) U_l; g_2(k, l) = r_1(k, l) \cdot R_0^{-2}$
$I_{dk} = g_1(k, l) U_l$	$E_{dk} = r_2(k, l) I_l; r_2(k, l) = g_1(k, l) \cdot R_0^2$
Transformateur idéal : $n$	Transformateur idéal : $1/n$
Gyrateur : $g$	Gyrateur : $-1/g \cdot R_0^2$

des exigences particulières à chaque problème. Le tableau 5.6 donne le dual du gyrateur et celui du transformateur idéal en faisant intervenir cette constante  $R_0$ .

### 5.1.10. Commentaires

L'exposé qui précède peut être généralisé au cas d'un réseau avec conditions initiales; en effet celles-ci peuvent être assimilées à des excitations fictives (sources de tension ou de courant dont on trouvera les éléments duaux au tableau 5.6).

La transformation d'un réseau contenant des bobines couplées par inductance mutuelle peut présenter certaines difficultés. Ainsi lorsque les branches  $k$  et  $l$  sont couplées par induction mutuelle, ( $Z_{kl} = L_{kl} p$ ), on montre, comme au paragraphe 5.1.7, qu'il devrait exister entre les branches homologues du réseau dual un couplage caractérisé par  $Z_{lk2}(p)$  avec

$$Z_{kl1}(p) \cdot Z_{lk2}(p) = R_0^2$$

soit

$$Z_{lk2}(p) = R_0^2 (L_{kl} p)^{-1} \quad (5.6)$$

Telle quelle, une inductance mutuelle n'admet donc pas d'élément dual, puisqu'il n'existe pas de couplage capacitif entre branches; ce résultat est valable a fortiori pour un couplage inductif entre plus de deux branches. On a vu toutefois, au paragraphe 1.4.13, que deux bobines couplées peuvent être remplacées par un schéma équivalent contenant deux inductances et un transformateur idéal (fig. 1.38); comme le dual d'un transformateur idéal de rapport  $n$  est un transformateur idéal de rapport  $-1/n$ , on obtient en définitive la correspondance illustrée à la figure 5.7.

On remarquera que dans le réseau dual, le transformateur idéal est connecté directement à des capacités  $C_k$  et  $C_l$ , ce qui rend difficile une transformation du schéma qui permettrait de retrouver une inductance mutuelle.

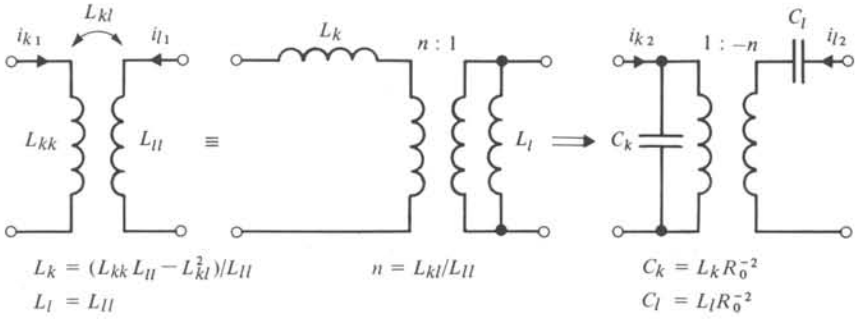


Fig. 5.7

**5.1.11. Exemple**

La figure 5.8 représente un biporte comportant trois inductances et une capacité; sa fonction de réponse en tension est définie par le rapport  $U_1(p)/E_1(p)$ . On souhaite transformer cette cellule pour diminuer si possible le nombre d'inductances en laissant invariante la fonction de réponse.

Le réseau dual (fig. 5.9) est obtenu en appliquant les règles énoncées au paragraphe 5.1.9.

La dualité entraîne la relation

$$I_2/I_{s2} = U_1/E_1$$

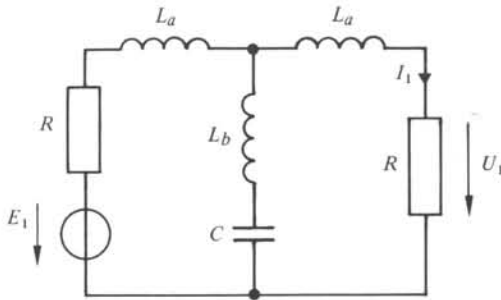


Fig. 5.8

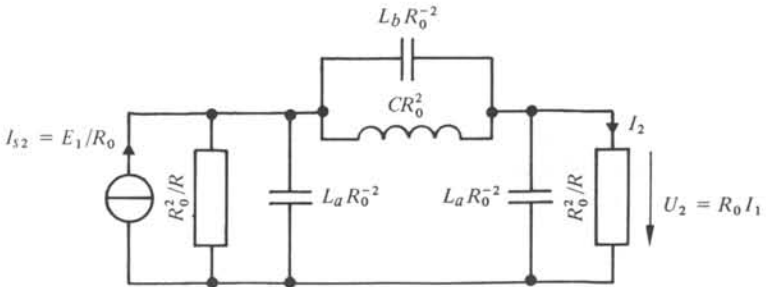


Fig. 5.9



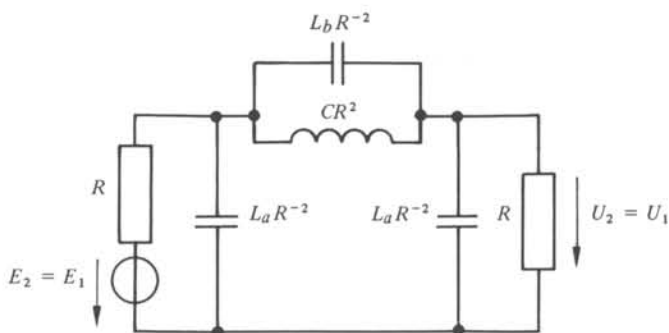


Fig. 5.10

Si ensuite on transforme la source de courant  $I_{s2}$  en une source de tension, et si on choisit  $R_0 = R$ , on obtient la figure 5.10.

### 5.1.12. Effet dualiseur du gyrateur

Si un bipôle élémentaire ( $R$ ,  $L$  ou  $C$ ) d'impédance  $Z_2$  est connecté à l'accès  $(2, 2')$  d'un gyrateur de résistance de gyration  $r$ , on obtient sans difficulté à partir des équations du gyrateur l'expression de l'impédance  $Z_1$  vue de l'accès  $(1, 1')$  (fig. 5.11) :

$$Z_1 = U_1/I_1 = r^2 (-I_2)/U_2 = r^2/Z_2$$

d'où

$$Z_1 Z_2 = r^2$$

On dit que le gyrateur transforme ce bipôle en son dual.

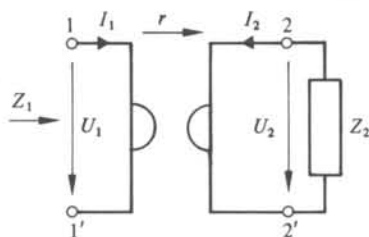


Fig. 5.11

## 5.2 RÉCIPROCITÉ

### 5.2.1. Expression de la réciprocité dans un réseau

On considère un réseau sans sources, exempt de gyrateurs et supposé dans l'état quiescent : il jouit de la propriété suivante.

Le courant dans une branche  $l$  dû à l'action d'une source de tension située dans la branche  $k$  est égal au courant qui circulerait dans cette branche  $k$  si la même source

était insérée dans la branche  $l$ . De façon plus générale, si  $I_l$  ( $I_k$ ) est le courant dans la branche  $l$  ( $k$ ) dû à une source  $E_k$  ( $E_l$ ) située dans la branche  $k$  ( $l$ ), la propriété est explicitée par la relation :

$$I_l/E_k = I_k/E_l \quad (5.7)$$

### 5.2.2. Démonstration

Les lemmes de Kirchhoff sont valables en transformée de Laplace : il en va donc de même du théorème de Tellegen qui en a été déduit (paragraphe 1.3.15) :

$$\sum_{k=1}^b U_{k1} I_{k2} = 0 \quad (5.8)$$

$$\sum_{k=1}^b U_{k2} I_{k1} = 0 \quad (5.9)$$

Les indices 1 et 2 se rapportent à des états distincts du réseau.

Distinguons une branche  $K$  en série avec la branche  $k$  et une branche  $L$  en série avec la branche  $l$  (fig. 5.12) et considérons les états 1 et 2 qui résultent des excitations suivantes :

- état 1 :  $U_K = E_k \quad U_L = 0$
- état 2 :  $U_K = 0 \quad U_L = E_l$

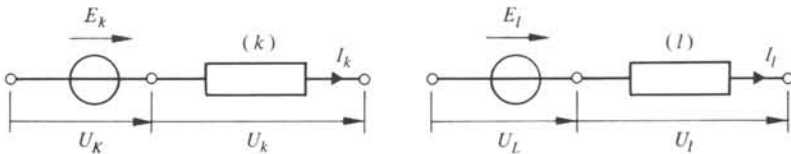


Fig. 5.12

Les relations (5.8) et (5.9) deviennent :

$$\sum_{\alpha=1}^b U_{\alpha 1} I_{\alpha 2} + E_k I_{k2} = 0 \quad (5.10)$$

$$\sum_{\alpha=1}^b U_{\alpha 2} I_{\alpha 1} + E_l I_{l1} = 0 \quad (5.11)$$

Si la branche  $\alpha$  contient un élément  $R$ ,  $L$  ou  $C$ , on a

$$U_{\alpha i} = Z_{\alpha} I_{\alpha i} \quad (i = 1, 2)$$

et par conséquent :

$$U_{\alpha 1} I_{\alpha 2} = U_{\alpha 2} I_{\alpha 1} = Z_{\alpha} I_{\alpha 1} I_{\alpha 2}$$

Si les branches  $\alpha$  et  $\beta$  correspondent aux accès d'un transformateur idéal, on a :

$$U_{\alpha 1} I_{\alpha 2} + U_{\beta 1} I_{\beta 2} = -U_{\beta 1} I_{\beta 2} + U_{\beta 1} I_{\beta 2} = 0$$

Tous les termes relatifs aux transformateurs disparaissent donc des sommes de (5.10) et (5.11); on sait aussi qu'une inductance mutuelle peut être remplacée par un transformateur idéal et deux inductances; on a donc pour l'entièreté du réseau :

$$\sum_{\alpha=1}^b U_{\alpha 1} I_{\alpha 2} = \sum_{\alpha=1}^b U_{\alpha 2} I_{\alpha 1}$$

et par conséquent la comparaison de (5.10) et (5.11) démontre (5.7).

### 5.2.3. Définition

Un réseau qui jouit de la propriété de réciprocité explicitée par la relation (5.7) est appelé *réseau réciproque*.

### 5.2.4. Enoncé dual de la réciprocité

Dans un réseau  $(R, L, C)$  avec transformateurs idéaux, exempt de sources, la tension aux bornes d'une branche  $k$  due à l'action d'une source de courant connectée en parallèle sur la branche  $l$  est égale à la tension qui apparaîtrait aux bornes de cette branche  $l$  si on connectait cette même source de courant en parallèle sur la branche  $k$ .

Cette propriété s'exprime par la relation :

$$U_k / I_{s,l} = U_l / I_{s,k} \quad (5.12)$$

### 5.2.5. Commentaires

Les relations (5.7) et (5.12) ont été établies pour des excitations de forme quelconque; elles sont évidemment aussi valables en régime sinusoïdal, auquel cas elles font intervenir des substituts complexes.

On remarquera que la réciprocité est liée à l'absence de sources dépendantes : celles-ci introduisent des couplages non réciproques entre les branches du réseau (§ 4.6.2 et 4.6.5); le même effet peut résulter de la présence de gyrateurs dans le réseau.

On sait par ailleurs que ces couplages non réciproques détruisent la symétrie des matrices des équations de mailles ou de noeuds (sect. 4.4 et 4.5).

### 5.2.6. Exemple de réseau réciproque

Un quadripôle  $(L, C)$  est inséré entre une source de tension  $E$  en série avec une résistance  $R_1$  et une résistance  $R_2$  (fig. 5.13). La fonction de réponse en tension vaut :

$$H_{21} = U_2 / E = -R_2 I_2 / E$$

Lorsque la source est connectée en série avec  $R_2$ , la réponse étant constituée par

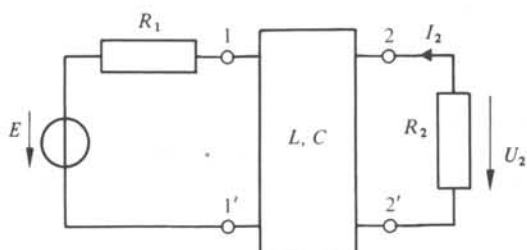


Fig. 5.13

la tension aux bornes de  $R_1$  (fig. 5.14) on a :

$$H_{12} = U_1/E = -R_1 I_1/E$$

et la réciprocité implique :

$$H_{21} = H_{12} \cdot R_2/R_1$$

On peut en outre conclure que si  $R_1 = R_2$  l'inversion des accès (1, 1') et (2, 2') ne modifie nullement la fonction de réponse.

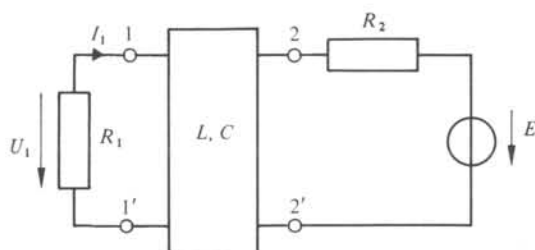


Fig. 5.14

### 5.2.7. Réseau non réciproque avec sources dépendantes

Pour le réseau de la figure 5.15 on définit la fonction de réponse  $H = U_2/I_{S1}$ .

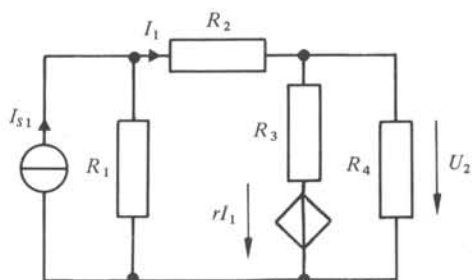


Fig. 5.15

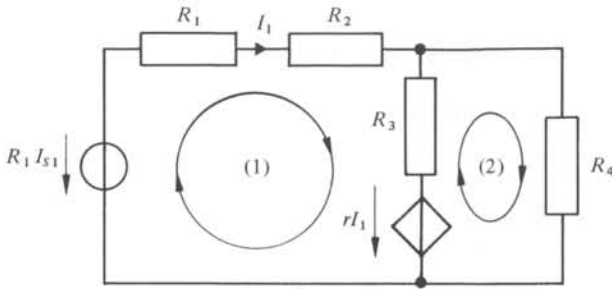


Fig. 5.16

Après transformation de la source de courant (fig. 5.16), le système des équations de mailles s'écrit :

$$\begin{pmatrix} R_1 I_{s1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_3 + r & -R_3 \\ -R_3 - r & R_3 + R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

et on en déduit

$$H = R_4 I_2 / I_{s1} = R_4 R_1 (R_3 + r) / \Delta$$

où  $\Delta$  est le déterminant du système.

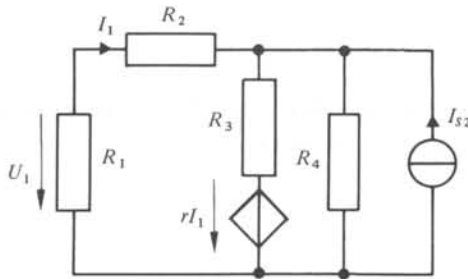


Fig. 5.17

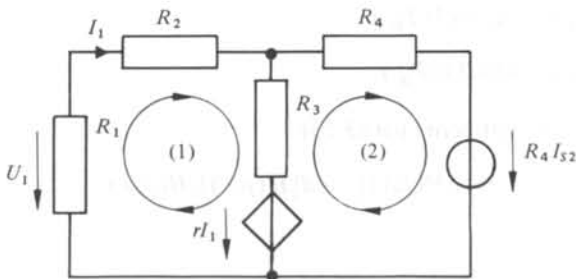


Fig. 5.18

A la figure 5.17, la source de courant est en parallèle sur  $R_4$  et la réponse est la tension aux bornes de  $R_1$ ; après transformation (fig. 5.18), il vient :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -R_4 I_{s2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_3 + r & -R_3 \\ -R_3 - r & R_3 + R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

d'où

$$H = U_1/I_{s2} = -R_1 I_1/I_{s2} = R_1 R_3 R_4 / \Delta$$

### 5.3. RÉSEAU ADJOINT

#### 5.3.1. Variations d'une fonction de réponse dues aux perturbations des composants du réseau

On désire souvent connaître l'influence exercée sur une fonction de réponse par les petites perturbations que peuvent subir les composants d'un réseau; l'origine de ces perturbations est diverse : tolérances de fabrication, influence de la température ou du vieillissement, ... etc. Les méthodes générales d'analyse développées au chapitre 4 permettent de résoudre ce problème; cependant, le même résultat peut être obtenu avec un volume de calcul moindre par la méthode qui va être développée dans cette section.

#### 5.3.2. Définitions

La sensibilité d'une fonction de réponse  $H$  aux petites variations  $\Delta P_\alpha$  des composants  $P_\alpha$  du réseau est définie par la relation

$$S(H, P_\alpha) = d(\ln H)/d(\ln P_\alpha) = (dH/dP_\alpha)(P_\alpha/H) \quad (5.13)$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, b)$$

La sensibilité du gain logarithmique  $a(\omega)$  et celle de la phase  $b(\omega)$  (§ 3.2.11) sont définies par

$$S(a, P_\alpha) = da/d(\ln P_\alpha) \quad (5.14)$$

$$S(b, P_\alpha) = db/d(\ln P_\alpha) \quad (5.15)$$

Comme on peut écrire par (3.23) :

$$d(a + jb) = d[\ln H(j\omega)] = d[H(j\omega)]/H(j\omega) \quad (5.16)$$

il vient :

$$S(a, P_\alpha) = \operatorname{Re} [S(H(j\omega), P_\alpha)] \quad (5.17)$$

$$S(b, P_\alpha) = \operatorname{Im} [S(H(j\omega), P_\alpha)] \quad (5.18)$$

### 5.3.3. Réseau adjoint

On considère un réseau pouvant contenir des sources dépendantes; il comporte  $b$  branches : l'une d'elles ( $k$ ) contient une source indépendante (tension ou courant) qui constitue le signal; le courant dans une autre branche ( $l$ ) ou encore la tension à ses bornes constitue la réponse. Les courants et tensions de branches sont notés  $I_\alpha$  et  $U_\alpha$ .

A ce réseau on va associer un autre réseau dit réseau adjoint qui possède de la même topologie, mais dont les composants seront définis plus loin; on va établir une correspondance entre les branches des deux réseaux; les courants et tensions des branches homologues du réseau adjoint sont notés respectivement  $\Phi_\alpha$  et  $\Psi_\alpha$ .

On sait que le théorème de Tellegen permet d'écrire :

$$\sum_{\alpha=1}^b U_\alpha \Phi_\alpha = 0 \quad (5.19)$$

$$\sum_{\alpha=1}^b I_\alpha \Psi_\alpha = 0 \quad (5.20)$$

Si chaque paramètre  $P_\alpha$  du réseau (valeur d'une résistance, d'une capacité, ... du coefficient d'une source dépendante) subit une perturbation  $\Delta P_\alpha$ , les tensions et les courants subissent des variations  $\Delta U_\alpha$  et  $\Delta I_\alpha$ , de sorte que l'on a :

$$\sum_{\alpha=1}^b (U_\alpha + \Delta U_\alpha) \Phi_\alpha = 0 \quad (5.21)$$

$$\sum_{\alpha=1}^b (I_\alpha + \Delta I_\alpha) \Psi_\alpha = 0 \quad (5.22)$$

On soustrait (5.19) de (5.21), (5.20) de (5.22) et par différence des résultats il vient :

$$\sum_{\alpha=1}^b (\Delta U_\alpha \Phi_\alpha - \Delta I_\alpha \Psi_\alpha) = 0 \quad (5.23)$$

Considérons un bipôle d'impédance  $Z$  dans l'une des branches du réseau original; on a au premier ordre :

$$\Delta U_Z = Z \Delta I_Z + I_Z \Delta Z$$

Le terme qui correspond à cette branche dans (5.23) vaut

$$(Z \Phi_Z - \Psi_Z) \Delta I_Z + I_Z \Phi_Z \Delta Z$$

En termes d'admittances, on aurait trouvé :

$$(\Phi_Y - Y \Psi_Y) \Delta U_Y - U_Y \Psi_Y \Delta Y$$

Le composant qui constituera la branche homologue du réseau adjoint est choisi pour annuler dans ces expressions le terme qui dépend, soit de  $\Delta I_Z$ , soit de  $\Delta U_Y$  : on

pose donc  $\Psi_Z/\Phi_Z = Z$  ou bien  $\Phi_Y/\Psi_Y = Y$ ; les éléments  $R, L$  et  $C$  sont donc conservés tels quels dans le réseau adjoint.

Considérons maintenant dans la branche  $k$  une source de courant  $I_{dk} = gU_l$  qui dépend de la tension aux bornes de la branche  $l$ ; on ajoute au réseau original une source de courant  $I_{sl} \equiv 0$  en parallèle sur cette dernière branche.

Les termes de la somme (5.23) qui sont relatifs à cette source  $I_{sl}$  et à la branche  $k$  sont les suivants :

$$\Delta U_k \Phi_k + \Delta U_l \Phi_l - \Delta I_{dk} \Psi_k - \Delta I_{sl} \Psi_l$$

Comme on a au premier ordre

$$\Delta I_{dk} = \Delta g \cdot U_l + g \cdot \Delta U_l$$

et que  $\Delta I_{sl} \equiv 0$ , il subsiste :

$$\Delta U_k \Phi_k + (\Phi_l - g\Psi_k)\Delta U_l - \Delta g U_l \Psi_k$$

Afin d'éliminer les termes en  $\Delta U_k$  et en  $\Delta U_l$  on posera  $\Phi_k = 0$  et  $\Phi_l = g\Psi_k$ : on prévoit donc dans la branche  $l$  du réseau adjoint une source de courant commandée par la tension aux bornes de la branche  $k$ : ceci revient à intervertir dans le réseau adjoint le rôle des branches  $k$  et  $l$  (fig. 5.19).

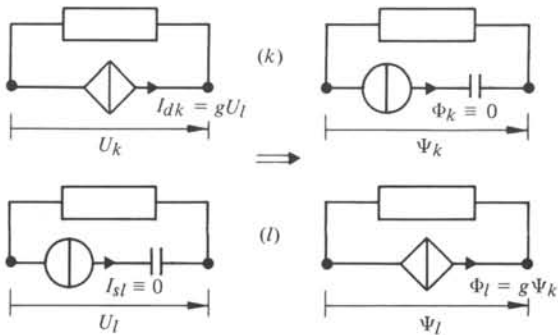


Fig. 5.19

Il ne subsiste finalement que le terme  $-\Delta g \cdot U_l \Psi_k$ .

La même démarche peut être suivie pour une source de tension commandée par un courant, pour un transformateur, pour un gyrateur. Le tableau 5.20 donne pour chaque type d'élément la relation qui le définit, celle qui définit l'élément à placer dans la ou les branches homologues du réseau adjoint, le coefficient  $K_\alpha$  du terme qui subsiste dans la somme (5.23) et enfin la perturbation  $\Delta P_\alpha$  subie par le paramètre qui caractérise l'élément.

#### 5.3.4. Calcul des sensibilités

Considérons à titre d'exemple la fonction de réponse  $H = U_l/I_{sk}$ ; on peut admettre que la tension  $U_l$  est mesurée aux bornes d'une source de courant  $I_{sl} \equiv 0$ .



Tableau 5.20

Relations de définition				
Eléments	Réseau original	Réseau adjoint	$K$	$\Delta P_\alpha$
Résistance	$U = RI$	$\Psi = R\Phi$	$I\Phi$	$\Delta R$
Capacité	$I = j\omega CU$	$\Phi = j\omega C\Psi$	$-j\omega C\Phi$	$\Delta C$
Inductance	$U = j\omega LI$	$\Psi = j\omega L\Phi$	$+j\omega I\Phi$	$\Delta L$
Source de courant dépendant d'une tension	$I_2 = gU_1$ $I_1 = 0$	$\Phi_1 = g\Psi_2$ $\Phi_2 = 0$	} $-U_1\Psi_2$	$\Delta g$
Source de tension dépendant d'un courant	$U_2 = rI_2$ $U_1 = 0$	$\Psi_1 = r\Phi_2$ $\Psi_2 = 0$		
Transformateur idéal	$U_1 = nU_2$ $I_2 = -nI_1$	$\Psi_1 = n\Psi_2$ $\Phi_2 = -n\Phi_1$	} $U_2\Phi_1 + I_1\Psi_2$	$\Delta n$
Gyrateur	$U_1 = rI_2$ $U_2 = -rI_1$	$\Psi_1 = -r\Phi_2$ $\Psi_2 = r\Phi_1$		

A la source indépendante  $I_{sk}$  on fait correspondre dans le réseau adjoint une source de courant  $\Phi_k \equiv 0$  (fig. 5.21).

Les éléments du réseau adjoint sont choisis comme indiqué au tableau 5.20; la somme (5.23) devient :

$$\sum_{\alpha=1}^b K_\alpha \Delta P_\alpha + \Delta U_k \Phi_k + \Delta U_l \Phi_l - \Delta I_{sk} \Psi_k - \Delta I_{sl} \Psi_l = 0$$

Mais  $I_{sk}$  est une source indépendante et  $\Delta I_{sk} = 0$ ; de plus,  $\Phi_k = 0$  et  $\Delta I_{sl} \equiv 0$ ; si enfin on pose  $\Phi_l = 1$ , il vient

$$\Delta U_l = - \sum_{\alpha=1}^b K_\alpha \Delta P_\alpha \tag{5.24}$$

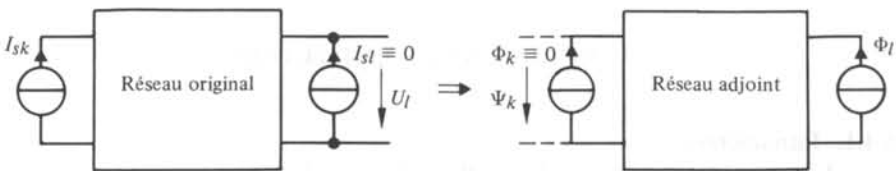


Fig. 5.21

Les expressions des  $K_\alpha$  contiennent les tensions et courants du réseau original excité par la source  $I_{sk}$ , ainsi que ceux du réseau adjoint excité par la seule source  $\Phi_l = 1$ ; une seule analyse des deux réseaux permet donc d'accéder à la valeur des sensibilités de la fonction de réponse par rapport à tous les paramètres  $P_\alpha$  :

$$S(H, P_\alpha) = (dH/dP_\alpha)(P_\alpha/H) = (dU_l/dP_\alpha)(P_\alpha/U_l) \tag{5.25}$$

( $\alpha = 1, 2, \dots, b$ )

### 5.3.5. Exemple

Dans le réseau de la figure 5.22 on considère la fonction de réponse  $H = U_6 / I_{s1}$ ; le réseau adjoint est représenté à la figure 5.23.

On s'intéresse à la sensibilité de la réponse en régime sinusoïdal; l'analyse des deux réseaux fournit les courants et les tensions de branches; on a ensuite, d'après (5.24) :

$$\Delta U_6 = - [I_1 \Phi_1 \Delta R_1 + I_2 \Phi_2 \Delta R_2 + I_4 \Phi_4 \Delta R_4 + I_5 \Phi_5 \Delta R_5] + j\omega U_3 \Psi_3 \Delta C_3 + U_2 \Psi_4 \Delta g$$

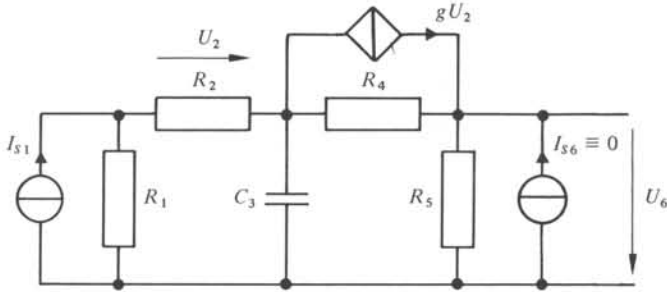


Fig. 5.22

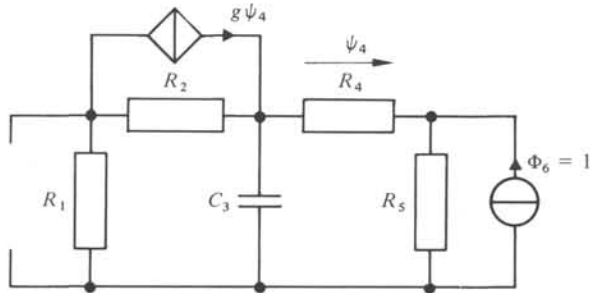


Fig. 5.23

## 5.4. MÉTHODES DE SUBSTITUTION

### 5.4.1. Introduction

Lorsque l'on connecte un réseau ( $R$ ) quelconque à un bipôle ( $B$ ) de complexité arbitraire contenant un nombre quelconque de sources indépendantes, il est intéressant, pour déterminer le courant qui va être échangé, de pouvoir substituer à ce bipôle une source unique en série avec une impédance (fig. 5.24); on dispose pour cela du théorème suivant.

### 5.4.2. Théorème de Thévenin

Tout bipôle linéaire contenant des éléments passifs et des sources indépendantes est équivalent à une source de tension unique  $E$  en série avec une impédance  $Z$ ; la tension

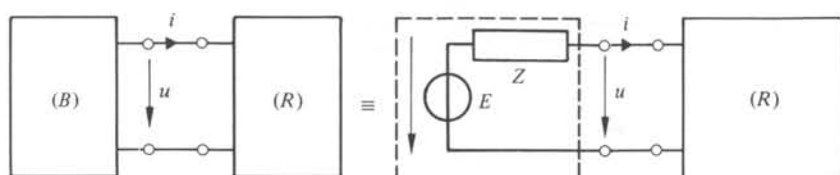


Fig. 5.24

$E$  est égale à la tension à vide aux bornes du bipôle et l'impédance  $Z$  est égale à l'impédance vue des bornes du bipôle dont les sources ont été annulées.

### 5.4.3. Commentaires

Si l'on exige que l'équivalence garantie par le théorème soit assurée pour un courant  $i$  de forme quelconque, il faut utiliser le formalisme de la transformation de Laplace et l'impédance  $Z$ , tout comme la tension  $E$  sont des fonctions de  $p$ ; parfois on ne s'intéresse qu'à l'équivalence des fonctionnements en régime sinusoïdal :  $E$  et  $Z$  dépendent alors de  $j\omega$ . Mathématiquement ceci revient à exiger que l'équivalence soit valable soit en tout point du plan  $p$ , soit simplement le long de l'axe imaginaire.

Par l'expression "annuler les sources" il faut comprendre que l'on court-circuite les sources de tension et que l'on ouvre les sources de courant.

### 5.4.4. Démonstration

Un bipôle ( $B$ ) constitué par des éléments passifs et des sources indépendantes est connecté à l'instant  $t = 0$  à un bipôle ( $R$ ) supposé passif et dans l'état quiescent (fig. 5.25). Tant que l'interrupteur  $S$  est ouvert, les tensions aux bornes des bipôles valent respectivement  $u_1(t) = u_{10}(t)$  (tension à vide) et  $u_2(t) = 0$ ; la tension aux bornes de  $S$  vaut  $u = u_1$ . La fermeture de l'interrupteur peut être simulée en lui substituant deux sources de tension connectées en série, de même amplitude mais de sens opposé (fig. 5.26) :

$$u_A(t) = u_B(t) = u_{10}(t)$$

Par application de la propriété de superposition, on peut dire que le courant  $i$  résulte de l'action conjuguée de la source  $u_A$  et des sources internes de ( $B$ ) (fig. 5.27) superposée à celle de la source unique  $u_B$  (fig. 5.28); or il est clair que la première excitation est équivalente au fonctionnement en circuit ouvert  $u_A = u_{10}$ ,  $i \equiv 0$ ; le cou-

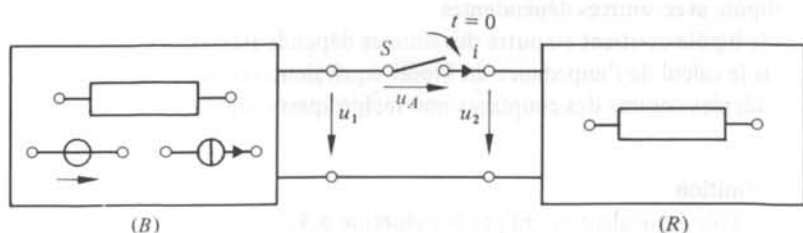


Fig. 5.25

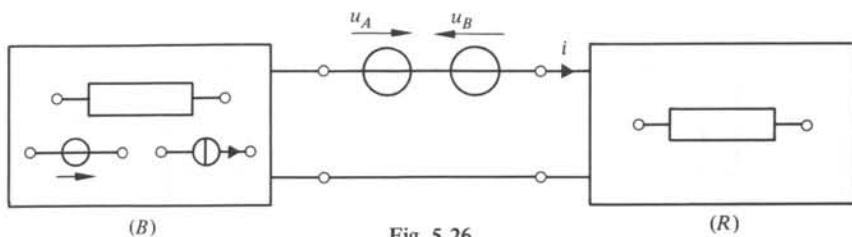


Fig. 5.26

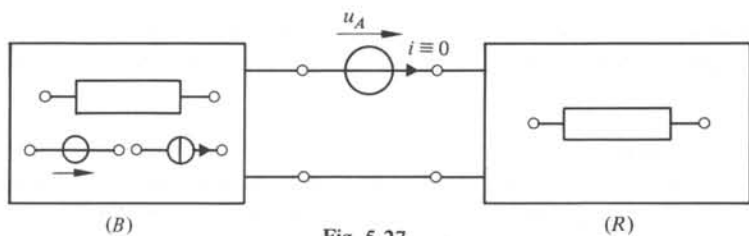


Fig. 5.27

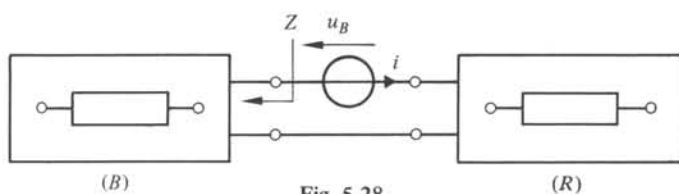


Fig. 5.28

rant  $i$  résulte donc uniquement de l'action de la source  $u_B = u_{10}$  en série avec le bipôle  $(B)$  dans lequel on a annulé les sources; les conditions initiales, équivalentes à des sources fictives doivent aussi être annulées.

Si le réseau  $(R)$  contient lui aussi des sources, ou bien s'il n'est pas dans l'état quiescent, il existe à ses bornes une tension à vide  $u_{20}(t)$  et tant que  $S$  est ouvert, on a  $u = u_{10} - u_{20}$ . Il suffit dans la démonstration de poser  $u_A = u_B = u_{10} - u_{20}$ , et d'associer la composante  $u_{10}$  de  $u_B$  au bipôle  $(B)$ , tandis que  $u_{20}$  est associée au bipôle  $(R)$  pour définir les bipôles équivalents.

Enfin, par souci de généralité la démonstration a été faite pour un fonctionnement transitoire : sa validité est bien sûr assurée dans le cas particulier du régime sinusoïdal.

#### 5.4.5. Bipôle avec sources dépendantes

Si le bipôle contient en outre des sources dépendantes, elles doivent être maintenues pour le calcul de l'impédance du bipôle équivalent; on sait en effet qu'elles peuvent être considérées comme des couplages non réciproques entre branches (§ 4.6.2 et 4.6.5).

#### 5.4.6. Définition

Le bipôle équivalent défini par le théorème 5.4.2 et dont la structure est précisée en 5.4.3 et en 5.4.5 est appelé *bipôle équivalent de Thévenin*.

5.4.7. Exemple

Un bipôle est constitué par la mise en parallèle de  $N$  sources de tension  $E_k$  en série avec des résistances  $R_k$  (fig. 5.29).

A vide, la somme des courants fournis par les sources est nulle :

$$\sum_{k=1}^N I_k = \sum_{k=1}^N (U_0 - E_k)R_k^{-1} = 0$$

et on en déduit la tension à vide :

$$E = U_0 = \frac{\sum_{k=1}^N R_k^{-1}E_k}{\sum_{k=1}^N R_k^{-1}}$$

Quant à l'impédance vue des bornes  $11'$  après annulation des sources, elle vaut

$$\left( \sum_k R_k^{-1} \right)^{-1}.$$

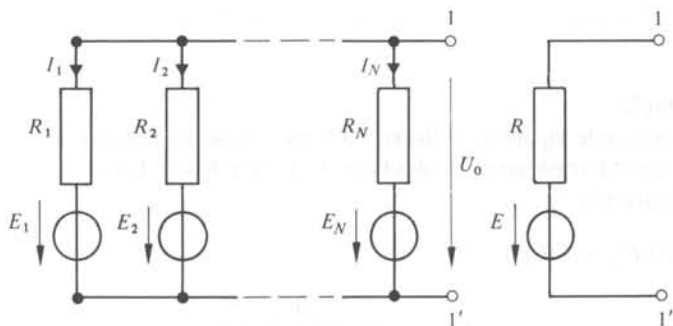


Fig. 5.29

5.4.8. Théorème de Norton

Le théorème de Norton est le dual de celui de Thévenin; il affirme que tout bipôle linéaire contenant des sources indépendantes et dépendantes est équivalent à une source de courant unique  $I_s$  en parallèle avec une admittance  $Y$  (fig. 5.30). La source  $I_s$  est égale au courant  $I_{cc}$  délivré par le bipôle sur un court-circuit et l'admittance  $Y$  est celle vue des bornes du bipôle dans lequel on a annulé les sources indépendantes (fig. 5.31).

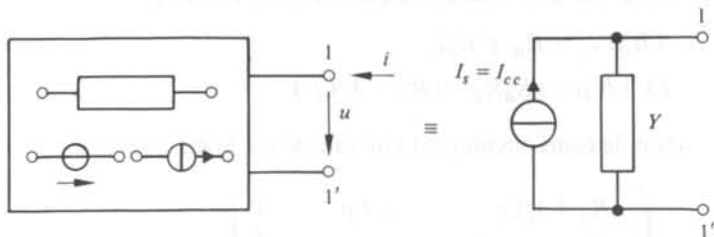


Fig. 5.30

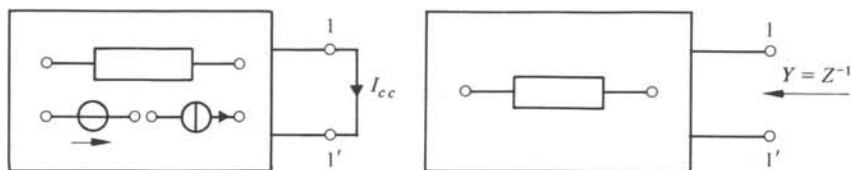


Fig. 5.31

### 5.4.9. Définition

Le bipôle équivalent défini par le théorème 5.4.8 est appelé *bipôle équivalent de Norton*.

### 5.4.10. Commentaires

Il est clair que les bipôles équivalents de Thévenin et de Norton sont équivalents entre eux; on peut d'ailleurs passer de l'un à l'autre par la transformation d'une source de tension en une source de courant ou réciproquement (cf § 4.4.6 et 4.5.6).

### 5.4.11. Exemple

On considère le bipôle de la figure 5.32; on va calculer la tension à vide, le courant de court-circuit et l'impédance vue des bornes 11' avec  $E = 0$ . La source  $E$  fournit un courant  $I_1$  donné par :

$$I_1 = E / (R_a + 1/Cp)$$

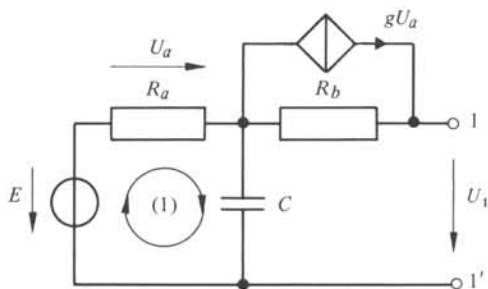


Fig. 5.32

La tension à vide aux bornes du bipôle vaut par conséquent :

$$\begin{aligned} U_{10} &= 1/Cp I_1 + R_b g R_a I_1 \\ &= E (1/Cp + gR_a R_b) / (R_a + 1/Cp) \end{aligned}$$

Le courant de court-circuit peut être calculé par la méthode des mailles (fig. 5.33) :

$$\begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_a + 1/Cp & -1/Cp \\ -1/Cp - gR_a R_b & R_b + 1/Cp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

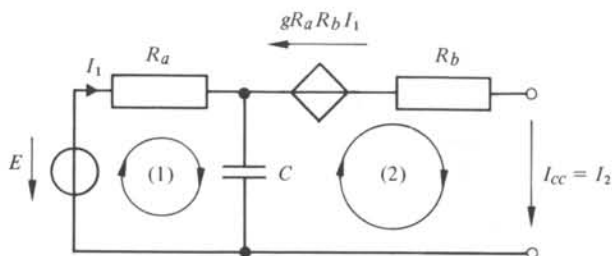


Fig. 5.33

On en déduit que

$$I_{cc} = I_2 = E (gR_a R_b + 1/Cp) \Delta^{-1}$$

avec

$$\Delta = R_a R_b + (R_a + R_b)/Cp - gR_a R_b / Cp$$

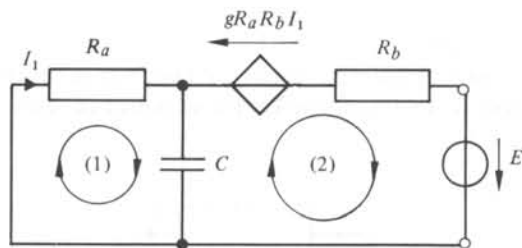


Fig. 5.34

L'impédance  $Z$  peut être calculée à partir de la figure 5.34; on peut écrire

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_a + 1/Cp & -1/Cp \\ -1/Cp - gR_a R_b & R_b + 1/Cp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

et il vient :

$$Z = E / (-I_2) = \Delta (gR_a R_b + 1/Cp)^{-1}$$

On dispose aussi de tous les éléments pour le bipôle équivalent de Thévenin et pour celui de Norton. On peut vérifier que l'on a bien  $U_{10} = I_{cc} Z$ .

## 5.5. MULTIPÔLES

### 5.5.1. Introduction

La structure des réseaux étudiés jusqu'à présent dans cet ouvrage est tout à fait quelconque; les éléments passifs, les sources dépendantes et les sources indépendantes sont interconnectés d'une façon arbitraire. Les sources indépendantes constituent l'ex-

citation — le signal au sens du chapitre 2 — et les méthodes d'analyse du chapitre 4 permettent de calculer la réponse, c'est-à-dire les courants et tensions dans toutes les branches du réseau.

Dans beaucoup de situations techniques on est amené à considérer un réseau constitué par des composants passifs et éventuellement des sources dépendantes comme un système qui permet de transférer une puissance ou une information depuis une ou plusieurs sources indépendantes vers une ou plusieurs utilisations, ou parfois même de provoquer un échange de puissances entre plusieurs sources. On peut citer le cas des réseaux de transport d'énergie électrique, celui des réseaux de télécommunications ou encore celui des filtres qui permettent de séparer les signaux.

Dans ces applications, l'intérêt se porte essentiellement sur les grandeurs électriques associées aux sources et aux utilisations plutôt que sur celles qui existent à l'intérieur du réseau. Les définitions qui suivent précisent celles des paragraphes 1.1.2 et 1.1.4.

### 5.5.2. Définitions

Un *réseau ouvert* ne comporte aucune source indépendante; en certains noeuds appelés *bornes*, des sources indépendantes ou d'autres réseaux ouverts peuvent être connectés. Un réseau ouvert est un *multi-pôle* dont la structure interne est quelconque et peut être très complexe.

Si les bornes sont associées par paires pour constituer des accès, on parle de  $2N$ -*pôle*, ou de *multiporte*; les courants et les tensions aux accès sont repérés comme indiqué à la figure 5.35.

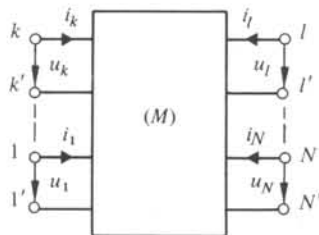


Fig. 5.35

Dans de très nombreux cas, toutes les bornes aux repères accentués sont connectées entre elles; on adopte la configuration représentée à la figure 5.36 et on parle de  $(N + 1)$ -*pôle*.

On définit enfin les vecteurs des tensions et des courants aux accès :

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_N)' \quad (5.26)$$

$$i = (i_1, i_2, \dots, i_N)' \quad (5.27)$$

### 5.5.3. Relations entre grandeurs aux accès

On désire établir les relations qui lient les  $2N$  grandeurs aux accès d'un multi-*porte* (M) pris dans l'état quiescent.

Soient  $b_i$  et  $n$  les nombres respectifs de branches et de noeuds de (M); si en cha-



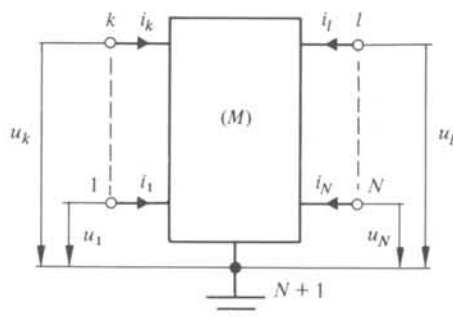


Fig. 5.36

cun des accès on connecte une source de tension ou de courant, on obtient un réseau fermé ( $M^+$ ), pour lequel ces nombres valent respectivement  $b = b_i + N$  et  $n$ .

On dispose par conséquent (cf § 4.3.3) de  $(b_i + N - n + 1)$  équations de mailles,  $(n - 1)$  équations de coupes et de  $b_i$  équations relatives aux éléments internes de  $(M)$ , soit au total  $(2b_i + N)$  équations indépendantes entre  $2b_i + 2N$  variables (tensions et courants).

Après élimination des  $2b_i$  variables internes, il subsiste, entre les  $2N$  variables aux accès,  $N$  relations que l'on peut écrire sous la forme

$$AU = BI \quad (5.28)$$

$U$  et  $I$  sont les transformées des vecteurs (5.26) et (5.27);  $A$  et  $B$  sont des matrices polynomiales d'ordre  $N$ .

On trouvera une discussion approfondie du processus d'élimination dans [12]; le résultat essentiel est que les matrices  $A$  et  $B$  ne sont pas nécessairement de rang  $N$ .

Lorsque la matrice  $A$  est de rang  $N$ , on peut écrire :

$$U = A^{-1}BI = ZI \quad (5.29)$$

De même, lorsque la matrice  $B$  est de rang  $N$ , on peut écrire :

$$I = B^{-1}AU = YU \quad (5.30)$$

#### 5.5.4. Définitions

La matrice  $Z$  est appelée *matrice d'impédances* du multiporte et la matrice  $Y$  est appelée *matrice d'admittances*; ces deux matrices sont désignées sous le terme générique de *matrices d'immittances*.

#### 5.5.5. Commentaires

L'indépendance des courants aux accès est une condition nécessaire pour l'existence de la matrice  $Z$ ; en effet, l'existence de relations linéaires entre ces courants permet d'affirmer qu'un certain nombre d'équations du système (5.28) sont de la forme

$$KI = 0$$

ce qui implique la présence de lignes identiquement nulles dans la matrice  $A$  : celle-ci ne serait donc pas de rang  $N$ .

D'une manière duale l'indépendance des tensions aux accès est une condition nécessaire à l'existence de la matrice d'admittances.

Dans ce qui va suivre, on admettra implicitement l'existence des deux matrices  $Z$  et  $Y$ .

### 5.5.6. Calcul de la matrice d'impédances

Le calcul de la matrice d'impédances d'un multipôle peut être effectué par la méthode des courants indépendants. A cet effet on connecte une source de tension en chaque accès du multipôle ( $M$ ) pris dans l'état quiescent et on définit un ensemble de mailles indépendantes de telle façon que chacune des  $N$  premières emprunte un accès et un seul; un tel choix est possible puisque l'on postule l'existence de la matrice  $Z$  qui implique l'indépendance des courants aux accès.

Le système des équations de mailles de ( $M^+$ ) peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} E_A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{AA} & Z_{AB} \\ Z_{BA} & Z_{BB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

où  $E_A$  et  $I_A$  coïncident respectivement avec le vecteur des tensions aux accès  $U$  et le vecteur des courants aux accès  $I$ ; le système a été partitionné de façon à préparer l'élimination des courants de mailles internes  $I_B$ .

Si l'on développe (5.31), il vient :

$$\begin{aligned} U &= Z_{AA}I + Z_{AB}I_B \\ 0 &= Z_{BA}I + Z_{BB}I_B \end{aligned}$$

et si on peut inverser la sous-matrice  $Z_{BB}$ , on obtient :

$$U = [Z_{AA} - Z_{AB}Z_{BB}^{-1}Z_{BA}]I \quad (5.32)$$

soit enfin :

$$Z = Z_{AA} - Z_{AB}Z_{BB}^{-1}Z_{BA}$$

Cette méthode exige l'inversion d'une matrice dont l'ordre est égal au nombre de mailles internes de ( $M$ ).

### 5.5.7. Définition des éléments de la matrice d'impédances

D'après (5.29), la tension aux bornes de l'accès  $k$  peut s'écrire :

$$U_k = \sum_{l=1}^N Z_{kl}I_l \quad (5.33)$$

Dans ce développement le coefficient  $Z_{kl}$  ( $k \neq l$ ) est appelé *impédance de transfert à circuit ouvert de l'accès  $l$  vers l'accès  $k$* ; on a en effet :

$$Z_{kl} = U_k/I_l \quad I_\alpha = 0, \alpha \neq l \quad (5.34)$$

L'impédance de transfert  $Z_{kl}$  est égale au rapport de la tension qui apparaît aux bornes de l'accès  $k$  au courant injecté dans l'accès  $l$  quand tous les accès de  $M$  excepté l'accès  $l$  sont ouverts.

On sait qu'un réseau  $(R, L, C)$  avec transformateurs idéaux et sans sources dépendantes ni gyrateurs est réciproque (§ 5.2.4); on retrouve cette propriété pour les multipôles qui possèdent une matrice  $Z$  : en effet la symétrie des sous-matrices de  $Z_m$  dans (5.31) entraîne celle de  $Z$  par (5.32) :  $Z_{kl} = Z_{lk}$ .

La présence de gyrateurs ou de sources dépendantes dans  $(M)$  entraîne généralement la dissymétrie de la matrice  $Z$ .

Le coefficient  $Z_{kk}$  représente l'impédance vue de l'accès  $k$  lorsque tous les autres accès sont ouverts :

$$Z_{kk} = U_k/I_k \quad I_\alpha = 0, \alpha \neq k \quad (5.35)$$

On l'appelle *impédance d'entrée à circuit ouvert*.

### 5.5.8. Exemple

Soit le multipôle représenté à la figure 5.37. Ayant connecté des sources et défini un système de mailles comme indiqué au paragraphe 5.5.6, il vient :

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + (2Cp)^{-1} & 0 & 0 & -(2Cp)^{-1} \\ 0 & R_2 + (2Cp)^{-1} & (2Cp)^{-1} & (2Cp)^{-1} \\ 0 & (2Cp)^{-1} & R_3 + (2Cp)^{-1} & (2Cp)^{-1} \\ -(2Cp)^{-1} & (2Cp)^{-1} & (2Cp)^{-1} & Lp + (Cp)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$Z = \begin{pmatrix} R_1 + (2Cp)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & R_2 + (2Cp)^{-1} & (2Cp)^{-1} \\ 0 & (2Cp)^{-1} & R_3 + (2Cp)^{-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -(2Cp)^{-1} \\ (2Cp)^{-1} \\ (2Cp)^{-1} \end{pmatrix} \cdot [Lp + (Cp)^{-1}]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -(2Cp)^{-1} & (2Cp)^{-1} & (2Cp)^{-1} \end{pmatrix}$$

Si l'on pose :

$$Z_0 = (2Cp)^{-2} [Lp + (Cp)^{-1}]^{-1} = [4Cp(LCp^2 + 1)]^{-1}$$

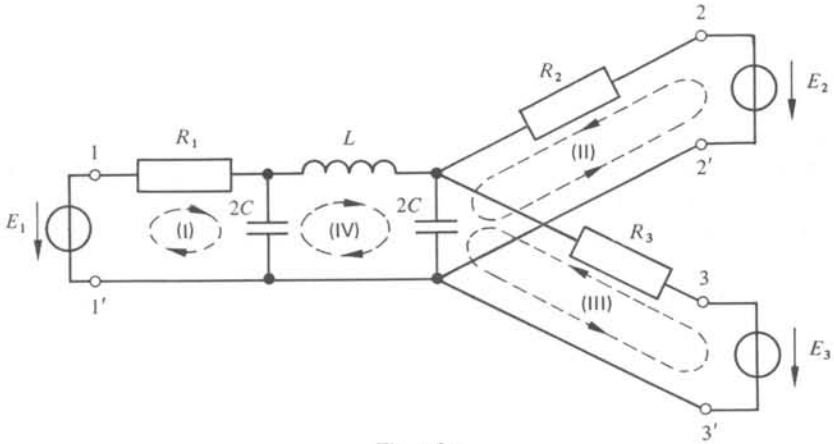


Fig. 5.37

il vient :

$$Z = \begin{pmatrix} R_1 + (2Cp)^{-1} - Z_0 & Z_0 & Z_0 \\ Z_0 & R_2 + (2Cp)^{-1} - Z_0 & (2Cp)^{-1} - Z_0 \\ Z_0 & (2Cp)^{-1} - Z_0 & R_3 + (2Cp)^{-1} - Z_0 \end{pmatrix}$$

### 5.5.9. Calcul de la matrice d'admittances

La matrice  $Y$  peut être obtenue par inversion de la matrice  $Z$ ; cependant dans le cas d'un  $(N + 1)$ -pôle, il peut être avantageux d'utiliser la méthode des potentiels indépendants.

Un injecteur de courant (cf § 4.5.8) étant connecté en chacune des bornes,

il vient :

$$\begin{pmatrix} I_A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{AA} & Y_{AB} \\ Y_{BA} & Y_{BB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

avec  $I_A = I$  et  $V_A = U$ .

Après élimination des potentiels des noeuds internes on obtient :

$$Y = Y_{AA} - Y_{AB} Y_{BB}^{-1} Y_{BA} \quad (5.37)$$

Cette méthode exige l'inversion d'une matrice dont l'ordre est égal au nombre de noeuds internes de  $(M)$ .

### 5.5.10. Définition des éléments de la matrice d'admittances

D'après (5.30), le courant dans l'accès  $k$  peut s'écrire :

$$I_k = \sum_{l=1}^N Y_{kl} U_l \quad (5.38)$$

Dans ce développement le coefficient  $Y_{kl}(k \neq l)$  est appelé *admittance de transfert en court-circuit de l'accès  $l$  vers l'accès  $k$* ; on a en effet :

$$Y_{kl} = I_k/U_l \quad U_\alpha = 0, \alpha \neq l \quad (5.39)$$

L'admittance de transfert  $Y_{kl}$  est égale au rapport du courant dans l'accès  $k$  à la tension aux bornes de l'accès  $l$  quand tous les accès de  $(M)$  excepté l'accès  $l$  sont court-circuités.

La matrice d'admittances d'un multipôle  $(R, L, C)$  avec transformateurs idéaux est symétrique ; la présence de sources dépendantes ou de gyrateurs entraîne généralement la dissymétrie :  $Y_{kl} \neq Y_{lk}$ .

D'autre part,  $Y_{kk}$  représente l'admittance vue de l'accès  $k$  lorsque tous les autres accès sont court-circuités :

$$Y_{kk} = I_k/U_k \quad U_\alpha = 0, \alpha \neq k \quad (5.40)$$

On l'appelle *admittance d'entrée en court-circuit*.

### 5.5.11. Commentaires

Il est important de remarquer que l'admittance de transfert  $Y_{kl}$  n'est pas égale à l'inverse de l'impédance de transfert  $Z_{kl}$  et que l'admittance de court-circuit  $Y_{kk}$  n'est pas égale à l'inverse de l'impédance à circuit ouvert  $Z_{kk}$ ; ceci est évidemment dû au fait que les impédances  $Z_{kl}$  sont définies avec tous les accès ouverts (sauf  $l$ ) tandis que les admittances  $Y_{kl}$  sont définies avec tous les accès en court-circuit (sauf  $l$ ).

### 5.5.12. Exemple

On considère le biporte de la figure 5.38 connecté à deux injecteurs de courant. Le système des équations nodales s'écrit :

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G + Cp & 0 & -G & -Cp \\ 0 & G + Cp & -G & -Cp \\ -G & -G & 2(G + Cp) & 0 \\ -Cp & -Cp & 0 & 2(G + Cp) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix}$$

On en déduit l'expression de la matrice d'admittances :

$$\begin{aligned} Y &= \begin{pmatrix} G + Cp & 0 \\ 0 & G + Cp \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} -G & -Cp \\ -G & -Cp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2(G + Cp) & 0 \\ 0 & 2(G + Cp) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -G & -G \\ -Cp & -Cp \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} G + Cp & 0 \\ 0 & G + Cp \end{pmatrix} - [2(G + Cp)]^{-1} \begin{pmatrix} G^2 + C^2 p^2 & G^2 + C^2 p^2 \\ G^2 + C^2 p^2 & G^2 + C^2 p^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

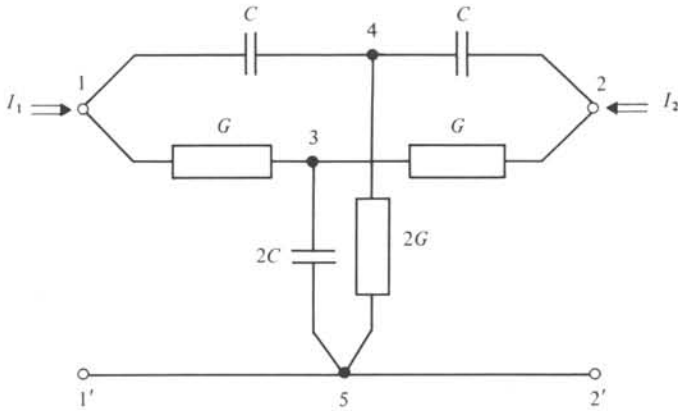


Fig. 5.38

Si l'on pose  $a = G/C = (RC)^{-1}$ , il vient

$$Y = C [2(p+a)]^{-1} \begin{pmatrix} p^2 + 4ap + a^2 & -(p^2 + a^2) \\ -(p^2 + a^2) & p^2 + 4ap + a^2 \end{pmatrix}$$

### 5.5.13. Définitions

Lorsque tous les noeuds d'un réseau sont des bornes, on peut le considérer comme un  $(N+1)$ -pôle sans noeuds internes ( $N+1 = n$ ); en l'absence d'inductances mutuelles sa matrice d'admittances coïncide avec la matrice des équations nodales (§ 4.5.7). On sait par ailleurs que la matrice des équations nodales affecte une forme particulière lorsque le noeud de référence est choisi hors du réseau (fig. 4.27); elle s'appelle alors *matrice d'admittances flottante ou indéfinie* (cf § 4.5.14).

Les considérations qui précèdent restent applicables à un  $(N+1)$ -pôle ( $M$ ) avec noeuds internes; si on choisit hors du réseau la nouvelle borne commune à tous les accès, ( $M$ ) devient un  $(N+2)$ -pôle (fig. 5.39) dont la matrice d'admittances est appelée *matrice d'admittances flottante ou indéfinie*  $Y_F$ .

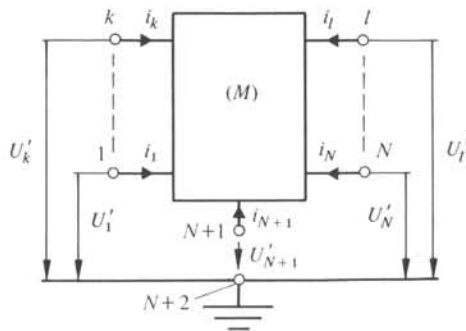


Fig. 5.39

**5.5.14. Calcul de la matrice d'admittances flottante**

On désire passer de la matrice d'admittances de  $(M)$  considéré comme un  $(N + 1)$ -pôle à sa matrice d'admittances flottante  $Y_F$ .

D'après la figure 5.39, on a

$$(I_1, \dots, I_N, I_{N+1})' = Y_F \cdot (U'_1, \dots, U'_N, U'_{N+1})'$$

La comparaison avec la figure 5.36 permet d'écrire :

$$U_k = U'_k - U'_{N+1} \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

Les courants  $I_1$  jusque  $I_N$  peuvent donc être exprimés comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} &= Y \begin{pmatrix} U'_1 \\ U'_2 \\ \vdots \\ U'_N \end{pmatrix} - Y \begin{pmatrix} U'_{N+1} \\ U'_{N+1} \\ \vdots \\ U'_{N+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1N} & -\sum_{\alpha=1}^N Y_{1\alpha} \\ Y_{21} & \cdots & Y_{2N} & -\sum_{\alpha=1}^N Y_{2\alpha} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ Y_{N1} & \cdots & Y_{NN} & -\sum_{\alpha=1}^N Y_{N\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U'_1 \\ U'_2 \\ \vdots \\ U'_N \\ U'_{N+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comme d'autre part la somme des courants qui pénètrent dans le multipôle est nulle, on a :

$$I_{N+1} = -\sum_{\alpha=1}^N I_{\alpha}$$

On obtient donc pour  $Y_F$  l'expression suivante :

$$Y_F = \begin{pmatrix} & & & -\sum_{\beta=1}^N Y_{1\beta} \\ & & & \vdots \\ & Y & & -\sum_{\beta=1}^N Y_{N\beta} \\ -\sum_{\alpha=1}^N Y_{\alpha 1} & \cdots & -\sum_{\alpha=1}^N Y_{\alpha N} & \sum_{\alpha, \beta=1}^N Y_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

Cette matrice symétrique d'ordre  $(N + 1)$  est manifestement singulière, la dernière ligne (colonne) étant égale à la somme des  $N$  premières lignes (colonnes) changée de signe.

### 5.5.15. Application : changement de borne de référence pour un $(N + 1)$ -pôle

Lorsque la borne  $Q$  est utilisée comme borne de référence commune aux accès en lieu et place de la borne  $(N + 1)$  (fig. 5.40), on a le système suivant pour les courants aux accès :

$$(I_1, \dots, I_{Q-1}, I_{Q+1}, \dots, I_{N+1})' = \tilde{Y}(\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_{Q-1}, \tilde{U}_{Q+1}, \dots, \tilde{U}_{N+1})' \quad (5.42)$$

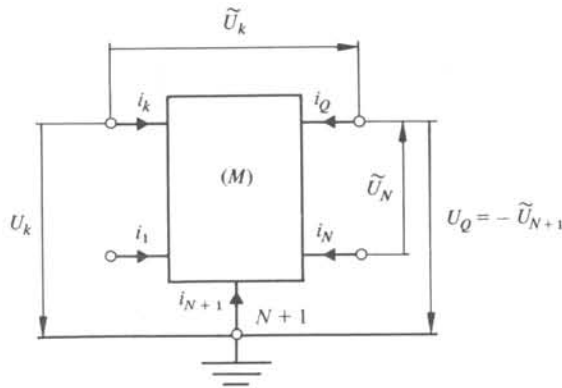


Fig. 5.40

On désire calculer la nouvelle matrice  $\tilde{Y}$  en fonction de l'ancienne  $Y$ ; il suffit pour cela de passer par l'intermédiaire de la matrice d'admittances flottante  $Y_F$  et de choisir la borne  $(N + 2)$  en coïncidence avec la borne  $Q$ ; il vient :

$$(I_1, \dots, I_{Q-1}, I_Q, I_{Q+1}, \dots, I_{N+1})' = Y_F(\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_{Q-1}, 0, \tilde{U}_{Q+1}, \dots, \tilde{U}_{N+1})' \quad (5.43)$$

Si l'on compare (5.42) et (5.43), on constate que l'on peut obtenir  $\tilde{Y}$  en supprimant la ligne et la colonne de rang  $Q$  dans  $Y_F$ ; si le changement de référence s'accompagne d'une renumérotation des accès, il faut aussi permuter judicieusement les lignes et les colonnes de  $Y_F$ .

### 5.5.16. Application : élimination des noeuds internes d'un multipôle sans transformateur idéal

Le calcul de l'immittance d'un bipôle non série parallèle tel que celui de la figure 3.6 ou d'une façon plus générale le calcul de la matrice d'immittances d'un multipôle sans transformateur idéal peut être effectué par élimination successive de tous les noeuds internes.

On considère un noeud interne  $A$  connecté à  $K$  noeuds ou bornes par des admittances  $Y_k$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) (fig. 5.41). Ces admittances constituent un réseau en forme d'étoile à  $K$  branches et  $(K + 1)$  noeuds.



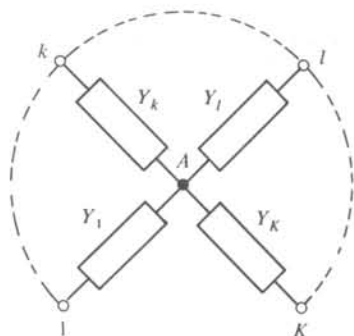


Fig. 5.41

Le noeud  $K$  étant pris comme référence, la matrice des équations nodales de ce réseau s'écrit (cf § 4.5.12) :

$$Y_n = \begin{pmatrix} (1) & Y_1 & 0 & \dots & 0 & -Y_1 \\ (2) & 0 & Y_2 & & & -Y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (K-1) & 0 & \dots & \dots & Y_{K-1} & -Y_{K-1} \\ (A) & -Y_1 & -Y_2 & \dots & -Y_{K-1} & \sum_{k=1}^K Y_k \end{pmatrix}$$

On peut également considérer ce réseau comme un  $(N+1)$ -pôle avec  $N+1=K$ ,  $K$  comme noeud de référence et  $A$  étant un noeud interne, la matrice d'admittances  $Y$  peut être obtenue à partir de  $Y_n$  comme exposé au paragraphe 5.5.9 et la formule (5.37) donne :

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & \dots & Y_{K-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -Y_1 \\ -Y_2 \\ \vdots \\ -Y_{K-1} \end{pmatrix} \left( \sum_{k=1}^K Y_k \right)^{-1} (-Y_1 - Y_2 \dots - Y_{K-1})$$

soit en effectuant :

$$Y_{kl} = -Y_k Y_l \cdot \left( \sum_{k=1}^K Y_k \right)^{-1} \quad (k \neq l) \quad (5.44)$$

$$Y_{kk} = Y_k - Y_k^2 \cdot \left( \sum_{k=1}^K Y_k \right)^{-1} \quad (5.45)$$

Eliminer le noeud  $A$ , c'est remplacer ce réseau par un  $(N+1)$ -pôle équivalent

dépourvu de noeud interne; si le noeud  $K$  reste le noeud de référence, la matrice des équations nodales de ce multipôle équivalent doit coïncider avec la matrice des admittances  $Y$ ; ceci n'est possible que si la condition

$$\sum_{l=1}^K Y_{kl} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, K)$$

est satisfaite (cf § 4.5.12) ce qui peut se vérifier à partir de (5.44) et (5.45).

Le multipôle équivalent à l'étoile de la figure 5.41 s'obtient donc en connectant entre chaque paire  $(k, l)$  de noeuds extrémités de l'étoile une admittance  $-Y_{kl}$  (fig. 5.42).

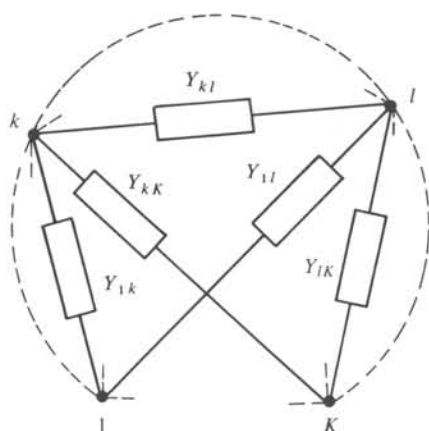


Fig. 5.42

### 5.5.17. Définitions

L'élimination d'un noeud interne est appelée *transformation étoile-polygone*; ce procédé de calcul est utilisé surtout en régime sinusoïdal. On remarquera que la transformation d'une étoile constituée par des éléments positifs de même espèce fournit des éléments qui sont tous de cette espèce et qui sont positifs; lorsque les éléments d'une

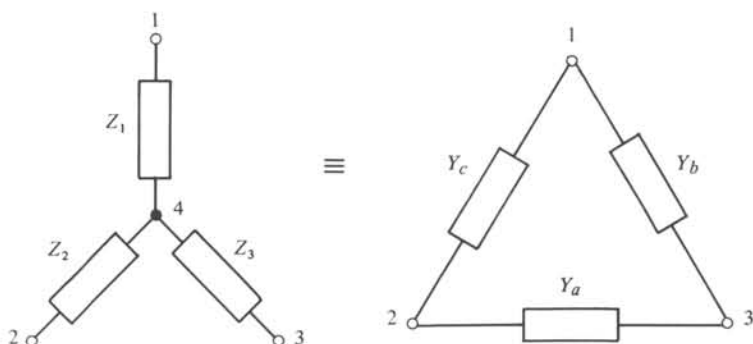


Fig. 5.43

étoile sont de nature quelconque, il peut apparaître des éléments négatifs dans le réseau transformé, ainsi qu'on le montrera sur un exemple.

Dans le cas particulier d'une étoile à trois branches, on parle de *transformation étoile-triangle* (fig. 5.43).

Si l'on pose

$$Z_E^2 = Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1 \quad (5.46)$$

$$Y_T^2 = Y_a Y_b + Y_b Y_c + Y_c Y_a \quad (5.47)$$

il vient :

$$Z_{1(2,3)} = Y_{a(b,c)} / Y_T^2 \quad (5.48)$$

$$Y_{a(b,c)} = Z_{1(2,3)} / Z_E^2 \quad (5.49)$$

### 5.5.18. Exemple

On désire transformer l'étoile de la figure 5.44. Il vient

$$Z_E^2 = 1 + (j\omega)^{-1} + j\omega = \frac{1 - \omega^2 + j\omega}{j\omega}$$

d'où

$$Y_a = G_a + jB_a = 1 / Z_E^2 = \frac{\omega^2 + j\omega(1 - \omega^2)}{1 - \omega^2 + \omega^4}$$

$$Y_b = G_b + jB_b = (j\omega)^{-1} / Z_E^2 = \frac{1 - \omega^2 - j\omega}{1 - \omega^2 + \omega^4}$$

$$Y_c = G_c + jB_c = j\omega / Z_E^2 = \frac{\omega^2(\omega^2 - 1) + j\omega^3}{1 - \omega^2 + \omega^4}$$

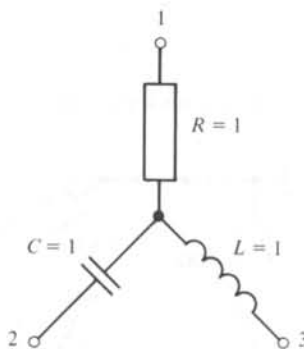


Fig. 5.44

On remarquera que l'on a :

$$G_a > 0, \quad \forall \omega$$

$$G_b < 0 \quad \omega > 1$$

$$G_c < 0 \quad \omega < 1$$

## 5.6. EXERCICES

5.6.1. Construire le dual de la figure 5.45.

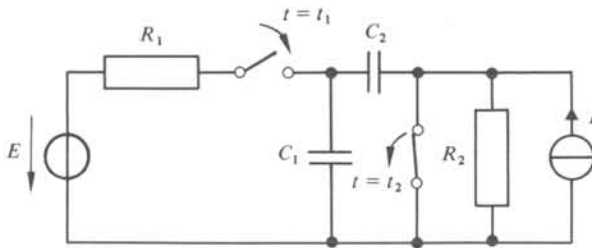


Fig. 5.45

5.6.2. Montrer que la fonction de réponse  $U_2/U_1$  d'un biporte réciproque et planaire est invariante pour une transformation par dualité si l'on intervertit les accès.

5.6.3. Déterminer le bipôle équivalent de Thévenin du bipôle de la figure 5.46.

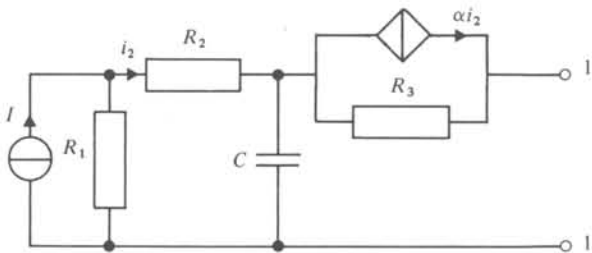


Fig. 5.46

5.6.4. Calculer le courant échangé par les bipôles de la figure 5.47.

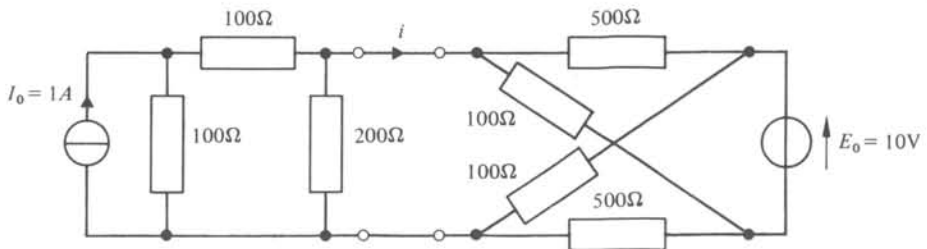


Fig. 5.47

5.6.5. Que devient la matrice d'impédances d'un multipôle lorsque l'on connecte :

- une résistance  $R_i$  en série avec chaque accès  $i$  ?
- une capacité  $C_i$  en parallèle sur chaque accès  $i$  ?

5.6.6. Calculer la matrice d'admittances du biporte de la figure 5.48 lorsque la borne 2 est borne commune aux accès définis par (1, 2) et (3, 2). Utiliser la méthode du paragraphe 5.5.15 et vérifier par une méthode directe.

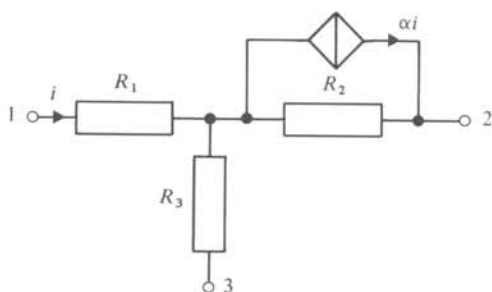


Fig. 5.48



## ÉTUDE DU QUADRIPOLE

## 6.1. OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES QUADRIPOLES

## 6.1.1. Introduction

La définition des quadripôles a été énoncée dès le paragraphe 1.1.2. Le quadripôle joue un rôle fondamental dans l'analyse de nombreux systèmes, spécialement en télécommunications ou en automatique.

Dans ce chapitre, nous étudierons quasi exclusivement le fonctionnement du quadripôle en biporte; c'est le plus souvent ainsi qu'il est utilisé. Pratiquement, le fonctionnement en biporte est assuré par le fait qu'un accès est fermé sur une charge et l'autre sur une source. Chacun de ces bipôles impose l'égalité des courants entrant et sortant pour l'accès auquel il est connecté. Il suffit du reste que deux bornes constituent un accès pour que les deux autres en constituent nécessairement un autre puisque la somme des quatre courants est identiquement nulle (§ 1.2.11).

La relation (5.28) montre que tout quadripôle fonctionnant en biporte peut être décrit par une relation matricielle du type

$$AU = BI \quad (6.1)$$

où  $A$  et  $B$  sont des matrices carrées d'ordre 2 dont les éléments sont des fractions rationnelles réelles de la variable complexe  $p$ , où  $U$  et  $I$  sont des vecteurs dont les éléments  $U_1$ ,  $U_2$  et  $I_1$ ,  $I_2$  sont les transformées de Laplace des tensions et courants. En régime alternatif,  $U$  et  $I$  représentent des vecteurs dont les éléments sont des phaseurs; les éléments de  $A$  et  $B$  sont des grandeurs complexes. Afin de préciser les notations, la représentation graphique du quadripôle a été rappelée à la figure 6.1.

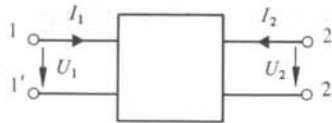


Fig. 6.1

## 6.1.2. Définitions

On appelle *entrée* l'accès 11' et *sortie* l'accès 22'. Ces définitions n'ont de sens que pour un fonctionnement en biporte.

Très souvent, le quadripôle est en fait un tripôle, en ce sens qu'une borne de l'en-

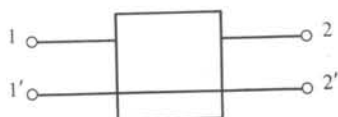


Fig. 6.2

trée et une borne de la sortie sont reliées par un court-circuit interne. On le représentera dans ce cas par la figure 6.2. Ces bornes communes sont le plus souvent mises à la terre. Le conducteur commun 1' 2' est appelé *masse*.

### 6.1.3. Matrice d'impédance

Si  $A$  est inversible, on peut écrire :

$$U = A^{-1}BI = ZI \quad (6.2)$$

c'est-à-dire que les équations liant les grandeurs aux accès sont

$$U_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \quad (6.3)$$

$$U_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \quad (6.4)$$

Si le quadripôle est réciproque,  $Z_{12} = Z_{21}$

Si la sortie est à circuit ouvert ( $I_2 = 0$ ), (6.3) se réduit à

$$U_1 = Z_{11}I_1 \quad (6.5)$$

et de même lorsque l'entrée est à circuit ouvert

$$U_2 = Z_{22}I_2 \quad (6.6)$$

### 6.1.4. Définitions

En fonction de ces résultats,  $Z_{11}$  est l'impédance d'entrée à circuit ouvert et  $Z_{22}$  l'impédance de sortie à circuit ouvert. De façon similaire  $Z_{12}$  et  $Z_{21}$  sont les impédances de transfert à circuit ouvert.

### 6.1.5. Exemple

Soit le quadripôle de la figure 6.3. On peut écrire :

$$U_1 = (Z_1 + Z_2)I_1 + Z_2I_2$$

$$U_2 = Z_2I_1 + Z_2I_2$$

### 6.1.6. Exemple

Soit le quadripôle de la figure 6.4 constitué d'un simple bipôle en shunt. On peut évidemment écrire

$$U_1 = ZI_1 + ZI_2$$

$$U_1 - U_2 = 0$$



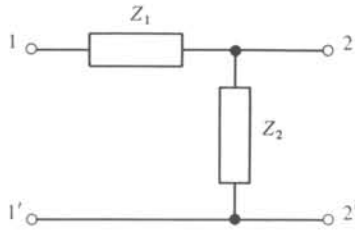


Fig. 6.3

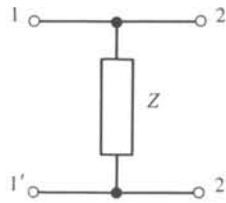


Fig. 6.4

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est inversible et la matrice d'impédance s'écrit :

$$Z = \begin{pmatrix} Z & Z \\ Z & Z \end{pmatrix}$$

### 6.1.7. Exemple

Le quadripôle constitué par un court-circuit entre 1 et 2 et un autre entre 1' et 2' a pour équations

$$U_1 - U_2 = 0$$

$$0 = I_1 + I_2$$

La matrice  $A$  n'est pas inversible et le quadripôle n'a pas de matrice d'impédance.

### 6.1.8. Matrice d'admittance

Si  $B$  est inversible, on peut écrire (6.1) sous la forme, déjà énoncée en (5.30)

$$B^{-1}AU = YU = I \quad (6.7)$$

En explicitant cette relation, on obtient :

$$I_1 = Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2 \quad (6.8)$$

$$I_2 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 \quad (6.9)$$

En comparant les équations (6.2) et (6.7), on obtient les relations :

$$Z = Y^{-1} \quad Y = Z^{-1} \quad (6.10)$$

qui généralisent en langage matriciel la relation élémentaire entre impédance et admittance établie au paragraphe 2.1.2. Il est clair que les matrices d'impédance et d'admittance sont des concepts duaux.

### 6.1.9. Définitions

Par un raisonnement analogue à celui du paragraphe 6.1.3,  $Y_{11}$  est l'*admittance d'entrée en court-circuit* et  $Y_{22}$  l'*admittance de sortie en court-circuit*. Les *admittances de transfert en court-circuit*  $Y_{12}$  et  $Y_{21}$  sont égales si le quadripôle est réciproque.

### 6.1.10. Exemple

Par la seconde formule (6.10), on peut tenter de calculer la matrice  $Y$  du quadripôle de la figure 6.4. Dans le cas particulier considéré, la matrice  $Z$  n'est pas inversible et le quadripôle considéré n'a pas de matrice  $Y$ .

### 6.1.11. Exemple

Soit le quadripôle de la figure 6.5. Sa matrice d'admittance est

$$\begin{pmatrix} Y & -Y \\ -Y & Y \end{pmatrix}$$

elle n'est pas inversible et le quadripôle n'a pas de matrice d'impédance.

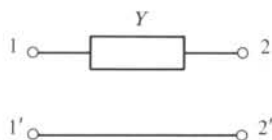


Fig. 6.5

### 6.1.12. Exemple

Le quadripôle du paragraphe 6.1.7 n'a ni matrice d'impédance, ni matrice d'admittance.

### 6.1.13. Mise en parallèle et en série des quadripôles

Si l'on dispose de deux quadripôles, on peut en général les connecter en *série* selon la figure 6.6 ou en *parallèle* selon la figure 6.7. Les réserves énoncées au paragraphe 1.2.2 restent évidemment applicables : par exemple, il n'est pas légitime de connecter en parallèle ou en série deux transformateurs idéaux dont les rapports de transformation diffèrent; en effet, on aboutit à un système d'équations incompatibles. Le lecteur le vérifiera à titre d'exercice.

Dans la mesure où les matrices d'impédance (d'admittance) existent et dans la

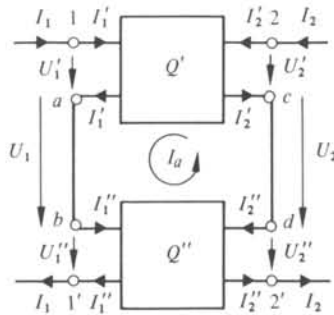


Fig. 6.6

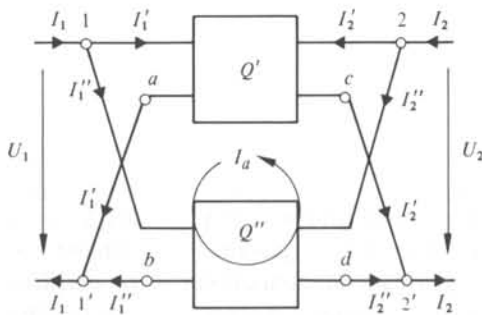


Fig. 6.7

mesure où la connexion en série (en parallèle) des quadripôles ne modifie pas le fonctionnement en biporte de chacun de ceux-ci, la matrice résultante est la somme des deux matrices partielles. La seconde réserve mentionnée ci-dessous sera élucidée au paragraphe 6.1.14. Supposons que cette condition est vérifiée, la démonstration de la règle est immédiate. Dans le cas de la mise en série, on a d'une part les équations des quadripôles

$$U' = Z'I' \quad U'' = Z''I'' \quad (6.11)$$

D'autre part, les contraintes de connexion se traduisent par les relations

$$U = U' + U'' \quad I = I' = I'' \quad (6.12)$$

Des relations (6.11) et (6.12) résulte la règle

$$U = ZI \quad Z = Z' + Z'' \quad (6.13)$$

Par un raisonnement dual, on prouve la règle similaire valable dans le cas de la mise en parallèle

$$I = YU \quad Y = Y' + Y'' \quad (6.14)$$

Par ailleurs, la généralisation à un nombre quelconque de quadripôles est évidente.

En fin de compte, on a en écriture matricielle les relations analogues à celles énoncées au paragraphe 3.1.3 pour les associations en série ou en parallèle de bipôles.

#### 6.1.14. Test de Brune

S'il est des quadripôles que l'on ne peut connecter parce qu'il en résulterait des systèmes incompatibles, il en est d'autres dont la connexion modifie le fonctionnement en biporte. Dès lors l'équation (6.1) n'a plus de sens puisqu'il y a quatre courants distincts : il n'y a plus de matrice  $Z$  ou  $Y$ . Ainsi, si l'on place en parallèle deux quadripôles du type de la figure 6.5, la règle d'addition des matrices  $Y$  est valide pourvu que l'on connecte ensemble les bornes  $1' 2'$  des deux quadripôles. Par contre si l'on connecte les bornes  $1' 2'$  de l'un aux bornes  $1 2$  de l'autre, on court-circuite les admittances  $Y$  de l'un et de l'autre et les matrices d'admittances de ceux-ci ne sont plus une description valable des quadripôles où  $Y$  a été remplacé par un court-circuit.

La raison fondamentale de cette modification de matrice réside dans un changement de la répartition des courants. Dès le paragraphe 1.1.4, on a insisté sur le fait qu'un accès était une paire de bornes par lesquelles entrait et sortait le même courant. Pour les quadripôles élémentaires tel le transformateur ou le gyrateur idéal, le courant pénétrant par la borne  $1$  est toujours égal à celui sortant par la borne  $1'$ . Ainsi que cela a été dit dès le paragraphe 5.5.2, pour un quadripôle quelconque dont deux bornes sont connectées à un bipôle et constituent de ce fait un accès, tel est toujours le cas parce que les connexions des bornes  $1 1'$  au quadripôle constituent une coupe. Par contre, le même quadripôle engagé dans une connexion série ou parallèle ne jouit plus de cette propriété, parce que les connexions considérées ne constituent plus une coupe par rapport au graphe de l'ensemble. Ainsi les répartitions de courant représentées aux figures 6.6 et 6.7 ne sont pas toujours respectées et ce n'est que lorsqu'elles le sont que l'on peut appliquer la règle d'addition. Le test de Brune, que nous allons décrire, permet de décider si cette condition est respectée.

Si cette condition n'est pas respectée, on peut considérer qu'elle résulte de la superposition, aux courants caractérisant le fonctionnement en biportes, d'un courant de circulation  $I_\alpha$  dans les boucles constituées par la connexion des deux quadripôles tel que cela est représenté aux figures 6.6 et 6.7. Considérons le cas de la connexion parallèle. Si, après avoir connecté  $a$  et  $b$  seulement, les tensions  $U_{ac}$  et  $U_{bd}$  sont égales, rien n'est changé lorsqu'on établit la connexion  $cd$ . La condition nécessaire et suffisante pour l'absence de courant de circulation est donc l'égalité de ces tensions.

Si l'on considère  $Q'$  isolément, la tension  $U_{ac}$  peut, par le principe de superposition, se calculer comme somme des tensions induites par  $U'_1$  et  $U'_2$ . Désignons par  $T'_1(p)$  et  $T'_2(p)$  les coefficients de transfert en tension des bornes  $11'$  et  $22'$  vers les bornes  $ac$ , c'est-à-dire les rapports de tensions  $U_{ac}/U_1$  ( $U_2 = 0$ ) et  $U_{ac}/U_2$  ( $U_1 = 0$ ). On a

$$U_{ac} = T'_1(p)U'_1 + T'_2(p)U'_2 \quad (6.15)$$

et, avec des notations analogues,

$$U_{bd} = T''_1(p)U''_1 + T''_2(p)U''_2 \quad (6.16)$$

La connexion en parallèle implique

$$U_1 = U'_1 = U''_1 \quad \text{et} \quad U_2 = U'_2 = U''_2$$

Dès lors,  $U_{ac} = U_{bd}$  quels que soient  $U_1$  et  $U_2$  ssi

$$T'_1(p) = T''_1(p) \quad (6.17)$$

$$T'_2(p) = T''_2(p) \quad (6.18)$$

La condition (6.17) revient à exiger l'identité de  $U_{ac}$  et  $U_{bd}$  lorsque  $U_2 = 0$ , c'est-à-dire l'existence d'une tension nulle entre les sorties court-circuitées des  $Q$  et  $Q'$  : cette condition est représentée à la figure 6.8. De même la condition (6.18) revient à vérifier la condition représentée à la figure 6.9.

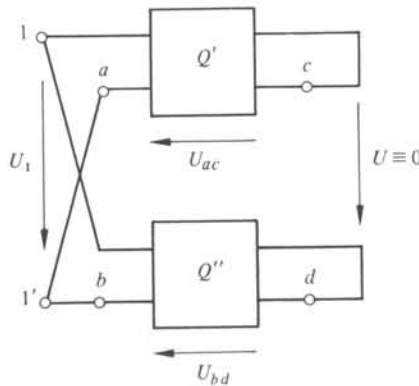


Fig. 6.8

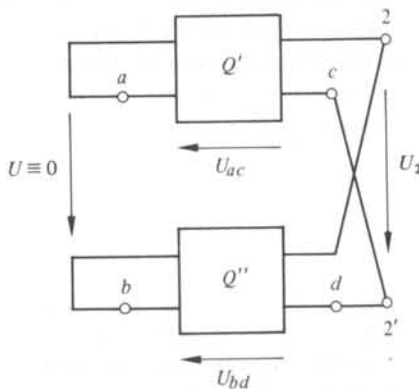


Fig. 6.9

Dans le cas de la connexion série, on arrive par un raisonnement dual aux conditions représentées aux figures 6.10 et 6.11. On peut donc résumer le test de Brune par la règle suivante.

La matrice d'impédances (d'admittances) de deux quadripôles mis en série (en parallèle) est la somme des matrices d'impédances (d'admittances) si sont nulles les tensions entre les deux entrées et les deux sorties des deux quadripôles mises séparément en circuit ouvert (en court-circuit).

Cette règle ne signifie pas qu'il soit interdit de mettre en parallèle ou en série des

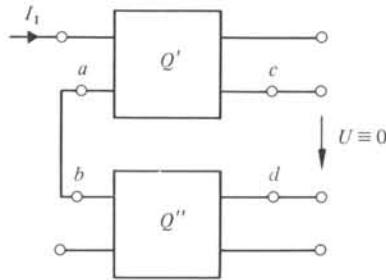


Fig. 6.10

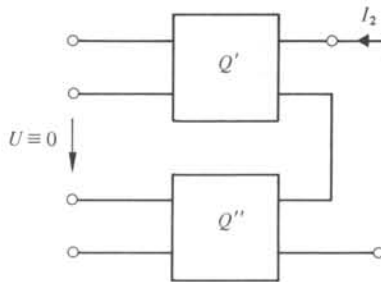


Fig. 6.11

quadripôles qui ne la vérifient pas. On peut opérer de la sorte avec deux transformateurs idéaux de même rapport bien que le test de Brune ne soit pas vérifié : d'ailleurs ces quadripôles n'ont ni matrice d'impédance ni matrice d'admittance.

Par ailleurs, en pratique d'autres règles doivent souvent être observées dont l'origine est de caractère économique, où l'on tient compte de la dissipation acceptable. Au volume X, on énonce par exemple les règles de mise en parallèle de transformateurs qui sont plus contraignantes.

### 6.1.15. Commentaire

Le fait de placer un court-circuit aux bornes de certaines branches n'est pas admissible en pratique. De façon plus générale, on désire, dans les problèmes de synthèse qui ne sont pas du ressort de cet ouvrage, que les matrices résultantes soient la somme des matrices partielles. Aussi, lorsque deux quadripôles ne vérifient pas le test de Brune, faut-il prendre une mesure palliant cette lacune. A la figure 6.12 il suffit de connecter un transformateur idéal de rapport un à l'entrée ou à la sortie d'un des deux quadripôles. Ces deux bornes constitueront automatiquement un accès. Si la répartition des courants à un accès d'un quadripôle est correcte, il en sera de même à l'autre accès de ce quadripôle. Enfin, on prouve en traçant une coupe englobant les deux entrées que la répartition des courants pour l'autre quadripôle correspond à un fonctionnement en biporte. Par ailleurs, il faut remarquer que la connexion de tripôles ne pose jamais de problème pourvu que l'on prenne garde à connecter ensemble les masses. Si les points  $a$  et  $c$ ,  $b$  et  $d$  sont au même potentiel par suite d'un court-circuit à l'intérieur des quadripôles, il est clair que  $U_{ac} = U_{bd} = U \equiv 0$ .

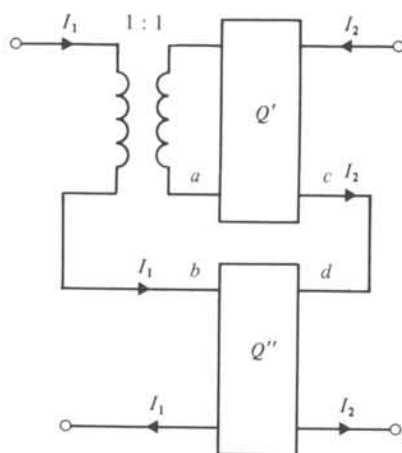


Fig. 6.12

### 6.1.16. Exemple

Soit à connecter en série les deux quadripôles de la figure 6.13 dont les matrices d'impédances valent respectivement

$$\begin{pmatrix} Z_a & Z_a \\ Z_a & Z_a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} Z_b & -Z_b \\ -Z_b & Z_b \end{pmatrix}$$

Si l'on connecte simplement 1' à 3 et 2' à 4, l'impédance  $Z_b$  est court-circuitée parce que ses bornes 3 et 4 sont reliées par le court-circuit 1' 2'. Le test de Brune de la figure 6.10 montre du reste que la tension entre 2' et 4 n'est pas nulle et que l'addition des matrices d'impédance n'est pas légitime.

Si l'on remplace les connexions croisées 3 4' et 3' 4 par un transformateur idéal de rapport 1 : -1, la connexion en série est possible et le quadripôle résultant représenté à la figure 6.14 a pour matrice  $Z$  la somme des matrices partielles.

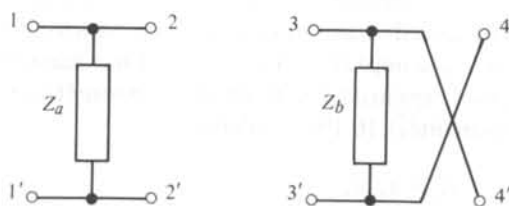


Fig. 6.13

### 6.1.17. Définition

Ainsi que nous l'avons constaté, un quadripôle peut n'avoir ni matrice d'impédance, ni matrice d'admittance. Ces quadripôles admettent au moins une matrice *hybride* c'est-à-dire correspondant à un système résolu par rapport à deux inconnues de nature

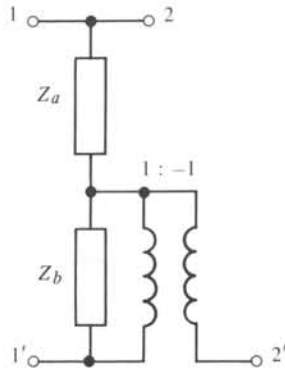


Fig. 6.14

différente, un courant et une tension, relatives à des accès différents. Par ailleurs, les matrices hybrides se prêtent particulièrement bien à la description des modèles linéaires de transistors.

### 6.1.18. Matrices hybrides

Si le système (6.1) est résolu par rapport à  $U_1$  et  $I_2$ , on a le système

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

Si ce système est résolu par rapport à  $U_2$  et  $I_1$ , on a le système

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

Contrairement aux matrices d'impédance et d'admittance, les éléments des matrices hybrides ne sont évidemment pas homogènes. Deux éléments n'ont pas de dimension et sont des coefficients de transfert en courant ou en tension. Les deux autres ont l'un la dimension d'une impédance, l'autre celui d'une admittance.

Ces éléments sont exprimables en fonction des paramètres  $Z$  et  $Y$ . Ainsi pour  $U_2 = 0$  (sortie court-circuitée), (6.19) se réduit à

$$U_1 = h_{11}I_1 \quad I_2 = h_{21}I_1 \quad (6.21)$$

De la première équation on déduit

$$h_{11} = Y_{11}^{-1} \quad (6.22)$$

et de la seconde

$$h_{21} = Y_{21}/Y_{11} \quad (6.23)$$



De façon analogue on peut établir des relations entre tous les éléments : nous n'entrerons pas dans les détails et tous les résultats seront rassemblés dans un tableau au paragraphe 6.1.25.

Remarquons cependant la valeur  $h_{12} = -Y_{12}/Y_{11}$ . En comparant avec (6.23), on en déduit la règle suivante : si le quadripôle est réciproque, ses matrices hybrides sont antisymétriques.

Enfin il est clair que l'addition de deux matrices hybrides correspond à la mise en série de deux accès et à la mise en parallèle de deux autres, pourvu que les quadripôles entrant dans la connexion vérifient le test de Brune correspondant. La figure 6.15 donne un exemple de ce test pour une connexion mixte où l'on additionne les matrices (6.19)

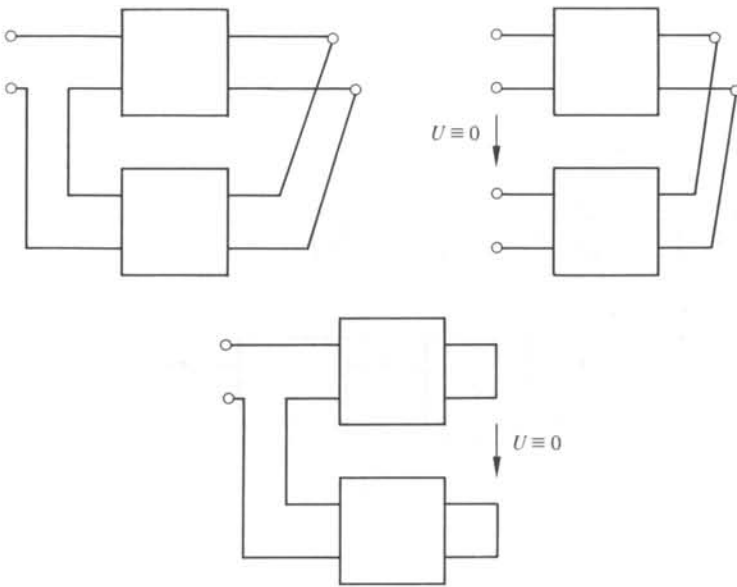


Fig. 6.15

### 6.1.19. Exemples

Le quadripôle de la figure 6.4 a pour paramètres hybrides

$$h_{11} = 0, h_{12} = 1, h_{21} = -1, h_{22} = Z^{-1}$$

Le quadripôle du paragraphe 6.1.7 a pour paramètres hybrides

$$h_{11} = h_{22} = 0, h_{12} = 1, h_{21} = -1$$

Le transformateur idéal n'a ni matrice d'admittance, ni matrice d'impédance. Ses paramètres hybrides sont

$$h_{11} = h_{22} = 0, h_{12} = n, h_{21} = -n$$

Le gyrateur idéal n'a pas de matrices hybrides des types (6.19) ou (6.20).

### 6.1.20. Définition.

Si les deux grandeurs indépendantes sont relatives au même accès, la matrice est appelée *matrice de chaîne*  $T$  (de transmission). On l'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

ou sous la forme

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ -I_1 \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

pour la matrice de chaîne  $t$ .

On remarquera l'inversion de signe d'un des courants. Ce choix permet d'obtenir aisément la matrice résultant d'une *mise en cascade* de deux quadripôles, c'est-à-dire de la connexion de l'entrée de l'un à la sortie de l'autre selon la figure 6.16. Grâce à ce choix de signe, il vient  $-I_2' = I_1''$ , et donc

$$\begin{pmatrix} U_1' \\ I_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2'' \\ -I_2'' \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

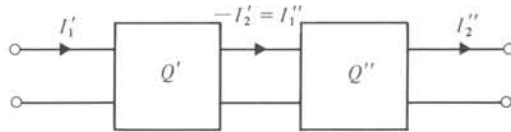


Fig. 6.16

### 6.1.21. Propriétés

Dès lors, on peut énoncer la règle : la matrice de chaîne de deux quadripôles en cascade est le produit des matrices de chaîne partielles. Comme la multiplication matricielle n'est pas une opération commutative, il faut prendre garde à l'ordre dans lequel les quadripôles sont connectés. L'emploi de la matrice (6.24) plutôt que celle de (6.25) permet avec les conventions habituelles de ranger les matrices dans le produit (6.26) et les quadripôles dans le schéma 6.16 de la même façon.

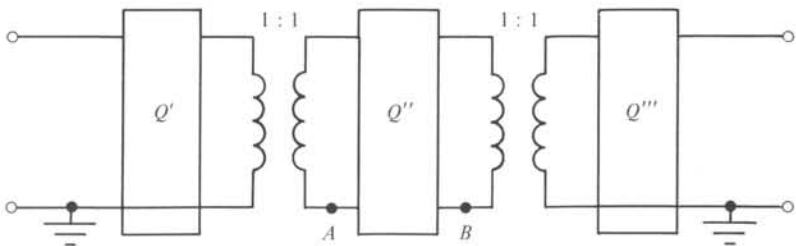


Fig. 6.17

Il n'y a pas de précautions à prendre pour assurer l'égalité des courants entrant et pénétrant dans chaque quadripôle, car malgré les connexions chaque accès demeure une coupe de l'ensemble du graphe. Si l'on insère parfois des transformateurs idéaux dans une cascade selon la figure 6.17, c'est pour éviter de court-circuiter les deux bornes  $A$  et  $B$  d'un quadripôle véritable  $Q''$  par l'intermédiaire des masses de deux tripôles  $Q'$  et  $Q'''$  mises toutes deux à la terre.

### 6.1.22. Propriété

Si le quadripôle est réciproque, on sait que les matrices  $Z$ ,  $Y$ ,  $h$  ou  $g$  ne disposent que de trois paramètres indépendants. Il doit en être de même pour  $T$ . Si le quadripôle est réciproque, on a l'égalité entre

$$I_2/U_1 (U_2 = 0) \text{ et } I_1/U_2 (U_1 = 0)$$

En posant successivement  $U_2$  et  $U_1$  égaux à zéro dans (6.24), on peut calculer ces deux rapports. En les égalant, on obtient

$$AD - BC = 1 \quad (6.27)$$

### 6.1.23. Exemple

Soient deux gyrateurs de résistances de gyration  $r_1$  et  $r_2$  placés en cascade. La matrice de chaîne du quadripôle résultant s'obtient comme résultat du produit

$$\begin{pmatrix} 0 & -r_1 \\ -1/r_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -r_2 \\ -1/r_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1/r_2 & 0 \\ 0 & r_2/r_1 \end{pmatrix}$$

On trouve bien la matrice de chaîne d'un transformateur idéal de rapport  $r_1/r_2$  ainsi que cela avait été démontré de façon élémentaire au paragraphe 1.3.7.

### 6.1.24. Relations entre les matrices

Jusqu'à présent nous avons introduit six matrices dont trois  $Y$ ,  $g$  et  $t$  sont les inverses de  $Z$ ,  $h$  et  $T$ . Les relations entre les éléments de ces matrices sont rassemblées dans le tableau 6.18.

### 6.1.25. Matrice indéfinie d'admittance

Considérons le circuit de la figure 6.19, constitué d'un tripôle et d'une quatrième borne coïncidant avec la masse. On suppose qu'il existe une matrice d'admittance indéfinie  $Y$  telle que

$$I = YU \quad (6.28)$$

où  $Y$  est une matrice carrée d'ordre 3 et où  $I$  et  $U$  sont des vecteurs à trois éléments.

Tableau 6.18

	Z		Y		h		g		T		t	
Z	Z <sub>11</sub>	Z <sub>12</sub>	$\frac{Y_{22}}{\Delta Y}$	$-\frac{Y_{12}}{\Delta Y}$	$\frac{\Delta h}{h_{22}}$	$\frac{h_{12}}{h_{22}}$	$\frac{1}{g_{11}}$	$-\frac{g_{12}}{g_{11}}$	$\frac{A}{C}$	$\frac{\Delta T}{C}$	$\frac{d}{c}$	$\frac{1}{c}$
	Z <sub>21</sub>	Z <sub>22</sub>	$-\frac{Y_{21}}{\Delta Y}$	$\frac{Y_{11}}{\Delta Y}$	$-\frac{h_{21}}{h_{22}}$	$\frac{1}{h_{22}}$	$\frac{g_{21}}{g_{11}}$	$\frac{\Delta g}{g_{11}}$	$\frac{1}{C}$	$\frac{D}{C}$	$\frac{\Delta t}{c}$	$\frac{a}{c}$
Y	$\frac{Z_{22}}{\Delta Z}$	$-\frac{Z_{12}}{\Delta Z}$	Y <sub>11</sub>	Y <sub>12</sub>	$\frac{1}{h_{11}}$	$-\frac{h_{12}}{h_{11}}$	$\frac{\Delta g}{g_{22}}$	$\frac{g_{12}}{g_{22}}$	$\frac{D}{B}$	$-\frac{\Delta T}{B}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{1}{b}$
	$-\frac{Z_{21}}{\Delta Z}$	$\frac{Z_{11}}{\Delta Z}$	Y <sub>21</sub>	Y <sub>22</sub>	$\frac{h_{21}}{h_{11}}$	$\frac{\Delta h}{h_{11}}$	$-\frac{g_{21}}{g_{22}}$	$\frac{1}{g_{22}}$	$-\frac{1}{B}$	$\frac{A}{B}$	$-\frac{\Delta t}{b}$	$\frac{d}{b}$
h	$\frac{\Delta Z}{Z_{22}}$	$\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Y_{11}}$	$-\frac{Y_{12}}{Y_{11}}$	h <sub>11</sub>	h <sub>12</sub>	$\frac{g_{22}}{\Delta g}$	$-\frac{g_{12}}{\Delta g}$	$\frac{B}{D}$	$\frac{\Delta T}{D}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{1}{a}$
	$-\frac{Z_{21}}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Z_{22}}$	$\frac{Y_{21}}{Y_{11}}$	$\frac{\Delta Y}{Y_{11}}$	h <sub>21</sub>	h <sub>22</sub>	$-\frac{g_{21}}{\Delta g}$	$\frac{g_{11}}{\Delta g}$	$-\frac{1}{D}$	$\frac{C}{D}$	$-\frac{\Delta t}{a}$	$\frac{c}{a}$
g	$\frac{1}{Z_{11}}$	$-\frac{Z_{12}}{Z_{11}}$	$\frac{\Delta Y}{Y_{22}}$	$\frac{Y_{12}}{Y_{22}}$	$\frac{h_{22}}{\Delta h}$	$-\frac{h_{12}}{\Delta h}$	g <sub>11</sub>	g <sub>12</sub>	$\frac{C}{A}$	$\frac{\Delta T}{A}$	$-\frac{c}{d}$	$-\frac{1}{d}$
	$\frac{Z_{21}}{Z_{11}}$	$\frac{\Delta Z}{Z_{11}}$	$-\frac{Y_{21}}{Y_{22}}$	$\frac{1}{Y_{22}}$	$-\frac{h_{21}}{\Delta h}$	$\frac{h_{11}}{\Delta h}$	g <sub>21</sub>	g <sub>22</sub>	$\frac{1}{A}$	$\frac{B}{A}$	$\frac{\Delta t}{d}$	$\frac{b}{d}$
T	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}}$	$\frac{\Delta Z}{Z_{21}}$	$-\frac{Y_{22}}{Y_{21}}$	$\frac{1}{Y_{21}}$	$-\frac{\Delta h}{h_{21}}$	$-\frac{h_{11}}{h_{21}}$	$\frac{1}{g_{21}}$	$\frac{g_{22}}{g_{21}}$	A	B	$\frac{d}{\Delta t}$	$\frac{b}{\Delta t}$
	$\frac{1}{Z_{21}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$-\frac{\Delta Y}{Y_{21}}$	$-\frac{Y_{11}}{Y_{21}}$	$-\frac{h_{22}}{h_{21}}$	$-\frac{1}{h_{21}}$	$\frac{g_{11}}{g_{21}}$	$\frac{\Delta g}{g_{21}}$	C	D	$\frac{c}{\Delta t}$	$\frac{a}{\Delta t}$
t	$\frac{Z_{22}}{Z_{12}}$	$\frac{\Delta Z}{Z_{12}}$	$-\frac{Y_{11}}{Y_{12}}$	$\frac{1}{Y_{12}}$	$\frac{1}{h_{12}}$	$\frac{h_{11}}{h_{12}}$	$-\frac{\Delta g}{g_{12}}$	$-\frac{g_{22}}{g_{12}}$	$\frac{D}{\Delta T}$	$\frac{B}{\Delta T}$	a	b
	$\frac{1}{Z_{12}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{12}}$	$-\frac{\Delta Y}{Y_{12}}$	$-\frac{Y_{22}}{Y_{12}}$	$\frac{h_{22}}{h_{12}}$	$\frac{\Delta h}{h_{12}}$	$-\frac{g_{11}}{g_{12}}$	$-\frac{1}{g_{12}}$	$\frac{C}{\Delta T}$	$\frac{A}{\Delta T}$	c	d

Les résultats du paragraphe 5.5.14 peuvent être résumés dans les formules

$$\sum_{j=1}^3 Y_{ji} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.29)$$

$$\sum_{i=1}^3 Y_{ji} = 0 \quad j = 1, 2, 3 \quad (6.30)$$

Les éléments de la matrice définie d'admittance, correspondant à un des trois quadripôles obtenus en connectant une des trois bornes à la masse, coïncident avec ceux de la matrice indéfinie. A titre d'exemple, si  $U_3 = 0$ , on supprime les troisièmes ligne et colonne de  $Y$  et on obtient les relations (6.8) et (6.9) à partir de (6.28).

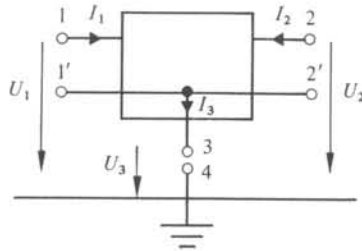


Fig. 6.19

Inversement, on peut grâce aux relations (6.29) et (6.30) établir la matrice indéfinie à partir de n'importe quelle matrice définie. Comme on dispose de six relations pour calculer cinq éléments, une de ces relations n'est pas indépendante des autres. On le prouvera à titre d'exercice.

### 6.1.26. Exemple

Le quadripôle de la figure 6.20 a pour matrice d'admittance :

$$Y = \begin{pmatrix} g_a + g_c & -g_c \\ -g_c - g & g_b + g_c \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

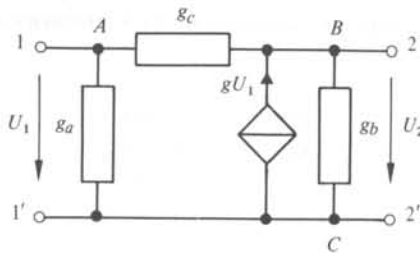


Fig. 6.20

On désire calculer la matrice  $\tilde{Y}$  lorsque les nouveaux accès sont repérés comme l'indique la figure 6.21 selon la méthode du paragraphe 5.5.15.

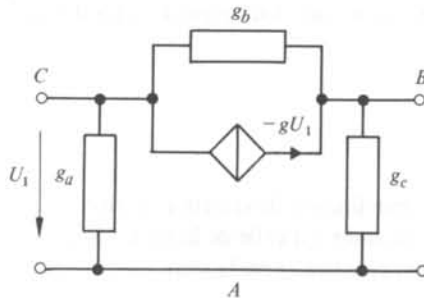


Fig. 6.21

La matrice flottante vaut

$$Y_F = \begin{pmatrix} g_a + g_c & -g_c & -g_a \\ -g_c - g & g_b + g_c & g - g_b \\ g - g_a & -g_b & g_a + g_b - g \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

La borne 1 est la nouvelle borne de référence ; on observera que les accès correspondant aux bornes 2 et  $1' = N + 1$  sont devenus respectivement 2 et 1. Par conséquent, pour obtenir  $\tilde{Y}$  il faut :

- supprimer la première ligne et la première colonne de  $Y_F$ ;
- permuter les lignes restantes et les colonnes restantes.

Il vient :

$$\tilde{Y} = \begin{pmatrix} g_a + g_b - g & -g_b \\ g - g_b & g_c + g_b \end{pmatrix}$$

### 6.1.27. Définitions

Un quadripôle est utilisé d'habitude en le refermant sur des bipôles, comme à la figure 6.22, qui peuvent du reste être constitués eux mêmes à partir de quadripôles. En pratique, beaucoup de circuits sont constitués par une cascade de quadripôles. On peut étudier chacun d'entre eux en considérant tous les quadripôles à gauche et à droite comme deux bipôles. Les bipôles considérés sont les *terminaisons* du quadripôle.

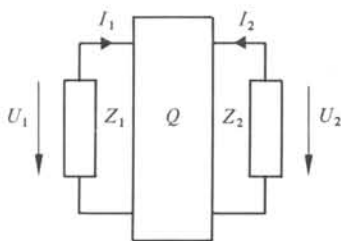


Fig. 6.22

Quand il est *terminé*, le quadripôle constitue un réseau dont on peut calculer les grandeurs caractéristiques car, aux deux équations liant  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $I_1$  et  $I_2$ , viennent s'ajouter les équations

$$U_1 = -Z_1 I_1 \quad (6.33)$$

$$U_2 = -Z_2 I_2 \quad (6.34)$$

On dispose donc d'un système linéaire de quatre équations à quatre inconnues.

Une situation très commune est celle de la figure 6.23 où l'une des terminaisons est une *charge*  $R_2$  purement résistive et où la source est représentée par le bipôle équivalent de Thévenin.

L'impédance (l'admittance) d'entrée ou de sortie du quadripôle terminé à son

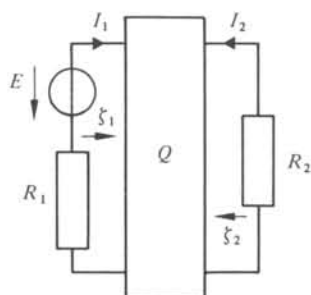


Fig. 6.23

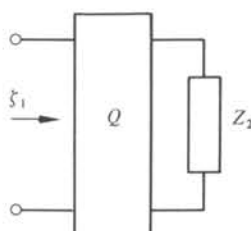


Fig. 6.24

autre accès est appelée impédance (admittance) *terminée* ou *ramenée* d'entrée ou de sortie. Ainsi  $\xi_1$  est l'impédance du bipôle de la figure 6.24.

### 6.1.28. Calcul des immittances terminées

Ce calcul est immédiat à partir des paramètres de chaîne. En combinant (6.24) et (6.34), on trouve

$$\xi_1 = (AZ_2 + B)/(CZ_2 + D) \quad (6.35)$$

et de même par (6.25) et (6.33)

$$\xi_2 = (aZ_1 + b)/(cZ_1 + d) \quad (6.36)$$

Les relations (6.35) et (6.36) sont homographiques : il en résulte que si l'affixe de  $Z_2$  ( $Z_1$ ) décrit un cercle ou une droite dans le plan complexe il en est de même pour l'affixe de  $\xi_1$  ( $\xi_2$ ) pour autant que les paramètres de chaîne demeurent constants. A titre d'exemple, si la charge d'un quadripôle est purement résistive et qu'on lui fait subir une variation de zéro à l'infini, l'affixe de  $\xi_1$  décrira, pour une fréquence déterminée, un cercle. De même si  $Q$  ne comporte que des résistances, l'affixe de  $\xi_1$  parcourt pour une fréquence variable un cercle si  $Z_2$  est une inductance ou une capacité.

## 6.2. PROPRIÉTÉS DES QUADRIPOLES

### 6.2.1. Définitions

Un quadripôle est *équilibré* par rapport à un fonctionnement en biporte si la permutation simultanée des deux bornes de chaque accès entre elles ne modifie pas le quadripôle.

Un quadripôle est *symétrique* par rapport à un fonctionnement en biporte si la permutation des deux accès entre eux ne modifie pas le quadripôle.

Ces deux définitions supposent naturellement que l'on connaisse la structure interne du quadripôle. Elles reviennent à découvrir l'existence d'un axe de symétrie dans

le schéma du réseau. Dans la représentation de la figure 6.1, l'axe est horizontal pour le quadripôle équilibré; il est vertical pour le quadripôle symétrique. Par rapport à ces axes, les demi-quadripôles qu'ils déterminent sont l'image l'un de l'autre.

### 6.2.2. Définition

Un biporte est *symétrique* lorsque l'interversion des accès 1 et 2 est indiscernable par des mesures extérieures. Il est possible qu'un quadripôle ne soit pas symétrique et, cependant, que son fonctionnement en biporte soit symétrique. La symétrie du quadripôle est affaire de structure du circuit; la symétrie du biporte est affaire de comportement externe.

### 6.2.3. Exemples

Le quadripôle de la figure 6.4 est à la fois équilibré et symétrique. Pour le vérifier, il faut respectivement remplacer  $Z$  par deux impédances  $Z/2$  en série ou par deux impédances  $2Z$  en parallèle.

Le quadripôle de la figure 6.5 est symétrique mais il n'est pas équilibré. Par contre, le quadripôle de la figure 6.25 est à la fois équilibré et symétrique. Les matrices d'admittance de ces deux derniers circuits sont identiques et décrivent un biporte symétrique. Ceci souligne une fois de plus que les matrices étudiées ne décrivent qu'un aspect des quadripôles, à savoir leur fonctionnement en biporte.

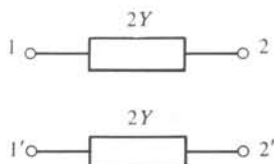


Fig. 6.25

### 6.2.4. Propriété

Un biporte est symétrique lorsque l'interversion des accès 1 et 2 est indiscernable de l'extérieur. On a donc en connectant à l'entrée et à la sortie des sources de courant  $I_1$  et  $I_2$  et puis en inversant le quadripôle

$$U_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 = Z_{22}I_1 + Z_{21}I_2 \quad (6.37)$$

Comme (6.37) doit être vérifié quels que soient  $I_1$  et  $I_2$ , on a

$$Z_{11} = Z_{22} \quad Z_{12} = Z_{21} \quad (6.38)$$

De la seconde de ces relations, on déduit que tout quadripôle symétrique est réciproque. Par un raisonnement dual, on déduit

$$Y_{11} = Y_{22} \quad (6.39)$$

En résumé, un biporte symétrique est caractérisé par deux fonctions de réponse seulement.



### 6.2.5. Définition

Si un quadripôle est symétrique, on peut définir une coupe des connexions internes telle que les deux demi-quadripôles résultant sont l'image l'un de l'autre par rapport à la coupe.

A la figure 6.26, on a représenté une telle coupe. Il faut distinguer deux types de connexions, *droites* ou *croisées* selon qu'elles relient des noeuds internes qui sont ou non l'image l'un de l'autre. Pour qu'une symétrie existe, il faut évidemment que ces connexions croisées soient présentes par paires.

Il est évident qu'un quadripôle symétrique est un biporte symétrique. La réciproque n'est pas vraie.

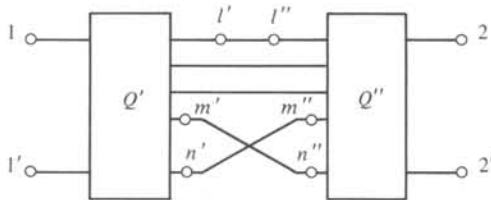


Fig. 6.26

### 6.2.6. Equivalence

Les connexions croisées entre deux demi-quadripôles peuvent être remplacées par des connexions droites en tenant compte de l'équivalence de la figure 6.27. Une paire de connexions croisées est un quadripôle dont le fonctionnement en biporte est décrit par les équations  $U_1 = -U_2$  et  $I_1 = I_2$ ; ce sont celles d'un transformateur idéal de rapport de transformation  $-1$ . Cependant, on ne peut simplement substituer un quadripôle à l'autre sur la seule base de leur équivalence en tant que biporte. Dans le cas des connexions croisées les potentiels des bornes 1 et 2' d'une part, 1' et 2 d'autre part, sont identiques; le transformateur idéal ne réalise pas cette identité; pour l'obtenir, il suffit d'adjoindre deux autotransformateurs de rapport  $-1$ .

Le transformateur idéal peut être identifié à une cascade de deux gyrateurs, si les résistances de gyration ont même valeur absolue et signes opposés, selon le paragraphe 6.1.23. De cette façon, l'axe de symétrie coupe une paire de connexions droites.

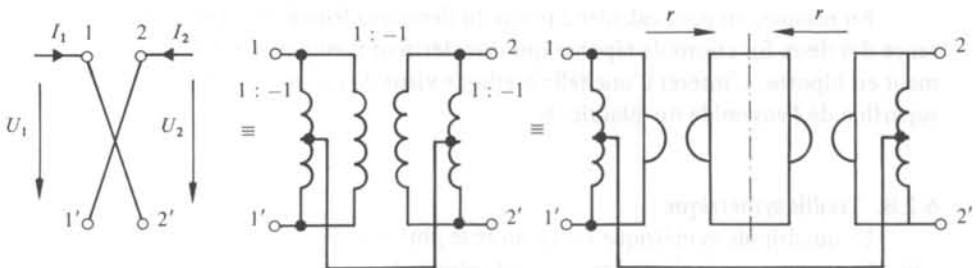


Fig. 6.27

### 6.2.7. Théorème de Bartlett

L'impédance (admittance) d'entrée d'un demi-quadripôle symétrique, dont on a ouvert les connexions, supposées droites, traversant l'axe de symétrie, vaut  $Z_{11} + Z_{12}$  ( $Y_{11} + Y_{12}$ ). L'impédance (admittance) d'entrée du demi-quadripôle dont on a court-circuité les mêmes connexions vaut  $Z_{11} - Z_{12}$  ( $Y_{11} - Y_{12}$ ).

Soit le quadripôle symétrique de la figure 6.28. Si l'on connecte des sources de tension de même valeur aux deux accès, le courant traversant une des connexions résulte, par le principe de superposition, des courants engendrés séparément par chacune des sources. Puisque ceux-ci sont égaux et de sens contraires, aucun courant ne traverse ces connexions qui peuvent être ouvertes sans rien changer au comportement extérieur du biporte. Comme les courants  $I_1$  et  $I_2$  ont une valeur identique  $I$ , on peut écrire

$$U_1 = (Z_{11} + Z_{12})I \quad (6.40)$$

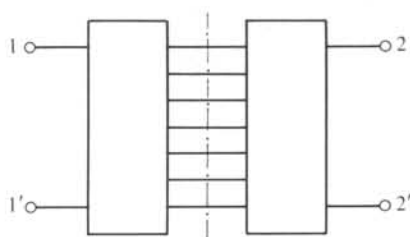


Fig. 6.28

Si l'on alimente le quadripôle par deux sources de courant de même valeur absolue mais de signes opposés, le potentiel de toutes les connexions est identique. La tension entre deux connexions résulte, par le principe de superposition, des tensions engendrées séparément par chacune des sources. Puisqu'elles sont égales et de signes contraires, la tension résultante est nulle. Comme les courants  $I_1$  et  $I_2$  sont identiques au signe près, on peut écrire

$$U_1 = (Z_{11} - Z_{12})I \quad (6.41)$$

Par ailleurs, compte tenu de (6.38), (6.39) et du tableau 6.18, on a

$$Z_{11} \pm Z_{12} = (Y_{11} \pm Y_{12})^{-1}$$

En résumé, on peut calculer à partir du demi-quadripôle la somme et la différence des deux fonctions de réponse qui caractérisent complètement le fonctionnement en biporte. L'intérêt d'une telle méthode vient de ce que l'on évite l'analyse superflue de l'ensemble du quadripôle.

### 6.2.8. Treillis symétrique

Le quadripôle symétrique et équilibré le plus simple qui contienne à la fois une paire de connexions droites et croisées est celui de la figure 6.29. Par l'application du théorème de Bartlett, on trouve les deux bipôles des figures 6.30 et 6.31.

Comme un grateur fermé sur un circuit ouvert est équivalent à un court-circuit

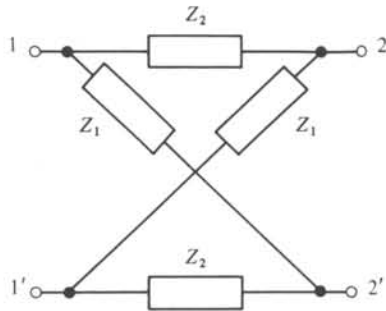


Fig. 6.29

et réciproquement, la simplification de la figure 6.30 est évidente et donne

$$Z_1 = Z_{11} + Z_{12}$$

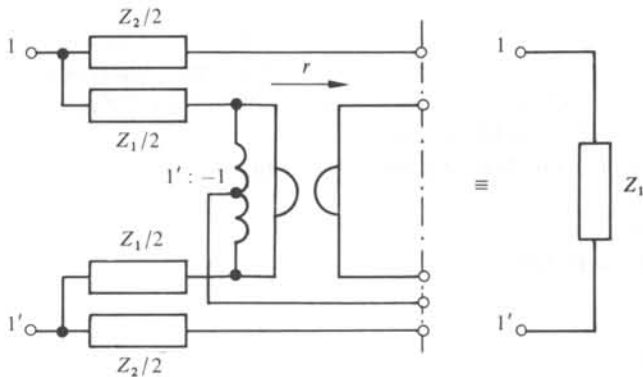


Fig. 6.30

A la figure 6.31, les potentiels  $V_B$  et  $V_C$  sont symétriques par rapport au potentiel  $V_A$  qui est, lui-même, la moyenne des potentiels des bornes 1 et 1'. Dès lors,

$$U_1 - U_B = Z_1 I_b / 2 = U_c - U_{1'} = -Z_1 I_c / 2$$

Comme par suite de l'autotransformateur  $I_b = I_c$ , ces équations ont pour seule solution  $I_b = I_c = 0$ . Les branches contenant les impédances  $Z_1/2$  ne sont parcourues par aucun courant et

$$Z_2 = Z_{11} - Z_{12}$$

Il en résulte

$$Z_{11} = (Z_1 + Z_2) / 2 \quad (6.42)$$

$$Z_{12} = (Z_1 - Z_2) / 2 \quad (6.43)$$

Si l'on referme le quadripôle de la figure 6.29 d'une part sur une source et de l'autre sur une charge, on peut le dessiner sous la forme d'un de ces ponts de mesure dont

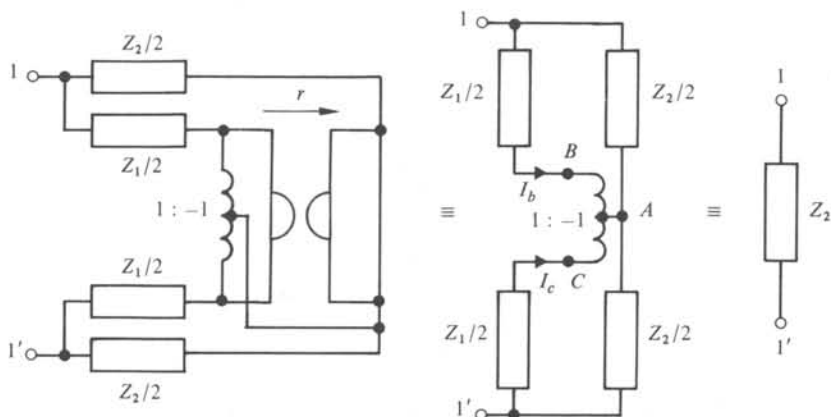


Fig. 6.31

le pont de Wheatstone est l'exemple le mieux connu. Les deux diagonales sont constituées par la source et la charge. Il n'y a pas de transfert de l'une à l'autre lorsque  $Z_{12} = 0$ , c'est-à-dire  $Z_1 = Z_2$  : en d'autres termes le pont est en équilibre. En effet, dans ce cas les équations d'impédance du quadripôle se résument à  $U_1 = Z_{11} I_1$  et  $U_2 = Z_{22} I_2$ , soit celles de deux bipôles indépendants.

Par un raisonnement dual, on peut prouver que

$$Y_{11} = (Y_1 + Y_2)/2$$

$$Y_{12} = (Y_1 - Y_2)/2$$

### 6.2.9. Propriété

L'exemple du paragraphe précédent montre que la présence des gyrateurs inverse simplement les opérations de mise en court-circuit et en circuit ouvert pour les connexions droites et croisées. L'exemple était celui d'un quadripôle équilibré. Si l'on avait multiplié le nombre de connexions droites et croisées, le résultat eût été le même. Le théorème de Bartlett prend donc pour les quadripôles équilibrés la forme suivante.

L'impédance d'entrée du demi-quadripôle dont on a ouvert (court-circuité) les connexions droites et court-circuité (ouvert) les paires de connexions croisées vaut  $Z_{11} + Z_{12}$  ( $Z_{11} - Z_{12}$ ).

Si le treillis n'avait pas été équilibré, c'est-à-dire si les deux impédances  $Z_2$  de la figure 6.29 n'étaient pas égales, le point A de la figure 6.31 n'aurait pas le potentiel égal à la moyenne de ceux des bornes 1 et 1'. Il ne serait plus légitime de négliger les branches d'impédance  $Z_1/2$ .

### 6.2.10. Équivalences de Mason

Si  $Z_1$  et  $Z_2$  peuvent être décomposés sous la forme

$$Z_1 = Z'_1 + Z_0 \quad (6.44)$$

$$Z_2 = Z'_2 + Z_0 \quad (6.45)$$

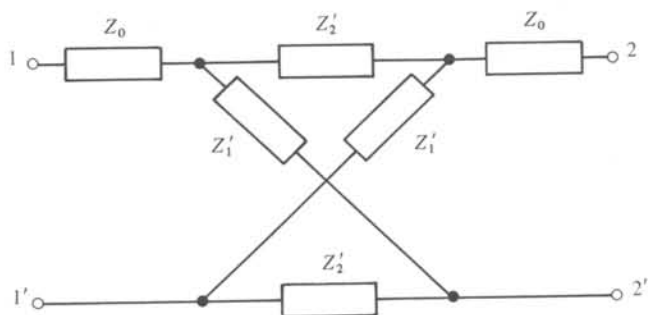


Fig. 6.32

où  $Z'_1$  et  $Z'_2$  sont toujours les impédances de bipôles passifs, on peut extraire la partie commune aux deux branches sous la forme représentée à la figure 6.32. L'application du théorème de Bartlett à ce dernier quadripôle montre qu'il ne diffère en rien de celui de la figure 6.29.

D'une façon duale, si les admittances  $Y_1$ ,  $Y_2$  admettent une décomposition en parallèle avec une partie commune sous la forme

$$Y_1 = Y'_1 + Y_0 \quad (6.46)$$

$$Y_2 = Y'_2 + Y_0 \quad (6.47)$$

on peut extraire cette partie commune de la façon représentée à la figure 6.33.

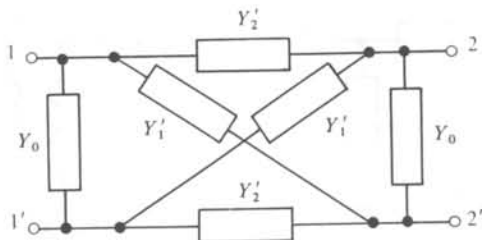


Fig. 6.33

Enfin, si les bipôles  $Z_1$  et  $Z_2$  ont une structure série parallèle, il est parfois possible de se livrer à des extractions successives telles que celles illustrées à la figure 6.34.

### 6.2.11. $T$ et $\pi$ symétriques

Au cas où l'impédance  $Z'_2$  est nulle, c'est-à-dire si  $Z_2 = Z_0$  est une partie de  $Z_1$ , la première équivalence de Mason mène au circuit de la figure 6.35. Celui-ci est appelé *T symétrique*.

Si  $Y'_1$  est nulle, ou encore si  $Y_1 = Y_0$  est contenue dans  $Y_2$ , la seconde équivalence de Mason donne le circuit de la figure 6.36, connu sous le nom de  *$\pi$  symétrique*.

Par ailleurs, il importe de souligner que l'identifié entre un quadripôle du type 6.29 et ceux des types 6.35 et 6.36 n'existe qu'au plan du fonctionnement en biporte. On constate sans peine que le premier est un véritable quadripôle tandis que les deux derniers sont des tripôles.

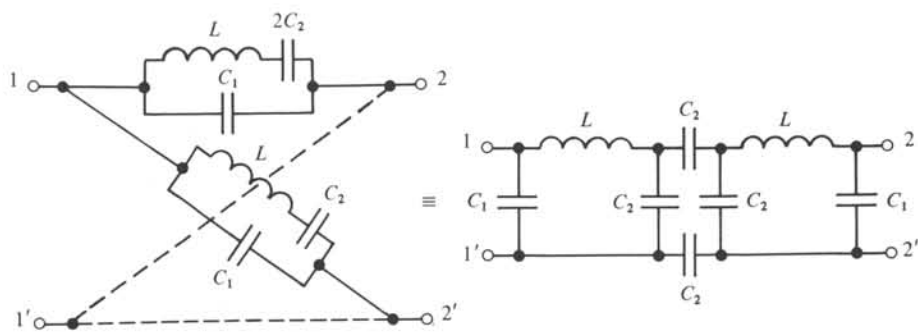


Fig. 6.34

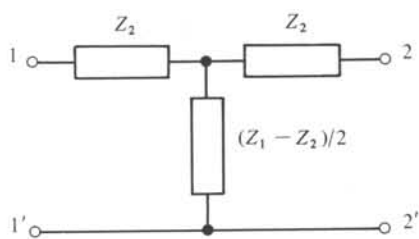


Fig. 6.35

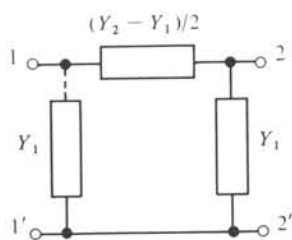


Fig. 6.36

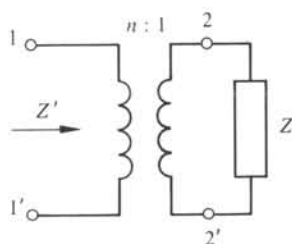


Fig. 6.37

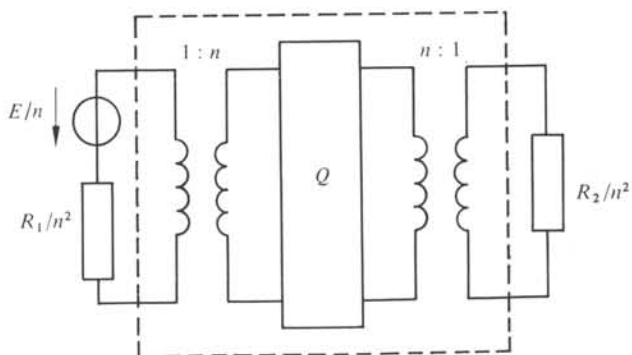


Fig. 6.38

### 6.2.12. Équivalences basées sur l'emploi du transformateur idéal

Le bipôle constitué par un transformateur idéal fermé sur une impédance  $Z$ , selon la figure 6.37, a pour impédance  $n^2Z$ . L'utilisation de transformateurs idéaux permet donc de multiplier par une constante la valeur d'une impédance : de façon imagée, on dit qu'on change le niveau de l'impédance. Bien entendu, le transformateur idéal est un composant très artificiel dont une paire de bobines couplées ne constitue qu'une médiocre réalisation. Aussi, le transformateur idéal apparaît-il le plus souvent comme artifice et est-il éliminé dans la version définitive du circuit.

Compte tenu de l'équivalence de la figure 6.37, le circuit composé d'un quadripôle  $Q$  entre terminaisons  $R_1$  et  $R_2$  et une source  $E$ , tel qu'à la figure 6.23, est équivalent à celui de la figure 6.38. Si l'on considère le quadripôle encadré d'un trait interrompu, on en calcule la matrice d'impédance  $Z'$  comme étant

$$Z' = Z/n^2 \quad (6.48)$$

où  $Z$  est la matrice du quadripôle  $Q$ .

On peut donc supprimer les deux transformateurs idéaux pour autant qu'on divise toutes les impédances du quadripôle par le facteur  $n^2$ . De façon imagée, on dit que l'on a fait traverser le quadripôle par le transformateur de rapport  $1 : n$  jusqu'à l'annihiler avec le transformateur de rapport  $n : 1$ .

De même, à supposer qu'on ait à se débarrasser d'un transformateur de rapport  $1 : n$  apparaissant en cascade entre deux quadripôles, on peut le supprimer soit en divisant toutes les impédances situées à droite, y compris  $R_2$ , par  $n^2$  soit en multipliant toutes les impédances à gauche par  $n^2$  et la source par  $n$  (fig. 6.39).

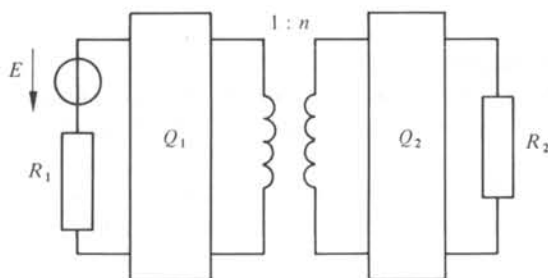


Fig. 6.39

### 6.2.13. Transformation de Norton

Les deux quadripôles des figures 6.40 et 6.41 sont équivalents. On le vérifie aisément en évaluant  $Z_{11} = n^2Z$ ,  $Z_{22} = nZ$  et  $Z_{12} = nZ$  dans les deux circuits. L'impédance  $Z$  est quelconque.

L'équivalence entre ces deux quadripôles permet d'engendrer fictivement un transformateur idéal partout où l'on peut grouper un bras shunt et un bras série dont les immittances sont les mêmes fonctions de  $p$  à une constante près. Par l'équivalence de la figure 6.39 on peut alors élever ou abaisser le niveau d'impédance d'une partie du quadripôle.

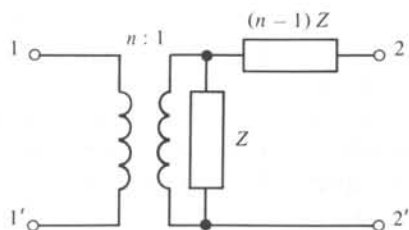


Fig. 6.40

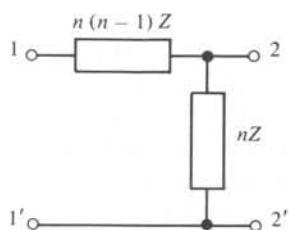


Fig. 6.41

A titre d'exemple, considérons dans une cascade de quadripôles, un  $L$  de capacités identiques tel que représenté à la figure 6.42. Par la transformation de Norton on peut la remplacer par un autre  $L$  et abaisser d'un facteur quatre le niveau d'impédance à gauche.

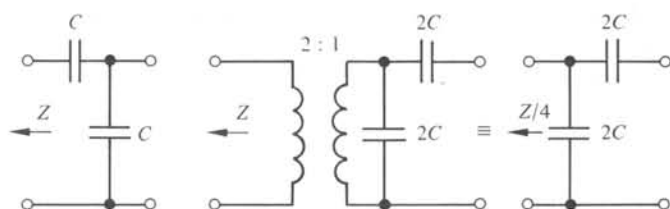


Fig. 6.42

#### 6.2.14. Quadripôles duaux

La plupart des quadripôles usuels admettent un quadripôle dual : il faut entendre par là que le circuit composé du quadripôle et de ses terminaisons a pour dual un circuit composé des terminaisons duales et d'un quadripôle qui est le dual du premier. Comme les terminaisons sont le plus souvent une charge résistive et une source de Thévenin (ou de Norton) avec résistance interne, la dualité ne modifie pas la nature des terminaisons.

Beaucoup de quadripôles ont une structure en échelle. La figure 6.43 montre que les règles énoncées à la section 5.1 se simplifient. Le dual d'un quadripôle en échelle

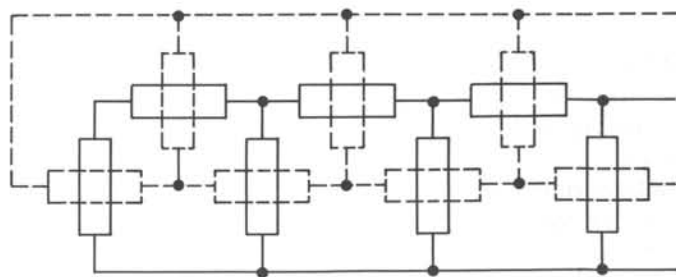


Fig. 6.43



s'obtient en remplaçant chaque branche en shunt par une branche de nature duale connectée en série et réciproquement.

D'autres quadripôles usuels, tel le treillis, admettent également un dual. Dans le cas du treillis, la structure duale est également un treillis et la correspondance biunivoque entre branches inverse branches droites et croisées.

Bien entendu, entre deux quadripôles duaux, les fonctions de réponse ayant même forme sont celles qui sont de nature duale. La fonction de transfert en courant à sortie court-circuitée de l'un coïncide avec la fonction de transfert en tension à sortie ouverte de l'autre.

### 6.3. MATRICE DE RÉPARTITION

#### 6.3.1. Introduction

Les différentes matrices qui ont été décrites à la section 6.1 constituent de bonnes descriptions du quadripôle dans la mesure où l'on s'intéresse à des immittances ou transmittances à circuit ouvert ou en court-circuit. En bref, le quadripôle sert à réaliser un transfert de courant ou de tension.

Par contre, lorsque le quadripôle est fermé sur des terminaisons, il opère un transfert de puissance. Les matrices de la section 6.1 ne permettent plus de calculer directement le comportement du quadripôle dans cette situation. C'est la raison d'être du nouveau formalisme introduit dans cette section.

Il est une autre raison sur le plan de la théorie. Les diverses matrices de la section 6.1 ont l'inconvénient de ne pas toujours exister. Par contre, on peut montrer que la matrice de répartition existe toujours et qu'en ce sens elle constitue un outil théorique fondamental.

#### 6.3.2. Grandeurs réduites

Considérons le quadripôle refermé sur des terminaisons résistives comme à la figure 6.23. Nous supposons de plus que les terminaisons sont identiques. Si elles ne le sont pas, on peut les rendre égales par l'intermédiaire de transformateurs idéaux : on sait par ailleurs que ceux-ci ne jouent aucun rôle au point de vue énergétique. Bien entendu ces transformateurs idéaux ne constituent qu'un outil mathématique; dans la réalité ils sont absorbés par les terminaisons qui de la sorte peuvent être inégales. Soit donc  $R_1 = R_2 = R$ . Il est intéressant de remplacer courants et tensions par des grandeurs ayant même dimension. Posons dans (6.1)

$$u = UR^{-1/2}, \quad i = IR^{1/2}, \quad a = AR^{1/2}, \quad b = BR^{-1/2}$$

Il faut bien distinguer l'usage des minuscules  $u$  et  $i$  qui, dans cette section, représentent les transformées de Laplace réduites de leur signification dans des chapitres antérieurs où elles représentent des valeurs instantanées.

Avec ces notations, (6.1), (6.2) et (6.7) deviennent

$$au = bi \tag{6.49}$$

$$u = zi \tag{6.50}$$

$$i = yu \tag{6.51}$$

où  $z = ZR^{-1}$  et  $y = RY$ . Grâce à l'introduction de ces facteurs dépendant de  $R$ , on arrive à définir des matrices  $a$ ,  $b$ ,  $z$  et  $y$  sans dimensions qui relient des grandeurs  $u$  et  $i$  ayant les mêmes dimensions, celles de la racine carrée d'une puissance.

L'utilisation de grandeurs réduites a non seulement un intérêt théorique, mais constitue aussi une pratique utile dans le calcul numérique des circuits. Les ordres de grandeurs des éléments intervenant dans les circuits réels sont fort disparates : alors que la valeur des résistances atteint facilement  $10^6 \Omega$ , celle des capacités descend aussi bas que  $10^{-12}$  F. De longues manipulations numériques sont peu commodes sur des nombres aussi mal conditionnés. Par le choix d'une valeur convenable de  $R$ , on peut se ramener à un circuit où les valeurs réduites des éléments sont d'un ordre de grandeur raisonnable.

### 6.3.3. Définitions

On appelle *onde incidente*, le vecteur

$$\alpha = u + i \quad (6.52)$$

et *onde réfléchie*

$$\beta = u - i \quad (6.53)$$

Par élimination de  $u$  et  $i$  entre (6.49), (6.52) et (6.53), on obtient

$$(b + a)\beta = (b - a)\alpha \quad (6.54)$$

On peut démontrer [12] que  $(b + a)^{-1}$  existe pour tout quadripôle et définir ainsi la *matrice de répartition*

$$s = (b + a)^{-1}(b - a) \quad (6.55)$$

et donc, par (6.54)

$$\beta = s\alpha \quad (6.56)$$

### 6.3.4. Relations entre la matrice de répartition et les matrices d'impédance et d'admittance

Supposons que la matrice  $z$  existe. Par (6.52), (6.53) et (6.56), on a

$$(u - i) = s(u + i) \quad (6.57)$$

et par (6.50), avec  $1_2$  matrice unité d'ordre deux,

$$(z - 1_2)i = s(z + 1_2)i$$

Comme cette relation est valable quel que soit  $i$ , on a

$$s = (z - 1_2)(z + 1_2)^{-1} \quad (6.58)$$

qui s'écrit aussi

$$s = 1_2 - 2(z + 1_2)^{-1} \quad (6.59)$$

On en déduit les relations

$$z = 2(1_2 - s)^{-1} - 1_2 \quad (6.60)$$

et

$$z = (s + 1_2)(1_2 - s)^{-1} \quad (6.61)$$

D'une façon similaire, on obtient les relations

$$s = (1_2 - y)(1_2 + y)^{-1} = 2(1_2 + y)^{-1} - 1_2 \quad (6.62)$$

$$y = 2(1_2 + s)^{-1} - 1_2 = (1_2 - s)(1_2 + s)^{-1} \quad (6.63)$$

### 6.3.5. Propriété

Les matrices de répartition d'une paire de quadripôles duaux sont identiques au signe près.

Si l'on considère deux quadripôles terminés  $Q'$  et  $Q''$  duaux l'un de l'autre, on a  $u' = i''$  et  $u'' = i'$  ou encore par (6.52) et (6.53)  $\alpha' = \alpha''$  et  $\beta' = -\beta''$ . Par (6.56), il en résulte  $s' = -s''$ .

### 6.3.6. Exemple

Les équations de définition du transformateur idéal peuvent s'écrire sous la forme (6.1)

$$\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

d'où l'on déduit par (6.55)

$$s = \frac{1}{n^2 + 1} \begin{pmatrix} n^2 - 1 & 2n \\ 2n & -n^2 + 1 \end{pmatrix}$$

On constate que  $s_{12} = s_{21}$ . On expliquera ceci au paragraphe 6.3.14.

### 6.3.7. Définition de la matrice de transfert

Il n'est plus possible de faire correspondre aux diverses connexions entre des quadripôles des opérations simples sur la matrice de répartition. Si l'on opère la mise en série de deux quadripôles par exemple, l'addition des matrices d'impédance doit être effectuée quitte à opérer une double transformation de  $s$  vers  $z$ , puis de  $z$  vers  $s$ .

Pour la connexion en cascade, on peut cependant définir une matrice similaire à la matrice de répartition. Si l'on groupe dans un même vecteur d'une part les ondes relatives à un accès, de l'autre celles relatives à l'autre accès on peut écrire

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \quad (6.64)$$

On appelle  $\theta$  la matrice de transfert.

On remarquera particulièrement l'inversion des éléments  $\alpha$  et  $\beta$  : cet arrangement est tel que l'onde réfléchie à la sortie coïncide avec l'onde incidente d'un second quadripôle qui serait mis en cascade avec le premier. Ce choix a la même signification que celui d'un signe négatif dans (6.24) et (6.25). Il permet de faire correspondre, à la multiplication de matrices  $\theta$ , la mise en cascade des quadripôles. Comme cette multiplication matricielle n'est pas commutative, elle doit respecter l'ordre de connexion des quadripôles : si la sortie du quadripôle de matrice  $\theta'$  est connectée à l'entrée du quadripôle de matrice  $\theta''$ , la matrice  $\theta$  du quadripôle est donnée par

$$\theta = \theta' \theta'' \quad (6.65)$$

Le calcul des éléments de  $\theta$  à partir de ceux de  $s$  est immédiat; on a

$$\theta = \frac{1}{s_{21}} \begin{pmatrix} -\det s & s_{11} \\ -s_{22} & 1 \end{pmatrix} \quad (6.66)$$

### 6.3.8. Exemple

La matrice de transfert d'un transformateur idéal s'écrit

$$\theta = 1/2 \begin{pmatrix} n + 1/n & n - 1/n \\ n - 1/n & n + 1/n \end{pmatrix}$$

Le produit de cette matrice par une matrice identique où l'on a remplacé  $n$  par  $1/n$  vaut  $1_2$ , matrice de transfert d'une connexion directe entre les deux accès qui est équivalente à la cascade de deux transformateurs idéaux de rapports inverses.

### 6.3.9. Propriété

La puissance active maximale en régime permanent qui peut être débitée par un dipôle de Thévenin d'impédance interne  $Z_i = R_i + jX_i$  et d'amplitude de source  $E$  vaut  $E^2/4R_i$ .

Considérons le circuit de la figure 6.44. La puissance active dissipée dans l'impédance de charge  $Z_u = R_u + jX_u$  vaut

$$P = \frac{E^2 R_u}{(R_i + R_u)^2 + (X_i + X_u)^2} \quad (6.67)$$

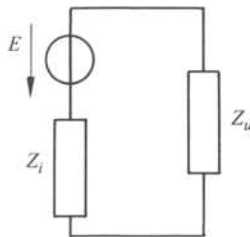


Fig. 6.44

Cette relation peut encore s'écrire

$$\frac{E^2}{P} = 4R_i + \frac{(R_i - R_u)^2 + (X_i + X_u)^2}{R_u}$$

Le maximum est obtenu lorsque  $R_u$  et  $X_u$  vérifient les relations

$$R_i = R_u \quad (6.68)$$

$$X_i = -X_u \quad (6.69)$$

Il faut donc que la réactance totale  $X_i + X_u$  soit nulle et que la résistance interne et la résistance de charge soient égales. Dans ce cas

$$P = E^2/4R_i \quad (6.70)$$

On vérifie que, dans ce cas, le courant vaut  $E/2R_i$ , et la tension aux bornes de la charge,  $E/2$ . On dissipe autant de puissance sur la résistance interne que sur la résistance de charge.

### 6.3.10. Définition

On dit que l'*adaptation* est réalisée entre la charge et la source lorsque les relations (6.68) et (6.69) sont vérifiées.

### 6.3.11. Commentaire

Au point de vue énergétique, l'adaptation est apparemment très peu satisfaisante. Si l'on considère le rendement, c'est-à-dire le rapport de la puissance utile à la puissance totale, il vaut exactement 50%. L'adaptation n'est donc pas à rechercher dans des dispositifs où l'on utilise beaucoup de puissance ou, de façon plus précise, où le coût de l'énergie consommée est supérieur au coût de l'appareil. Par contre, dans nombre de dispositifs, les puissances sont relativement faibles. Il coûte peu d'en dissiper la moitié dans la source parce qu'il importe davantage d'extraire le maximum de puissance de la source. L'adaptation serait par contre totalement inadéquate pour un alternateur de 100 MW, ne serait-ce que pour le problème de l'échauffement de l'alternateur.

### 6.3.12. Propriété

Si la sortie du quadripôle de la figure 6.45 est fermée sur la résistance  $R$ , qui a été utilisée comme facteur de normalisation au paragraphe 6.3.2, il vient

$$u_2 + i_2 = \alpha_2 = 0 \quad (6.71)$$

Dès lors, on peut écrire à partir de (6.56)

$$s_{11} = \beta_1/\alpha_1 = (u_1 - i_1)/(u_1 + i_1) = (\zeta_1 - R)/(\zeta_1 + R) \quad (6.72)$$

De même façon on peut, en supposant la source éteinte, trouver

$$s_{22} = (\zeta_2 - R)/(\zeta_2 + R) \quad (6.73)$$

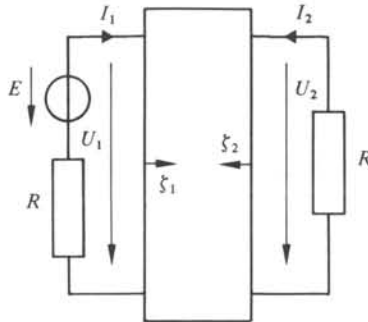


Fig. 6.45

L'élément  $s_{ii}$  de la matrice de répartition est donc le rapport de la différence de l'impédance terminée (relative à l'accès considéré) et de la terminaison à leur somme lorsque l'accès  $j$  est terminé par sa terminaison nominale.

En général  $\zeta_i$  est une fonction de la fréquence. Lorsque  $\zeta_i = R$ ,  $s_{ii} = 0$ . En d'autres mots, lorsqu'il y a adaptation à un accès, l'élément  $s_{ii}$  correspondant est nul.

### 6.3.13. Définition

On appelle  $s_{ii}$  *coefficient de réflexion*. Lorsqu'il est nul, l'onde réfléchie  $\beta_i$  est également nulle. Lorsqu'il vaut l'unité, l'onde réfléchie vaut l'onde incidente.

### 6.3.14. Propriété

Lorsque  $\zeta_i = 0$ ,  $s_{ii} = -1$  et lorsque  $\zeta_i = \infty$ ,  $s_{ii} = 1$ . Dans le premier cas, on en déduit  $u_i = 0$  ce qui signifie simplement que la tension aux bornes d'un court-circuit est nulle. Dans le second cas, on en déduit  $i_i = 0$  ce qui signifie simplement qu'un circuit ouvert n'est parcouru par aucun courant. Dans l'un et l'autre cas, l'onde incidente et l'onde réfléchie sont égales en module : la réflexion est totale.

A posteriori, ceci justifie la nomenclature introduite au paragraphe 6.3.3. Au point de vue de la transmission de puissance, on compare n'importe quelle situation à celle qui est optimale, l'adaptation. Lorsque celle-ci est réalisée, la réflexion est nulle. Lorsque la transmission de puissance est nulle, la réflexion est totale, l'onde réfléchie est égale à l'onde incidente. Ceci doit être mis en relation avec le chapitre III.8.

### 6.3.15. Coefficient de transmission

Si l'on se place dans la situation décrite par l'équation (6.71), il vient à partir de (6.56)

$$s_{21} = \beta_2 / \alpha_1 \quad (6.74)$$

or, par (6.71), on a aussi  $\beta_2 = u_2 - i_2 = 2u_2$ , et comme  $U_1 = E - RI_1$  ou  $u_1 + i_1 = e$ , (6.74) devient

$$s_{21} = 2u_2 / e = (U_2 R^{-1/2}) / (E R^{-1/2} / 2) \quad (6.75)$$

Dès lors

$$|s_{21}|^2 = (|U_2|^2/R)/(E^2/4R) \quad (6.76)$$

Le carré du module de  $s_{21}$  est donc le rapport de la puissance active dissipée dans la charge à la puissance maximale que peut développer la source.

D'une façon plus générale encore,  $s_{21}^2$  est le rapport de la puissance complexe entrant dans la charge à la puissance maximale de la source.

### 6.3.16. Définitions

On appelle  $s_{21}$  *coefficient de transmission* de l'entrée à la sortie. Lorsque son module vaut l'unité, cela signifie que toute la puissance que l'on peut extraire de la source est dissipée dans la charge. On dit encore que le quadripôle est *transparent*.

### 6.3.17. Propriété

Si l'on suppose que le quadripôle est passif, la seule façon de dissiper la puissance maximale dans la charge est d'extraire cette puissance de la source. En considérant la source refermée sur l'impédance ramenée  $\xi_1$ , cela revient à exiger l'adaptation à l'entrée et donc  $s_{11} = 0$ . De même le circuit peut aussi être considéré comme une source d'impédance interne  $\xi_2$  refermée sur la charge et l'extraction du maximum de puissance implique l'adaptation à la sortie  $s_{22} = 0$ . Dès lors, les équations (6.56) se ramènent à

$$\beta_1 = s_{12} \alpha_2 = 0 \quad (6.77)$$

$$\beta_2 = s_{21} \alpha_1 \quad (6.78)$$

où l'annulation de (6.77) vient de (6.71). Si, de plus,  $|s_{21}| = 1$ , les modules de  $\beta_2$  et  $\alpha_1$  sont identiques. L'onde réfléchie  $\beta_2$  vers le quadripôle, c'est-à-dire l'onde incidente sur la charge, est égale à l'onde incidente sur l'entrée du quadripôle.

### 6.3.18. Propriété

La matrice de répartition d'un quadripôle réciproque est symétrique.

Si l'on place une source  $E$  à la sortie, la tension  $u_1$  est identique à la tension  $u_2$  calculée au paragraphe 6.3.15 dans le cas d'un quadripôle réciproque. Dès lors,  $s_{12} = s_{21}$  pour un quadripôle réciproque.

### 6.3.19. Propriété

Le déterminant de la matrice de transfert d'un quadripôle réciproque est égal à l'unité.

Cela ressort de (6.66) et de la propriété du paragraphe 6.3.18.

## 6.4. EXERCICES

6.4.1. Chercher les matrices d'impédances, d'admittances et de chaîne du transformateur et du gyrateur si elles existent.

- 6.4.2. Décrire les connexions correspondant à l'addition de deux matrices hybrides  $h$  et  $g$  et démontrer le test de Brune correspondant.
- 6.4.3. Calculer les paramètres hybrides du quadripôle obtenu par connexion en cascade de deux autres quadripôles en fonction des paramètres hybrides de ceux-ci.
- 6.4.4. Connaissant la matrice d'admittances définie du tripôle de la figure 6.19 où la borne 2 coïncide avec la borne 4, calculer la matrice d'admittance définie du tripôle obtenu en connectant les bornes 1 et 4.
- 6.4.5. Pourquoi n'emploie-t-on pas une matrice indéfinie d'impédances pour caractériser un tripôle?
- 6.4.6. Calculer les impédances terminées d'un quadripôle en fonction des paramètres  $Z$  et  $Y$ .
- 6.4.7. Prouver que, pour un quadripôle réciproque,  $A = d$ ,  $B = b$ ,  $C = c$ ,  $D = a$ .
- 6.4.8. Démontrer l'équivalence de la figure 6.34. Imaginer un quadripôle déséquilibré tel que  $1'$  et  $2'$  coïncident tout en gardant même matrice d'impédance.
- 6.4.9. Démontrer l'équivalence de la figure 6.27 en écrivant les équations du quadripôle.
- 6.4.10. Soit dans une chaîne de quadripôles, un quadripôle en  $L$  composé d'une capacité série de 100 pF suivie d'une capacité shunt de 1 000 pF. Que substituer à ce quadripôle pour pouvoir abaisser d'un facteur 100 le niveau d'impédance à gauche?
- 6.4.11. Le  $T$  ponté est un quadripôle obtenu par mise en parallèle d'une impédance série et d'un  $T$  (symétrique ou non). Calculer la matrice d'impédances dans le cas général. Vérifier son expression par l'usage du théorème de Bartlett dans le cas symétrique. Quel est le dual d'un  $T$  ponté?
- 6.4.12. Quelles conditions doivent remplir les branches d'un treillis symétrique pour qu'il coïncide avec son dual? Donner un exemple.



## DISTRIBUTIONS ET TRANSFORMÉE DE FOURIER

### 7.1. DISTRIBUTIONS

#### 7.1.1. Introduction

Au § 1.1.2 nous définissons les courants et les tensions comme étant des fonctions à valeurs réelles d'une variable réelle. Au § 2.1.2 nous considérons les signaux et les réponses comme étant des distributions. Ces dernières procèdent d'un concept plus général qu'il est nécessaire d'introduire pour trois raisons convergentes

- les signaux utilisés ne sont pas toujours des fonctions dérivables : ils sont cependant utilisés dans des équations différentielles; pour éviter les inconvénients provenant de cette situation, il est préférable de considérer les signaux comme des distributions qui sont toujours dérivables
- la transformée de Fourier est un outil indispensable dans l'analyse de réseaux; or certains signaux courants (signal constant, échelon-unité, etc) ont des transformées qui sont des distributions
- dans la réalité expérimentale, les courants et les tensions ne peuvent être considérés comme des fonctions qu'à la suite d'une idéalisation poussée; il est plus correct de les considérer comme des distributions.

Nous discuterons brièvement la première et la dernière de ces raisons de façon à faire comprendre intuitivement le concept de distribution. Nous passerons ensuite à une description plus formelle.

#### 7.1.2. Dérivée de l'échelon-unité

Si l'on considère la fonction  $\epsilon(t)$  définie au § 2.2.1, sa dérivée  $\delta(t)$  est nulle pour  $t \neq 0$  et indéfinie pour  $t = 0$ . En ce sens, on dit que  $\epsilon(t)$  n'est pas dérivable en  $t = 0$  et  $\delta(t)$  n'est pas une fonction définie en ce point. Il n'est donc pas admissible de l'utiliser dans des expressions auxquelles on attache une interprétation en tant que fonctions.

Il est cependant intéressant de considérer  $\delta(t)$  comme résultant d'un passage à la limite. Soit la fonction  $f_a(x)$  définie par

$$f_a(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \\ (x+a)/2a & x \in [-a, a] \\ 1 & x > a \end{cases}$$

et représentée à la fig. 7.1.

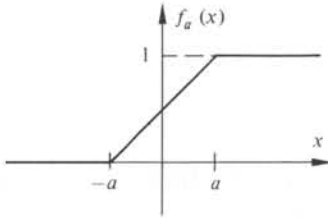


Fig. 7.1

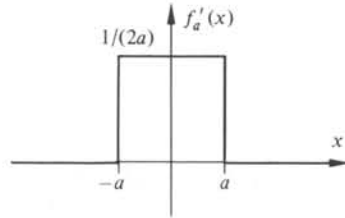


Fig. 7.2

Sa dérivée  $f'_a(x)$  est représentée à la figure 7.2 et est constituée par une impulsion rectangulaire. Comme ce signal sera utilisé souvent dans la suite, nous introduisons une impulsion normalisée.

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & x \in (-1/2, 1/2) \\ 1/2 & |x| = 1/2 \\ 0 & |x| > 1/2 \end{cases} \quad (7.1)$$

Avec cette notation on a

$$f'_a(x) = (1/2a) \text{rect}(x/2a)$$

Pour  $a \rightarrow 0$ , la suite  $f_a(x)$  tend vers  $\epsilon(x)$ . La fonction  $f'_a(x)$  est une impulsion rectangulaire de surface unité. Durant le passage à la limite,  $f'_a(x)$  tendra vers une impulsion  $\delta(x)$  infiniment étroite et d'amplitude infinie tout en gardant une surface constante. A la limite, on ne peut rien définir quant à sa valeur à l'origine. On peut cependant interpréter la formule suivante où  $\varphi(x)$  est une fonction continue au voisinage de l'origine

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f'_a(x) \varphi(x) dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \varphi(x) dx = \varphi(0) \end{aligned} \quad (7.2)$$

par le théorème de la moyenne.

En d'autres termes,  $\delta(x)$  est un opérateur qui restitue la valeur à l'origine d'une fonction  $\varphi(x)$ .

### 7.1.3 Signification physique des fonctions et fonctionnelles

Une fonction établit une correspondance entre les éléments d'un ensemble de définition (variable) et ceux d'un ensemble des valeurs.

Une fonctionnelle est une correspondance où l'ensemble de définition est une certaine classe de fonctions. A titre d'exemple, la formule (7.2) montre que la fonctionnelle  $\delta(x)$  fait correspondre, à chaque fonction continue à l'origine  $\varphi(x)$ , sa valeur  $\varphi(0)$ .

La conception traditionnelle des grandeurs physiques, courants et tensions par exemple, les assimile à des fonctions du temps. C'est cette conception qui a été initialement adoptée au § 1.1.2. Cependant, ces fonctions ne nous sont connues que par l'intermédiaire de leurs effets sur le reste du monde physique et, en particulier, sur les instruments de mesure. Or, ceux-ci sont des systèmes électromécaniques, supposés linéaires et invariables. Leur réponse à un signal quelconque  $s(t)$  est donnée par la formule (2.8) qui ne permet pas de calculer la valeur instantanée de  $s(t)$ . Il s'agit en fait d'une fonctionnelle  $g(x)$  qui fait correspondre à la fonction  $s(t)$  considérée dans son ensemble une certaine valeur  $r(t)$  correspondant à l'indication d'une aiguille sur un cadran. Il suffit pour s'en persuader de se souvenir par exemple que cette aiguille oscille un certain temps avant de se stabiliser lorsqu'on s'efforce de mesurer un échelon de tension.

En résumé, à l'ensemble de définition constitué par toutes les fonctions du temps mesurables correspond un ensemble des valeurs constitué par les indications de l'appareil.

#### 7.1.4 Notation

Soit deux fonctions  $f(x)$  et  $h(x)$  d'une variable réelle. On écrit

$$f(x) = O[h(x)] \quad (7.3)$$

lorsque le rapport  $|f(x)|/|h(x)|$  reste borné pour  $x$  tendant vers  $\pm\infty$ .

A titre d'exemple, si  $f$  et  $h$  sont deux polynômes, (7.3) est valide si le degré de  $f$  est inférieur ou égal à celui de  $h$ . Il en est de même si  $f$  est un polynôme et  $h(x) = \exp(x)$ .

#### 7.1.5 Définition

Une fonction à décroissance rapide  $f(x)$  vérifie les trois conditions suivantes :

- $f(x)$  est défini pour  $x \in (-\infty, +\infty)$
- $f(x) = O[|x|^{-m}]$  quel que soit  $m$  entier positif
- ses dérivées de n'importe quel ordre obéissent aux deux premières conditions.

L'ensemble des fonctions à décroissance rapide constitue la classe  $S$ . La variable  $x$  est réelle,  $f(x)$  prend en général des valeurs complexes.

#### 7.1.6. Propriété

La dérivée d'une fonction à décroissance rapide est également une fonction à décroissance rapide.

#### 7.1.7. Propriété

La somme de deux fonctions de la classe  $S$  appartient également à la classe  $S$ . Il en est de même pour le produit d'une fonction de la classe  $S$  par une constante. La classe  $S$  constitue donc un espace vectoriel.

### 7.1.8. Exemples

La fonction  $f_1(x) = \exp(-x^2)$  appartient à la classe  $S$ .

La fonction

$$f_2(x) = \begin{cases} \exp[a^2/(x^2 - a^2)] & |x| < a \\ 0 & |x| \geq a \end{cases}$$

appartient à la classe  $S$ .

La fonction  $(1 + x^2)^{-1}$  n'appartient pas à la classe  $S$ .

La fonction  $\text{rect}(x)$  n'appartient pas à la classe  $S$ .

### 7.1.9. Définition

Une *fonction de croissance lente*  $f(x)$  vérifie les conditions du paragraphe 7.1.5, hormis la seconde qui est remplacée par

- $f(x) = O[|x|^m]$  est vérifié pour un entier positif borné  $m$ .

### 7.1.10. Exemple

Un polynôme est une fonction de croissance lente. La fonction  $\exp(x)$  ne l'est pas.

### 7.1.11. Propriété

Le produit d'une fonction à décroissance rapide par une fonction de croissance lente est encore une fonction à décroissance rapide.

### 7.1.12. Définitions

Une *distribution* est une fonctionnelle linéaire à préciser plus loin sur l'espace  $S$ . Les fonctions appartenant à l'ensemble de définition sont appelées *fonctions de base* et notées  $\varphi(x)$ . La valeur prise par la distribution  $g$  pour la fonction de base  $\varphi$  sera notée

$$\langle g, \varphi \rangle \quad (7.4)$$

L'ensemble des valeurs (7.4) prises sur l'espace  $S$  définit complètement  $g$ .

La distribution est une fonctionnelle linéaire en ce sens que

$$\langle g, a\varphi_1 + b\varphi_2 \rangle = a\langle g, \varphi_1 \rangle + b\langle g, \varphi_2 \rangle \quad (7.5)$$

$$\forall a \in C, \forall b \in C, \forall \varphi_1 \in S, \forall \varphi_2 \in S$$

Il est important de remarquer que la définition ainsi que les relations, telles (7.5), sont toujours à considérer pour toute fonction de base. De même, l'égalité  $f(x) \equiv g(x)$ , pour des fonctions ordinaires, signifie que l'égalité est vérifiée pour tout  $x$  appartenant à l'ensemble de définition.

### 7.1.13. Définition

La *distribution régulière* associée à la fonction  $f(x)$  est donnée par

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad (7.6)$$

pour autant que l'intégrale converge absolument pour tout  $\varphi \in S$ .

#### 7.1.14. Propriété

Une fonction à décroissance rapide est absolument intégrable.

En effet, par suite de la définition 7.1.5, pour  $x$  suffisamment grand, on peut écrire la seconde condition sous la forme

$$|\varphi(x)| < K|x|^{-m}$$

où  $K$  est une constante finie. Une fonction de base est donc majorée par  $|x|^{-m}$  dont l'intégrale converge absolument hormis à l'origine.

#### 7.1.15. Commentaire

La définition 7.1.13 permet de considérer une certaine classe de fonctions dans le cadre des distributions. C'est indispensable pour notre propos puisque beaucoup de signaux rencontrés dans la réalité sont définis originellement par des fonctions.

Pour que l'intégrale (7.6) converge, il suffit que  $|f(x)|$  soit majoré par un polynôme quelconque. Par le paragraphe 7.1.11, le produit de  $\varphi(x)$  par un polynôme est une fonction à décroissance rapide qui est absolument intégrable par 7.1.14.

Il en résulte par les conditions 7.1.5 qu'à toute fonction à décroissance rapide est associée une distribution régulière.

Bien entendu, le but est de définir des distributions qui ne soient pas régulières. Nous le ferons en les considérant comme limite d'une suite de distributions régulières.

#### 7.1.16. Définitions

Une suite  $f_n(x)$  de fonctions à décroissance rapide est appelée *régulière* si la suite de nombres  $\langle f_n, \varphi \rangle$  a une limite pour  $n \rightarrow \infty$  quel que soit  $\varphi \in S$ . A cette suite régulière, on fait correspondre ainsi une fonctionnelle linéaire qui est appelée *limite* de la suite. Deux suites régulières sont équivalentes si elles ont même limite.

Toutes les suites équivalentes constituent une *classe* qui définit une seule fonctionnelle, limite de ces suites.

#### 7.1.17. Exemple

La suite  $f_n(x) = \exp(-x^2/n^2)$  est régulière parce que pour  $n \rightarrow \infty$  la limite est l'intégrale de  $\varphi(x)$  sur  $(-\infty, \infty)$  qui existe toujours par suite de 7.1.14. La suite  $\exp(-x^4/n^4)$  lui est équivalente.

#### 7.1.18. Définition

Une distribution  $f$  est définie en général comme la limite d'une classe de suites régulières équivalentes. On la note

$$\langle f, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \varphi \rangle \quad (7.7)$$

ou encore en explicitant l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\varphi(x)dx \quad (7.8)$$

mais il est bien entendu qu'une écriture du type (7.8) repose sur une double convention. D'une part,  $f(x)$  n'est généralement pas une fonction au sens habituel, c'est-à-dire

une règle attribuant, à chaque valeur de  $x$ , une valeur  $f(x)$  pour la fonction : cela n'a donc pas de sens de parler de la valeur prise par une distribution pour une valeur de la variable  $x$ . D'autre part, l'intégrale au premier membre de (7.8) n'a pas davantage de signification indépendante.

Par contre, la notation  $f(x)$  intervenant sous le signe intégral a le sens bien précis qui est défini par l'égalité (7.8).

### 7.1.19. Exemple

Soit la suite  $h_n(x) = (n/\pi)^{1/2} \exp(-nx^2)$ , avec  $n > 0$ . Rappelons que, quel que soit  $n$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_n(x) dx = 1 \quad (7.9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \exp(-nx^2) dx = n^{-1} \quad (7.10)$$

Prouvons que la limite de la suite des distributions associées aux  $h_n(x)$  vaut  $\varphi(0)$ . En effet

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \right| \quad (7.11)$$

par (7.9). Par le théorème de la moyenne on peut poser

$$\varphi(x) - \varphi(0) = x\varphi'(\xi) \quad \xi \in [0, x]$$

quel que soit  $x$  compte tenu de la dérivabilité de  $\varphi$ . De plus  $\varphi'(\xi)$  est borné et soit  $M$  sa borne. Dès lors, le second membre de (7.11) est majoré par

$$M\sqrt{n/\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |x| \exp(-nx^2) dx = M/\sqrt{\pi n} \quad (7.12)$$

et cette borne supérieure tend vers zéro pour  $n$  tendant vers l'infini.

### 7.1.20. Commentaire

Le procédé par lequel une distribution peut être définie comme limite commune à plusieurs suites régulières est analogue à celui par lequel un réel irrationnel est défini comme ensemble des suites de Cauchy équivalentes. On construit ainsi l'ensemble des réels qui contient en particulier tous les rationnels.

De même dans le cas présent, à toute fonction de base est associée une distribution régulière définie par (7.6). Cette correspondance est une injection de l'espace  $S$  dans celui des distributions.

En effet, on peut prouver que les distributions régulières, correspondant à la classe des fonctions ordinaires définies au paragraphe 7.1.13, peuvent toujours être obtenues comme limites de suites régulières [9]. De la sorte toutes les distributions peuvent être engendrées de la même façon et jouissent des mêmes propriétés.

### 7.1.21. Définition

La *distribution delta* (ou *impulsion unité* ou, improprement, *fonction de Dirac*) est définie par

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad (7.13)$$

Nous savons par le paragraphe 7.1.19 que cette fonctionnelle est une distribution. Nous prouverons au paragraphe 7.1.26 que la signification précise donnée ici à la "fonction" introduite au paragraphe 2.2.1 coïncide avec celle de dérivée de  $\epsilon(x)$ .

### 7.1.22. Somme de deux distributions

Soit deux suites régulières  $f_n(x)$  et  $h_n(x)$  définissant les distributions  $f$  et  $h$ . Par la propriété 7.1.7, la somme  $af_n(x) + bh_n(x)$  définit une fonction à décroissance rapide. Comme

$$\int_{-\infty}^{\infty} [af_n(x) + bh_n(x)] \varphi(x) dx = a \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \varphi(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x) \varphi(x) dx$$

l'intégrale de gauche converge et définit une distribution  $af + bh$ . On a donc avec la notation (7.4)

$$\langle af + bh, \varphi \rangle = a \langle f, \varphi \rangle + b \langle h, \varphi \rangle \quad (7.14)$$

Les distributions constituent donc un espace vectoriel.

### 7.1.23. Définitions

La *distribution nulle*  $n$  est définie par

$$\langle n, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

C'est, par exemple, la distribution régulière associée à la fonction  $n(x) \equiv 0$ .

Deux distributions sont *égales* si leur différence est la distribution nulle.

### 7.1.24. Dérivée d'une distribution

Soit une suite régulière  $f_n(x)$  définissant une distribution  $f(x)$ . On peut écrire

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'_n(x) \varphi(x) dx = [f_n \varphi]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \varphi'(x) dx$$

Par suite de la propriété 7.1.6, les intégrales convergent. Comme  $f_n$  et  $\varphi$  sont des fonctions à décroissance rapide, le terme entre crochets est nul. Les limites des deux intégrales sont égales au signe près et l'on a

$$\langle f', \varphi \rangle = - \langle f, \varphi' \rangle \quad (7.15)$$

En appliquant  $n$  fois cette règle, on obtient

$$\langle f^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle f, \varphi^{(n)} \rangle \quad (7.16)$$

**7.1.25. Théorème**

Une distribution possède des dérivées de n'importe quel ordre qui sont aussi des distributions.

**7.1.26. Exemple**

La distribution régulière associée à  $\epsilon(t)$  est définie par

$$\langle \epsilon, \varphi \rangle = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx$$

et par (7.15)

$$\langle \epsilon', \varphi \rangle = - \langle \epsilon, \varphi' \rangle = - [\varphi(x)]_0^{\infty} = \varphi(0)$$

On a donc

$$\epsilon' = \delta$$

De même on prouve que

$$\langle \delta^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0) \quad (7.17)$$

**7.1.27. Commentaire**

Si  $f(x)$  est dérivable en tout point, la dérivée de la distribution associée est égale à la distribution associée à  $f'(x)$ .

Si  $f(x)$  est continue et dérivable sauf en un nombre fini de points où elle possède des semi-dérivées à gauche et à droite, on peut écrire

$$f'(x) = f_1'(x) + \sum A_i \epsilon(x - x_i)$$

où  $f_1(x)$  est continue et dérivable partout et où la sommation porte sur l'ensemble  $x_i$  des points des discontinuités d'amplitude  $A_i$ . Considérant les échelons comme des distributions, on peut associer une distribution à  $f(x)$  qui est en ce sens indéfiniment dérivable.

En particulier comme  $f'(x)$  possède un nombre fini de discontinuités de première espèce, sa dérivée s'écrit

$$f''(x) = f_1''(x) + \sum A_i \delta(x - x_i)$$

En résumé, toute fonction est dérivable indéfiniment au sens des distributions même si elle possède des discontinuités isolées.

**7.1.28. Changement de variable**

Si  $f_n(x) \in S$ , on vérifie que les conditions du § 7.1.5 s'appliquent aussi à  $f_n(ax + b)$ . Dès lors en utilisant le changement de variable  $u = ax + b$ , on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(ax + b) \varphi(x) dx = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(u) \varphi[(u - b)/a] du$$



Par un raisonnement analogue à celui du paragraphe 7.1.22, on trouve en passant à la limite que la distribution  $f(x)$  jouit de la propriété

$$\langle f(ax + b), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|a|} \langle f(x), \varphi[(x - b)/a] \rangle \quad (7.18)$$

### 7.1.29. Exemples

Si  $f(x) = \delta(x)$ ,  $a = 1$  et  $b = -X$ , on trouve à partir de (7.18) et de (7.13)

$$\langle \delta(x - X), \varphi(x) \rangle = \langle \delta(x), \varphi(x + X) \rangle = \varphi(X) \quad (7.19)$$

Si  $a = -1$  et  $b = 0$ , on trouve

$$\langle \delta(-x), \varphi(x) \rangle = \langle \delta(x), \varphi(-x) \rangle = \varphi(0)$$

et donc par le paragraphe 7.1.23

$$\delta(x) = \delta(-x) \quad (7.20)$$

Ces deux propriétés de la distribution  $\delta$  peuvent être interprétées de la façon suivante. De même que (7.13) permet de prélever la valeur à l'origine d'une fonction, (7.19) étend cette possibilité à n'importe quelle valeur de l'argument. La relation (7.20), si elle était appliquée à une fonction, signifierait que celle-ci est paire : on peut de même considérer que  $\delta(x)$  est une distribution paire. Si l'on se rapporte à la figure 7.2, on constate du reste que cette propriété coïncide avec celle de l'approche intuitive de  $\delta(x)$ .

A titre d'exercice, le lecteur pourrait démontrer que  $\delta'(-x) = -\delta'(x)$ , c'est-à-dire que  $\delta'(x)$  est une distribution impaire.

### 7.1.30. Définition

Si  $f_k(x)$  est une distribution pour toute valeur du paramètre  $k$ , la distribution  $f(x)$  est la limite de  $f_k(x)$  lorsque l'on a, pour tout  $\varphi(x)$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_k(x), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \varphi(x) \rangle \quad (7.21)$$

De même, une série de distributions est définie par

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f_k(x) \quad (7.22)$$

### 7.1.31. Produit d'une distribution par une fonction

Le produit de deux distributions n'est pas défini. Par contre, le produit d'une distribution  $g$  par une fonction  $f$  convenablement choisie a un sens. Compte tenu de la commutativité et de l'associativité de la multiplication, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\varphi(x)dx$$

peut être interprétée comme

$$\langle fg, \varphi \rangle = \langle g, f\varphi \rangle \quad (7.23)$$

pour autant que  $f$  soit une fonction de croissance lente.

### 7.1.32. Exemple

Dans le cas de  $\delta$ , l'application de (7.23) donne

$$\delta(x)f(x) = f(0)\delta(x) \quad (7.24)$$

on en déduit le cas particulier

$$x\delta(x) = 0 \quad (7.25)$$

Il faut donc prendre garde que l'égalité des distributions  $xg_1(x) = xg_2(x)$  n'implique pas  $g_1(x) = g_2(x)$  mais bien

$$g_1(x) = g_2(x) + c\delta(x) \quad (7.26)$$

On peut démontrer que  $c\delta(x)$  est effectivement le seul terme à ajouter.

### 7.1.33. Contre-exemple

La fonction  $g(x) = |x|^{-1/2}$  a une distribution associée puisque l'intégrale de  $(1+x^2)^{-1}g(x)$  sur  $(-\infty, \infty)$  est bornée : elle vaut  $\pi/\cos(\pi/4)$ . Par contre la fonction  $g^2(x) = |x|^{-1}$  n'est pas intégrable sur le même intervalle : il n'est donc pas possible de considérer le carré de la distribution associée à  $g(x)$ .

### 7.1.34. Représentation graphique

Comme les distributions ne sont pas des fonctions, il n'est pas possible en principe de les représenter par une courbe. Cependant, on notera conventionnellement la présence de  $k\delta(x-X)$  en plaçant à l'abscisse  $X$  une flèche de longueur  $k$ , ainsi que cela a été représenté à la figure 7.3.

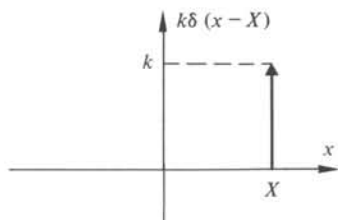


Fig. 7.3

## 7.2. PRODUIT DE CONVOLUTION

## 7.2.1. Introduction

Au paragraphe 2.2.3, on montre que la réponse à un signal quelconque peut se calculer par l'intégrale de Duhamel à partir de la réponse impulsionnelle et du signal. Cette formule constitue un cas particulier du produit de convolution que nous étudions dans cette section.

Par ailleurs, nous avons découvert à la section 7.1 qu'il n'était pas possible de définir le produit de deux distributions. Par contre, nous montrerons quelle signification peut être attachée à leur produit de convolution.

Enfin, les transformées de Fourier et de Laplace, qui seront étudiées plus loin, ont la propriété de transformer un produit ordinaire en un produit de convolution.

Toutes ces raisons soulignent l'importance du produit de convolution dans l'analyse des réseaux linéaires.

## 7.2.2. Définition

Le *produit de convolution*  $F$  de deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  d'une variable réelle est défini et noté comme

$$F(x) = f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(X) f_2(x - X) dX \quad (7.27)$$

si cette intégrale converge absolument.

## 7.2.3. Propriété

Le produit de convolution est commutatif. Ceci résulte de la substitution de variable  $x - X = u$  dans (7.27). On a donc

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1 \quad (7.28)$$

## 7.2.4. Propriété

Le produit de convolution est distributif par rapport à l'addition :

$$f_1 * (f_2 + f_3) = (f_1 * f_2) + (f_1 * f_3) \quad (7.29)$$

Ceci découle directement du caractère linéaire de l'intégrale (7.27).

## 7.2.5. Propriété

Le produit de convolution est associatif :

$$f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3 \quad (7.30)$$

Cette propriété se démontre comme au paragraphe 7.2.3 en explicitant les intégrales des deux membres de (7.30) et en opérant les changements de variables adéquats pour les identifier.

### 7.2.6. Définition

Une fonction  $f(x)$  d'une variable réelle est *causale* si  $f(x) \equiv 0$  pour  $x < 0$ .

### 7.2.7. Propriété

Si l'on définit les parties paires  $f_p$  et impaires  $f_i$  de  $f$  par les relations  $f_p(x) = [f(x) + f(-x)]/2$  et  $f_i(x) = [f(x) - f(-x)]/2$ , une fonction causale jouit de la propriété

$$f(x) = 2f_p(x) = 2f_i(x) \quad (7.31)$$

pour  $x > 0$ , puisque  $f(-x) = 0$  sur ce demi axe.

### 7.2.8. Propriété

Si  $f_1(x)$  est causal, la formule (7.27) est modifiée sous la forme

$$F(x) = \int_0^{\infty} f_1(X) f_2(x-X) dX = \int_{-\infty}^x f_2(X) f_1(x-X) dX \quad (7.32)$$

Si les deux fonctions sont causales, on a

$$F(x) = \int_0^x f_1(X) f_2(x-X) dX \quad (7.33)$$

### 7.2.9. Convolutions des distributions

Soient les distributions régulières associées aux fonctions  $g_1$  et  $g_2$ . Dans certains cas, on peut définir le produit de convolution  $g = g_1 * g_2$  et associer à celui-ci la distribution

$$\langle g, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g_1(X) g_2(x-X) dX \right] \varphi(x) dx$$

qui s'écrit encore

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(X) g_2(u) \varphi(X+u) dX du$$

Si l'on effectue l'opération d'intégration portant sur la variable  $u$ , on obtient une fonctionnelle dépendant d'un paramètre  $X$

$$\psi(X) = \langle g_2(u), \varphi(X+u) \rangle$$

Si  $\psi$  est une fonction de base, on peut écrire le résultat de l'intégration par rapport à  $X$  comme la distribution  $\langle g_1(X), \psi(X) \rangle$

En résumé, on peut écrire

$$\begin{aligned} \langle g_1 * g_2, \varphi \rangle &= \langle g_1(x) g_2(y), \varphi(x+y) \rangle \\ &= \langle g_1(x), \langle g_2(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \end{aligned} \quad (7.34)$$

La règle (7.34), découlant des définitions du produit de convolution et des distributions régulières, est choisie comme définition du produit de convolution des distributions dans le cas général.

### 7.2.10. Exemples

La convolution de la distribution  $\delta$  avec une distribution  $g$  reproduit celle-ci; en effet

$$\begin{aligned}\langle g(x)\delta(y), \varphi(x+y) \rangle &= \langle g(x), \langle \delta(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle g(x), \varphi(x) \rangle\end{aligned}$$

et donc

$$g * \delta = g \quad (7.35)$$

De même, si  $X$  est une constante réelle, on a

$$\begin{aligned}\langle g(x)\delta(y-X), \varphi(x+y) \rangle &= \langle g(x), \varphi(x+X) \rangle \\ &= \langle g(x-X), \varphi(x) \rangle\end{aligned}$$

et donc

$$g(x) * \delta(x-X) = g(x-X) \quad (7.36)$$

et en particulier

$$\delta(x-X_1) * \delta(x-X_2) = \delta(x-X_1-X_2) \quad (7.37)$$

On démontrera en s'appuyant sur les paragraphes 7.1.24 et 7.1.26 que

$$\delta^{(n)} * g = g^{(n)} \quad (7.38)$$

### 7.2.11. Commentaire

On peut résumer maintenant l'ensemble des propriétés de la distribution  $\delta$

- $\delta(x)$  est un opérateur qui fournit la valeur à l'origine d'une fonction de base
- $\delta(x-X)$  fournit la valeur de cette fonction en un point quelconque
- $\delta^{(n)}(x)$  est un opérateur d'échantillonnage qui fournit la valeur des dérivées de cette fonction à l'origine
- $\delta^{(n)}(x-X)$  fournit les valeurs des dérivées en un point quelconque
- $\delta(x)$  est l'élément neutre du produit de convolution
- $\delta(x-X)$  est un opérateur de translation lorsqu'il entre dans un produit de convolution avec une fonction.

### 7.2.12. Exemple

A la figure 7.4 est représentée une séquence d'opérations graphiques qui permettent de visualiser ce que représente le produit de convolution.

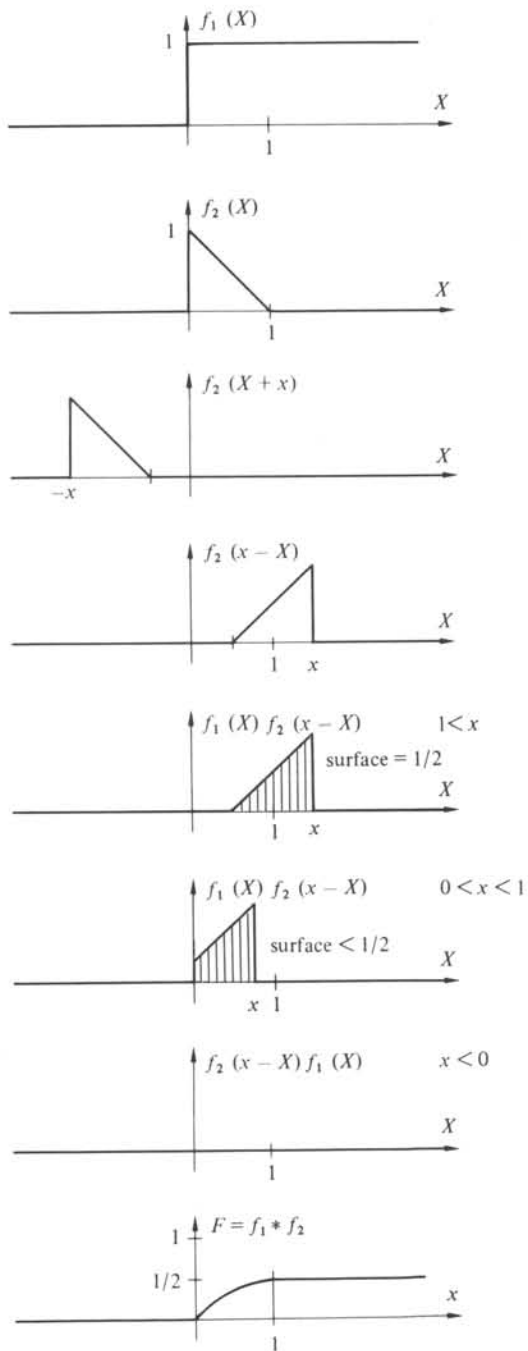


Fig. 7.4

## 7.3. TRANSFORMÉE DE FOURIER

## 7.3.1. Définition

Une fonction  $g$  à valeurs complexes de la variable réelle  $t$  étant donnée, on appelle *transformée (intégrale) de Fourier* la fonction  $G(\omega)$  de la variable réelle  $\omega$  qui est donnée par

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (7.39)$$

pour autant que l'intégrale existe pour toute valeur réelle de  $\omega$ . En abrégé, on peut noter  $G(\omega) = F[g(t)]$ . Cette notation sera utilisée au volume VI. Dans ce volume IV, on utilisera la notation introduite au paragraphe 7.3.7.

## 7.3.2. Transformée d'une fonction à décroissance rapide

Si  $g(t) \in S$ , on peut démontrer que  $G(\omega)$  est aussi une fonction de base.

- On a

$$|G(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(t) \exp(-j\omega t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt \quad (7.40)$$

Par suite de la propriété 7.1.14, il en résulte que  $G(\omega)$  est une fonction définie pour tout  $\omega$  et bornée.

- La fonction  $G(\omega)$  est indéfiniment dérivable. En effet

$$\frac{d^n G}{d\omega^n} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \frac{d^n}{d\omega^n} [\exp(-j\omega t)] dt \quad (7.41)$$

où la règle de dérivation sous le signe d'intégration est utilisée puisque  $\exp(-j\omega t)$  est continue par rapport à  $\omega$  et  $t$  et indéfiniment dérivable par rapport à  $\omega$ . De plus, on va montrer que (7.41) converge toujours. On peut écrire

$$d^n [\exp(-j\omega t)] / d\omega^n = (-jt)^n \exp(-j\omega t)$$

où  $t^n$  est un polynôme. Comme ce dernier est une fonction de croissance lente,  $t^n g(t)$  est encore une fonction de base. Dès lors par le raisonnement de l'alinéa précédent, toutes les dérivées de  $G$  existent et sont bornées.

- En intégrant  $n$  fois par parties le second membre de (7.39) et en tenant compte du fait que  $g(\pm\infty) = 0$ , on obtient

$$G(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^n} \int_{-\infty}^{\infty} g^{(n)}(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (7.42)$$

Comme l'intégrale du second membre est bornée puisque  $g^{(n)}(t)$  est une fonction de base, il s'ensuit que

$$G(\omega) = O[|\omega|^{-n}] \quad \forall n \quad (7.43)$$

### 7.3.3. Théorème

La transformée de Fourier d'une fonction à décroissance rapide est une fonction à décroissance rapide.

### 7.3.4. Identité de Parseval

Soient  $g_1 \in S$  et  $g_2 \in S$ . Leurs transformées de Fourier sont respectivement  $G_1$  et  $G_2$ . Considérons l'égalité résultant de (7.39)

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(y) G_2(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(y) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x) \exp(-jyx) dx \right] dy$$

L'interversion de l'ordre d'intégration est légitime puisque l'intégrale double est absolument convergente. Dès lors le second membre s'écrit

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_2(x) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g_1(y) \exp(-jyx) dy \right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x) G_1(x) dx$$

On en déduit la relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) G_2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x) G_1(x) dx \quad (7.44)$$

qui est l'une des formes de l'identité de Parseval. On en découvrira d'autres plus loin.

### 7.3.5. Rappel

Pour  $p > 0$  et  $q$  réel ou imaginaire pur, on a l'intégrale définie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-px^2 + qx) dx = (\pi/p)^{1/2} \exp(q^2/4p) \quad (7.45)$$

### 7.3.6. Formule d'inversion

Par le théorème 7.3.3, on sait que toute fonction de base a une transformée de Fourier; comme cette dernière est une fonction de base on peut définir l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad (7.46)$$

qui, par le même théorème, sera une fonction de base. Nous prouverons que cette fonction de base coïncide avec  $2\pi g(t)$ .

Considérons l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \exp(-\epsilon\omega^2 + j\omega t) d\omega \quad (7.47)$$

En y remplaçant  $G(\omega)$  par son expression (7.39) où la variable d'intégration est notée  $\tau$  et en intervertissant l'ordre d'intégration, on obtient

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\epsilon\omega^2 + j(t-\tau)\omega] d\omega \right] d\tau \quad (7.48)$$



Compte tenu de (7.45), on a

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \exp [ - (t - \tau)^2 / 4\epsilon ] d\tau \quad (7.49)$$

Par (7.45), on a

$$\sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [ - (t - \tau)^2 / 4\epsilon ] d\tau = 2\pi \quad (7.50)$$

Compte tenu de (7.49) et (7.50), on peut écrire

$$I - 2\pi g(t) = \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} [g(\tau) - g(t)] \exp [ - (t - \tau)^2 / 4\epsilon ] d\tau \quad (7.51)$$

Comme  $g(t)$  est une fonction continue et dérivable sur l'intervalle  $(-\infty, \infty)$ , il existe un point  $T$  tel que

$$g(\tau) - g(t) = g'(T)(\tau - t) \quad (7.52)$$

Soit  $M$  la borne supérieure de  $|g'(T)|$ , finie puisque  $g'(t)$  est une fonction de base. En remplaçant dans (7.51)  $g(\tau) - g(t)$  par le second membre de (7.52), on obtient

$$|I - 2\pi g(t)| \leq \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} M \int_{-\infty}^{\infty} |t - \tau| \exp [ - (t - \tau)^2 / 4\epsilon ] d\tau \quad (7.53)$$

En posant  $t - \tau = x$ , l'intégrale de (7.53) vaut

$$2 \int_0^{\infty} x \exp [ -x^2 / 4\epsilon ] dx = 4\epsilon \quad (7.54)$$

En résumé on a

$$|I - 2\pi g(t)| \leq 4M\sqrt{\pi\epsilon} \quad (7.55)$$

pour  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $I$  tend vers l'intégrale (7.46) qui est donc égale à  $2\pi g(t)$ .

### 7.3.7. Paire de transformées

En comparant les formules (7.46) et (7.39)

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp ( -j\omega t ) dt \quad (7.56)$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \exp (j\omega t) d\omega \quad (7.57)$$

on constate une réciprocity parfaite hormis le facteur  $2\pi$ , qui sera commenté au § 7.3.9, et le signe de l'exponentielle. Cette correspondance réciproque est notée par

$$g(t) \leftrightarrow G(\omega) \quad (7.58)$$

### 7.3.8. Définition

Dans les applications de la transformée de Fourier à la théorie des réseaux, les variables  $t$  et  $\omega$  reçoivent une signification bien précise. La variable  $t$  est le temps, défini au § 1.1.2. La variable  $\omega$  est la *pulsation* ou *fréquence angulaire* liée à la *fréquence*  $f$  par

$$\omega = 2\pi f \quad (7.59)$$

Il va de soi que la théorie mathématique de l'intégrale de Fourier ne dépend en rien de ce choix particulier de dimensions pour les variables. A titre d'exemple, dans l'application aux équations aux dérivées partielles du problème 2.4.4 du volume III, une des variables aura les dimensions d'une longueur.

### 7.3.9. Commentaire

Le facteur  $(2\pi)^{-1}$  intervenant dans (7.57) peut facilement être éliminé. Par exemple, en opérant la substitution de variables (7.59), on trouve

$$G(2\pi f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (7.60)$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(2\pi f) \exp(j2\pi ft) df \quad (7.61)$$

Par ailleurs si l'on définit la transformée par

$$G(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (7.62)$$

la formule d'inversion devient

$$g(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad (7.63)$$

Au point de vue de la mathématique, les paires de formules (7.56) (7.57), (7.60) (7.61), (7.62) (7.63) sont équivalentes et aussi conventionnelles les unes que les autres. La présence d'un facteur constant ne modifie rien d'essentiel dans les résultats.

Si d'un point de vue esthétique on est tenté de choisir l'une ou l'autre des deux dernières paires de formules, pratiquement on s'en tiendra aux formules (7.56), (7.57). L'usage les a consacrées dans le cadre de la théorie des réseaux. Par ailleurs, cette convention particulière facilite l'utilisation des dictionnaires de transformées : ceux-ci sont généralement établis pour la transformation de Laplace (étudiée au chapitre 8) et, dans la formulation choisie, le passage de la transformée de Laplace à celle de Fourier est immédiat.

### 7.3.10. Propriété

Le caractère réciproque de la relation liant  $g(t)$  et  $G(\omega)$  apparaît clairement par ce qui précède. Dès lors en opérant les substitutions de variable adéquates, on trouve que

$$g(t) \leftrightarrow G(\omega) \quad (7.64)$$

implique

$$G(t) \leftrightarrow 2\pi g(-\omega) \quad (7.65)$$

Dès lors, l'identité de Parseval peut aussi s'écrire

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)g_2(-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(x)G_2(x)dx \quad (7.66)$$

### 7.3.11. Transformée de Fourier d'une distribution

Considérons une suite régulière  $g_n(t)$  dont la limite définit une distribution. Toute fonction à décroissance rapide de la suite  $g_n(t)$  a une transformée de Fourier  $G_n(\omega)$  qui est aussi une fonction de base. Prouvons que la suite  $G_n(\omega)$  est régulière.

Soit  $\Phi(\omega) \leftrightarrow \varphi(t)$  une paire de fonctions de base, transformées de Fourier l'une de l'autre. Par (7.66) on peut écrire

$$2\pi \langle g_n(t), \varphi(-t) \rangle = \langle G_n(\omega), \Phi(\omega) \rangle \quad (7.67)$$

Comme la limite du premier membre pour  $n \rightarrow \infty$  existe par définition, celle du second existe également. On vérifie sans difficulté que  $\varphi(t) \in \mathcal{S}$  implique  $\varphi(-t) \in \mathcal{S}$ .

En résumé à toute distribution, qui est définie par une classe de suites équivalentes, correspond une autre distribution définie par la classe des suites équivalentes composées des transformées de Fourier des premières. On obtient le théorème 7.3.12.

### 7.3.12. Théorème

Toute distribution a une transformée de Fourier.

### 7.3.13. Exemple

La fonction  $g(t) \equiv 1$  est la limite de la suite régulière mentionnée au paragraphe 7.1.17. Elle a une transformée de Fourier qui s'écrit formellement

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2 \sin \omega T}{\omega} \quad (7.68)$$

Au sens de l'analyse classique, l'intégrale (7.68) ne converge pas : même si l'on prend la valeur principale au sens de Cauchy, elle oscille entre  $\pm 2/\omega$ .

La transformée de Fourier d'une fonction aussi simple (et des plus nécessaires à nos desseins) ne peut donc s'obtenir que dans le cadre des distributions. La distribution associée à  $G(\omega)$  prend pour toute fonction de base  $\Phi$  la valeur

$$\langle G(\omega), \Phi(\omega) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega t) dt \right] d\omega \quad (7.69)$$

et en intervertissant l'ordre d'intégration

$$\begin{aligned} \langle G(\omega), \Phi(\omega) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) \exp(-j\omega t) d\omega \right] dt \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(-t) dt \end{aligned} \quad (7.70)$$

En posant  $\omega = 0$  dans (7.56), on constate que l'intégrale d'une fonction est égale à la valeur à l'origine de sa transformée. Dès lors, on a

$$\langle G(\omega), \Phi(\omega) \rangle = 2\pi\Phi(0) \quad (7.71)$$

Par comparaison de (7.71) et (7.13), on a

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) = G(\omega) \quad (7.72)$$

Par suite de (7.65), on en déduit

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad (7.73)$$

### 7.3.14. Exemple

Prouvons que

$$\operatorname{sgn} t \leftrightarrow 2/j\omega \quad (7.74)$$

En effet la formule d'inversion donne

$$\pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(j\omega t)}{j\omega} d\omega = \pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega \quad (7.75)$$

Le second membre est une intégrale définie bien connue qui vaut + 1 pour  $t > 0$  et - 1 pour  $t < 0$ .

Si l'on essaye par contre d'écrire la formule (7.56) pour la paire (7.74), on obtient

$$\frac{2}{j\omega} = -2j \int_0^{\infty} \sin \omega t dt \quad (7.76)$$

L'intégrale du second membre ne converge pas au sens de l'analyse classique. Cependant les deux membres de (7.76) sont égaux au sens des distributions.

Ainsi même lorsque la paire de transformées n'inclut aucune distribution singulière mais uniquement des fonctions, le lien établi entre elles peut n'avoir de sens que dans le cadre des distributions.

### 7.3.15. Propriété

Par suite de la linéarité des formes (7.56) et (7.57)

$$g_1(t) \leftrightarrow G_1(\omega) \quad g_2(t) \leftrightarrow G_2(\omega)$$

impliquent

$$a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t) \leftrightarrow a_1 G_1(\omega) + a_2 G_2(\omega) \quad \forall a_1 \in \mathbb{C}, a_2 \in \mathbb{C} \quad (7.77)$$

### 7.3.16. Exemple

On a

$$\epsilon(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) \quad (7.78)$$

Par (7.72), (7.74) et (7.77), on en déduit

$$\epsilon(t) \leftrightarrow \pi \delta(\omega) + 1/j\omega \quad (7.79)$$

### 7.3.17. Propriété

Par substitution de variable dans (7.56) et (7.57), on en déduit que  $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$  implique

$$g(at) \leftrightarrow |a|^{-1} G(\omega/a) \quad (7.80)$$

En particulier, pour  $a = -1$ ,

$$g(-t) \leftrightarrow G(-\omega) \quad (7.81)$$

### 7.3.18. Commentaire

La formule (7.80) a une signification fondamentale en analyse des signaux. Pour  $a < 1$ ,  $g(at)$  est homothétique au signal  $g(t)$  en ce sens qu'il s'agit du même signal dilaté selon l'axe des temps. Il lui correspond une transformée  $G(\omega/a)$  qui a subi une contraction par rapport à  $G(\omega)$ . On peut en déduire la règle générale : à signal étroit, transformée large et réciproquement. Les relations (7.72) et (7.73) représentent les cas limites de cette relation : un signal infiniment étroit a une transformée constante jusqu'à l'infini ; un signal constant a une transformée infiniment étroite.

### 7.3.19. Corollaire

De (7.81) il découle que la transformée d'une fonction paire (impaire) est une fonction paire (impaire).

Compte tenu de la propriété 7.3.15 on peut encore énoncer ce corollaire sous la forme

$$g_p \leftrightarrow G_p \quad (7.82)$$

$$g_i \leftrightarrow G_i \quad (7.83)$$

où les indices  $p$  et  $i$  ont la signification définie au paragraphe 7.2.7.

### 7.3.20. Commentaire

Au contraire de la répartition en parties paire et impaire d'une fonction, qui reste invariante par rapport à la transformation, la répartition en parties réelles et

imaginaires donne lieu à des formules plus compliquées. En explicitant les parties réelles et imaginaires sous la forme  $g(t) = r(t) + jx(t)$ ,  $G(\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$ , on trouve à partir de (7.56) et (7.57)

$$U(\omega) = 2 \int_0^{\infty} [r_p(t) \cos \omega t + x_i(t) \sin \omega t] dt \quad (7.84)$$

$$V(\omega) = -2 \int_0^{\infty} [r_i(t) \sin \omega t - x_p(t) \cos \omega t] dt \quad (7.85)$$

$$r(t) = \pi^{-1} \int_0^{\infty} [U_p(\omega) \cos \omega t - V_i(\omega) \sin \omega t] d\omega \quad (7.86)$$

$$x(t) = \pi^{-1} \int_0^{\infty} [U_i(\omega) \sin \omega t + V_p(\omega) \cos \omega t] d\omega \quad (7.87)$$

Dans l'établissement de ces formules, on a tenu compte de l'élimination d'un intégrand impair sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine.

### 7.3.21. Propriété

Si  $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$ , on a par (7.56)

$$g^*(t) \leftrightarrow G^*(-\omega)$$

Si l'une des fonctions de la paire de transformées est réelle, les parties réelles et imaginaires de l'autre coïncident respectivement avec ses parties paires et impaires.

En particulier  $x(t) \equiv 0$  implique

$$G(-\omega) = G^*(\omega) \quad (7.88)$$

### 7.3.22. Théorème du retard

En opérant une substitution de variable  $t - \tau = u$  dans (7.56), on trouve

$$g(t - \tau) \leftrightarrow G(\omega) \exp(-j\omega\tau) \quad (7.89)$$

Une substitution du même type opérée sur (7.57) fournit la paire de transformées

$$g(t) \exp(j\Omega t) \leftrightarrow G(\omega - \Omega) \quad (7.90)$$

### 7.3.23. Exemples

Par (7.72) et (7.90), on a

$$\exp(j\omega_0 t) \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (7.91)$$

Par (7.81), on en déduit

$$\exp(-j\omega_0 t) \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega + \omega_0) \quad (7.92)$$

Dès lors, par (7.77) il en résulte

$$\cos \omega_0 t \leftrightarrow \pi [ \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) ] \quad (7.93)$$

$$\sin \omega_0 t \leftrightarrow j\pi [ \delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0) ] \quad (7.94)$$

On aurait pu obtenir (7.93) et (7.94) à partir de (7.91) et du corollaire 7.3.19 : on vérifie que les parties paires et impaires des deux fonctions se correspondent.

Par (7.90) et (7.79), on trouve

$$\epsilon(t) \exp(j\omega_0 t) \leftrightarrow \pi \delta(\omega - \omega_0) + 1/j(\omega - \omega_0) \quad (7.95)$$

### 7.3.24. Dérivation d'une fonction

Compte tenu des théorèmes 7.1.25 et 7.3.12, on sait que la dérivée de toute fonction, ayant une transformée de Fourier, possède une transformée. Si l'on dérive membre à membre (7.57), on trouve

$$dg/dt \leftrightarrow j\omega G(\omega) \quad (7.96)$$

et, de même à partir de (7.56),

$$-jtg(t) \leftrightarrow dG/d\omega \quad (7.97)$$

Les opérations de dérivation sous le signe d'intégration sont toujours légitimes ainsi que cela a été prouvé au paragraphe 7.3.2.

### 7.3.25. Commentaire

La relation (7.96) est cruciale pour la suite. Elle implique que des opérations de différentiation sur les fonctions du temps se traduisent par des opérations algébriques sur leurs transformées. C'est la raison même de l'utilisation de la transformation de Fourier : grâce à cette propriété, on peut réduire la résolution des systèmes d'équations différentielles à celle d'équations algébriques.

### 7.3.26. Exemple

Par (7.79) et (7.96), on a

$$de/dt \leftrightarrow 1 + \pi j\omega \delta(\omega) = 1$$

La comparaison avec (7.73) rejoint bien la conclusion du paragraphe 7.1.26. Une application répétée de (7.96) et (7.97) donne les relations

$$\delta^{(n)}(t) \leftrightarrow (j\omega)^n \quad (7.98)$$

$$t^n \leftrightarrow 2\pi j^n \delta^{(n)}(\omega) \quad (7.99)$$

En conclusion, la transformée d'un polynôme est une somme de distributions, dérivées de la distribution  $\delta$ .

### 7.3.27. Théorème

La transformée de Fourier d'un produit de convolution est égale au produit des transformées de Fourier des facteurs.

Soient  $g_1(t) \leftrightarrow G_1(\omega)$ ,  $g_2(t) \leftrightarrow G_2(\omega)$ ,  $g(t) = g_1(t) * g_2(t)$  et  $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$ . En explicitant (7.56) pour  $G(\omega)$ , on trouve

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) g_2(t-x) dx \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) \exp(-j\omega x) dx \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t-x) \exp[-j\omega(t-x)] dt \\ &= G_1(\omega) G_2(\omega) \end{aligned} \quad (7.100)$$

Ce résultat était à prévoir à partir de (7.73) puisque cette relation signifie que la transformée de l'élément neutre pour la convolution est l'élément neutre pour la multiplication.

### 7.3.28. Corollaire

Compte tenu de la propriété 7.3.10, on peut avec les notations du paragraphe précédent écrire

$$\begin{aligned} G_1(t) &\leftrightarrow 2\pi g_1(-\omega) \\ G_2(t) &\leftrightarrow 2\pi g_2(-\omega) \\ G_1(t) G_2(t) &\leftrightarrow 2\pi g_1(-\omega) * g_2(-\omega) \end{aligned} \quad (7.101)$$

Dès lors si l'on pose  $G_1(t) = h_1(t) \leftrightarrow H_1(\omega)$ ,  $G_2(t) = h_2(t) \leftrightarrow H_2(\omega)$ , on trouve à partir de (7.101)

$$h_1(t) h_2(t) \leftrightarrow (1/2\pi) H_1(\omega) * H_2(\omega) \quad (7.102)$$

### 7.3.29. Commentaires

On peut aussi déduire de (7.102) une forme de l'identité de Parseval déjà démontrée au paragraphe 7.3.10. En explicitant la relation, on trouve

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) g_2(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_1(x) G_2(\omega-x)}{2\pi} dx$$

qui, pour  $\omega = 0$ , s'écrit

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) g_2(t) dt = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} G_1(x) G_2(-x) dx$$

Cette dernière formule est identique à (7.66).



L'identité de Parseval est importante au point de vue de l'énergétique. A titre d'exemple, considérons le calcul de l'énergie dissipée par un courant  $i(t)$ , fonction à valeurs réelles, sur une résistance  $R$ . Cette énergie sera égale à

$$R \int_{-\infty}^{\infty} i^2(t) dt = \frac{R}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |I(\omega)|^2 d\omega$$

par application de l'identité de Parseval. En d'autres mots, à un facteur constant près l'énergie dissipée est égale à l'aire comprise sous la courbe du carré du module de la transformée.

### 7.3.30. Propriété

Soit

$$g(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx = f(t) * \epsilon(t) \quad (7.103)$$

où la dernière expression s'obtient à partir de (7.32)

Par application du théorème 7.3.27, il vient

$$G(\omega) = F(\omega) [\pi\delta(\omega) + 1/j\omega] \quad (7.104)$$

En tenant compte de (7.24), il vient

$$G(\omega) = \pi F(0)\delta(\omega) + F(\omega)/j\omega \quad (7.105)$$

### 7.3.31. Remarque

La propriété précédente est en quelque sorte l'inverse de la propriété explicitée par la relation (7.96) compte tenu d'une remarque importante. Par (7.103), on a  $f(t) = dg/dt$  et par (7.96), il vient

$$F(\omega) = j\omega G(\omega) = F(\omega) + \pi j\omega F(0)\delta(\omega)$$

résultat apparemment contradictoire. En fait, par suite de (7.25), le produit  $\omega\delta(\omega)$  est identiquement nul.

Ainsi si la multiplication par  $j\omega$  de la transformée correspond à une dérivation de la fonction originale, il n'est en général pas vrai que la division par  $j\omega$  corresponde à une intégration. Cela n'est vrai que si  $F(0) = 0$ , ce qui par (7.39) revient à exiger que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0 \quad (7.106)$$

### 7.3.32. Relations de Bayard-Bode

Si une fonction causale est réelle, elle est entièrement déterminée par sa partie paire ou sa partie impaire ainsi que cela est donné par la relation (7.31). Par suite de (7.82), (7.83) et de la propriété 7.3.21, il s'ensuit que cette fonction est entièrement

déterminée par la partie réelle ou par la partie imaginaire de sa transformée. On suppose bien entendu que cette transformée existe, ce qui est le cas si la fonction admet une distribution régulière associée.

En particulier, les formules (7.84) (7.85) deviennent avec (7.31) et  $g(t) \leftrightarrow R(\omega) + jX(\omega)$

$$R(\omega) = \int_0^{\infty} g(t) \cos \omega t dt \quad (7.107)$$

$$X(\omega) = - \int_0^{\infty} g(t) \sin \omega t dt \quad (7.108)$$

et (7.86) donne en séparant les parties paires et impaires et en utilisant (7.31)

$$\pi g(t) = 2 \int_0^{\infty} R(\omega) \cos \omega t d\omega = -2 \int_0^{\infty} X(\omega) \sin \omega t d\omega \quad (7.109)$$

Dès lors il est clair qu'il existe une relation entre  $R(\omega)$  et  $X(\omega)$  : celle-ci peut être explicitée par les relations de Bayard-Bode.

La relation (7.31) peut encore s'écrire

$$g_p(t) = g_i(t) \operatorname{sgn}(t) \quad (7.110)$$

$$g_i(t) = g_p(t) \operatorname{sgn}(t) \quad (7.111)$$

Compte tenu du corollaire 7.3.28 et de la formule (7.74); il vient

$$2\pi R(\omega) = jX(\omega) * (2/j\omega)$$

$$2\pi jX(\omega) = R(\omega) * (2/j\omega)$$

En explicitant l'opération de convolution on obtient les formules

$$R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(y)}{\omega - y} dy \quad (7.112)$$

$$X(\omega) = - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(y)}{\omega - y} dy \quad (7.113)$$

Compte tenu de la parité de  $R$  et de l'imparité de  $X$ , (7.112) et (7.113) peuvent encore s'écrire

$$R(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{yX(y)}{\omega^2 - y^2} dy \quad (7.114)$$

$$X(\omega) = - \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{R(y)}{\omega^2 - y^2} dy \quad (7.115)$$

### 7.3.33. Définition

Deux fonctions  $R$  et  $X$ , liées par les relations (7.114) et (7.115) sont appelées *transformées de Hilbert* l'une de l'autre.

### 7.3.34. Théorème

Une fonction réelle est causale ssi les parties paires et impaires de sa transformée de Fourier sont les transformées de Hilbert l'une de l'autre.

La condition nécessaire est démontrée au paragraphe 7.3.32. La condition suffisante découle du caractère biunivoque de la transformation de Fourier qui permet de passer de (7.112) (7.113) à (7.110) (7.111).

### 7.3.35. Généralisation

Il est assez courant de rencontrer le cas d'une distribution qui est la somme de la distribution de Dirac et d'une distribution associée à une fonction causale. Dans ce cas, la distribution de Dirac, distribution paire, n'apparaîtra que dans la partie paire de la distribution et la partie impaire ne peut certainement pas la restituer. Ainsi (7.110) a pour premier membre  $g_p(t) - k\delta(t)$  et le premier membre de (7.112) est  $R(\omega) - k$ . Pour  $\omega$  tendant vers l'infini, le premier membre est nul et dès lors

$$R(\omega) = R(\infty) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(y)}{\omega - y} dy \quad (7.116)$$

### 7.3.36. Phénomène de Gibbs

Au paragraphe 7.1.30 nous avons défini la limite d'une suite de distribution. Le but de ce paragraphe est de mettre en évidence la différence entre ce concept de limite et celui de limite d'une suite de fonctions.

Considérons la paire de transformées  $\epsilon(t) \leftrightarrow E(\omega)$  et définissons l'intégrale

$$\epsilon_{\Omega}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} E(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad (7.117)$$

qui tend vers  $\epsilon(t)$  pour  $\Omega \rightarrow \infty$ . Compte tenu de (7.39), on peut encore écrire en échangeant l'ordre d'intégration

$$\epsilon_{\Omega}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\tau) \left[ \int_{-\Omega}^{\Omega} \exp[j\omega(t-\tau)] d\omega \right] d\tau = \int_0^{\infty} \frac{\sin \Omega(t-\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau \quad (7.118)$$

Si l'on pose  $\Omega(t-\tau) = u$ , (7.118) prend la forme

$$\epsilon_{\Omega}(t) = \int_{-\infty}^{\Omega t} \frac{\sin u}{\pi u} du = \int_{-\infty}^0 \frac{\sin u}{\pi u} du + \int_0^{\Omega t} \frac{\sin u}{\pi u} du = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si(\Omega t) \quad (7.119)$$

La notation  $\text{Si}$  est celle d'une fonction spéciale appelée "Sinus intégral" : on trouvera les valeurs de cette fonction dans la plupart des tables, en particulier dans [10]. Cette fonction est représentée à la figure 7.5 et la fonction  $\epsilon_{\Omega}(t)$  à la figure 7.6.

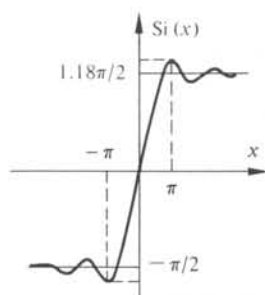


Fig. 7.5

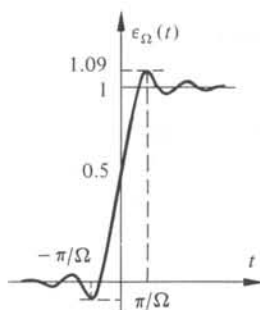


Fig. 7.6

On remarquera que pour  $\Omega$  croissant, l'abscisse  $\pi/\Omega$  du premier maximum décroît. En d'autres mots plus on se rapproche de l'intégration complète de  $E(\omega)$ , plus  $\epsilon_{\Omega}(t)$  tend vers  $\epsilon(t)$  qui est la limite de cette suite de fonctions. C'est là une règle très générale qui peut s'énoncer ainsi : plus large est la bande de fréquences, plus proche est la réponse indicielle de l'échelon unité.

### 7.3.37. Commentaires

La fonction  $\epsilon_{\Omega}(t)$  approche la fonction  $\epsilon(t)$  d'une façon très particulière, en ce sens que le premier maximum pour  $t > 0$  dépasse la valeur finale d'environ 9% et que ce dépassement est indépendant de  $\Omega$ . Lorsque  $\Omega$  croît, l'abscisse de ce maximum se rapprochera de plus en plus de l'origine mais la valeur prise par la fonction ne se modifiera pas. Par ailleurs  $\epsilon_{\Omega}(0) = \epsilon(0) = 1/2$ , ce qui justifie a posteriori la définition 2.2.1 de  $\epsilon(0)$ . En résumé, quoique la valeur à l'origine de  $\epsilon(t)$  soit correctement restituée par (7.57), dans un voisinage de celle-ci l'erreur ne tombera pas en dessous de 9%.

Cette conclusion peut du reste être généralisée pour toute fonction dérivable à gauche et à droite qui comporte un nombre fini de discontinuités de première espèce. Par le même raisonnement que celui du paragraphe 7.1.27, on montre qu'en chacun de ces points la formule (7.57) donne pour la fonction la moyenne de ses valeurs à droite et à gauche du saut. Dans le voisinage de cette discontinuité, la convergence de l'intégrale vers la fonction n'est pas uniforme.

Ceci constitue évidemment un désavantage de la transformée de Fourier. On peut y remédier en définissant d'autres transformées, comme par exemple celle de Fejer, qui convergent uniformément au prix, du reste, d'une convergence plus lente. L'exposé de ces méthodes sort du cadre de cet ouvrage; on se reportera à [11] pour plus d'informations.

Il reste à se demander pourquoi la transformée de Fourier occupe une place si importante malgré cet inconvénient. En d'autres mots, à quel point de vue la fonction

$$g_{\Omega}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} G(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad (7.120)$$

est-elle une approximation optimale de  $g(t)$ ? La formule (7.120) est substituée à (7.57), par exemple, lorsqu'il faut effectuer une intégration numérique d'une transformée dont on ne connaît pas l'expression analytique. C'est aussi la réponse de certains circuits de télécommunications, appelés filtres, dont on attend qu'ils suppriment toutes les composantes de la transformée en dehors de l'intervalle borné  $[-\Omega, \Omega]$  tout en réalisant une bonne approximation du signal.

### 7.3.38. Approximation au sens des moindres carrés

Désignons par  $F(\omega) \leftrightarrow f(t)$  toute paire de transformées telles que  $F(\omega) \equiv 0$  pour  $\omega \notin [-\Omega, \Omega]$ . Parmi ces fonctions se trouve  $g_\Omega(t)$ .

L'erreur quadratique moyenne de  $f$  par rapport à  $g$  est définie par la formule

$$\begin{aligned} \epsilon^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(t) - f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} [g(t) - f(t)] [g^*(t) - f^*(t)] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g^*(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) g(t) dt \quad (7.121) \end{aligned}$$

Compte tenu des propriétés 7.3.10 et 7.3.21, on peut écrire

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega \quad (7.122)$$

Dès lors on transforme (7.121) en

$$\begin{aligned} 2\pi\epsilon^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega + \int_{-\Omega}^{\Omega} |F(\omega)|^2 d\omega - \int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega) G^*(\omega) d\omega \\ &\quad - \int_{-\Omega}^{\Omega} F^*(\omega) G(\omega) d\omega \quad (7.123) \end{aligned}$$

où l'on a tenu compte de l'annulation du spectre de  $F$  en dehors de l'intervalle borné. La relation (7.123) peut encore se mettre sous la forme

$$2\pi\epsilon^2 = \int_{-\infty}^{-\Omega} |G(\omega)|^2 d\omega + \int_{\Omega}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega + \int_{-\Omega}^{\Omega} |G(\omega) - F(\omega)|^2 d\omega$$

Il est clair que  $\epsilon^2$  est minimum lorsque  $G(\omega) = F(\omega)$  pour  $\omega \in [-\Omega, \Omega]$ . Ceci constitue la réponse à la question posée au paragraphe précédent. L'intégrale (7.57) converge en moyenne quadratique vers la fonction du premier membre.

### 7.3.39. Définitions

Le *spectre d'amplitude* d'un signal est le module de sa transformée de Fourier et le *spectre de phase* est l'argument de cette transformée : cette définition ne s'applique bien entendu qu'aux transformées de Fourier qui sont des fonctions. Si la transformée de Fourier comporte des distributions delta, celles-ci constituent un *spectre de raies*, représenté graphiquement selon le symbolisme de la figure 7.3.

## 7.4. SÉRIE DE FOURIER

## 7.4.1. Définitions

Une distribution ou une fonction  $g(t)$  est *périodique* de période  $T$  si elle obéit à la relation

$$g(t) = g(t + T) \quad \forall t \quad (7.124)$$

Si (7.124) est vérifié, la relation  $g(t) = g(t + kT)$  est vérifiée où  $k$  est un entier quelconque. Si  $T_0$  est la plus petite constante telle que  $g$  vérifie (7.124), on appelle  $T_0$  la *période fondamentale*,  $\Omega_0 = 2\pi/T_0$  la *pulsation fondamentale* et  $f_0 = 1/T_0$  la *fréquence fondamentale*.

Dans le cas d'une fonction périodique, on peut définir

$$g(t, T_0) = g(t) \operatorname{rect}(t/T_0) \quad (7.125)$$

et

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t - kT_0, T_0) \quad (7.126)$$

Dans le cas d'une distribution périodique, on ne peut pas multiplier  $g(t)$  par  $\operatorname{rect}(t/T_0)$  qui n'est pas une fonction de croissance lente. On peut utiliser la fonction

$$h(x) = \frac{1}{I} \int_{|x|}^1 \exp\left[\frac{1}{t(t-1)}\right] dt \quad (7.127)$$

pour  $|x| \leq 1$  et  $h(x) = 0$  pour  $|x| > 1$ , où  $I$  est la valeur de l'intégrale définie entre les bornes 0 et 1. On peut vérifier que  $h(x)$  est une fonction à décroissance rapide, que  $h(0) = 1$  et que

$$s(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(x + n) = 1 \quad (7.128)$$

Dès lors on peut définir la distribution

$$g(t, T_0) = g(t)h(t/T_0) \quad (7.129)$$

et

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t - kT_0, T_0) = g(t)s(t/T_0) \quad (7.130)$$

## 7.4.2. Propriété

Un spectre composé de raies, dont les abscisses sont multiples d'une même quantité, est celui d'une fonction périodique.

En effet soit

$$G(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \delta(\omega - k\Omega) \quad (7.131)$$

Par (7.77) et (7.91), cette distribution a pour transformée inverse

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \exp(jk\Omega t) \quad (7.132)$$

Pour  $T = 2\pi/\Omega$ ,  $g(t)$  vérifie (7.124).

### 7.4.3. Propriété

Si les coefficients des raies sont égaux, la distribution correspondante est un train d'impulsions équidistantes.

Soit le train d'impulsions

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

dont la transformée s'écrit, par (7.73) et (7.89),

$$G(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-jkT\omega) \quad (7.133)$$

Formons la fonction périodique

$$\begin{aligned} G_N(\omega) &= \sum_{k=-N}^N \exp(-jkT\omega) \\ &= \exp(-jN\omega T) [1 + \exp(j\omega T) + \dots + \exp(j2N\omega T)] \\ &= \frac{\exp[j(N+1)\omega T] - \exp(-jN\omega T)}{\exp(j\omega T) - 1} \\ &= \frac{\sin MT\omega}{\sin(T\omega/2)} = \frac{\sin MT\omega}{T\omega} \frac{T\omega}{\sin(T\omega/2)} \end{aligned} \quad (7.134)$$

où  $M = N + 1/2$ .

Par le procédé du paragraphe 7.4.1, définissons la distribution

$$G_N(\omega, \Omega) = G_N(\omega) h(\omega/\Omega) \quad (7.135)$$

Par (7.68) et (7.72), le premier facteur du produit (7.134) définit la distribution

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\sin MT\omega}{T\omega} = \pi \delta(T\omega) \quad (7.136)$$

et dès lors par (7.24)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} G_N(\omega, \Omega) = 2\pi \delta(T\omega) \quad (7.137)$$

puisque  $h(\omega/\Omega) [T\omega/\sin(T\omega/2)]$  prend la valeur 2 pour  $\omega = 0$ .

Par (7.130), il vient

$$G(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(T\omega - 2k\pi) \quad (7.138)$$

Par (7.18),  $\delta(ax) = |a|^{-1} \delta(x)$  et (7.138) s'écrit encore

$$G(\omega) = \Omega \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\Omega)$$

En résumé

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \leftrightarrow \Omega \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\Omega) \quad (7.139)$$

#### 7.4.4. Propriété

Une fonction périodique a un spectre composé de raies dont les abscisses sont multiples d'une même quantité.

Compte tenu de (7.35) et (7.36), les formules (7.126) ou (7.130) peuvent encore s'écrire

$$g(t) = g(t, T) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (7.140)$$

Par suite du théorème 7.3.27, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} G(\omega) &= G(\omega, T) \left[ \Omega \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\Omega) \right] \\ &= \Omega \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(k\Omega, T) \delta(\omega - k\Omega) \end{aligned} \quad (7.141)$$

où  $G(\omega, T)$  est la transformée de  $g(t, T)$ .

#### 7.4.5. Corollaire

Par (7.141) et le paragraphe 7.4.2, la fonction ou la distribution  $g(t)$  peut s'écrire sous la forme

$$g(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(k\Omega, T) \exp(jk\Omega t) \quad (7.142)$$

En d'autres mots, une fonction ou une distribution périodique peut s'écrire sous la forme d'une somme d'exponentielles imaginaires dont les arguments sont multiples de la pulsation fondamentale et dont les coefficients sont donnés par les valeurs de la transformée de  $g(t, T)$  à ces pulsations.

#### 7.4.6. Définition

Une *série de Fourier* est une expression de la forme

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k \exp(jk\Omega t) \quad (7.143)$$



où les grandeurs  $G_k$ , généralement complexes, sont calculées par les formules

$$G_k = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} g(t, T) \exp(-jk\Omega t) dt$$

Si  $g(t)$  est une fonction, on obtient

$$G_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \exp(-jk\Omega t) dt \quad (7.144)$$

#### 7.4.7. Commentaire

Les formules (7.142) et (7.144) constituent deux procédés de calcul des coefficients  $G_k$ . Dans la mesure où l'on dispose d'une table de transformées de Laplace, on peut se dispenser du calcul explicite de la formule (7.144).

#### 7.4.8. Exemple

Considérons l'onde rectangulaire  $g(t)$  de la figure 7.7 définie par

$$g(t, T) = A \text{ rect}(t/a) \quad (7.145)$$

dont la transformée s'écrit à partir de (7.79), (7.89) et (7.77)

$$G(\omega, T) = aA [\sin(a\omega/2)] / (a\omega/2) \quad (7.146)$$

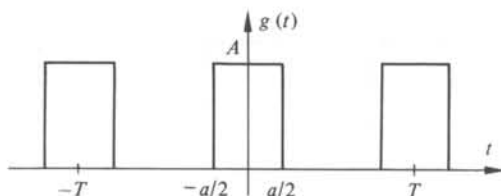


Fig. 7.7

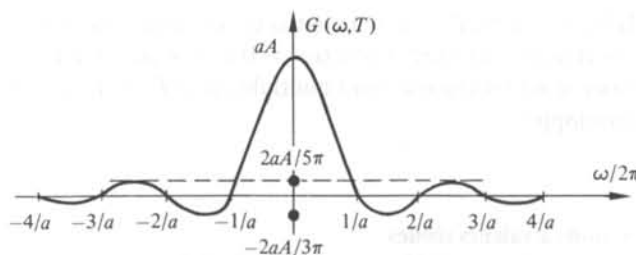


Fig. 7.8

Elle est représentée à la figure 7.8. Par (7.142) les coefficients sont

$$G_k = A(k\pi)^{-1} \sin(ka\pi/T) \quad (7.147)$$

avec en particulier

$$G_0 = aA/T \quad (7.148)$$

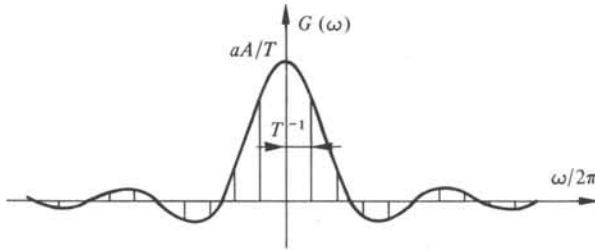


Fig. 7.9

Le spectre de raies correspondant est représenté à la figure 7.9. On vérifiera que la formule (7.144) donne le même résultat. L'avantage du premier procédé est qu'il fournit une enveloppe de l'ensemble des raies : si l'on change le paramètre  $T$ , il suffit de modifier l'écartement  $1/T$  des raies.

Si l'on fait tendre  $a$  vers 0 tout en faisant tendre  $A$  vers l'infini et en gardant le produit  $aA = 1$ , (7.146) devient  $G(\omega, T) = 1$  qui par comparaison avec (7.73) montre que l'impulsion de Dirac est la limite des distributions associées à  $g(t, T)$ . De même  $G_k$  tend vers  $1/T$  ce qui correspond à la formule (7.139) liant deux trains d'impulsions de Dirac.

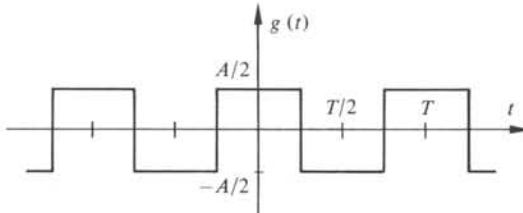


Fig. 7.10

Un cas particulier intéressant est celui où  $T = 2a$ . L'onde de la figure 7.7 devient l'onde de la figure 7.10 si l'on en soustrait la composante continue. La formule (7.147) donne  $G_k = A(k\pi)^{-1} \sin(k\pi/2)$  avec  $G_k = 0$  pour  $k$  pair. Cela se vérifie sur la figure 7.9 où les raies, dont les abscisses sont multiples de  $2/T = 1/a$ , coïncident avec des zéros de l'enveloppe.

#### 7.4.9. Fonctions à valeurs réelles

Dans ce cas,  $s(t)$  est une fonction à valeurs réelles et les coefficients  $G_k$  obéissent à la relation :

$$G_k = G_{-k}^* \quad (7.149)$$

cas particulier de (7.88). En posant  $G_k = a_k - jb_k$ , on peut récrire (7.143) sous la

forme

$$s(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\Omega t + b_k \sin k\Omega t) \quad (7.150)$$

et (7.144) sous la forme

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t, T) \cos k\Omega t \, dt \quad (7.151)$$

$$b_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t, T) \sin k\Omega t \, dt \quad (7.152)$$

On peut encore écrire

$$s(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r_k \cos(k\Omega t - \varphi_k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k \exp[j(k\Omega t - \varphi_k)] \quad (7.153)$$

avec  $r_k^2 = a_k^2 + b_k^2$  et  $\varphi_k = -\arg G_k$ .

Dans toutes les écritures  $G_0 = a_0$  est simplement la moyenne de  $g(t, T)$ . Par simple inspection de  $g(t, T)$ , on peut donc décider de la présence de cette raie; par exemple, à la figure 7.7 il y a une composante continue et à la figure 7.10 il n'y en a pas.

#### 7.4.10. Définitions

On appelle  $2a_k$  et  $2b_k$  les *coefficients de Fourier* de  $g$ . Les grandeurs  $G_k$  sont les *coefficients complexes* de Fourier. Le terme  $2r_k \cos(k\Omega t - \varphi_k)$  est l'*harmonique d'ordre  $k$*  de pulsation  $k\Omega$  et de fréquence  $k/T$ . Son *amplitude* et sa *phase* sont respectivement  $2r_k$  et  $\varphi_k$ . Le facteur 2 qui apparaît dans cette définition, peut être évacué soit de la définition des coefficients complexes soit de celle des coefficients réels : le choix diffère selon les auteurs.

#### 7.4.11. Propriétés

Ces propriétés découlent immédiatement des propriétés correspondantes de la transformée de Fourier qui sont démontrées à la section 7.3.

Si  $g(t)$  a un développement dont les coefficients complexes sont notés  $G_k$ , on en déduit les développements suivants :

La fonction  $g(t - \alpha)$  a pour coefficients  $G_k \exp(-jk\Omega\alpha)$ . Une translation de l'origine des temps ne modifie que la phase.

La fonction  $g(t) \exp(j\omega_0 t)$  a pour série de Fourier  $\Sigma G_k \exp j(\omega_0 + k\Omega)t$ . Le spectre d'une telle série est représenté à la figure 7.11. A la multiplication de la fonction par une exponentielle, opération appelée *modulation*, correspond une translation des raies. Les abscisses ne sont plus multiples d'une même grandeur ce qui n'est pas étonnant puisque la fonction n'est pas périodique en général. Ce n'est que si  $\omega_0 = m\Omega$  que l'on a une fonction périodique dont les coefficients seront  $G_{k-m}$ .

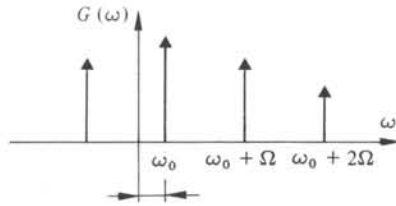


Fig. 7.11

Les coefficients de Fourier de  $ag_1(t) + bg_2(t)$  sont  $aG_{1k} + bG_{2k}$ .

Les coefficients de Fourier de  $d^n g/dt^n$  sont  $(jk\Omega)^n G_k$ .

Les coefficients de Fourier de

$$\int_{\tau}^{\tau+T} [g(x) - G_0] dx$$

sont  $G_k/jk\Omega$  hormis la composante continue dont la valeur dépend de  $\tau$ .

#### 7.4.12. Propriété

A partir de (7.151) et (7.152), il est clair qu'une fonction  $g(t, T)$  impaire n'admet pas de termes en cosinus et qu'une fonction paire n'admet pas de termes en sinus dans son développement en série de Fourier. Ainsi la fonction  $g(t)$  de la figure 7.10 n'admet que des cosinus. Cette propriété dépend évidemment du choix de l'origine des temps :  $g(t - T/4)$  n'admet que des sinus.

Par contre la présence des harmoniques pairs et impairs ne dépend que de la forme d'onde. Si la fonction

$$g(t \pm T/2, T) = -g(t, T) \quad (7.154)$$

il n'y a pas d'harmoniques pairs. En effet, en posant  $t = u - T/2$ , (7.151) devient

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T} \left[ \int_0^{T/2} -g(u, T) \cos k\Omega(u - T/2) du + \int_0^{T/2} g(t, T) \cos k\Omega t dt \right] \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{T/2} g(t, T) (1 - \cos k\pi) \cos k\Omega t dt \end{aligned} \quad (7.155)$$

qui est nul pour  $k$  pair. Une démonstration analogue vaut pour (7.152).

Dans le cas d'une distribution, la propriété est identique mais la démonstration est un peu plus compliquée. Nous ne la donnerons pas.

On démontre de la même façon que

$$g(t \pm T/2, T) = g(t, T) \quad (7.156)$$

implique l'absence d'harmoniques impairs. De façon plus immédiate encore, il suffit de (7.156) pour que la période fondamentale soit  $T/2$  : un développement où les arguments sont multiples de  $\Omega = 2\pi/T$  ne peut contenir que des termes pairs.

### 7.4.13. Propriété

Les coefficients  $G_k$  décroissent comme  $k^{-m}$  si  $d^m g/dt^m$  comporte au moins une impulsion de Dirac et si  $d^{m-1}g/dt^{m-1}$  n'en comporte pas.

En effet par (7.139) il apparaît qu'un train d'impulsions a des coefficients complexes qui sont indépendants de  $k$ . Par utilisation des deux dernières propriétés du paragraphe 7.4.11, la propriété énoncée s'en déduit. Il s'ensuit qu'une fonction présentant des discontinuités de première espèce a des coefficients décroissants comme  $1/k$ .

### 7.4.14. Commentaire

Cette propriété peut encore être reliée au théorème d'analyse suivant : "S'il existe une série numérique convergente  $v_k$  telle que  $|s_k(x)| \leq v_k$  pour tout  $x \in \Delta$ , la série  $s(x) = \sum s_k(x)$  est uniformément convergente dans  $\Delta$ ".

En posant  $s_k(x) = G_k \exp jkx$ , on a  $|s_k(x)| \leq G_k$ . Rappelons que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} = \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \pi^2/6$$

Il en ressort que la convergence uniforme est assurée lorsque les coefficients décroissent au moins comme  $k^{-2}$ . Lorsqu'ils décroissent comme  $k^{-1}$ , il n'y a pas de convergence uniforme dans le voisinage des discontinuités par suite du phénomène de Gibbs. Lorsqu'ils ne décroissent pas, la série ne converge pas vers une fonction mais vers une distribution comportant en particulier des impulsions de Dirac. Lorsqu'ils croissent comme  $k$ , la fonction comporte des distributions  $\delta'$ , etc.

## 7.5. EXERCICES

7.5.1. Le produit de convolution de deux fonctions causales est-il une fonction causale?

7.5.2. Calculer le produit de convolution de deux échelons unité. Soit  $p(t)$  un signal rectangulaire égal à l'unité dans l'intervalle  $(0, T)$  et nul en dehors. Quel est le produit de convolution de  $p(t)$  avec lui-même; de  $p(t)$  et de  $\epsilon(t)$ ?

7.5.3. Prouver que  $f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$ . Que vaut  $t\delta'(t)$ ? Que vaut  $t^2\delta'(t)$ ? Que vaut  $f(t)\delta^{(n)}(t)$  en supposant  $f(t)$  indéfiniment dérivable?

7.5.4. Soit  $f(t)$  une fonction indéfiniment dérivable. Calculer  $g''(t)$  où  $g(t) = \epsilon(t)f(t)$ .

7.5.5. Dériver la fonction  $[t\epsilon(t) - (t-1)\epsilon(t-1)]$ .

7.5.6. Quelle est la dérivée de la fonction  $|x|$ ?

7.5.7. Prouver que la suite des distributions régulières associées aux fonctions

$$f_k(t) = \begin{cases} -k/10 & |t| < k^{-1} \\ 3k/5 & k^{-1} < |t| < 2k^{-1} \\ 0 & 2k^{-1} < |t| \end{cases}$$

tend vers  $\delta(t)$  pour  $k \rightarrow \infty$ .

7.5.8. Montrer que les transformées de Fourier des deux membres des équations 7.35 à 7.38 sont égales.

7.5.9. Soit le signal rectangulaire  $r(t) = [\epsilon(t+T) - \epsilon(t-T)]$ . Calculer sa transformée de Fourier et représenter son spectre et sa phase. Quelle est la fonction du temps qui a un spectre de valeur unité dans  $(-\Omega, \Omega)$  et nul en dehors de cet intervalle? Que devient le spectre de  $T^{-1}r(t)$  pour  $T$  tendant vers zéro?

7.5.10. Quelle est la transformée de  $r(t) \cos \omega_0 t$ ? Calculer cette transformée d'une part en utilisant la propriété de modulation, d'autre part en effectuant la convolution des transformées de  $r(t)$  et  $\cos \omega_0 t$ . Vers quoi tend le spectre lorsque  $T$  croît indéfiniment? ( $T = 2\pi/\omega_0$ ).

7.5.11. Calculer la transformée d'un signal triangulaire  $f(t)$  qui vaut  $T^{-1}t + 1$  dans  $(-T, 0)$  et qui est une fonction paire de  $t$ . Faire le calcul directement et le contrôler en considérant  $f(t)$  comme l'intégrale de signaux rectangulaires construits à partir de  $r(t)$  de l'exercice 7.5.9.

7.5.12. Appliquer la formule de Parseval (7.66) avec  $g_1(t) = g_2(t) = r(t)$  de l'exercice 7.5.9 et en déduire une intégrale définie. Même opération avec  $f(t)$  de l'exercice 7.5.11.

7.5.13. Prouver que le spectre (supposé dépourvu de distributions singulières) d'un signal est borné par les courbes suivantes. En premier lieu une droite parallèle à l'axe des abscisses et dont l'ordonnée est égale à l'intégrale sur  $(-\infty, \infty)$  de la valeur absolue du signal. En second lieu une hyperbole ayant les axes comme asymptotes et dont on demande l'équation.

7.5.14. Quelle est la transformée de Hilbert de  $\delta(\omega)$ ?

7.5.15. Développer en série de Fourier la fonction  $f_1(x)$  de période  $2\pi$  égale à  $\pi - x$  pour  $x \in (0, 2\pi)$ . Pourquoi le développement ne comporte-t-il que des termes en sinus? Pourquoi les coefficients tendent-ils vers zéro comme  $1/k$ ? Quelle valeur prend le développement en  $x = 0, x = \pi/2, x = \pi$ ?

7.5.16. Développer en série de Fourier la fonction  $f_2(x)$  de période  $2\pi$ , égale à  $\pi - x$  pour  $x \in [0, \pi]$  et à  $\pi + x$  pour  $x \in [-\pi, 0]$ ? Pourquoi la série ne comporte-t-elle que des termes en cosinus? Pourquoi les coefficients tendent-ils vers zéro comme  $1/k^2$ ?

Pourquoi n'y a-t-il que des harmoniques d'ordre impair, mise à part la composante continue? Tirer de cette observation une règle générale concernant l'existence des harmoniques pairs et impairs.

7.5.17. Pour  $x \in [0, \pi]$ , avec les notations des exercices 7.5.15 et 7.5.16  $f_1(x) \equiv f_2(x)$ . Comment se fait-il que les développements soient différents? Déduire les développements de  $f_1(x - \pi)$  et  $f_2(x - \pi)$  et commenter l'existence de termes en sinus et cosinus. Déduire le développement de  $f_1(x) + f_2(x)$ . Laquelle des fonctions  $df_1/dx$  et  $df_2/dx$  admet un développement? Le calculer.

7.5.18. Exercice graphique. Porter en graphique le spectre de raies des fonctions considérées, en 7.5.16 et 7.5.15. Dessiner la courbe résultant de l'addition des trois premiers termes de chaque développement.

7.5.19. Démontrer que la dérivée du produit de convolution de deux distributions est égale au produit de convolution d'une des distributions par la dérivée de l'autre.

7.5.20. La fonction  $f(t)$  a pour transformée  $\epsilon(\omega)$ . Quelle est la fonction  $f(t)$  ?

7.5.21. Prouver que, si  $f(t)$  est solution de l'équation différentielle  $d^2 f/dt^2 - t^2 f(t) = \lambda f(t)$ , sa transformée est solution d'une équation différentielle du même type.

7.5.22. Prouver que si  $\exp j\varphi(t) \leftrightarrow F(\omega)$ ,  $\cos \varphi(t) \leftrightarrow [F(\omega) + F^*(-\omega)]/2$ .





## TRANSFORMÉE DE LAPLACE

## 8.1. TRANSFORMATION DE LAPLACE

## 8.1.1. Définition

L'intégrale

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt \quad (8.1)$$

est appelée *transformée bilatérale de Laplace* de la fonction  $f$  d'une variable réelle  $t$ . Dans cette définition,  $p$  représente une variable complexe  $\sigma + j\omega$ . Cette définition n'a de sens que si l'intégrale (8.1) converge, sinon au sens de l'analyse, du moins vers une distribution. La fonction  $f$  est l'*original* de  $F$ . En abrégé on note

$$F = L_{\Pi} [f] \quad (8.2)$$

$$f = L_{\Pi}^{-1} [F] \quad (8.3)$$

On dit encore que  $F$  est l'*image* de  $f$ .

Si l'on compare les formules (7.39) et (8.1), on constate qu'elles sont identiques à une substitution  $p = j\omega$  près. Dès lors, comme toute distribution a une transformée de Fourier, elle possède aussi une transformée de Laplace au moins sur l'axe imaginaire du plan complexe. La question est de savoir dans quelle zone du plan complexe la transformée de Laplace existe. Une règle sera énoncée pour certaines fonctions et l'extension de cette règle pour les distributions en découle par le passage à la limite décrit au chapitre 7.

## 8.1.2. Théorème

Si l'on trouve un nombre  $M$  réel, positif et fini tel que

$$\begin{aligned} |f(t)| &\leq M \exp(\beta t) & t \in [0, \infty) \\ |f(t)| &\leq M \exp(\alpha t) & t \in (-\infty, 0] \end{aligned} \quad (8.4)$$

l'intégrale (8.1) converge pour les valeurs de  $\sigma > \beta$  et  $\sigma < \alpha$ .

En effet, on peut écrire

$$|F(p)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \exp(-\sigma t) dt \leq M \left[ \int_{-\infty}^0 \exp[(\alpha - \sigma)t] dt + \int_0^{\infty} \exp[(\beta - \sigma)t] dt \right]$$

qui garantit la convergence de  $F(p)$  dans un domaine du plan de la variable complexe  $p$  situé à gauche de  $\sigma = \alpha$  et à droite de  $\sigma = \beta$ .

### 8.1.3 Commentaire

A la figure 8.1, on a représenté les courbes limites des inégalités (8.4) et à la figure 8.2 les droites limites qui en résultent dans le plan de la variable complexe. La fonction  $f(t) = M[\epsilon(t) \exp \beta t + \epsilon(-t) \exp \alpha t]$  vérifie tout juste ces inégalités. Son domaine de convergence est la partie hachurée du plan de la figure 8.2.

Par contre la fonction de la figure 8.3 n'a pas de domaine de convergence ainsi que cela ressort de la figure 8.4.

Pour déterminer le domaine de convergence on doit réaliser (8.4) au moyen de la plus petite valeur de  $\beta$  et au moyen de la plus grande valeur de  $\alpha$ . Ces deux abscisses peuvent du reste se situer du même côté de l'origine, comme c'est le cas pour la fonction de la figure 8.5, dont le domaine de convergence est représenté à la figure 8.6. En d'autres mots, même si la fonction croît aussi vite qu'une exponentielle, elle n'en a pas moins une transformée de Laplace.

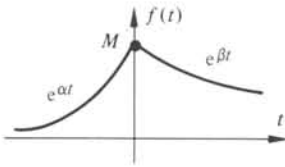


Fig. 8.1

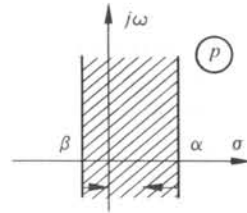


Fig. 8.2

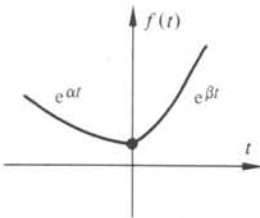


Fig. 8.3

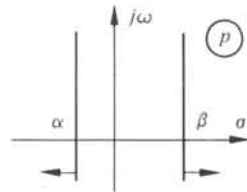


Fig. 8.4

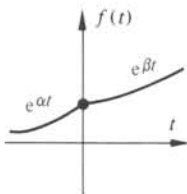


Fig. 8.5

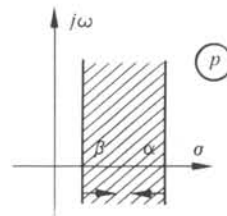


Fig. 8.6

### 8.1.4 Propriété

Une fonction absolument intégrable, et identiquement nulle en dehors d'un intervalle borné, possède un domaine de convergence s'étendant au plan  $p$  dans sa totalité.

En effet, quels que soient  $\alpha$  et  $\beta$ , il y a toujours moyen de trouver une constante  $M$  telle que (8.4) soit vérifié.

La réciproque n'est pas vraie ainsi qu'en témoigne le contre-exemple suivant :  $\exp(-t^2) \neq 0$  pour  $t \in (-\infty, \infty)$  a une transformée dont le domaine de convergence coïncide avec le plan tout entier.

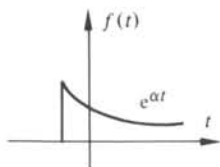


Fig. 8.7

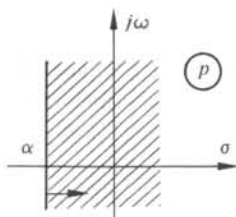


Fig. 8.8

Si la fonction n'est différente de zéro que sur un intervalle semi-infini  $[a, +\infty)$  ou  $(-\infty, b]$  et si elle vérifie sur cet intervalle une inégalité du type (8.4), son domaine de convergence est un demi-plan. En effet selon le cas, une des deux inégalités (8.4) est toujours vérifiée. Un exemple est donné à la figure 8.7 d'un signal dont le domaine de convergence est représenté à la figure 8.8.

### 8.1.5 Exemples

La fonction  $\epsilon(t) \exp bt$  avec  $b \in R$  a pour transformée

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(t) \exp [(b-p)t] dt = \left\{ \frac{\exp(b-p)t}{b-p} \right\}_0^{\infty} = (p-b)^{-1} \quad (8.5)$$

dans le demi-plan  $\sigma > b$  : dans ce cas  $|\exp[(b-p)\infty]| = \exp[(b-\sigma)\infty] = 0$ .

La fonction  $-\epsilon(-t) \exp bt$  a la même transformée  $(p-b)^{-1}$  mais son domaine de convergence est le demi-plan complémentaire  $\sigma < b$ . Ceci souligne combien il est important de spécifier le domaine de convergence : sans cette donnée la relation entre  $f$  et  $F$  n'est pas univoque.

En particulier pour  $b = 0$

$$L_{II} [\epsilon(t)] = p^{-1} \quad \sigma > 0 \quad (8.6)$$

### 8.1.6 Transformée de la distribution de Dirac

Soit  $f(t) = \delta(t)$ . Dès lors pour  $p = j\omega$  on a par (7.73)

$$L_{II} [\delta(t)] = 1 \quad (8.7)$$

Le domaine de convergence coïncide avec la totalité du plan. Bien entendu l'application des critères énoncés au paragraphe 8.1.2 n'a pas de sens dans le cas présent puisqu'il est impossible de comparer la valeur d'une exponentielle avec la valeur non définie de  $\delta(t)$ . Par contre  $\delta(t)$  a été défini au paragraphe 7.1.19 comme limite d'une suite du type  $\exp(-nt^2)$ . Le domaine de convergence des transformées des fonctions considérées dans cette suite coïncide avec le plan tout entier ainsi que cela a été démontré au paragraphe 8.1.4. Il en sera ainsi de la limite.

### 8.1.7 Définition

L'intégrale

$$F(p) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt \quad (8.8)$$

est appelée *transformée unilatérale de Laplace*. On la symbolisera par  $L_I[f]$ . En général, lorsque les propriétés de  $L_I$  et  $L_{II}$  sont les mêmes, on utilisera le symbole  $L$ . Ce sera par exemple le cas lorsque  $f(t)$  est une fonction causale : alors  $L_{II}[f] = L_I[f]$ .

La limite inférieure d'intégration a été notée  $0^-$  : c'est une façon conventionnelle de noter que les distributions singulières  $\delta$ ,  $\delta'$ , etc. dont l'abscisse est à l'origine doivent être prises en considération. En d'autres mots, lorsque  $f(t)$  est la somme d'une distribution régulière associée à une fonction causale et de distributions singulières centrées à l'origine, on a encore  $L_{II}[f] = L_I[f]$ .

On définit parfois la transformée unilatérale par la formule

$$F(p) = \int_{0^+}^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt \quad (8.9)$$

que nous symboliserons par  $L_{I+}[f]$ . La notation  $0^+$  de la limite inférieure d'intégration signifie conventionnellement que les distributions singulières centrées à l'origine ne doivent pas être prises en considération. Si de telles distributions font partie de  $f(t)$ , on a en général  $L_{II}[f] \neq L_{I+}[f]$ . Dans la suite nous n'utiliserons pas ce type de transformée.

Compte tenu de la propriété 8.1.4, le domaine de convergence d'une transformée unilatérale est un demi-plan spécifié par une inégalité du type  $\sigma > b$ , pourvu que  $\epsilon(t)f(t)$  vérifie une inégalité du type (8.4)

### 8.1.8 Formule d'inversion

Soit une transformée de Laplace

$$F(p) = L[f(t)] \quad ; \quad \sigma \in (a, b) \quad (8.10)$$

et soit  $\alpha$  une valeur quelconque de  $\sigma$  dans le domaine de convergence. En explicitant (8.10) sous la forme (8.1) pour  $p = \alpha + j\omega$ , on obtient

$$F(\alpha + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha t) f(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (8.11)$$

La comparaison de (7.56) et de (8.11) montre que

$$F(\alpha + j\omega) \leftrightarrow f(t) \exp(-\alpha t) \quad (8.12)$$

Dès lors appliquant (7.57) à cette paire de transformées de Fourier, on obtient

$$f(t) \exp(-\alpha t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha + j\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad (8.13)$$

ou encore

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha + j\omega) \exp[(\alpha + j\omega)t] d(\alpha + j\omega) \quad (8.14)$$

où il est bien entendu que  $\alpha$  est une constante et que l'intégrale s'opère donc le long d'une parallèle à l'axe imaginaire. En posant  $p = \alpha + j\omega$ , on trouve

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} F(p) \exp(pt) dp \quad (8.15)$$

formule inverse de (8.1) et (8.8), qui porte le nom d'intégrale de Bromwich. Il est à remarquer que (8.15) restitue  $f(t)$  quel que soit le chemin d'intégration pourvu qu'il se trouve dans le domaine de convergence.

### 8.1.9 Relation entre les intégrales de Fourier et de Laplace

Par ce qui précède il apparaît clairement que l'intégrale de Fourier est un cas particulier de l'intégrale de Laplace où le chemin d'intégration est défini par  $\sigma = 0$ . Dès lors, trois cas peuvent se présenter selon que l'axe des imaginaires se trouve dans le domaine de convergence, ne s'y trouve pas ou en constitue une des limites.

- Le domaine de convergence de  $L[f]$  contient la droite  $\sigma = 0$ . On a

$$L[f(t)] = F(p)$$

$$F(j\omega) \leftrightarrow f(t)$$

La transformée de Fourier s'obtient en opérant la substitution de  $p$  par  $j\omega$ .

Ainsi la formule (8.5) donne  $L[\epsilon(t) \exp bt] = (p - b)^{-1}$  pour  $\sigma > b$  : si  $b < 0$ ,  $(j\omega - b)^{-1} \leftrightarrow \epsilon(t) \exp bt$ .

- Le domaine de convergence de  $L[f]$  ne contient pas la droite  $\sigma = 0$ . Dans ce cas, la fonction n'a pas de transformée de Fourier. C'est ce qui se passe pour la fonction mentionnée comme exemple dans le premier cas lorsque  $b > 0$ .
- Si la droite  $\sigma = 0$  est une limite (exclusive) du domaine de convergence, il suffit de comparer les formules  $L[\epsilon(t)] = p^{-1}$  et  $\pi\delta(\omega) + (j\omega)^{-1} \leftrightarrow \epsilon(t)$  pour se rendre compte que la substitution pure et simple de  $p$  par  $j\omega$  est incorrecte. Dans le cas où la singularité située sur l'axe  $\sigma = 0$  est un pôle, on peut énoncer la règle suivante.

Considérons le cas où  $F(p)$  a pour singularité un pôle simple situé sur l'axe des imaginaires. Soit

$$F(p) = F_1(p) + (p - j\omega_0)^{-1} \quad (8.16)$$

où  $F_1(p)$  a un domaine de convergence incluant l'axe  $j\omega$ . On a  $L^{-1}[F_1] = f_1(t)$  et  $L^{-1}[(p - j\omega_0)^{-1}] = \epsilon(t) \exp j\omega_0 t$ . Par application du premier cas,  $F_1(j\omega) \leftrightarrow f_1(t)$  et  $\pi\delta(\omega - \omega_0) + [j(\omega - \omega_0)]^{-1} \leftrightarrow \epsilon(t) \exp j\omega_0 t$ . Dès lors à partir de (8.16) on a

$$F_1(j\omega) + (j\omega - j\omega_0)^{-1} + \pi\delta(\omega - \omega_0) \leftrightarrow f(t) \quad (8.17)$$

En d'autres mots la transformée de Fourier s'obtient à partir de la transformée de Laplace par substitution de  $j\omega$  à  $p$  et par addition d'une distribution de Dirac centrée au point  $\omega_0$ . Le cas d'un nombre plus élevé de singularités se traite par superposition.

### 8.1.10 Commentaire

Il résulte du paragraphe précédent que la transformation de Laplace est plus générale que la transformation de Fourier en ce qu'elle permet de transformer une classe plus vaste de fonctions. Il ne faudrait cependant pas en tirer la conclusion que le but de la transformée de Laplace est cette généralisation. La discussion systématique des conditions d'existence de l'une et l'autre transformée a pu engendrer l'impression qu'il s'agit d'une limitation réelle du procédé et que certains problèmes pratiques pourraient ne pas être solubles par les méthodes envisagées à cause de l'inexistence de l'une ou l'autre transformée. Il n'en est rien : ainsi qu'on le verra, les signaux et réponses intervenant en pratique ont tous des transformées de Fourier.

L'intérêt réel de l'intégrale de Laplace consiste en la simplification qu'elle apporte dans les problèmes d'inversion et, en général, dans la discussion des propriétés des systèmes. Pour ce qui est de l'inversion, on remplace grâce à elle une intégration en  $j\omega$  par une intégration le long d'un contour et celle-ci, grâce à la théorie des résidus, se ramène à une opération algébrique. Pour ce qui est des propriétés des systèmes, elles s'énoncent plus aisément si l'on considère le comportement de la fonction de réponse dans l'ensemble du plan complexe plutôt que sur le seul axe imaginaire. En un mot, connaissant une fonction le long de l'axe imaginaire il est intéressant d'en étudier le prolongement analytique dans le plan tout entier et de la caractériser par ses singularités.

### 8.1.11 Règle de superposition

Au § 7.3.15, nous avons exploité le fait que la transformée de Fourier est une forme linéaire de la fonction. De même, on a pour la transformée de Laplace que

$$L[f_i(t)] = F_i(p) \quad k_i \in C$$

impliquent

$$L\left[\sum_i k_i f_i(t)\right] = \sum_i k_i F_i(p) \quad (8.18)$$

Le domaine de convergence de (8.18) est au moins l'intersection des domaines des  $F_i(p)$ . Il peut ne pas exister si cette intersection est vide. Il peut aussi déborder cette intersection si le processus d'addition élimine certaines singularités.

### 8.1.12 Règle d'homothétie

Cette règle généralise celle du § 7.3.17. Soit  $L[f(t)] = F(p)$ , pour  $\sigma \in (a, b)$ . La transformée de  $f(t/\lambda)$  avec  $\lambda \in R$  s'écrit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t/\lambda) \exp(-pt) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \exp(-p\lambda u) |\lambda| du \quad (8.19)$$

pour  $\lambda \sigma \in (a, b)$ . En résumé

$$L[f(t/\lambda)] = |\lambda|F(\lambda p) \quad \sigma \in (a/\lambda, b/\lambda) \quad (8.20)$$

Il faut noter que si  $\lambda < 0$ ,  $a/\lambda > b/\lambda$  et que les droites limites du domaine de convergence sont à permuter.

A titre d'exemple (8.6) donne avec  $\lambda = -1$

$$L[\epsilon(-t)] = -1/p \quad \sigma \in (-\infty, 0) \quad (8.21)$$

Par la règle d'homothétie et la règle de superposition, il n'est pas possible de construire les transformées de  $f(t) = \epsilon(t) + \epsilon(-t) = 1$  et de  $\text{sgn } t = \epsilon(t) - \epsilon(-t)$  car les domaines de convergences de  $\epsilon(t)$  et  $\epsilon(-t)$  n'ont pas d'intersection. On sait cependant que ces deux fonctions ont des transformées de Laplace puisque les transformées de Fourier correspondantes sont données par les formules (7.72) et (7.74) d'où l'on déduit

$$L[1] = 2\pi\delta(jp) \quad \sigma = 0 \quad (8.22)$$

$$L[\text{sgn}(t)] = 2/p \quad \sigma = 0 \quad (8.23)$$

### 8.1.13 Règle de translation de la transformée

Par analogie avec le paragraphe 7.3.22, on trouve sans peine que

$$L[\exp(-\lambda t)f(t)] = F(p + \lambda) \quad \sigma \in (a - \text{Re } \lambda, b - \text{Re } \lambda) \quad (8.24)$$

La formule (8.5) peut ainsi être déduite de (8.6) en posant  $\lambda = -b$ . De même

$$L[\exp(j\omega_0 t)\epsilon(t)] = (p - j\omega_0)^{-1} \quad \sigma \in (0, \infty) \quad (8.25)$$

Par la règle de superposition, on trouve

$$L[\epsilon(t) \cos \omega_0 t] = p/(p^2 + \omega_0^2) \quad \sigma \in (0, \infty) \quad (8.26)$$

$$L[\epsilon(t) \sin \omega_0 t] = \omega_0/(p^2 + \omega_0^2) \quad \sigma \in (0, \infty) \quad (8.27)$$

### 8.1.14 Règle de translation de l'original

Par analogie avec le paragraphe 7.3.22, on trouve que

$$L_{II}[f(t + \lambda)] = \exp(\lambda p)F(p) \quad \sigma \in (a, b) \quad (8.28)$$

Ainsi, par (8.6)

$$L_{II}[\epsilon(t + \lambda)] = p^{-1} \exp(\lambda p) \quad \sigma \in (0, \infty) \quad (8.29)$$

L'application de la règle se complique lorsque la transformée est  $L_I$ .

Si  $\lambda$  est négatif, la règle (8.28) peut être appliquée sans plus mais l'original de  $F(p) \exp(\lambda p)$  est  $\epsilon(t + \lambda)f(t + \lambda)$  et non  $f(t + \lambda)$ . En d'autres mots, même si  $f(t + \lambda)$

est différent de zéro sur  $t \in [\lambda, 0]$ , la transformée ne peut restituer cette partie de la fonction qui était ignorée par  $L_I[f(t)]$ .

Si  $\lambda$  est positif, la transformée unilatérale qui nous intéresse est celle de  $\epsilon(t)f(t + \lambda)$ . Si l'on introduit

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t) & t < \lambda \\ 0 & t > \lambda \end{cases}$$

on a

$$\epsilon(t)f(t + \lambda) = f(t + \lambda) - f_1(t + \lambda)$$

Dès lors la règle s'écrit

$$\begin{aligned} L_I[f(t + \lambda)] &= L_{II}[f(t + \lambda)] - L_{II}[f_1(t + \lambda)] \\ &= \exp(\lambda p) \left[ F(p) - \int_0^\lambda f(t) \exp(-pt) dt \right] \end{aligned} \quad (8.30)$$

A titre d'exemple, pour  $\lambda > 0$ ,

$$L_I[\epsilon(t + \lambda)] = \exp(\lambda p) \left[ p^{-1} - \int_0^\lambda \exp(-pt) dt \right] = p^{-1}$$

résultat évident puisque, pour  $\lambda > 0$ ,  $\epsilon(t + \lambda) = \epsilon(t)$ .

### 8.1.15 Règle de dérivation de l'original

Pour la transformée unilatérale, on a

$$\begin{aligned} L_I[df/dt] &= \int_0^\infty (df/dt) \exp(-pt) dt \\ &= [f(t) \exp(-pt)]_{0^-}^\infty + p \int_0^\infty f(t) \exp(-pt) dt \\ &= pF(p) - f(0^-) \end{aligned} \quad (8.31)$$

Si  $f(0^-) = 0$ , on a la règle

$$L_I[df/dt] = pF(p) \quad (8.32)$$

Si l'on avait utilisé  $L_{I+}$ , la formule (8.31) aurait été remplacée par

$$L_{I+}[df/dt] = pF(p) - f(0^+) \quad (8.33)$$

Pour la transformée bilatérale on a de même

$$L_{II}[df/dt] = pF(p) \quad (8.34)$$

pourvu que

$$[f(t) \exp(-pt)]_{-\infty}^\infty = 0 \quad (8.35)$$



En général (8.35) ne sera vérifié que dans un certain domaine de convergence qui ne coïncidera pas nécessairement avec celui de  $F(p)$ . Toutes les possibilités peuvent être rencontrées. A titre d'exemple,  $L[\epsilon(t)] = p^{-1}$  converge dans le demi-plan de droite et sa dérivée  $L[\delta(t)] = pp^{-1} = 1$  converge dans tout le plan. Par contre  $L\{d[\epsilon(t) \sin \omega_0 t]/dt\} = L[\omega_0 \epsilon(t) \cos \omega_0 t]$  et par (8.26) et (8.27) la transformée de la dérivée a même domaine de convergence que la fonction.

On ne peut donc pas énoncer de règle générale. Si la transformée de la dérivée s'obtient simplement par multiplication par  $p$ , le domaine de convergence est à spécifier indépendamment.

### 8.1.16 Exemple

Par (8.7) et (8.34), on a

$$L[\delta^{(n)}(t)] = p^n \quad (8.36)$$

Comme il s'agit toujours d'une fonction entière, le domaine de convergence s'étend à la totalité du plan. Dès lors on peut en déduire en général

$$L^{-1}[\Sigma a_n p^n] = \Sigma a_n \delta^{(n)}(t) \quad \sigma \in (-\infty, +\infty) \quad (8.37)$$

### 8.1.17 Règle de dérivation de la transformée

Par analogie avec le paragraphe 7.3.24, on trouve

$$L[-tf(t)] = dF/dp \quad \sigma \in (a, b) \quad (8.38)$$

A titre d'exemple, on obtient à partir de (8.6),

$$L[t^n \epsilon(t)/n!] = p^{-(n+1)} \quad \sigma \in (0, \infty) \quad (8.39)$$

### 8.1.18 Règles relatives à la multiplication et à la convolution

Soit  $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$ . On a

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(-pt) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f_1(\tau) f_2(t-\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f_1(\tau) \exp(-p\tau) \int_{-\infty}^{\infty} d(t-\tau) f_2(t-\tau) \exp[-p(t-\tau)] \\ &= F_1(p) F_2(p) \end{aligned} \quad (8.40)$$

Cette règle est l'analogue de celle énoncée au paragraphe 7.3.27. La transformée  $F(p)$  converge dans l'intersection des domaines de convergence de  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$ .

Réciproquement, on a comme au paragraphe 7.3.28 la règle liant le produit des originaux au produit de convolution des transformées.

$$L[f_1(t) f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(s) F_2(p-s) \frac{ds}{2\pi j}$$

où l'intégration s'effectue le long d'une droite  $\sigma = \operatorname{Re} s$  constante. La fonction à intégrer n'a de sens a priori que dans un domaine qui est l'intersection de  $(a_1, b_1)$  et  $(\sigma - a_2, \sigma - b_2)$ .

Pour que cette intersection ne soit pas vide, il faut que

$$\sigma \in (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

### 8.1.19 Règle d'intégration de l'original

Par 7.103, on sait que l'intégrale d'une fonction peut être obtenue par convolution avec l'échelon unité. Considérons donc le produit  $p^{-1}F(p)$ . Par (8.6), on a

$$L_{\Pi}^{-1} [F(p)/p] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \epsilon(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \quad (8.41)$$

dans l'intersection du domaine de  $F(p)$  et de  $\sigma > 0$ , domaine de convergence de  $p^{-1}$ .

Par contre, le même produit considéré dans l'intersection de  $\sigma < 0$  et de  $\sigma \in (a, b)$ , a pour original par (8.21)

$$L_{\Pi}^{-1} [F(p)/p] = \int_{\infty}^t f(\tau) d\tau \quad (8.42)$$

Dans le cas de  $L_1$ , la règle (8.41) peut être spécialisée en remplaçant la limite inférieure d'intégration par 0.

### 8.1.20 Théorème de la valeur finale

A partir de (8.31), on peut écrire

$$pF(p) = f(0-) + \int_{0-}^{\infty} (df/dt) \exp(-pt) dt \quad (8.43)$$

Si l'on fait tendre  $p$  vers zéro, il vient

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \quad (8.44)$$

dans le cas où ces limites existent. Le comportement à l'origine de la transformée décrit ainsi celui à l'infini de l'original. A titre d'exemple

$$\lim_{p \rightarrow 0} p/p = 1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t)$$

Par contre l'application à (8.26) n'a pas de sens puisque  $f(t)$  ne tend vers aucune limite.

### 8.1.21 Théorème de la valeur initiale

Si dans (8.43) on fait tendre  $\operatorname{Re} p$  vers l'infini, il vient

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) \quad (8.45)$$

dans le cas où la fonction ne présente pas de discontinuité à l'origine. On vérifie cette formule sans peine pour (8.27). Si  $f(t)$  présente une discontinuité d'amplitude  $\Delta = f(0+) - f(0-)$ ,  $df/dt$  contient une distribution  $\Delta\delta(t)$  et l'intégrale de (8.43) vaut  $[f(0+) - f(0-)]$ . Finalement que la fonction soit continue ou non, l'on a toujours

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0+) \quad (8.46)$$

Il faut remarquer que ces deux théorèmes ont été démontrés en utilisant la transformée unilatérale. Il est vain de vouloir les appliquer à la transformée bilatérale d'une fonction non causale comme  $\text{sgn } t$ . On voit par (8.23) que la formule (8.45) n'est pas correcte.

## 8.2. CALCUL OPÉRATIONNEL

### 8.2.1 Principe

L'usage de la transformée de Laplace ne peut mieux se comparer qu'à celui fait jadis des logarithmes. Tant qu'on ne disposait pas de machines à calculer, la multiplication de deux nombres comportant beaucoup de chiffres significatifs était une opération à ce point fastidieuse et sujette à erreurs qu'il devenait préférable de faire le détour apparent par les logarithmes.

Le mécanisme est bien connu. Si l'on doit effectuer l'opération  $AB$ , on consulte une table de logarithmes qui fournit  $\log A$  et  $\log B$ , on effectue  $\log A + \log B$  et, en consultant à nouveau la table, on trouve l'antilogarithme de cette somme qui est précisément  $AB$ . Une procédure analogue est suivie si l'on désire calculer un quotient, une puissance, une racine. De façon générale, le schéma se résume ainsi : consulter un dictionnaire, effectuer l'opération transposée selon les règles de la grammaire, consulter le dictionnaire à rebours.

Le calcul opérationnel se déroule selon ce schéma qui sera explicité à la section 8.3. Ayant à résoudre une équation différentielle, on prend la transformée de Laplace par l'intermédiaire du dictionnaire des fonctions connues, on remplace les dérivations par des opérations algébriques grâce à la grammaire, on revient aux fonctions du temps en consultant à rebours le dictionnaire.

Le but de la présente section est de fournir les outils de ce travail, dictionnaire et grammaire, condensant les résultats de la section précédente, et d'exposer la partie la plus délicate de la méthode, celle du passage de la transformée à l'original qui ne se fait pas par quadrature de la formule d'inversion (8.15) mais au moyen de développements.

### 8.2.2 Dictionnaire de la transformée de Laplace

Original	Transformée	Domaine de convergence
1 $\epsilon(t)$	$p^{-1}$	$(0, \infty)$
2 $-\epsilon(-t)$	$p^{-1}$	$(-\infty, 0)$
3 $\text{sgn } t$	$2p^{-1}$	0

4	$\delta(t)$	1	$(-\infty, \infty)$
5	$\delta^n(t)$	$p^n$	$(-\infty, \infty)$
6	1	$2\pi\delta(jp)$	0
7	$\epsilon(t)\exp(-\alpha t)$	$(p + \alpha)^{-1}$	$(-\operatorname{Re} \alpha, \infty)$
8	$\epsilon(t)\cosh(\alpha t)$	$p(p^2 - \alpha^2)^{-1}$	$( \operatorname{Re} \alpha , \infty)$
9	$\epsilon(t)\sinh(\alpha t)$	$\alpha(p^2 - \alpha^2)^{-1}$	$( \operatorname{Re} \alpha , \infty)$
10	$\exp(-t^2)$	$\sqrt{\pi}\exp(p^2/4)$	$(-\infty, \infty)$
11	$\epsilon(t)\cos\omega_0 t$	$p(p^2 + \omega_0^2)^{-1}$	$(0, \infty)$
12	$\epsilon(t)\sin\omega_0 t$	$\omega_0(p^2 + \omega_0^2)^{-1}$	$(0, \infty)$
13	$\epsilon(t)e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t$	$(p + \alpha)[(p + \alpha)^2 + \omega_0^2]^{-1}$	$(-\alpha, \infty)$
14	$\epsilon(t)e^{-\alpha t}\sin\omega_0 t$	$\omega_0[(p + \alpha)^2 + \omega_0^2]^{-1}$	$(-\alpha, \infty)$
15	$\epsilon(t)\sin(\omega_0 t + \Phi)$	$\frac{p\sin\Phi + \omega_0\cos\Phi}{p^2 + \omega_0^2}$	$(0, \infty)$
16	$\epsilon(t)\cos(\omega_0 t + \Phi)$	$\frac{p\cos\Phi - \omega_0\sin\Phi}{p^2 + \omega_0^2}$	$(0, \infty)$
17	$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(jp - \omega_0) + \delta(jp + \omega_0)]$	0
18	$[t^n \epsilon(t)]/n!$	$p^{-(n+1)}$	$(0, \infty)$
19	$[t^n e^{-\alpha t} \epsilon(t)]/n!$	$(p + \alpha)^{-(n+1)}$	$(-\alpha, \infty)$
20	$\epsilon(t)e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t + \Phi)$	$\frac{p\cos\Phi + \alpha\cos\Phi - \omega_0\sin\Phi}{p^2 + 2\alpha p + \alpha^2 + \omega_0^2}$	$(-\alpha, \infty)$

### 8.2.3 Grammaire de la transformée de Laplace

Original	Transformée	Domaine de convergence
$f(t)$	$F(p)$	$(a, b)$
$\sum k_i f_i(t)$	$\sum k_i F_i(p)$	à déterminer
$f(t/\lambda)$	$ \lambda  F(\lambda p)$	$(a/\lambda, b/\lambda) \quad \lambda > 0$ $(b/\lambda, a/\lambda) \quad \lambda < 0$
$e^{-\lambda t} f(t)$	$F(p + \lambda)$	$(a - \operatorname{Re} \lambda, b - \operatorname{Re} \lambda)$
$f(t + \lambda)$	$e^{\lambda p} F(p)$	$(a, b)$
$L_I[df/dt]$	$pF(p) - f(0^-)$	à déterminer
$L_{II}[df/dt]$	$pF(p)$	à déterminer
$-tf(t)$	$dF/dp$	$(a, b)$
$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(p) F_2(p)$	à déterminer
$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$F(p)/p$	$(0, b) \quad a < 0$ $(a, b) \quad a > 0$

### 8.2.4 Second développement d'Heaviside

Ainsi que nous le verrons plus loin, la résolution des équations différentielles ordinaires nous mènera au problème de l'inversion d'une fraction rationnelle réelle en  $p$ , c'est-à-dire du rapport de deux polynômes à coefficients réels. Supposons en premier lieu que cette fraction  $N(p)/D(p)$  soit telle que le degré de  $N$  est inférieur à celui de  $D$  et que les racines  $p_i$  de  $D(p) = 0$  sont simples. Dans ce cas, on peut exprimer la fraction rationnelle comme somme des parties principales en ses différents pôles, c'est-à-dire sous la forme

$$N(p)/D(p) = \sum_i A_i (p - p_i)^{-1} \quad (8.47)$$

Pour calculer  $A_i$ , il suffit de multiplier membre à membre (8.47) par  $(p - p_i)$ . On trouve

$$A_i = (p - p_i)N(p)/D(p) \Big|_{p=p_i} \quad (8.48)$$

où le second membre de (8.48) prend une vraie valeur différente de zéro par simplification du facteur  $(p - p_i)$  implicitement contenu dans  $D(p)$ .

Supposons, ce qui revient à un choix convenable des notations, que  $p_1$  soit un des pôles le plus à droite dans le plan complexe, c'est-à-dire ceux dont la partie réelle est la plus grande. Dans le demi-plan défini par  $\sigma \in (\operatorname{Re} p_1, \infty)$  chaque fraction simple de (8.47) admet pour original

$$\mathcal{L}_1^{-1} [A_i (p - p_i)^{-1}] = A_i \epsilon(t) \exp(p_i t) \quad (8.49)$$

et donc

$$\mathcal{L}_1^{-1} [N(p)/D(p)] = \epsilon(t) \sum_i A_i \exp(p_i t) \quad (8.50)$$

La somme (8.50) comportera d'une part des racines réelles, qui produiront comme originaux des exponentielles

$$\epsilon(t) \exp \alpha t \quad (8.51)$$

D'autre part, les racines  $p_i$  complexes existent toujours par paires de complexes conjuguées, puisque  $D(p)$  est un polynôme à coefficients réels. A tout pôle  $p_i = \alpha_i + j\omega_i$  correspond un pôle  $p_i^* = \alpha_i - j\omega_i$ . Les résidus correspondants seront aussi complexes conjugués comme cela ressort de (8.48). Dès lors en regroupant ces deux fractions, il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^{-1} \left\{ \frac{A_i}{p - \alpha_i - j\omega_i} + \frac{A_i^*}{p - \alpha_i + j\omega_i} \right\} = \\ = 2\epsilon(t) |A_i| \exp(\alpha_i t) \cos(\omega_i t + \varphi_i) \end{aligned} \quad (8.52)$$

où  $\varphi_i = \arg A_i$ . Dans le cas particulier où les racines sont imaginaires pures,  $\alpha_i = 0$  et l'on a un terme du type

$$2\epsilon(t) |A_i| \cos(\omega_i t + \varphi_i) \quad (8.53)$$

### 8.2.5 Cas des racines multiples

Supposons que la racine  $p_0$  de  $D(p)$  soit de multiplicité  $m$ . Dans ce cas, la partie principale de  $N/D$  correspondant à  $p_0$  prend la forme

$$\sum_{k=1}^m A_{0,k} (p - p_0)^{-k} \quad (8.54)$$

Pour calculer les coefficients  $A_{0,k}$  il suffit de récrire (8.47) multiplié par  $(p - p_0)^m$  sous la forme

$$(p - p_0)^m N(p)/D(p) = \sum_{k=1}^m A_{0,k} (p - p_0)^{m-k} + (p - p_0)^m F(p) \quad (8.55)$$

où  $F(p)$  groupe les parties principales relatives aux autres pôles. En posant  $p = p_0$ , on trouve

$$A_{0,m} = (p - p_0)^m N(p)/D(p) \Big|_{p=p_0} \quad (8.56)$$

De la même façon on trouve après dérivation des deux membres de (8.55)

$$A_{0,m-1} = \left\{ \frac{d}{dp} [(p - p_0)^m N(p)/D(p)] \right\} \Big|_{p=p_0}$$

En règle générale on trouve

$$r! A_{0,m-r} = \left\{ \frac{d^r}{dp^r} [(p - p_0)^m N(p)/D(p)] \right\} \Big|_{p=p_0} \quad (8.57)$$

En utilisant la formule 19 du dictionnaire 8.2.2, on trouve l'original d'une fraction du type de celles apparaissant dans le développement (8.54)

$$L^{-1}[(p - p_0)^{-k}] = t^{k-1} \exp(p_0 t) \epsilon(t)/(k-1)! \quad (8.58)$$

L'original de la partie principale relative à  $p_0$  s'écrit donc

$$\epsilon(t) \sum_{k=1}^m \frac{A_{0,k}}{(k-1)!} t^{k-1} \exp(p_0 t) \quad (8.59)$$

De même qu'au paragraphe 8.2.4, les racines  $p_0$  complexes sont regroupées par paires de conjuguées. Il en résulte que les racines multiples produisent dans l'original des termes  $t^k \exp(\alpha t)$ ,  $t^k \cos(\omega t + \varphi)$  ou  $t^k \exp(\alpha t) \cos(\omega t + \varphi)$  selon qu'elles sont réelles, imaginaires ou complexes. Des termes de ce type sont qualifiés de polynomiaux.

### 8.2.6 Commentaire

On peut résumer la situation décrite aux deux paragraphes précédents en disant que le terme général de l'original d'une fraction rationnelle s'écrit  $\epsilon(t) t^k \exp(\alpha t) \cos(\omega t + \varphi)$  où selon les cas  $k$ ,  $\alpha$  ou  $\omega$  peuvent être nuls. Le signe de  $\alpha$  joue un rôle important pour ce qui concerne le comportement à l'infini de l'original. Si  $\alpha > 0$  (racines dans le demi-plan de droite), celui-ci croîtra au delà de toute limite. Inversement si  $\alpha < 0$  (racines

dans le demi-plan de gauche), ces termes décroissent et tendent vers zéro : l'existence d'un facteur  $t^k$  ne change rien à cette règle car la décroissance de l'exponentielle l'emporte ainsi qu'un développement en série de Maclaurin le montre. Dès lors la situation peut être résumée dans le tableau 8.9.

**Tableau 8.9** Valeur à l'infini de l'original d'une fraction rationnelle

Valeur de		Multiplicité de la racine	
$\alpha$	$\omega$	$m = 1$	$m > 1$
$> 0$	$= 0$	$\infty$	$\infty$
$< 0$	$= 0$	$0$	$0$
$> 0$	$\neq 0$	$\infty$	$\infty$
$< 0$	$\neq 0$	$0$	$0$
$= 0$	$\neq 0$	finie $\neq 0$	$\infty$
$= 0$	$= 0$	finie $\neq 0$	$\infty$

On remarquera en particulier que la présence de racines multiples sur l'axe imaginaire produit un original croissant indéfiniment.

Compte tenu de ces résultats, on peut énoncer le théorème 8.2.7.

### 8.2.7 Théorème

L'original d'une fraction rationnelle est borné pour  $t$  tendant vers l'infini ssi tous les pôles sont situés dans le demi-plan de gauche, frontière comprise, et si les pôles sur la frontière sont simples.

L'original d'une fraction rationnelle a une limite nulle ssi tous les pôles sont situés dans le demi-plan de gauche, frontière exclue.

### 8.2.8 Premier développement d'Heaviside

Le développement, traité à partir du paragraphe 8.2.4, supposait que le degré du dénominateur dépassait celui du numérateur. Au cas où cette condition n'est pas vérifiée, on peut effectuer la division des deux polynômes  $N$  et  $D$ . Le développement comportera, en plus des fractions simples, une partie polynomiale qui, par le paragraphe 8.1.16, correspond à des distributions singulières. Le comportement de l'original dans le voisinage de  $t = 0$  dépend de ces distributions. Le premier développement de Heaviside a pour but d'investiguer ce comportement dans le cas général. Pour la simplicité nous supposons que le degré du numérateur  $m$  ne dépasse pas celui du dénominateur  $n$  de plus d'une unité. Pratiquement on ne rencontre pas de différence plus forte. En effet, si l'on se cantonne à l'étude des systèmes stables, on sait par les paragraphes 2.2.11 et 2.2.12 que les pôles sur l'axe imaginaire ( $y$  compris l'infini) ne peuvent être multiples.

Soit

$$N(p) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k p^k$$

$$D(p) = \sum_{k=0}^n b_k p^k$$

En divisant haut et bas par  $p^n$ , on trouve

$$N(p)/D(p) = \frac{\Delta_1}{b_n} p - \frac{\Delta_2}{b_n^2} + \frac{\Delta_3}{b_n^3} p^{-1} - \dots \quad (8.60)$$

où les  $\Delta_i$  sont les mineurs principaux du déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{n+1} & b_n & 0 & 0 & - \\ a_n & b_{n-1} & b_n & 0 & - \\ a_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ a_0 & 0 & - & - & - \\ 0 & 0 & - & - & - \\ - & - & - & - & - \end{vmatrix} \quad (8.61)$$

Pour le démontrer il suffit de récrire (8.60) sous la forme

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k p^k = \left[ \sum_{k=1}^n b_k p^k \right] \left[ \sum_{r=-\infty}^1 e_r p^r \right]$$

où les  $e_r$  représentent la suite infinie des coefficients inconnus. En identifiant les coefficients des termes de même puissance en  $p$ , on obtient un système d'équations linéaires en les inconnues  $e_r$  dont la solution est celle utilisée en (8.60). L'original de (8.60) s'écrit

$$\mathcal{L}_1^{-1}[N/D] = \Delta_1 \delta'(t)/b_n - \Delta_2 \delta(t)/b_n^2 + \Delta_3 \epsilon(t)/b_n^3 - \dots \quad (8.62)$$

Dès lors le comportement en  $t = 0$  peut se présenter comme suit

- $m = n + 1$  ou  $a_{n+1} \neq 0$ . Il y a une distribution singulière  $\delta'$ .
- $m = n$ ,  $a_{n+1} = 0$ ,  $a_n \neq 0$ . Il y a une distribution  $\delta$  à l'origine.
- $m = n - 1$ ,  $a_{n+1} = 0$ ,  $a_n = 0$ ,  $a_{n-1} \neq 0$ . L'original présente une discontinuité à l'origine.
- $m < n - 1$ . L'original est continu à l'origine.

### 8.2.9 Exemple

Soit la fraction rationnelle

$$\frac{N}{D} = \frac{p^3 + 3p^2 + 4p + 3}{p^2 + 2p + 1}$$

Si l'on effectue la division, on trouve

$$\frac{N}{D} = p + 1 + \frac{p + 2}{p^2 + 2p + 1}$$



Comme le dénominateur de la fraction restante comporte une racine double son développement devient

$$\frac{N}{D} = p + 1 + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2}$$

L'original s'écrit

$$\mathcal{L}_1^{-1}[N/D] = \delta'(t) + \delta(t) + \epsilon(t) [\exp(-t) + t \exp(-t)]$$

A l'origine il se comporte comme une distribution  $\delta'$ . A l'infini il tend vers zéro.

### 8.3. RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ORDINAIRE

#### 8.3.1 Equation homogène du premier ordre

Soit à résoudre pour  $t > 0$  l'équation

$$a_1 x' + a_0 x = 0 \quad a_1, a_0 \in R \quad (8.63)$$

avec la condition  $x(0-) = X_0$ . Si l'on prend la transformée de Laplace unilatérale du premier membre, on obtient par les règles de superposition et de dérivation

$$a_1 pX(p) - a_1 X_0 + a_0 X(p) = 0 \quad (8.64)$$

où  $X(p) = \mathcal{L}_1[x(t)]$ . En posant  $\alpha = a_0/a_1$ , on trouve

$$X(p) = X_0 (p + \alpha)^{-1} \quad (8.65)$$

et, en utilisant la formule 7 du dictionnaire 8.2.2 correspondant au domaine de convergence  $(-\operatorname{Re} \alpha, \infty)$ , on obtient l'original

$$x(t) = X_0 \epsilon(t) \exp(-\alpha t) \quad (8.66)$$

dont on vérifie sans peine qu'il satisfait l'équation (8.63) et la condition initiale imposée.

Dans ce qui suit, on utilisera systématiquement la transformée unilatérale dont on voit sur l'exemple considéré qu'elle correspond bien aux données du problème à savoir la résolution de l'équation pour  $t > 0$ . La formule (8.66) n'est donc pas valable pour  $t < 0$ .

#### 8.3.2 Equation homogène d'un ordre quelconque

Soit à résoudre l'équation

$$\sum_{k=0}^n a_k x^{(k)} = 0 \quad a_k \in R \quad (8.67)$$

Les valeurs initiales de  $x$  et de ses  $n - 1$  premières dérivées sont notées  $X_0^{(k)}$ . La transformée de Laplace d'un terme de la somme (8.67) s'écrit

$$a_k \left[ p^k X(p) - \sum_{m=0}^{k-1} X_0^{(m)} p^{k-1-m} \right] \quad (8.68)$$

Par la règle de superposition, (8.67) a pour équation transformée, la somme étendue de 0 à  $n$  des expressions (8.68). En posant

$$P(p) = \sum_{k=0}^n a_k p^k$$

$$Q(p) = \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{k-1} a_k X_0^{(m)} p^{k-1-m}$$

on trouve, pour transformée de (8.67), l'équation

$$P(p)X(p) = Q(p) \quad (8.69)$$

et donc

$$x(t) = L^{-1} [Q(p)/P(p)] \quad (8.70)$$

Comme  $P(p)$  est un polynôme de degré  $n$  ( $a_n \neq 0$ ) et  $Q(p)$  de degré  $n - 1$  au plus ( $X_0^{(n-1)}$  peut être nul), on se trouve dans les conditions du § 8.2.4. La transformée de  $x$  est une fraction rationnelle et  $x$  est une somme de termes des types recensés au § 8.2.6. Leur expression générale est donc  $Ae(t) t^k \exp(\alpha t) \cos(\omega t + \varphi)$ . Les paramètres  $k$  (multiplicité des racines),  $\alpha$  et  $\omega$  (valeur des racines) dépendent uniquement de  $P(p)$  et donc des coefficients  $a_k$ . Les paramètres  $A$  et  $\varphi$  dépendent de  $P(p)/Q(p)$ , c'est-à-dire à la fois des coefficients  $a_k$  et des valeurs initiales  $X_0^{(k)}$ .

Le type de fonctions du temps intervenant dans la solution dépend donc uniquement des solutions de

$$P(p) = 0 \quad (8.71)$$

qui est l'équation caractéristique. Les racines de ce polynôme sont les pulsations propres du système. L'amplitude et la phase des différents termes dépendent aussi des conditions initiales. En particulier si  $X_0^{(k)} = 0 \forall k$ ,  $x(t) \equiv 0$ .

En appliquant le théorème 8.1.21, il vient

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{a_n X_0 p^n + \dots}{a_n p^n + \dots} = X_0$$

De même en appliquant  $(n - 1)$  fois la règle de dérivation, on prouve que les  $(n - 1)$  premières dérivées de  $x(t)$  ont une limite à droite égale à la valeur initiale imposée à gauche de l'origine. En résumé,  $x(t)$  et ses  $(n - 1)$  premières dérivées ne présentent pas de discontinuités à l'origine. Il s'agit d'un cas tout à fait particulier du problème général évoqué au paragraphe 8.2.8. L'annulation des  $\Delta_i$  provient de la nature particulière des  $b_k$  qui sont des combinaisons linéaires des  $a_k$ .

### 8.3.3 Exemple

Soit à résoudre l'équation

$$x'' + 4x' + 3x = 0$$

avec  $X_0 = x(0^-) = 2$  et  $X'_0 = x'(0^-) = 1$ . La transformée de Laplace s'écrit

$$p^2 X(p) - 2p - 1 + 4[pX(p) - 2] + 3X(p) = 0$$

On en déduit

$$X(p) = \frac{2p + 9}{(p + 1)(p + 3)} = \frac{7}{2(p + 1)} - \frac{3}{2(p + 3)}$$

dont l'original s'écrit

$$x(t) = [7/2 \exp(-t) - 3/2 \exp(-3t)] \epsilon(t)$$

On vérifie que cette solution remplit bien les conditions imposées.

### 8.3.4 Equation différentielle avec second membre

Soit à résoudre l'équation

$$\sum_{k=0}^n a_k x^{(k)} = y(t) \quad (8.72)$$

où les conditions initiales  $X_0^{(k)}$  sont spécifiées pour  $k$  allant de 0 à  $n - 1$ . Soit  $Y(p)$  la transformée unilatérale de  $y(t)$ . En prenant la transformée de (8.72), on trouve

$$P(p)X(p) = Q(p) + Y(p) \quad (8.73)$$

où les polynômes  $P$  et  $Q$  sont ceux du paragraphe 8.3.2. La solution peut donc s'écrire

$$x(t) = L_1^{-1} \left[ \frac{Q(p)}{P(p)} \right] + L_1^{-1} \left[ \frac{Y(p)}{P(p)} \right] \quad (8.74)$$

La solution s'obtient par superposition de (8.70), solution générale de l'équation homogène, et de  $L_1^{-1} [Y/P]$ , solution particulière de l'équation avec second membre. Dans le cas particulier où toutes les valeurs initiales sont nulles, seul demeure ce second terme.

## 8.4. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

### 8.4.1 Equation intégro-différentielle

Nous considérons uniquement le cas de l'intégrale simple puisque c'est le seul qui est nécessaire par suite des définitions (1.11) et (1.16). La formule (8.41) montre que la présence d'une intégrale dans une équation ne modifie rien d'essentiel par rapport à la méthode du paragraphe 8.3.2. En posant

$$\int_0^t x(\tau) d\tau = x^{(-1)}$$

la seule différence est la limite inférieure de l'indice de sommation  $k$ , qui devient ici  $-1$ . Dès lors  $P(p)$  n'est plus un polynôme;  $H(p)$  a pour numérateur  $p$ . Du reste la discussion de  $H(p)$  à la section 8.3 a été faite dans l'hypothèse générale où le numérateur est différent d'une constante.

Il n'est d'ailleurs pas indispensable de résoudre directement cette équation intégrale-différentielle. Par changement de variable ou par dérivation, on peut se ramener à une équation purement différentielle. Pour simplifier l'exposé, nous traiterons les différentes méthodes dans leur application à un cas particulier.

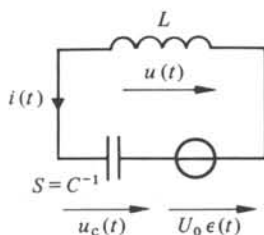


Fig. 8.10

Soit le circuit de la figure 8.10. Ce circuit a été constitué au temps  $t = 0$  en connectant la capacité  $C$  dont la charge vaut  $Q_0 = CU_0$  à l'inductance  $L$  dont le courant initial est nul. L'équivalence de la figure 2.12 a été utilisée pour représenter la condition initiale par une source. On a donc

$$q_c(0-) = i(0-) = u_c(0-) = 0$$

Quant aux équations elles peuvent se déduire des relations

$$u = u_c + U_0 \epsilon(t) = -L di/dt = -L d^2 q_c/dt^2 \quad (8.75)$$

$$i = C du_c/dt \quad (8.76)$$

$$u = S \int_0^t i(\tau) d\tau + U_0 \epsilon(t) = S(q_c + Q_0 \epsilon(t)) \quad (8.77)$$

En combinant (8.75) avec une des relations (8.76) ou (8.77), on obtient une description complète du circuit.

Dans le processus d'élimination entre les deux équations initiales, on peut choisir entre  $i$  et  $u$  comme variables à éliminer. Si c'est  $i$  que l'on choisit, (8.75) et (8.76) donnent

$$d^2 u_c/dt^2 + \omega_0^2 u_c + \omega_0^2 U_0 \epsilon(t) = 0 \quad (8.78)$$

avec  $LC = \omega_0^{-2}$ . Par calcul opérationnel, on trouve

$$U_c(p^2 + \omega_0^2) = -\omega_0^2 U_0/p$$

et, puisque  $U = U_c + U_0/p$

$$U(p^2 + \omega_0^2) = p U_0 \quad (8.79)$$

$$u(t) = \epsilon(t) U_0 \cos \omega_0 t \quad (8.80)$$

Par contre, si l'on choisit d'éliminer  $u$  entre (8.75) et (8.77), on obtient

$$di/dt + \omega_0^2 \int_0^t i \, d\tau + \omega_0^2 Q_0 \epsilon(t) = 0 \quad (8.81)$$

Par calcul opérationnel, on en déduit

$$pI + \omega_0^2 I/p + \omega_0^2 Q_0/p = 0 \quad (8.82)$$

et donc

$$I = - \frac{\omega_0^2 Q_0}{p^2 + \omega_0^2}$$

$$i(t) = - \epsilon(t) \omega_0 Q_0 \sin \omega_0 t \quad (8.83)$$

Cette solution est identique à celle fournie par (8.80) comme on le vérifie en opérant la substitution dans les équations (8.75) à (8.77).

Au lieu de résoudre directement (8.81), on peut dériver l'équation

$$d^2 i/dt^2 + \omega_0^2 i + \omega_0^2 Q_0 \delta(t) = 0 \quad (8.84)$$

dont la transformée s'écrit

$$p^2 I + \omega_0^2 I + \omega_0^2 Q_0 = 0$$

et coïncide avec (8.82).

Enfin on peut opérer un changement de variable dans (8.81) et l'écrire sous la forme

$$d^2 q_c/dt^2 + \omega_0^2 q_c + \omega_0^2 Q_0 \epsilon(t) = 0 \quad (8.85)$$

dont on voit par comparaison avec (8.78) qu'elle fournit la même solution.

#### 8.4.2 Commentaire

Si l'on analyse les quatre procédés utilisés au paragraphe précédent, on peut les qualifier ainsi : deux consistent en un choix des variables telles que les équations ne fassent intervenir aucune intégrale; un consiste en la résolution directe de l'équation intégrale; un consiste en la dérivation d'une équation différentielle. Bien entendu tous les quatre fournissent une seule et même solution.

L'utilisation systématique, ainsi que cela a été fait en (8.85) des variables flux ou charge, n'est guère pratiquée. On verra au chapitre 4 que les méthodes classiques de mise en équation choisissent comme inconnues des courants ou des tensions. Dans cette optique, on aboutit à des équations du type (8.81) que l'on résout directement sans prendre la peine d'en dériver la forme (8.84). Par ailleurs, la méthode, plus récente, de mise en équation par l'espace des états repose essentiellement sur un choix de variables mixtes (courants et tensions) de façon à n'avoir au départ que des équations différentielles du premier ordre. C'est ce choix qui a été opéré dans la première méthode et qui est étudié à la section 4.7.

### 8.4.3 Commentaire

Le problème des conditions initiales doit être traité avec beaucoup de soin. On remarquera en particulier la présence du facteur  $\epsilon(t)$  dans le dernier terme de (8.81) : en effet on s'occupe de résoudre l'équation pour  $t > 0$ . La présence du facteur  $\epsilon(t)$  produit en (8.84) le facteur  $\delta(t)$  indispensable pour assurer la cohérence des deux équations.

On remarquera de même que, dans le calcul de la transformée de  $d^2 i/dt^2$  les conditions initiales n'interviennent pas. En toute généralité, il faut écrire  $L[d^2 i/dt^2] = p^2 I - pI_0 - I_0'$ . Par hypothèse  $I_0 = 0$ ; de plus  $I_0' = i'(0-) = 0$  puisque en  $0-$  le circuit n'existe pas. Par contre  $i'(0+) = -\omega_0^2 Q_0$ . Il faut donc soigneusement distinguer entre les limites à gauche et à droite des diverses grandeurs.

### 8.4.4 Résolution d'un système d'équations différentielles

Afin d'éviter de lourdes notations, nous nous bornerons à un système de deux équations différentielles du premier ordre.

Soit le système d'équations

$$(a_{11}x' + a_{12}x) + (b_{11}y' + b_{12}y) = z_1(t) \quad (8.86)$$

$$(a_{21}x' + a_{22}x) + (b_{21}y' + b_{22}y) = z_2(t) \quad (8.87)$$

et les valeurs initiales  $X_0$  et  $Y_0$ . Dans l'espace des transformées, ces équations s'écrivent

$$(a_{11}p + a_{12})X + (b_{11}p + b_{12})Y = Z_1 + a_{11}X_0 + b_{11}Y_0 \quad (8.88)$$

$$(a_{21}p + a_{22})X + (b_{21}p + b_{22})Y = Z_2 + a_{21}X_0 + b_{21}Y_0 \quad (8.89)$$

Soit  $D$  le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11}p + a_{12} & b_{11}p + b_{12} \\ a_{21}p + a_{22} & b_{21}p + b_{22} \end{pmatrix} \quad (8.90)$$

qui n'est pas identiquement nul si l'on suppose les équations linéairement indépendantes. Posons

$$F_1 = Z_1 + a_{11}X_0 + b_{11}Y_0 \quad (8.91)$$

$$F_2 = Z_2 + a_{21}X_0 + b_{21}Y_0 \quad (8.92)$$

Avec ces notations la solution du système (8.88) et (8.89) s'obtient par la règle de Cramer sous la forme

$$X = \frac{1}{D} \det \begin{pmatrix} F_1 & b_{11}p + b_{12} \\ F_2 & b_{21}p + b_{22} \end{pmatrix} \quad (8.93)$$

$$Y = \frac{1}{D} \det \begin{pmatrix} a_{11}p + a_{12} & F_1 \\ a_{21}p + a_{22} & F_2 \end{pmatrix} \quad (8.94)$$

### 8.4.5 Principe de superposition

Les éléments de la première colonne de (8.93) sont les sommes (8.91) et (8.92). Le déterminant est égal à la somme des déterminants des trois matrices

$$\begin{pmatrix} Z_1 & b_{11}p + b_{12} \\ Z_2 & b_{21}p + b_{22} \end{pmatrix} \quad (8.95)$$

$$X_0 \begin{pmatrix} a_{11} & b_{11}p + b_{12} \\ a_{21} & b_{21}p + b_{22} \end{pmatrix} \quad (8.96)$$

$$Y_0 \begin{pmatrix} b_{11} & b_{11}p + b_{12} \\ b_{21} & b_{21}p + b_{22} \end{pmatrix} \quad (8.97)$$

Ceci permet de généraliser tous les résultats antérieurs. La réponse  $x(t)$  est la somme de la réponse propre donnée par (8.96) et (8.97) et de la réponse forcée (8.95). Le déterminant de cette dernière matrice est lui-même développable comme

$$Z_1 (b_{21}p + b_{22}) - Z_2 (b_{11}p + b_{12}) \quad (8.98)$$

et la réponse forcée résulte de la superposition des réponses aux excitations  $z_1(t)$  et  $z_2(t)$ . L'étude d'un système peut donc légitimement se faire par étude de sa réponse à une seule excitation. En supposant le système dans son état quiescent et  $z_2(t) \equiv 0$ , on aura

$$X(p) = Z_1(p) \frac{b_{21}p + b_{22}}{D} = Z_1(p)H(p) \quad (8.99)$$

La fonction de réponse  $H(p)$  est la transformée de la réponse  $x(t)$  à un signal  $z_1(t) = \delta(t)$ . En général c'est une fraction rationnelle réelle de  $p$ .

En résumé, la réponse d'un système peut être calculée par superposition des effets de chaque condition initiale et de chaque source considérées séparément.

### 8.4.6 Définition

La dépendance par rapport au temps de la réponse impulsionnelle sera fixée par les racines de l'équation  $D = 0$  qui est l'équation caractéristique du système, correspondant à (8.71) dans le cas d'une seule équation différentielle. Ses racines sont appelées pulsations propres du système tout comme au paragraphe 8.3.2. L'équation (8.99) nous fournit un nouvel exemple d'une fonction de réponse qui n'est pas simplement l'inverse d'un polynôme. Le processus de résolution des systèmes d'équations montre que, dans le cas le plus général,  $H(p)$  sera toujours une fraction rationnelle réelle.

### 8.4.7 Compatibilité des conditions initiales

Considérons la réponse libre du système (8.86) et (8.87). La transformée de  $X$  s'écrit

$$X = \frac{D_1}{D} X_0 + \frac{D_2}{D} Y_0 \quad (8.100)$$

où  $D_1$  et  $D_2$  représentent les déterminants des matrices de (8.96) et (8.97). Par la règle 8.1.21

$$x(0+) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[ \frac{pD_1}{D} X_0 + \frac{pD_2}{D} Y_0 \right] \quad (8.101)$$

Si  $a_{11}b_{21} - b_{11}a_{21} \neq 0$ , cette expression est le coefficient de  $p^2$  dans  $D$  et dans  $pD_1$ ; dès lors  $pD_1 X_0/D$  tend vers  $X_0$ . Par (8.97), le coefficient du terme en  $p^2$  dans  $pD_2$  est nul et le second terme tend vers zéro. On montrerait par un raisonnement analogue que  $Y_0$  est bien la valeur à l'origine de la solution  $y(t)$ .

Par contre si  $a_{11}b_{21} - b_{11}a_{21} = 0$ , les polynômes  $D$ ,  $pD_1$  et  $pD_2$  sont du premier degré et les coefficients du terme en  $p$  sont respectivement

$$(a_{12}b_{21} - a_{22}b_{11} + a_{11}b_{22} - a_{21}b_{12}), \quad a_{11}b_{22} - a_{21}b_{12}$$

et

$$b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$$

On aura donc

$$x(0+) = k_1 X_0 + k_2 Y_0 \quad (8.102)$$

Cette dernière équation montre que la valeur initiale de la solution ne coïncide avec les données que si

$$X_0(1 - k_1) = k_2 Y_0 \quad (8.103)$$

En d'autres mots les conditions initiales ne peuvent être données de façon arbitraire : il existe une relation du type (8.103) entre elles.

#### 8.4.8 Systèmes dégénérés

Au § 8.4.4 on a supposé que le système d'équations était linéairement indépendant et donc que  $D \neq 0$ . Il reste à considérer le cas où  $D$  est identiquement nul. Dans le cadre de la théorie des circuits, rien n'empêche d'obtenir de tels systèmes dégénérés. Un exemple en sera donné au paragraphe suivant. Il reste qu'il s'agit là d'un cas académique : théoriquement le système est indéterminé et il existe toute une famille de solutions; pratiquement cette conclusion heurte notre intuition selon laquelle tout système physique a un comportement bien déterminé.

Il faut donc mettre ici en doute le processus par lequel la réalité physique a été transformée en un modèle mathématique. Il suffit en général de tenir compte des éléments parasites (pertes d'une bobine, p. ex) pour que cette indétermination révèle sa vraie nature : elle résulte d'une idéalisation outrancière et maladroite de la réalité.

#### 8.4.9 Exemple

Soit une paire de bobines parfaitement couplées caractérisées par les grandeurs  $L_{11} = 2, L_{12} = 4, L_{22} = 8$  avec les notations du § 1.4.8. Si les accès sont refermés sur des sources de tensions  $u_1$  et  $u_2$ , il faut par (1.45) que  $2u_1(t) = u_2(t)$ . Si cette relation



n'est pas réalisée, le circuit est incompatible au sens du § 1.2.2. Si cette relation est réalisée, (1.43) et (1.44) se réduisent à la seule équation

$$u_1 = 2 di_1/dt + 4 di_2/dt$$

Cette équation admet comme solutions n'importe quelle fonction  $i_1(t) = f(t)$  et  $di_2/dt = [u_1(t) - 2 df/dt]/4$ .

Il suffit de tenir compte des résistances internes des sources réelles pour que cette indétermination disparaisse.

## 8.5. EXERCICES

8.5.1. Soit la fonction  $f(t) = \epsilon(t + \lambda) - \epsilon(t - \lambda)$ . Calculer  $L_{II}[f(t)]$ . Quel est le domaine de convergence? Comparer ce domaine de convergence avec celui de  $L_{II}[\epsilon(t)]$ . Peut-on déduire la transformée de Fourier de la transformée de Laplace?

8.5.2. Démontrer les formules 8, 13, 15, 17 et 20 du dictionnaire.

8.5.3. Calculer la transformée de Laplace de la fonction égale à  $\sin(2\pi t/T)$  pour  $t \in [0, T]$  et identiquement nulle pour  $t \notin [0, T]$ .

8.5.4. Calculer la transformée de Laplace de la fonction  $f(t) = [\epsilon(t) - \epsilon(t + \lambda)] t$ .

8.5.5. Soit une fonction  $f_0(t)$  qui n'est différente de zéro que dans un intervalle  $[0, T]$ . Appelons  $F_0(p)$  sa transformée de Laplace. Calculer la transformée de

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_0(t - nT)$$

Appliquer au cas où  $f_0(t)$  est une alternance de sinusoïde.

8.5.6. Quel est l'original de  $(p^2 + a^2)^{-2}$ ,  $p(p^2 + a^2)^{-2}$ ,  $(p^2 - a^2)(p^2 + a^2)^{-2}$ .

8.5.7. Quel est l'original de la transformée unilatérale  $(p + \alpha)^{-1} (p + \beta)^{-1} \cdot (p + \lambda)^{-1}$ ? Quelle est l'original de la même fonction si elle est considérée comme transformée bilatérale? Discuter selon le domaine de convergence considéré.

8.5.8. Calculer la solution propre des équations :

$$\begin{array}{lll} x' + 3x = 0 & x(0) = 1 & \\ x'' + 5x' + 6x = 0 & x(0) = 1 & x'(0) = 0 \\ x'' + 9x = 0 & x(0) = 0 & x'(0) = 1 \end{array}$$

8.5.9. Calculer la solution normale des équations

$$x'' + 4x' + 4x = \epsilon(t) \sin t$$

$$x''' + 4x'' + 5x' + 2x = \epsilon(t) \exp(-3t)$$

8.5.10. Calculer la solution complète de

$$x'' + 9x = \exp(-2t) \quad x(0) = 1 \quad x'(0) = 1.$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. BERGE, *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris, 1958.
- [2] S. DUINKER, Traditors, a new class of non-energetic non-linear network elements, *Philips Research Reports*, vol. 14, pp. 29-51, Feb. 1959.
- [3] L. ZADEH, et C. DESOER, *Linear System Theory*, McGraw-Hill, New-York, 1963.
- [4] E. KUH, et R.A. ROHRER, *Theory of linear active networks*, Holden-Day, San Francisco, 1967.
- [5] F. GANTMACHER, *Théorie des matrices*, Dunod, Paris, 1966.
- [6] E. KUH, et R.A. ROHRER, The State-Variable Approach to Network Analysis, *Proc. of the IEEE*, vol. 53, no 7, pp. 672-686, July 1965.
- [7] S. SESHU, et M. REED, *Linear graphs and electrical networks*, Addison-Wesley, Reading, 1961.
- [8] H. EDELMAN, *Théorie et calcul des réseaux de transport d'énergie électrique*, Dunod, Paris, 1966.
- [9] M. LIGHTHILL, *Introduction to Fourier Analysis and generalised functions*, University Press, Cambridge, 1962.
- [10] E. JAHNKE, et F. EMDE, *Tables of functions*, Dover, New-York, 1945.
- [11] A. PAPOULIS, *The Fourier integral and its applications*, McGraw-Hill, New-York, 1962.
- [12] V. BELEVITCH, *Classical Network Theory*, Holden-Day, San Francisco, 1968.
- [13] M. FELDMANN, *Théorie des réseaux et systèmes linéaires*, Eyrolles, Paris, 1981.



## SOLUTIONS DES EXERCICES

### CHAPITRE 1

1.7.1 En série :

$$1001 \, \Omega, 1001 \, \text{H}, \frac{1000}{1001} \, \text{F}.$$

En parallèle :

$$\frac{1000}{1001} \, \Omega, \frac{1000}{1001} \, \text{H}, 1001 \, \text{F}.$$

1.7.2 En série :

$$R_t = \sum_{i=1}^n R_i, \quad L_t = \sum_{i=1}^n L_i, \quad C_t = \frac{\prod_{i=1}^n C_i}{\sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} C_j},$$

$$R_t = nR, \quad L_t = nL, \quad C_t = \frac{C}{n}.$$

En parallèle :

$$R_t = \frac{\prod_{i=1}^n R_i}{\sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} R_j}, \quad L_t = \frac{\prod_{i=1}^n L_i}{\sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} L_j}, \quad C_t = \sum_{i=1}^n C_i,$$

$$R_t = \frac{R}{n}, \quad L_t = \frac{L}{n}, \quad C_t = nC$$

1.7.3  $u_s = Ri$  et  $R = R'$

1.7.4

$$u_s(t) = Ri + L \frac{di}{dt} + u_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

Mise en parallèle d'une conductance  $G' = R$ , d'une inductance  $L' = C$ , d'une capacité  $C' = L$ , et d'une source de courant  $i_s(t) = u_s(t)$ .

1.7.5  $R' = n^2R, \quad L' = n^2L, \quad C' = \frac{C}{n^2}, \quad u' = nu, \quad i_s' = + \frac{is}{n}$

1.7.6  $L = r^2 C$ 

1.7.7 Voir figure 1.58.

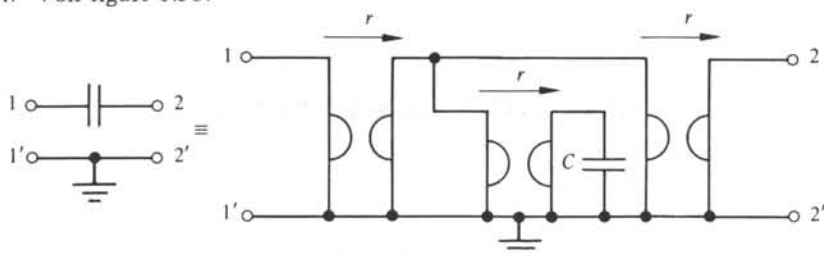


Fig. 1.58

1.7.8 Inductance :

$$p_L = -\frac{LI^2 \omega}{2} \sin 2\omega t, \quad w_L = \frac{LI^2}{4} (1 + \cos 2\omega t)$$

Capacité :

$$p_C = \frac{I^2}{2C\omega} \sin 2\omega t, \quad w_C = \frac{I^2}{4C\omega^2} (1 - \cos 2\omega t); \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

On remarque que  $p_C$  et  $p_L$  ont même valeur absolue et des signes opposés. La tension aux bornes de la source est nulle.

1.7.9

$$L = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{L_{11} + L_{22} - 2L_{12}}$$

1.7.10 Voir figure 1.59.

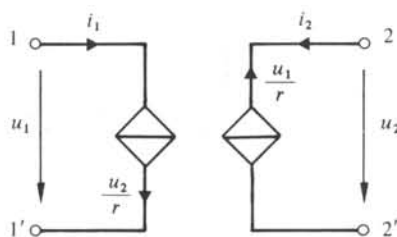


Fig. 1.59

1.7.11 Conditions d'équivalence :

$$L_a + L_c = L_{11}, \quad L_b + L_c = L_{22}, \quad L_c = L_{12}$$

$$L_{12} > L_{11} \Rightarrow L_a < 0$$

$$L_{12} > L_{22} \Rightarrow L_b < 0$$

Connexion en triangle des trois inductances.

1.7.12  $n = n_1 n_2$

1.7.13 Contraire aux contraintes de connexion du paragraphe 1.2.2.

$$\text{Rapport résultant } n = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}.$$

1.7.14 Résistance de valeur  $R' = (1 + \alpha) R$ ;

$$\alpha > -1 \Rightarrow R' > 0$$

$$\alpha < -1 \Rightarrow R' < 0.$$

1.7.15 Voir figure 1.60.

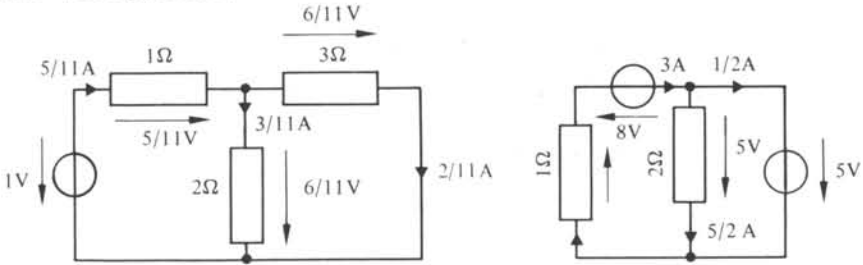


Fig. 1.60

1.7.16 Voir figure 1.61.

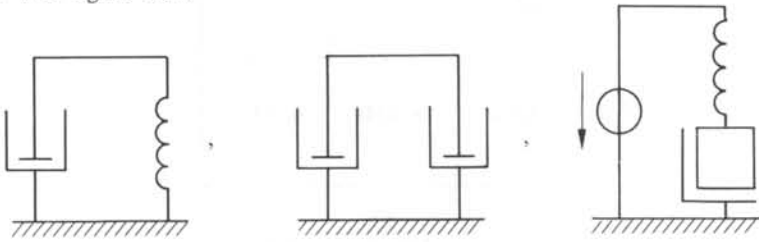


Fig. 1.61

1.7.17 Voir figure 1.62.

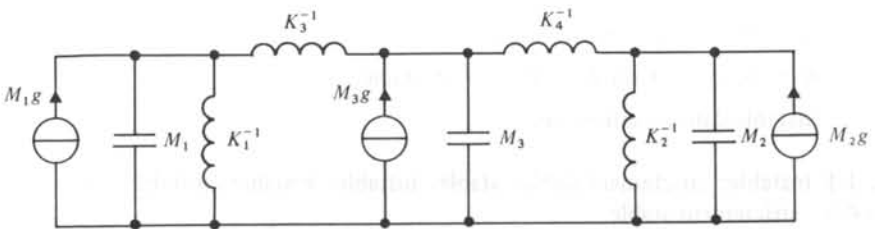


Fig. 1.62

1.7.18 Résistance; *thermocouple*

Turbine; *pompe*

Machine à vapeur; *frottement*.

1.7.19 oui.

## 1.7.20

$$R_1 = R_2;$$

$$P = \frac{V^2}{4R_1}, \frac{V}{2};$$

$$R_2 = 0 \text{ ou } R_2 = \infty$$

## CHAPITRE 2

2.4.1 Sinusoïde et cosinusoïde :  $H(j\omega)$  réel  $\forall \omega$ .

Sinus et cosinus hyperbolique :  $H(p)$  pair.

2.4.2  $f(x) = \epsilon(x+1) + \epsilon(x) - 2\epsilon(x-1)$ .

## 2.4.3

	$b$	$> 0$	$= 0$	$< 0$
$c$	$> 0$	strictement stable	stable	instable
$= 0$	stable	instable	instable	
$< 0$	instable	instable	instable	

$b > 0, c > 0$  strictement stable;

$b = 0, c > 0$  ou  $b > 0, c = 0$  stable;

instable dans les autres cas.

2.4.4 Instable; strictement stable; stable; instable; instable; instable; strictement stable; strictement stable.

## 2.4.5

$$x(t) = -1 + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t \quad t > 0;$$

$$x(t) = -1 + 2e^{-t} \quad t > 0;$$

$$x(t) = t - 1 + e^{-t} \quad t > 0;$$

$$x(t) = \frac{t^2}{2} \quad t > 0;$$



$$x(t) = -1 + \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^t; \quad t > 0;$$

$$x(t) = 1 - \frac{1}{4} t e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{4} t e^t - \frac{1}{2} e^t; \quad t > 0;$$

$$x(t) = \frac{1}{2} [1 - e^{-t} (\cos t + \sin t)]; \quad t > 0;$$

$$x(t) = \delta'''(t) - 2 \delta''(t) + 2 \delta'(t) - 4 e^{-t} (\cos t - \sin t); \quad t > 0.$$

2.4.6

$$x(t) = \frac{3}{5} \cos 2t - \frac{4}{5} \sin 2t;$$

$$x(t) = -\frac{1}{10} \cos 2t + \frac{4}{10} \sin 2t;$$

$$x(t) = \frac{32}{5} \cos 2t - \frac{64}{5} \sin 2t.$$

## CHAPITRE 3

3.6.1

$f = 0 \text{ Hz}$	$U_{\text{eff}} = 0$
100 Hz	1,25 mV
10 000 Hz	123 mV
35 588,1 Hz	0
100 000 Hz	719 mV

3.6.2 Cercle de rayon  $10^2$  dont le centre se trouve sur l'axe réel au point d'abscisse  $10^2$ .

3.6.3

$$u_c(t) = 10 + 223 \exp(-t/\tau) \cdot \sin(2\pi t/T - 0,73^\circ)$$

$$\tau = 5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$T = 198,7 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

3.6.4

$$u_1(t) = 113,45 \sin(2\pi t/T_0 - 17,8^\circ) + 34,7 \exp(-t/\tau)$$

$$T_0 = 20 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$\tau = 0,99 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_1(t - kT) \cdot \epsilon(t - kT)$$

$$T = 10 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

3.6.5 Si  $e(t) = 200 \sqrt{2} \cos \omega_0 t$  ( $\omega_0 = 2\pi \cdot 50$ ), le court-circuit se produit à l'instant  $t_1 = 9,007 \cdot 10^{-3} \text{ s}$  et pour  $t \geq t_1$ :

$$i(t) = 0,889 \cos(\omega_0 t - 80,95^\circ) - 0,136 \exp[-(t - t_1)/\tau]$$

$$(\tau = 20 \cdot 10^{-3} \text{ s}).$$

## 3.6.6

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_1(t-kT) \cdot \epsilon(t-kT)$$

$$u_1(t) = f_1(t) \cdot \epsilon(t) - f_1(t-T) \cdot \epsilon(t-T) - f_2(t-T) \cdot \epsilon(t-T)$$

$$f_1(t) = 100 [t - 3 \cdot 10^{-3} - 6,5 \cdot 10^{-5} \exp(-t/\tau_1) + 3,06 \cdot 10^{-3} \exp(-t/\tau_2)]$$

$$f_2(t) = 2 + 0,3416 \exp(-t/\tau_1) - 2,3416 \exp(-t/\tau_2)$$

$$T = 20 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$\tau_1 = 0,38 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$\tau_2 = 2,62 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

## 3.6.7

$$kT < t < kT + \tau$$

$$u(t) = 10 + [u(kT) - 10] \exp[-(t-kT)/\tau_1]$$

$$kT + \tau < t < (k+1)T$$

$$u(t) = u(kT + \tau) \cdot \exp[-(t-kT-\tau)/\tau_0]$$

$$\tau_0 = 400 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

$$\tau_1 = 200 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

$$u(0) = 0$$

$$u(T) = 0,4147$$

$$u(2T) = 0,441$$

$$u(3T) = 0,443$$

$$u(4T) = 0,443$$

## 3.6.8

$$H(p) = 10^6 (p+a) (p+b)^{-1} (p+c)^{-1}$$

$$a = 2\pi \cdot 1591$$

$$b = 2\pi \cdot 2803$$

$$c = 2\pi \cdot 189\,774$$

3.6.9  $C = 10 \text{ pF}$ 

## 3.6.10 Circuit de la figure 3.59 :

$$E_2/E = kLp/R \left[ \left( 1 + \frac{Lp}{R} + \frac{1}{CRp} \right)^2 - \frac{k^2 L^2 p^2}{R^2} \right]$$

où  $E_2 = L[e_2(t)]$ ,  $e_2(t)$  = tension aux bornes de  $R$ .

Le circuit de la figure 3.62 est dual du précédent à un facteur près.

## CHAPITRE 4

## 4.8.1 S'il ne contient aucune coupe.

4.8.2  $\det Y_n = \sum$  Produit des admittances des branches d'un arbre  $T_i$ ; la somme porte sur tous les arbres du graphe.

4.8.3 Appliquer la formule de Binet-Cauchy :  $\det(A \cdot B) = \sum_i A_i B_i$  où

$A$  : matrice d'ordre  $m \times n$

$B$  : matrice d'ordre  $n \times m$

$A_i$  : déterminant de la sous-matrice de  $A$  d'ordre  $m \times m$  formée par n'importe quelles  $m$  colonnes.

$B_i$  : déterminant de la sous-matrice de  $B$  d'ordre  $m \times m$  formée par les  $m$  lignes correspondantes.

Remarquer que le déterminant d'une sous-matrice de  $A$  correspondant à un arbre est égale à  $\pm 1$ .

4.8.4 Démontrer à partir de la formule  $Z_m = BZ_b B'$ .

4.8.5

$$Z = \frac{1}{2} (3 + \sqrt{5}) R.$$

4.8.6

$$\frac{U}{I} = R \cdot \frac{\left(p - \frac{1}{\sqrt{LC}}\right)}{\left(p + \frac{1}{\sqrt{LC}}\right)}$$

4.8.7

$$\frac{U}{E} = \frac{R(1 + L_{12} Cp^2)}{[(L_{11}L_{22} - L_{12}^2)Cp^3 + C(R_1L_{22} + R_2L_{11})p^2 + (R_1R_2C + L_{11} + L_{22} - 2L_{12})p + R_1 + R_2]}$$

4.8.8

$$\frac{U}{I} = 10^{10} (p + 10^4)^2 (p^3 + 13,4 \cdot 10^5 p^2 + 35,4 \cdot 10^9 p + 11,1 \cdot 10^{13})^{-1}.$$

4.8.9 Démontrer à partir de la formule suivante :

$$\Delta_m = \sum \text{Produit des impédances des chaînons par rapport à un arbre } T_i.$$

La somme porte sur tous les arbres du graphe.

Cette formule est obtenue dans une certaine manière de la dualité du résultat de l'exercice 4.8.2.

## CHAPITRE 5

5.6.1 Voir figure 5.49

5.6.2 Le dual de la matrice d'impédances  $Z$  est la matrice d'admittances  $Y$  ou vice-versa.

5.6.3 Tension équivalente :  $\alpha R_3 E / (R_1 + R_2) (p + a) (p + b)$

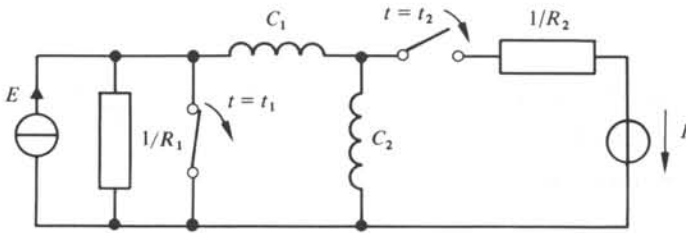


Fig. 5.49

Impédance équivalente :  $R_3(p+c)(p+b)^{-1}$

$$a = 1/(\alpha R_3 C)$$

$$b = 1/(R_1 + R_2) C$$

$$c = \frac{(R_1 + R_2 + R_3(1-\alpha))}{(R_1 + R_2) R_3 C}$$

5.6.4  $i = 17/80 \text{ A}$ .

5.6.5

- $(\tilde{Z}) = (Z) + \text{diag}(R_i)$ ;
- $(Y) = (Y) + \text{diag}(C_i p)$ , d'où  $\tilde{Z}$

5.6.6

$$\tilde{Y} = (R_1 R_2 + R_2 R_3(1-\alpha) + R_3 R_1)^{-1} \begin{bmatrix} R_2 + R_3 & -(1-\alpha) R_2 \\ -R_2 & R_1 + (1-\alpha) R_2 \end{bmatrix}$$

## CHAPITRE 6

6.4.1 Transformateur :  $A = n$ ,  $B = 0$ ,  $C = 0$ ,  $D = -\frac{1}{n}$  ;

Gyrateur :  $z_{11} = 0$ ,  $z_{12} = r$ ,  $z_{21} = -r$ ,  $z_{22} = 0$ ;

$$y_{11} = 0, \quad y_{12} = -\frac{1}{r}, \quad y_{21} = \frac{1}{r}, \quad y_{22} = 0;$$

$$A = 0, \quad B = -r, \quad C = -\frac{1}{r}, \quad D = 0.$$

6.4.2 Addition des matrices  $h$  : mise en série de l'entrée et en parallèle de la sortie. L'addition des matrices  $g$  entraîne la connexion inverse.

6.4.3

$$h_{11} = (h'_{11} + h''_{11} | h' |) / (1 + h''_{11} h'_{22}),$$

$$h_{12} = h'_{12} h''_{12} / (1 + h''_{11} h'_{22}),$$

$$h_{21} = h''_{21} h'_{21} / (1 + h''_{11} h'_{22}),$$

$$h_{22} = (h''_{22} + h'_{22} | h'' |) / (1 + h''_{11} h'_{22}).$$

6.4.4 Reconstituer la matrice d'admittances indéfinie  $Y_F$  à partir de la matrice d'admittance connue  $Y$ .

Supprimer les lignes et les colonnes adéquates de  $Y_F$  pour obtenir la matrice d'admittance cherchée.

6.4.5 La matrice indéfinie d'admittances n'est pas inversible.

$$6.4.6 \quad \xi = \frac{Z_{11}Z_r + |Z|}{Z_{22} + Z_r}, \quad \zeta = \frac{y_{11}Y_r + |Y|}{Y_{22} + Y_r}.$$

6.4.7 Démontrer à partir de la définition d'un quadripôle réciproque.

6.4.8 Utiliser les équivalences de Mason. (Voir fig. 6.46).

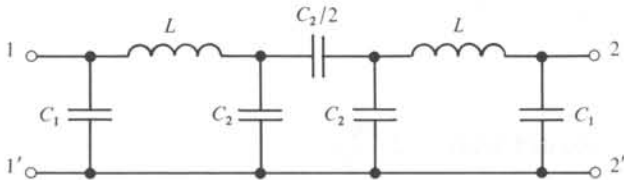


Fig. 6.46

6.4.9 Equivalence des équations caractérisant ces quadripôles.

6.4.10 Quadripôle en  $\pi$  de capacités :  $C_1 = 9000$  pF,  $C_2 = 1000$  pF,  $C_3 = 100$  pF.

6.4.11  $T$  ponté.

6.4.12 Les branches droites doivent être duales des branches croisées.

## CHAPITRE 7

7.5.1 Oui.

7.5.2

$$\epsilon_1(t) * \epsilon_2(t) = t,$$

$$p(t) * p(t) = \begin{cases} t & \text{pour } 0 \leq t \leq T. \\ -t + 2T & \text{pour } T \leq t \leq 2T \end{cases}$$

$$p(t) * \epsilon(t) = \begin{cases} t & \text{pour } 0 \leq t \leq T \\ T & \text{pour } T \leq t \end{cases}$$

7.5.3 Démontrer à partir de  $\delta(x) \cdot f(x) = \delta(x) \cdot f(0)$ ;

$$-\delta(t); \quad 0;$$

$$f(t) \cdot \delta^{(n)}(t) = f(0) \cdot \delta^{(n)}(t) - (-1)^1 C_n^{n-1} f'(0) \cdot \delta^{(n-1)}(t) - \dots - (-1)^j C_n^{n-j} f^{(j)}(0) \cdot \delta^{(n-j)}(t) - \dots - (-1)^n f^{(n)}(0) \cdot \delta(t).$$

$$7.5.4 \quad g''(t) = f(0) \cdot \delta' + f'(0) \cdot \delta + f''(t) \epsilon(t).$$

$$7.5.5 \quad \epsilon(t) - \epsilon(t-1).$$

$$7.5.6 \quad \epsilon(t) - \epsilon(-t).$$

7.5.7 Appliquer le théorème de la moyenne sur  $\Phi$  :

$$\Phi(t) - \Phi(0) = t \Phi'(E) \quad E \in [0, t];$$

$$\Phi'(E) \text{ borné} \Rightarrow \Phi(t) - \Phi(0) \leq tM.$$

7.5.8 La transformée de Fourier d'un produit de convolution est le produit des transformées de Fourier.

7.5.9

$$\text{Transformée de Fourier : } 2 \frac{\sin \omega T}{\omega}$$

$$\text{Spectre d'amplitude : } 2 \left| \frac{\sin \omega T}{\omega} \right|$$

$$\text{Spectre de phase : } \varphi = \begin{cases} 0 & \text{pour } nf_0 \leq f \leq \left(\frac{2n+f}{2}\right) f_0, \quad f_0 = \frac{1}{T} \\ \pi & \text{pour } \frac{2n-1}{2} f_0 \leq f \leq nf_0 \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \Omega t}{t}$$

7.5.10

$$\frac{1}{2} R(\omega - \omega_0) + R(\omega + \omega_0) \quad ;$$

$$R(\omega).$$

7.5.11

$$\frac{2}{\omega^2 T} (1 - \cos \omega T).$$

7.5.12

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \pi ;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^4} dt = \frac{2\pi}{3} .$$

7.5.13 Utiliser l'inégalité :

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt;$$

Hyperbole d'équation :  $\frac{1}{|\omega|} \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)| dt$ . (Démonstration à partir de l'intégration par parties de  $F(j\omega)$ .)

7.5.14  $R(\omega) = 1/\pi\omega$ .

7.5.15

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{1}{k}, \quad f(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kx;$$

fonction impaire ;

$$0; \quad \pi/2; \quad 0.$$

7.5.16

$$f_2(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x;$$

fonction paire.

fonction continue dont la dérivée est discontinue.

7.5.17 Prolongation impaire pour 7.5.15 et paire pour 7.5.16;

$$\bullet f_1(x - \pi) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin kx; \quad f_2(x - \pi) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$$

$$\bullet f_1(x) + f_2(x) = \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r_k (\cos(kx - \varphi_k)),$$

$$r_k^2 = \frac{1}{k^2} + \frac{2}{\pi^2 k^4} (1 - \cos k\pi), \quad \varphi_k = \text{Arctg} \frac{(-1)^k k\pi}{1 - \cos k\pi}$$

$$\bullet f_2'(x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

7.5.19 Utiliser la transformée de Fourier du produit de convolution

7.5.20

$$f(t) = \frac{\delta(t)}{2} + \frac{j}{2\pi t};$$

7.5.21 Ecrire la transformée de l'équation.

7.5.22 Formule d'Euler :  $(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})/2 = \cos \omega t$ .

## CHAPITRE 8

8.5.1

$$F(p) = \frac{2}{p} \sinh p\lambda; \text{ domaine de convergence } (0 = \infty).$$

8.5.3.

$$F(p) = 2\pi T \left( \frac{1 - e^{-pT}}{p^2 T^2 + 4\pi^2} \right).$$

8.5.4

$$L_{II}(f(t)) = \frac{1}{p^2} - \frac{e^{\lambda p}}{p^2} + \frac{\lambda e^{\lambda p}}{p},$$

$$L_I = L_{II} \text{ si } \lambda < 0,$$

$$L_I = 0 \text{ si } \lambda > 0.$$

8.5.5

$$F(p) = \frac{1 + e^{-pT}}{1 - e^{-pT}} \cdot \frac{\pi T}{T^2 p^2 + 4\pi^2}$$

8.5.6

$$f(t) = \frac{1}{2a^2} \left[ \frac{\sin at}{a} - t \cos at \right] \quad t > 0;$$

$$f(t) = \frac{t \sin at}{2a} \quad t > 0;$$

$$f(t) = -t \cos at \quad t > 0;$$

8.5.7

$$f(t) = \frac{e^{-\alpha t}}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)} + \frac{e^{-\beta t}}{(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)} + \frac{e^{-\gamma t}}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)} \quad t > 0;$$

Supposons  $\alpha < \beta < \gamma$  on a :

$$\sigma > -\alpha, \quad f(t) = \left( \frac{e^{-\alpha t}}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)} + \frac{e^{-\beta t}}{(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)} + \frac{e^{-\gamma t}}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)} \right) \epsilon(t);$$

$$-\gamma < -\beta < \sigma < -\alpha,$$

$$f(t) = \frac{e^{-\alpha t} \epsilon(-t)}{(\alpha - \beta)(\gamma - \alpha)} + \frac{e^{-\beta t} \epsilon(t)}{(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)} + \frac{e^{-\gamma t} \epsilon(t)}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)};$$

$$-\gamma < \sigma < -\beta < -\alpha,$$

$$f(t) = \frac{e^{-\alpha t} \epsilon(-t)}{(\alpha - \beta)(\gamma - \alpha)} + \frac{e^{-\beta t} \epsilon(-t)}{(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)} + \frac{e^{-\gamma t} \epsilon(t)}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)},$$

$$\sigma < -\gamma$$

$$f(t) = \left( \frac{e^{-\alpha t}}{(\alpha - \beta)(\gamma - \alpha)} + \frac{e^{-\beta t}}{(\beta - \alpha)(\gamma - \beta)} + \frac{e^{-\gamma t}}{(\gamma - \alpha)(\beta - \gamma)} \right) \epsilon(-t)$$



8.5.8

$$x(t) = e^{-3t}; \quad t > 0$$

$$x(t) = 3e^{-2t} - 2e^{-3t}; \quad t > 0$$

$$x(t) = \frac{1}{3} \sin 3t. \quad t > 0$$

8.5.9

$$x(t) = \frac{1}{5} te^{-2t} + \frac{4}{25} e^{-2t} - \frac{1}{5} \cos(t + 36^\circ 87'),$$

$$x(t) = -\frac{1}{4} e^{-3t} + \frac{1}{2} te^{-t} - \frac{3}{4} e^{-t} + e^{-2t}$$

8.5.10

$$x(t) = \frac{1}{13} [e^{-2t} + \cos(3t + 22^\circ 6)']$$



## INDEX ANALYTIQUE

Les références sont celles des pages

- Accès, (porte, paire de bornes), 2
- Actif, 17
- Adaptation, 229
- Admittance, 48
  - de la branche, 135
  - d'entrée en court-circuit, 189, 202
  - de sortie en court-circuit, 202
  - de transfert en court-circuit, 202
  - de transfert en court-circuit de l'accès  $l$  vers l'accès  $k$ , 189
- Amplitude, 267
- Arbre, 109
  - complet, 109
  - partiels, 109
- Argument, 77
- Autonome (permanente), 3
- Autotransformateur idéal, 9
  
- Bande passante, 98
  - relative, 99
- Bipôle (dipôle), 1
  - en échelle, 69
- Biporte, 2
- Bornes, 1
- Branche (arête), 11
  - pendantes, 109
- Bromwich (intégrale de ...), 277
  
- Capacité, 7
- Carson, 51
- Causale, 244
- Chaînon, 109
- Charge, 5
  - résistive, 214
- Circuit
  - résonant, 95
  - bouchon, 101
  - à constantes localisées, 24
  - ouvert, 4
- Classe, 235, 237
  
- Co-arbre, 109
- Coefficients
  - complexes, 267
  - de raideur, 33
  - de réflexion, 230
  - de transfert en courant, 48
  - de transmission, 231
- Conductance, 3, 67
  - de gyration, 8
- Connexe, 11
- Connexion, 1, 10
- Constante de temps, 70
- Coupe (faisceau), 11
  - nodale, 11, 111
- Courant, 1
  - pénétrant, 1
  - sortant, 1
- Court-circuit, 4
  
- Dash-pot, 34
- Décade, 81
- Décibel, 79
- Degré d'un système, 61
- Dérivée des sources, 156
- Désaccord, 97
- Dirac (fonction de ...), 239
- Dissipatif, 18
- Distribution, 236
  - delta, 239
  - nulle, 239
  - régulière, 236
- Duaux, 15
  
- Echelon unité, 50
- Egalité, 239
- Elastance, 7
- Élément, 1
- Energie absorbée, 16
  - électrostatique, 18

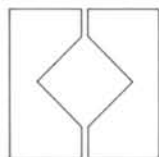
- emmagasinée, 18
- magnétique, 18
- Ensemble fondamental
  - de coupes par rapport à  $T$
  - de mailles par rapport à l'arbre  $T$
- Entrée, 199
- Equation caractéristique, 295
- Équilibré, 215
- Etat d'un réseau, 146
- Extrémités, 11
  
- Facteur de qualité, 97
- Fenêtre, 116
- Flux, 5
  - de vitesse acoustique, 39
- Fonctions
  - de croissance lente, 236
  - à décroissance rapide, 235
  - isomorphe, 47
  - de réponse isomorphe, 48
- Fourier (coefficients de ...), 267
  - (série de ...), 264
  - (transformée (intégrale) de ...), 247
- Fréquence angulaire, 250
  - $f$ , 250
  - fondamentale, 262
  
- Gain logarithmique, 77
- Graphe, 11
- Gyrateur idéal, 8
  
- Harmonique d'ordre  $k$ , 267
- Hilbert (transformée de ...), 259
- Hybride, 207
- Hystérèse, 25
  
- Image, 273
- Immittance, 48
- Impédance, 48
  - de la branche, 125
  - de couplage, 125, 129
  - d'entrée à circuit ouvert, 187, 200
  - propre, 129
  - de sortie à circuit ouvert, 200
  - de transfert à circuit ouvert, 200
  - de transfert à circuit ouvert de l'accès
    - $l$  vers l'accès  $k$ , 186
- Impulsion unité, 50, 239
- Inductance, 5
  - mutuelle, 26
  
- Interrupteurs, 93
- Invariant dans le temps, 47
  
- Joule (effet ...), 25
  
- Kirchhoff
  - (circuits) (réseaux de ...), 1
  
- Laplace (transformée bilatérale de ...), 273
  - (transformée unilatérale de ...), 276
- Lieu complexe, 79
- Limite, 237
- Linéaire, 3, 47
  
- Maille (circuit ou cycle), 11
- Masse, 33, 200
- Matrice d'admittances, 185
  - des admittances des branches, 135
  - d'admittances flottante ou indéfinie, 190
  - des admittances nodales, 137
  - de chaîne, 210
  - de coupes, 116
  - flottante ou indéfinie, 139, 190
  - d'immittances, 185
  - d'impédances, 185
  - des impédances de branches, 126
  - des impédances de mailles, 128
  - d'incidence, 111
  - d'incidence réduite, 113
  - de mailles, 113
  - de répartition, 226
  - de transfert, 227
- Mise en cascade, 210
- Modulation, 267
- Multipôle, 1, 184
- Multiporte, 2
  
- Néper, 79
- Noeuds (sommets), 11
  - de référence, 113
- Non autonome, 3
  - dissipatifs, 18
  - énergétique, 18
  - linéaire, 3
- Norateur, 20
- Norton (bipôle équivalent de ...), 182
- Nullateur, 20
  
- Octave, 81
- Ohm (loi d' ...), 25

- Onde incidente, 226
  - réfléchie, 226
- Ordre de complexité, 147
- Original, 273
- Oscillatoire amortie, 88
  
- Parallèle, 202
- Parcours (chemin), 11
- Parties connexes, 11
- Passif, 17
- Période fondamentale, 262
- Périodique, 262
- Permanente, 6
- Phase, 77, 267
- Planaire, 115
- Potentiel, 1
- Pression acoustique, 39
- Produit de convolution, 243
- Puissance instantanée pénétrant
  - dans un accès, 16
- Pulsation, 250
  - fondamentale, 262
  - propres, 52
  - de résonance, 96
  
- Quadripôle, 1
- Quiescent, 46
  
- Rapport de transformation, 8
- Réactance, 67
- Réactifs, 18
- Réponse, 45
  - aperiodique, 88
  - aperiodique critique, 88
  - forcée, 46
  - impulsionnelle, 50
  - indicielle, 50
  - libre, 47
- Réseau ouvert, 184
  - réciproque, 171
- Résistance, 3, 66
  - acoustique, 40
  - critique, 87
  - de frottement, 34
  - de gyration, 8
  - négative, 3
- Ressort, 33
  - acoustique, 40
  
- Saturation, 25
- Sections, 69
  
- Série, 202
- Série parallèle, 68
- Signal (excitation, sollicitation), 45
- Sortie, 199
- Source dépendante, 5
  - de courant, 4
  - de courant totales de branches, 136
  - fictives, 57
  - de tension, 4
  - de tension de mailles, 128
  - de tension totales de branches, 126
- Sous-graphe, 11
- Spectre d'amplitude, 261
  - de phase, 261
  - de raies, 261
- Superposition, 51
- Surface caractéristique, 39
- Susceptance, 67
- Symétrique, 215, 216
  - $\pi$ , 221
  - $T$ , 221
- Système, 46
  - continu, 46
- Stable, 53
- Strictement stable, 53
  
- Temps, 1
- Tension, 1
  - (en ...), 48
- Terme de régime, 58
  - transitoire, 58
- Terminaisons, 214
- Terminé, 214, 215
- Terre, 1
- Thévenin (bipôle équivalent de ...), 180
- Transducteur, 37
- Transformateur idéal, 8
- Transformation étoile-polygone, 194
  - étoile-triangle, 195
- Transmittance, 48
- Transparent, 231
- Tripôle, 1
  
- Valeur maximale de l'énergie
  - emmagasinée, 99
- Variables d'état, 146
- Vecteur des courants injectés aux
  - noeuds, 137
  - des excitations, 155
  - des variables d'état, 155



Le Traité d'Electricité est l'œuvre collective  
des membres du Département d'Electricité de l'EPFL,  
assistés par quelques collaborateurs externes.  
A ce volume ont collaboré plus particulièrement :

- Pierre Amstutz* : critique du manuscrit  
*René Boite* : rédaction de la section 1.5 et des chapitres 3, 4 et 5  
*Charles-Henri Carlin* : correction des épreuves  
*Jean-Daniel Chatelain* : coordination de la production  
*Dao Manh Cuong* : corrigé des exercices  
*Jean-Dominique Decotignie* : composition des formules  
*Albert Denis* : production  
*Claire-Lise Deppierraz* : production  
*Roger Dessoulavy* : critique du manuscrit  
*Walter Dübler* : photographie  
*Daniel Dubois* : correction des épreuves  
*Carla Graziani* : critique du manuscrit  
*Ceri Harsa* : composition des formules  
*Martin Hasler* : critique du manuscrit  
*Roland Jaques* : production  
*Allen Kilner* : mise en page et montage  
*Jean-Pierre Moinat* : critique du manuscrit  
*Hubert Monbaron* : photographie  
*Jean-Jacques Morf* : critique du manuscrit  
*Jacques Neiryneck* : rédaction des sections 1.1 à 1.4  
et des chapitres 2, 6, 7 et 8  
*Rogelio Palomera-Garzia* : correction des épreuves  
*Mario Rossi* : rédaction de la section 1.6  
*Ruzena Strelba* : dessins  
*Jacques Talan* : composition des formules  
*Edouard Vandierendounck* : composition des formules  
*Rose Vez* : composition du texte  
*Claude Vinckenbosch* : correction des épreuves  
*Horacio Yopez* : composition des formules







Les chapitres 7 et 8 sont des annexes mathématiques où sont exposés brièvement les résultats les plus importants de la théorie des distributions ainsi que des transformées de Fourier et de Laplace. Le lecteur au courant de ces méthodes peut se dispenser de leur lecture : sinon ces annexes doivent être assimilées avant d'aborder le chapitre 2.

Les chapitres 1 à 6 constituent une séquence qu'il faut lire normalement dans l'ordre.



René Boite, né à Grandglise (Belgique) en 1928. Ingénieur civil électricien et mécanicien de la Faculté polytechnique de Mons (1961). Chef de travaux d'électrotechnique à cette même faculté en 1953; chargé de cours en 1958 et professeur ordinaire de théorie des circuits et systèmes logiques en 1963. Il a effectué un séjour de recherches au M.I.T. en 1956 dans le laboratoire du professeur von Hippel. Ses activités de recherches actuelles s'exercent en synthèse des filtres numériques et des filtres (RC) actifs.



Jacques Neiryck est né à Bruxelles en 1931. Il a fait ses études à l'Université de Louvain où il a reçu les diplômes d'ingénieur civil électricien (1954) et de docteur en sciences appliquées (1958). Il a enseigné à l'Université de Louvain et à l'Université Lovanium (Kinshasa, Zaïre). Il a travaillé, de 1963 à 1972, dans les laboratoires de recherche de la S.A. Philips. Depuis 1972, il est professeur à l'École polytechnique fédérale de Lausanne où il dirige la chaire de circuits et systèmes et la section des ingénieurs en systèmes de communication. Il est auteur ou co-auteur de dix livres et de plus de cent articles.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

# Traité d'Électricité

I INTRODUCTION À L'ÉLECTROTECHNIQUE

II MATÉRIAUX DE L'ÉLECTROTECHNIQUE

III ÉLECTROMAGNÉTISME

IV THÉORIE DES RÉSEAUX DE KIRCHHOFF

V ANALYSE ET SYNTHÈSE DES SYSTÈMES LOGIQUES

VI THÉORIE ET TRAITEMENT DES SIGNAUX

VII DISPOSITIFS À SEMICONDUCTEUR

VIII ÉLECTRONIQUE

IX ÉLECTROMÉCANIQUE

X MACHINES ÉLECTRIQUES

XI MACHINES SÉQUENTIELLES

XII ÉNERGIE ÉLECTRIQUE

XIII HYPERFRÉQUENCES

XIV CALCULATRICES

XV ÉLECTRONIQUE DE PUISSANCE

XVI ÉLECTRONIQUE DE RÉGLAGE ET DE COMMANDE

XVII SYSTÈMES DE MESURE

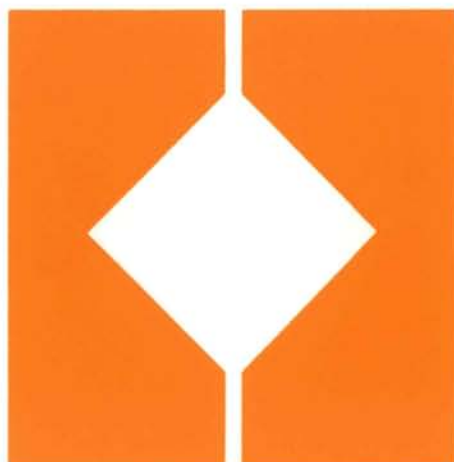
XVIII SYSTÈMES DE TÉLÉCOMMUNICATIONS

XIX FILTRES ÉLECTRIQUES

XX TRAITEMENT NUMÉRIQUE DES SIGNAUX

XXI ÉLECTROACOUSTIQUE

XXII HAUTE TENSION



ISBN 2-88074-322-2



9 782880 743222

PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES